

การจำลองแบบการขึ้นรูปของน้ำแข็งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



นางสาว รจนา ประไพเทพ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545


ISBN 974-17-1043-7

ลิขสิทธิ์ของจฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

120438499

2 1 พ.ศ. 2546

SIMULATION OF ICE FORMATION BY FINITE VOLUME METHOD



MISS ROTCHANA PRAPAINOP

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University


Academic Year 2002

ISBN 974-17-1043-7

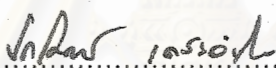
หัวข้อวิทยานิพนธ์  
โดย  
สาขาวิชา  
อาจารย์ที่ปรึกษา


การจำลองแบบการขึ้นรูปของน้ำแข็งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม  
นางสาว รจนา ประไพพงษ์  
วิศวกรรมเครื่องกล  
อาจารย์ ดร. กุณขินี มณีรัตน์


คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง  
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


  
..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

  
..... ประธานกรรมการ  
(ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(อาจารย์ ดร. กุณขินี มณีรัตน์)

  
..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร. มานิจ ทองประเสริฐ)

  
..... กรรมการ  
(อาจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

รจนา ประไพเทพ: การจำลองแบบการขึ้นรูปของน้ำแข็งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม. (SIMULATION OF ICE FORMATION BY FINITE VOLUME METHOD),

อ.ที่ปรึกษา: อาจารย์ ดร. กุณชิตี มณีรัตน์,

106 หน้า. ISBN 974-17-1043-7.

วิทยานิพนธ์นี้เสนอการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของการเปลี่ยนสถานะจากน้ำเป็นน้ำแข็ง โดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยใช้การพิจารณาจุดต่อแบบอยู่กับที่และคำนวณปริมาณความร้อนแฝงจากค่าความร้อนสัมผัสสมมุติ องค์ประกอบหลักของวิทยานิพนธ์นี้แบ่งเป็นสามส่วน โดยส่วนแรกกล่าวถึงความเป็นมา ความสำคัญของหัวข้อวิจัย การรวบรวมและสรุปเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะของสสาร

ส่วนที่สองอธิบายตัวแบบทางคณิตศาสตร์และการหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลขซึ่งตัวแบบทางคณิตศาสตร์ได้มาจากการประกอบกันของสมการครอบคลุมซึ่งคือสมการการอนุรักษ์พลังงานความร้อน และสมการการนำความร้อน สำหรับการ discretisation เพื่อให้ได้สมการพีชคณิตได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มที่พิจารณาจุดต่อแบบอยู่กับที่ โดยแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นปริมาตรย่อยๆ และให้จุดต่ออยู่ตรงกลางปริมาตร สมมุติตัวแปรให้มีการกระจายตามระยะทางเชิงเส้นตรง และประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วยระบบ two-time level scheme 3 แบบ ได้แก่ explicit, Crank-Nicolson และ fully implicit นอกจากนี้ยังได้เสนอการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ 3 รูปแบบ คือ (1) เท่ากับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง (2) เท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว และ (3) เท่ากับค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว

ส่วนสุดท้ายเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ พบว่าผลเฉลยที่ได้จากการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทุกวิธีมีค่าใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ และในการพิจารณารูปแบบการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะได้ผลว่า การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะด้วยสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง จะได้ผลเฉลยจากการจำลองแบบที่มีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำมากที่สุด ส่วนการตรวจสอบปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติในกรณีที่มี thermal diffusivity มีค่าเท่ากันทั้งสองสถานะเนื่องจากข้อจำกัดของผลเฉลยแม่นยำ ได้ผลเฉลยโดยประมาณมีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำเป็นอย่างดี และเนื่องจากการแบ่งรูปร่างและขนาดช่วงเวลาให้คำตอบที่ไม่ขึ้นกับขนาดปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาของการประมาณตัวแปรตามเวลาทุกวิธีมีขนาดใกล้เคียงกันจึงพบว่าวิธี explicit มีการประมวลผลที่มีประสิทธิภาพสูงสุด

ภาควิชา ..... วิศวกรรมเครื่องกล ..... ลายมือชื่อนิสิต ..... ปรไพเทพ

สาขาวิชา ..... วิศวกรรมเครื่องกล ..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ..... กุณชิตี มณีรัตน์

ปีการศึกษา ..... 2545 .....

## 437 04587 21: MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: ICE FORMATION, PHASE CHANGE, FINITE VOLUME, FIXED GRID, LATENT HEAT

ROTCIANA PRAPAINOP: SIMULATION OF ICE FORMATION BY FINITE VOLUME METHOD.

THESIS ADVISOR: KUNTINEE MANEERATANA, Ph.D.,

106 pp. ISBN 974-17-1043-7.

This thesis presents the simulation of ice formation by the finite volume method with the fixed grid and fictitious latent heat techniques. The contents of the thesis are divided into three main parts. The first consists of the problem background, motivation and a review of related studies.

The second part describes the mathematical model and its discretisation. The conservation of thermal energy and the Fourier's law are assembled to form the mathematical model. In the discretisation, the fixed grid finite volume technique with uniform cell-centred grid arrangement is employed. The piecewise-linear profile of variables in space is used. Two-time level time differencing schemes, i.e. explicit, Crank-Nicolson, and fully implicit are considered. In addition, the interface conductivity are approximated as solidus conductivity, arithmetic and harmonic means of solidus and liquidus conductivities.

The last section of the thesis concerns with the validation of the proposed procedures. For one-dimensional phase change modeling, numerical results of all time-stepping schemes are found to be in excellent agreements with the analytical predictions if the grid and time step independency is established. The approximations of the interface conductivity are also compared. It is found that results from the model with solidus interface conductivity exhibit the best agreements with the analytical solutions. For the modeling of two-dimensional phase change with the same thermal diffusivity in both phases, grid and time step dependent results are found to be in excellent agreements with the analytical predictions. The sizes of grid and time interval that achieve grid and time step dependent results are not starkly different. Hence, the explicit scheme is the most efficient method as it requires much less computational time.

Department..... Mechanical Engineering..... Student's signature..... *Rotchana Prapainop*  
 Field of study..... Mechanical Engineering..... Advisor's signature..... *Kuntinee Maneeratana*  
 Academic year ..2002.....

## กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. กุณตินี มณีรัตน์ ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ช่วยให้คำแนะนำ และ คำปรึกษาอย่างใกล้ชิด จนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. มานิจ ทองประเสริฐ ที่ช่วยจุดประกายหัวข้อวิทยานิพนธ์นี้ขึ้นมา ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ ที่สอนวิชา Numerical Method for Engineering และเน้นให้เห็นความสำคัญของการประยุกต์ใช้วิชาดังกล่าว นอกจากนี้ยังเอื้อเพื่อห้องปฏิบัติการ CMRL ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ ที่ช่วยปูพื้นฐานระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ในวิชา Advanced Computational Fluid Dynamics ขอขอบพระคุณอาจารย์ จักรกฤษ จันทวรรณ ที่ช่วยให้คำปรึกษา ด้านฮาร์ดแวร์ ขอขอบคุณ คุณนิพนธ์ วรรณโสภาคย์ คุณยศกร ประทุมวัลย์ และ เพื่อนๆ ที่ห้องปฏิบัติการCMRLที่ช่วยให้คำแนะนำ ขอขอบคุณ คุณแสนสุข เวชชการัตน์ ที่ช่วยส่งเอกสารเกี่ยวกับ ผลเฉลยแม่นยำตรงจากสหรัฐอเมริกามาให้ ขอขอบคุณ คุณจินตนา และ พ.ท.อภิชาติ อาจสันเทียะ ที่เอื้อเพื่อสถานที่ในการทำงานวิจัย ขอขอบคุณ คุณจิระวัฒน์ ชาริรัตน์ พี่ๆ น้องๆ รวมถึงเพื่อนๆ ทุกคนที่ช่วยเป็นกำลังใจเสมอมา และขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ตลอดจนอาจารย์ทุกท่านที่ช่วย ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้จนมาถึงทุกวันนี้

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย.....	v
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	v
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 รูปแบบตัวอย่างของปัญหา.....	2
1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
1.4 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4.1 สมมติฐาน.....	3
1.4.2 ขอบเขตของการวิจัย.....	4
1.5 ประโยชน์ที่จะได้รับ.....	5
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 ลักษณะการเปลี่ยนสถานะ.....	6
2.1.1 การแบ่งสถานะกันชัดเจน (distinct).....	6
2.1.2 อโลหะ (alloy).....	6
2.1.3 การเปลี่ยนสถานะอย่างต่อเนื่อง (continuous).....	6
2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
2.2.1 วิธีการอ้างอิงจุดต่อ.....	7
2.2.1.1 วิธีกริดเคลื่อนที่ (front tracking).....	7
2.2.1.2 วิธีกริดอยู่กับที่ (fixed grid).....	8
2.2.2 ตัวแปรหลักในการพิจารณาค่าความร้อนแฝง.....	8
2.2.2.1 กรณีให้อุณหภูมิเป็นตัวไม่ทราบค่า.....	9
2.2.2.2 กรณีให้เอนทาลปีเป็นตัวไม่ทราบค่า.....	9

## สารบัญ (ต่อ)

2.2.2.2.1 วิธี basic enthalpy .....	9
2.2.2.2.2 วิธี apparent heat capacity .....	11
2.2.2.2.3 วิธี latent heat source .....	13
2.2.2.2.4 รูปทั่วไปของการใช้เอนทาลปีเป็นตัวไม่ทราบค่า .....	15
2.3 บทสรุป .....	16
บทที่ 3 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ สมการพีชคณิต และขั้นตอนการคำนวณ .....	18
3.1 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ .....	18
3.1.1 สมการครอบคลุม .....	18
3.1.2 สมการเฉพาะเจาะจง .....	19
3.1.3 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ .....	20
3.2 การแบ่งขอบเขตของปัญหา .....	20
3.2.1 การแบ่งรูปร่าง .....	20
3.2.2 การแบ่งเวลา .....	21
3.3 การสร้างสมการพีชคณิต .....	22
3.3.1 สมการพีชคณิตในรูปทั่วไป .....	22
3.3.2 การประมาณสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ .....	25
3.3.2.1 แบบ solidus conductivity .....	26
3.3.2.2 แบบ arithmetic mean .....	26
3.3.2.3 แบบ harmonic mean .....	26
3.3.3 การประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา .....	27
3.3.3.1 วิธี explicit .....	27
3.3.3.2 วิธี Crank-Nicolson .....	27
3.3.3.3 วิธี fully implicit .....	28
3.4 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต .....	28
3.4.1 เงื่อนไขเริ่มต้น .....	28
3.4.2 เงื่อนไขขอบเขต .....	29
3.4.2.1 เงื่อนไขขอบเขตมีอุณหภูมิคงที่ .....	29



## สารบัญ (ต่อ)

3.4.2.2	เงื่อนไขขอบเขตจากความสมมาตรของปัญหา .....	29
3.5	หลักการคิดวิธี fictitious latent heat .....	30
3.5.1	ขั้นตอนการคำนวณ .....	30
3.6	ขั้นตอนการหาคำตอบ .....	32
บทที่ 4	การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม กรณี 1 มิติ .....	34
4.1	การนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว .....	34
4.1.1	การกระจายของอุณหภูมิ .....	35
4.1.2	การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด .....	37
4.1.3	การพิจารณาปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ .....	40
4.1.4	การสรุปผล .....	43
4.2	การเปลี่ยนสถานะ .....	43
4.2.1	การกระจายของอุณหภูมิ .....	45
4.2.2	การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด .....	50
4.2.3	การพิจารณาปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ .....	57
4.2.4	การสรุปผล .....	67
บทที่ 5	การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะ กรณี 2 มิติ .....	68
5.1	การเปลี่ยนสถานะในสองมิติ .....	68
5.1.1	การกระจายของอุณหภูมิ .....	70
5.1.2	การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด .....	72
5.1.3	การพิจารณาปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ .....	75
5.1.4	การสรุปผล .....	81
บทที่ 6	กรณีศึกษา .....	82
6.1	ปัญหาตัวอย่าง .....	82
6.1.1	เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น แบบที่ 1: $T_i = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $T_c = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .....	84
6.1.2	เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น แบบที่ 2: $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$ .....	87

## สารบัญ (ต่อ)

6.2 บทสรุป .....	90
บทที่ 7 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ .....	91
7.1 สรุปผลการวิจัย .....	91
7.2 ข้อเสนอแนะ .....	92
รายการอ้างอิง .....	93
ภาคผนวก .....	97
ภาคผนวก ก ผลเฉลยแม่นยำ .....	98
ก.1 ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว ใน 1 มิติ .....	98
ก.2 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ ใน 1 มิติ .....	99
ก.3 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ ใน 2 มิติ .....	101
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....	106

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตารางที่ 2.1 รูปแบบทั่วไปของสมการการขึ้นรูปของน้ำแข็ง.....	16
ตารางที่ 2.2 การสรุปงานวิจัยที่ผ่านมาสำหรับการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ .....	17
ตารางที่ 3.1 การสรุปค่าสัมประสิทธิ์ของจุดต่อข้างเคียงสำหรับปัญหา 1 และ 2 มิติ.....	25
ตารางที่ 4.1 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุด และเวลาในการประมวลผล เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ $t = 3600$ s เมื่อใช้ time-stepping scheme จำนวน cells และ $\Delta t$ ต่างๆ กัน .....	42
ตารางที่ 4.2 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุด และเวลาในการประมวลผล เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ $t = 5$ h สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme, interface conductivity จำนวน cells และ $\Delta t$ ต่างๆ กัน.....	62
ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุด และเวลาในการประมวลผล เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ $t = 5$ h สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme จำนวน cells และ $\Delta t$ ต่างๆ กัน.....	78
ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำที่ $t = 5$ h สำหรับปัญหาการ เปลี่ยนสถานะในสองมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme แบบ implicit โดยการจำลองแบบด้วยจำนวน cells และ $\Delta t$ ต่างๆ .....	78
ตารางที่ ก.1 ค่า abscissa และ แฟคเตอร์น้ำหนัก (weighting factor) สำหรับการ อินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian integration).....	105
ตารางที่ ก.2 สมบัติของสารและตัวแปรที่ใช้ในการวิเคราะห์ .....	105

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 1.1 รูปด้านบน (top view) ของเขตของของน้ำแข็งและบ่อน้ำเกลือ.....	3
รูปที่ 1.2 รูปด้านบน (top view) ของปัญหาการแข็งตัวของน้ำในช่องน้ำแข็ง.....	4
รูปที่ 2.1 ช่วงการแข็งตัวกรณี isothermal phase change $\Delta T_f = 0$ .....	11
รูปที่ 2.2 ช่วงการแข็งตัวกรณี finite freezing interval $\Delta T_f \neq 0$ .....	11
รูปที่ 3.1 รูปตัวอย่างปริมาตรควบคุม.....	18
รูปที่ 3.2 การแบ่งรูปร่างแบบ cell-centred grid arrangement.....	21
รูปที่ 3.3 ตัวอย่างปริมาตรควบคุม.....	22
รูปที่ 3.4 โพรไฟล์เชิงเส้นตรง (piecewise-linear profile).....	23
รูปที่ 3.5 การเปลี่ยนแปลงของค่า $T$ ที่จุดต่อใดๆ กับเวลา.....	24
รูปที่ 3.6 ตัวอย่างภาพสะท้อนของพื้นที่ที่มีความสมมาตร สำหรับปริมาตรควบคุมสองมิติ.....	29
รูปที่ 3.7 ผังงานแบบง่าย (simple flow chart).....	33
รูปที่ 4.1 ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราวหนึ่งมิติ:(a) ครึ่งหนึ่งของรูปร่างปัญหาซึ่งมีความสมมาตร เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต และ (b) ตัวอย่างการแบ่งกริด.....	35
รูปที่ 4.2 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells $\Delta t = 10$ s และใช้วิธี explicit.....	36
รูปที่ 4.3 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells $\Delta t = 10$ s และใช้วิธี Crank-Nicolson.....	36
รูปที่ 4.4 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells $\Delta t = 10$ s และใช้วิธี fully implicit.....	37
รูปที่ 4.5 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาด เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells $\Delta t = 10$ s และใช้วิธี explicit.....	38
รูปที่ 4.6 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาด เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells $\Delta t = 10$ s และใช้วิธี Crank-Nicolson.....	38

## สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาด เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells $\Delta t = 10$ s และใช้วิธี fully implicit .....	39
รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้ time-stepping scheme ต่างๆ โดยการจำลองแบบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 10$ s .....	39
รูปที่ 4.9 การเปรียบเทียบการกระจายของอนุภูมิภาค ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ ที่ $t = 3600$ s เมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ $\Delta t = 10$ s .....	40
รูปที่ 4.10 การเปรียบเทียบการกระจายของอนุภูมิภาค ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 3600$ s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ $\Delta t = 10$ s .....	41
รูปที่ 4.11 การเปรียบเทียบการกระจายของอนุภูมิภาค ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 3600$ s เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ $\Delta t = 10$ s .....	41
รูปที่ 4.12 การแสดงตัวอย่างการสั่น (oscillation) ของการกระจายของอนุภูมิภาคของผลเฉลยโดยประมาณวิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 900$ s .....	43
รูปที่ 4.13 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ: (a) ครึ่งหนึ่งของรูปร่างของปัญหาซึ่งมีความสมมาตร เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต และ (b) ตัวอย่างการแบ่งกริด .....	44
รูปที่ 4.14 การเปรียบเทียบการกระจายของอนุภูมิภาค ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit และให้ $k_{INT} = k_s$ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 10$ s .....	45
รูปที่ 4.15 การเปรียบเทียบการกระจายของอนุภูมิภาค ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit และให้ $k_{INT} = k_s$ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 10$ s .....	46

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_h$  โดยจำลองแบบด้วย  
 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s ..... 46

รูปที่ 4.17 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี  
 Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_s$  ..... 47

รูปที่ 4.18 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี  
 Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_a$  ..... 47

รูปที่ 4.19 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี  
 Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_h$  ..... 48

รูปที่ 4.20 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี  
 fully implicit และให้  $k_{INT} = k_s$  ..... 48

รูปที่ 4.21 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี  
 fully implicit และให้  $k_{INT} = k_a$  ..... 49

รูปที่ 4.22 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี  
 fully implicit และให้  $k_{INT} = k_h$  ..... 49

รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400  
 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  ..... 50

รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400  
 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_a$  ..... 51

รูปที่ 4.25 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400  
 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_h$  ..... 51

## สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ 4.26 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้ $k_{INT} = k_s$ .....	52
รูปที่ 4.27 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้ $k_{INT} = k_a$ .....	52
รูปที่ 4.28 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้ $k_{INT} = k_h$ .....	53
รูปที่ 4.29 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี fully implicit และให้ $k_{INT} = k_s$ .....	53
รูปที่ 4.30 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี fully implicit และให้ $k_{INT} = k_a$ .....	54
รูปที่ 4.31 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี fully implicit และให้ $k_{INT} = k_h$ .....	54
รูปที่ 4.32 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้วิธี explicit และ $k_{INT}$ แบบต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 10$ s.....	55
รูปที่ 4.33 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ $k_{INT}$ แบบต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 10$ s.....	55
รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้วิธี fully implicit และ $k_{INT}$ แบบต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ $\Delta t = 10$ s.....	56
รูปที่ 4.35 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี explicit และ $k_{INT} = k_s$ .....	57
รูปที่ 4.36 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ $\Delta t = 10$ s เมื่อใช้วิธี explicit และ $k_{INT} = k_a$ .....	58

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ 4.37 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และ  $k_{INT} = k_h$ ..... 58

รูปที่ 4.38 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT} = k_s$ ..... 59

รูปที่ 4.39 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT} = k_a$ ..... 59

รูปที่ 4.40 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT} = k_h$ ..... 60

รูปที่ 4.41 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT} = k_s$ ..... 60

รูปที่ 4.42 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT} = k_a$ ..... 61

รูปที่ 4.43 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผล  
 เฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน  
 และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT} = k_h$ ..... 61

รูปที่ 4.44 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่  $t = 5$  h ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรง  
 กับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_s$  โดย  
 แบบจำลองประกอบด้วย 400 cells และ  $\Delta t$  ต่างกัน: (a)  $\Delta t = 1000$  s และ  
 (b)  $\Delta t = 100$  s..... 65



สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ 4.45 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่  $t = 5$  h ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย 400 cells และ  $\Delta t$  ต่างกัน: (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s.....66

รูปที่ 5.1 ปัญหาการนำการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ: (a) รูปร่างหนึ่งในส่วนของปัญหา เส้นไขเริ่มตัน และเส้นไขขอบเขต และ (b) ตัวอย่างการแบ่งกริด .....69

รูปที่ 5.2 การเปรียบเทียบคอนทัวร์ของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำและผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 20$  h เมื่อใช้วิธีต่างๆ โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....70

รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....71

รูปที่ 5.4 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....71

รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....72

รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง  $x = y$  เมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....73

รูปที่ 5.7 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง  $x = y$  เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....73

รูปที่ 5.8 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง  $x = y$  เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s.....74

## สารบัญญภาพ (ต่อ)

รูปที่ 5.9 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้ time-stepping scheme ต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย $400 \times 400$ cells และ $\Delta t = 10$ s.....	74
รูปที่ 5.10 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h เมื่อใช้วิธี explicit โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างกัน และ $\Delta t = 10$ s.....	76
รูปที่ 5.11 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างกัน และ $\Delta t = 10$ s.....	76
รูปที่ 5.12 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างกัน และ $\Delta t = 10$ s.....	77
รูปที่ 5.13 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย $400 \times 400$ cells และ $\Delta t$ ต่างกัน: (a) $\Delta t = 1000$ s และ (b) $\Delta t = 100$ s.....	79
รูปที่ 5.14 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่ $t = 5$ h เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย $400 \times 400$ cells และ $\Delta t$ ต่างกัน: (a) $\Delta t = 1000$ s และ (b) $\Delta t = 100$ s.....	80
รูปที่ 6.1 การเปลี่ยนสถานะในสองมิติ กรณีศึกษา: (a) รูปร่างหนึ่งในส่วนหนึ่งของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต และ (b) การแบ่งกริดขนาด $26 \times 13$ cells.....	83
รูปที่ 6.2 การกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี $T_i = 10$ °C และ $T_c = -20$ °C เมื่อใช้วิธี explicit และให้ $k_{int} = k_s$ โดยแบบจำลองประกอบด้วย $26 \times 13$ cells และ $\Delta t = 10$ s.....	84

## สารบัญภาพ (ต่อ)

- รูปที่ 6.3 คอนทัวร์ของอุณหภูมิ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$  ที่เวลา: (a)  $t = 1\text{ h}$  และ (b)  $t = 5\text{ h}$ .....85
- รูปที่ 6.4 คอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะที่เวลาต่างๆ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$ .....86
- รูปที่ 6.5 การกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) ตามเวลา สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$ .....86
- รูปที่ 6.6 การกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$ .....87
- รูปที่ 6.7 คอนทัวร์ของอุณหภูมิ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$  ที่เวลา: (a)  $t = 1\text{ h}$  และ (b)  $t = 5\text{ h}$ .....88
- รูปที่ 6.8 คอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะที่เวลาต่างๆ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$ .....89
- รูปที่ 6.9 การกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) ตามเวลา สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$ .....89

## สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่ ก.1	รูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต.....	98
รูปที่ ก.2	รูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต.....	99
รูปที่ ก.3	ปัญหา 2 มิติ และ schematic แสดงตัวแปรไร้หน่วย.....	102



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ



ในบทนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา การพิจารณาปัญหาจากโรงงานจริง แล้วแสดงแนวคิดการพิจารณาปัญหาและการประมาณปัญหาให้ง่ายขึ้น หลังจากนั้นจะกล่าวถึงวัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัย ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ รวมถึงขั้นตอนการดำเนินงานของการวิจัย

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ประเทศไทยมีโรงงานผลิตน้ำแข็งเชิงพาณิชย์เพื่อใช้ในอุตสาหกรรมอาหารเป็นจำนวนมาก เนื่องจากในการผลิตน้ำแข็งแต่ละครั้งต้องใช้เวลาานซึ่งทำให้มีความต้องการใช้พลังงานไฟฟ้าที่สูงมากตามมา การพิจารณาแนวทางการประหยัดพลังงานในการผลิตน้ำแข็งและเพิ่มคุณภาพน้ำแข็งเชิงพาณิชย์จึงเป็นที่มาของงานวิจัยนี้

ปัจจุบันการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ได้มีการนำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) มาผสมผสานกับความสามารถในการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ และความรู้พื้นฐานทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ มาใช้วิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ได้อย่างรวดเร็ว ทำให้การจำลองแบบเชิงตัวเลขได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก เนื่องจากสามารถพยากรณ์ผลเฉลยของปัญหาได้อย่างแม่นยำเพียงพอในการใช้งาน รวมทั้งสามารถประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายกว่าการทำทดลอง ดังนั้นการวิจัยนี้จึงพิจารณาลักษณะ และเวลาในการขึ้นรูปของน้ำแข็งด้วยการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์

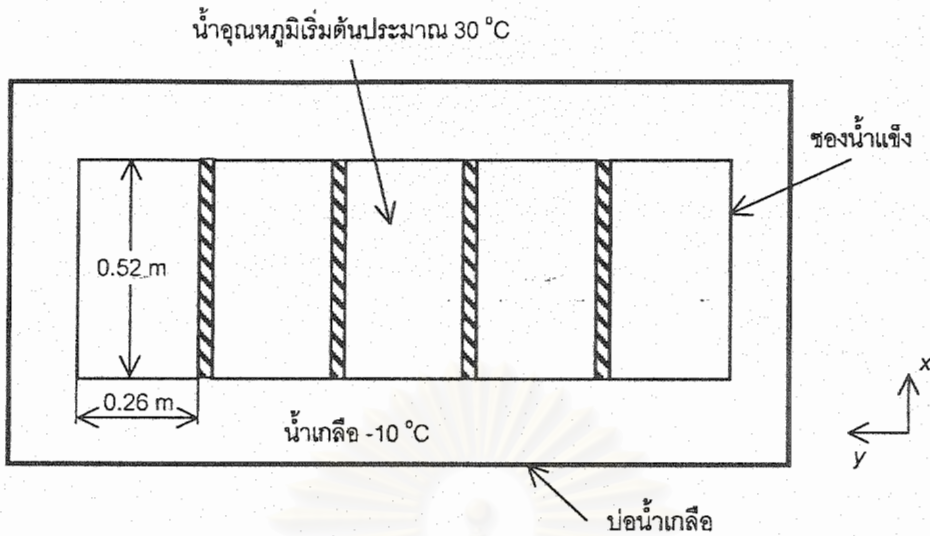
ระเบียบวิธีเชิงเลข (numerical methods) ที่ใช้ในปัจจุบัน มีอยู่หลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และ ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) เป็นต้น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีที่เริ่มต้นมาจากปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีโดยตรงที่ใช้ได้เฉพาะปัญหาหนึ่งมิติ วิธีแปรผันที่ต้องการทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับปัญหา และได้มีการพัฒนารูปแบบให้แก่ปัญหาได้หลากหลายยิ่งขึ้นด้วย เช่น วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คินที่นิยมใช้ในปัจจุบัน ลักษณะเด่นของระเบียบวิธีนี้ คือ มีการประมาณฟังก์ชันภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function) เมื่อเลือกฟังก์ชันประมาณได้ใกล้เคียงกับปัญหา ค่าของผลลัพธ์ที่ได้จะมีความใกล้เคียงกับค่าของผลเฉลยแม่นยำมากขึ้น และสามารถใช้กับรูปร่างที่ซับซ้อนได้ แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากรูปแบบโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปเมตริกซ์ (matrix form) ที่มีฟังก์ชันการประมาณภายในมาเกี่ยวข้อง ทำให้โปรแกรมนั้นมีขนาดใหญ่ตามไปด้วย (Voller et al., 1990)

ส่วนระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) เป็นระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีผลต่างอันดับหนึ่ง (finite difference method) โดยหลังจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นปริมาตรย่อยๆ แล้วจะทำการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์ของปัญหาตลอดปริมาตรควบคุมนั้น ซึ่งให้ความหมายทางกายภาพที่ชัดเจน หากจะเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อาจกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มนี้ จะเสมือนแทนค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เท่ากับหนึ่ง และถ้ามีพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวไม่ทราบค่า จะให้การประมาณแบบขั้นบันได (stepwise) หรือแบบเชิงเส้น (linear piecewise) แทน (Patankar, 1980) รูปแบบทั่วไปอยู่ในรูปแบบจุด (point form) การประมาณตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนจึงมีความง่ายกว่า ทำให้เป็นที่นิยมในการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (computational fluid dynamics) ส่วนข้อเสียคือมีข้อจำกัดในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน (Voller et al., 1990) แต่อย่างไรก็ตามกำลังได้รับการปรับปรุงและพัฒนาขึ้นเป็นลำดับ (Maneerattana, 2000: 9-36)

เมื่อเปรียบเทียบการจำลองแบบด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม และ ไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่เทียบเท่ากันจะพบว่า ข้อดีของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม คือ ระบบสมการมีความซับซ้อนน้อยกว่า (Voller et al., 1990; Idelsohn and Onate, 1994) และแสดงความหมายทางกายภาพได้ชัดเจนกว่า การทำวิจัยนี้จึงเสนอการจำลองแบบการขึ้นรูปของน้ำแข็งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

## 1.2 รูปแบบปัญหาตัวอย่าง

ตัวอย่างของโรงงานผลิตน้ำแข็งในที่นี้ คือ โรงงานน้ำแข็ง ของบริษัทปัตตานีปลาปน จำกัด ที่ตั้งอยู่ ณ จ.ปัตตานี ซึ่งมีโรงงานน้ำแข็ง 3 โรงและมีกำลังการผลิตรวม 8200 ชอง ในการทำน้ำแข็งแต่ละชองใช้เวลา 48 ชั่วโมง โดยชองทำน้ำแข็งมีขนาดประมาณ  $0.52 \text{ m} \times 0.26 \text{ m} \times 1.40 \text{ m}$  กระบวนการผลิตเริ่มจากเหนืาดิบซึ่งมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิสิ่งแวดล้อมหรือประมาณ  $30 \text{ }^{\circ}\text{C}$  ลงในชองทำน้ำแข็ง ทั้งนี้ชอง 5 ชองถูกเรียงต่อกันเป็น 1 เซ็ตโดยต่อชิดด้านความยาว  $0.52 \text{ m}$  ด้วยท่อต่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ  $0.05 \text{ m}$  ดังรูปที่ 1.1 แล้วใช้เครนยกเซตของชองดังกล่าวลงแช่ในบ่อน้ำเกลือซึ่งมีอุณหภูมิประมาณ  $-10 \text{ }^{\circ}\text{C}$  และมีการหมุนวนของน้ำเกลือด้วยใบพัด หลังจากนั้นรอเวลาให้น้ำแข็งตัวประมาณ 48 ชั่วโมง ซึ่งน้ำแข็งจะมีอุณหภูมิสุดท้ายประมาณ  $-10 \text{ }^{\circ}\text{C}$  แล้วจึงยกเซตของชองน้ำแข็งขึ้นจากบ่อน้ำเกลือ นำน้ำแข็งออกจากชอง และตัดก้อนน้ำแข็งให้ได้ขนาดตามต้องการตามลำดับ



รูปที่ 1.1 รูปด้านบน (top view) ของเขตของช่องน้ำแข็งและบ่อน้ำเกลือ

### 1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การศึกษาและเลือกใช้ทฤษฎีทางวิทยาศาสตร์ที่มีอยู่มาประยุกต์ใช้ในการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของการขึ้นรูปของน้ำแข็งอย่างเหมาะสม และการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนายปรากฏการณ์การขึ้นรูปของน้ำแข็งในแต่ละช่วงเวลาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

### 1.4 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัยได้มาจากสมมติฐานที่กำหนดดังนี้

#### 1.4.1 สมมติฐาน

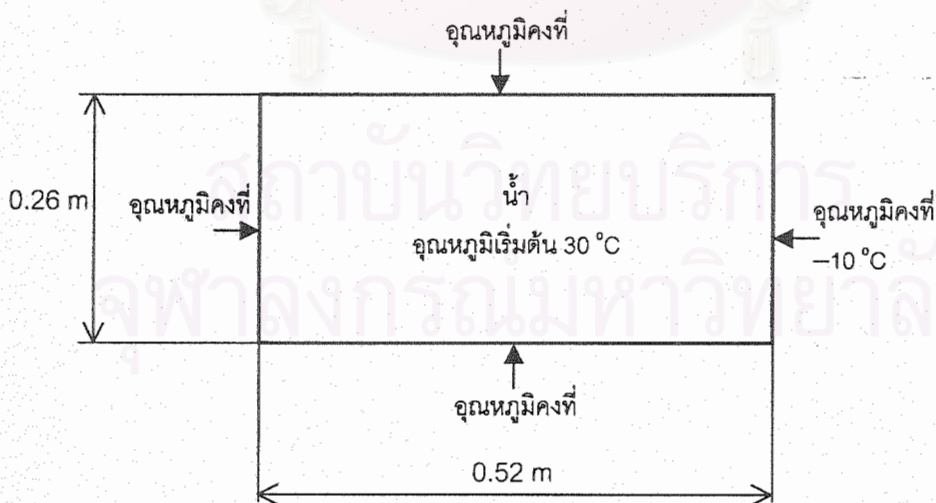
สมมติฐานที่ใช้ในการประมาณปัญหาจริงให้สามารถจำลองแบบได้ง่ายขึ้น โดยสมมติให้อัตราการถ่ายเทความร้อนข้ามขอบเขตปริมาตรควบคุมเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อน (heat conduction) เท่านั้น โดยไม่คิดผลจากการถ่ายเทความร้อนแบบอื่น ๆ ต่อไปนี้

- 1) ไม่คิดการพาความร้อนเนื่องจากการขยายตัว (convection induced by solidification expansion)

- 2) ไม่คิดการพาความร้อนเนื่องจากความต่างของอุณหภูมิ (thermal convection) เนื่องจากความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (temperature gradient) ในน้ำระหว่างแข็งตัวมีค่าไม่สูงมาก
- 3) กำหนดให้อุณหภูมิที่ขอบเขตเท่ากับอุณหภูมิของน้ำเกลือเพราะความแตกต่างของอุณหภูมิขอบนอกและในของช่องมีค่าน้อยมาก
- 4) ไม่คิด bulk convection ในของเหลวจากการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะ (phase change interface) ด้วยเหตุที่ Viskanta (1988) กล่าวว่า แม้ในทางปฏิบัติการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะอาจทำให้เกิด bulk convection ในของเหลวได้ แต่ยังไม่มียุทธศาสตร์การทดลองปรากฏการณ์ดังกล่าว และผลในเรื่องนี้ไม่มีความสำคัญมากนัก ยกเว้นกรณีการเปลี่ยนสถานะเป็นไปอย่างรวดเร็ว (rapid solidification) และจาก Bejan (1993: 188) ได้ระบุว่าหากค่าสเตฟาน (Stefan number)  $Ste$  มีค่าน้อยมาก ( $Ste < 1$ ) จะถือว่าเป็นปัญหาแบบ quasi-steady ได้ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะของน้ำมีค่า  $Ste < 1$  ถือเป็นปัญหา quasi-steady จึงไม่คิด bulk convection เนื่องจากการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะ ดังจะอธิบายด้วยสมการ (2.1)
- 5) ไม่คิดการแผ่รังสี (heat radiation) เพราะอุณหภูมิผิวของระบบมีค่าต่ำ

#### 1.4.2 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัยซึ่งได้มาจากการสรุปสมมติฐานที่กล่าวมาข้างต้น คือ การศึกษาปัญหาการขึ้นรูปของน้ำแข็งในสองมิติ รูปทรงสี่เหลี่ยม (รูปที่ 1.2) ที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นอุณหภูมิคงที่ มีการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนเท่านั้น



รูปที่ 1.2 รูปด้านบน (top view) ของปัญหาการแข็งตัวของน้ำในช่องน้ำแข็ง



## 1.5 ประโยชน์ที่จะได้รับ

ประโยชน์ที่จะได้รับจากงานวิจัยนี้ คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนายปรากฏการณ์การขึ้นรูปของน้ำแข็งแต่ละช่วงเวลาได้ ซึ่งจะเป็นโปรแกรมพื้นฐาน สำหรับการพัฒนาโปรแกรมเพื่อหาแนวทางการประหยัดพลังงานในการทำน้ำแข็งและเพิ่มคุณภาพของน้ำแข็งต่อไป



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาการเปลี่ยนสถานะมีลักษณะเด่นคือ เส้นแบ่งสถานะ (phase change interface) มีการเคลื่อนที่จึงทำให้เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น (non-linear problem) และต้องมีการคำนวณค่าความร้อนแฝงที่เกิดขึ้นที่อุณหภูมิเยือกแข็งระหว่างการแข็งตัว โดยที่ผ่านมาได้มีการทำการวิจัยเพื่อแก้ปัญหาในลักษณะนี้ อย่างต่อเนื่อง และสามารถแบ่งวิธีในการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีเชิงเลขได้ในหลายรูปแบบ การพิจารณาเทคนิคเหล่านี้จะเป็นประโยชน์ในการตัดสินใจเลือกเทคนิคที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มต่อไป

#### 2.1 ลักษณะการเปลี่ยนสถานะ

Voller et al. (1990) ได้แบ่งปัญหาการเปลี่ยนสถานะตามลักษณะการเปลี่ยนสถานะของสาร ดังนี้คือ

##### 2.1.1 การแบ่งสถานะกันชัดเจน (distinct)

สถานะของแข็งและของเหลวซึ่งถูกแบ่งแยกกันอย่างชัดเจนด้วยเส้นแบ่งสถานะ (phase change interface) ที่มีลักษณะราบเรียบและต่อเนื่อง (smooth continuous front) ลักษณะนี้จะเกิดขึ้นกับปัญหาที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งมีค่าคงที่ (isothermal phase change) ตัวอย่างเช่น การขึ้นรูปของน้ำแข็ง (freezing of water) หรือ การแข็งตัวอย่างรวดเร็วของโลหะบริสุทธิ์ (rapid solidification of pure metals)

##### 2.1.2 อโลหะ (alloy)

เกิดในการเปลี่ยนสถานะที่มีโครงสร้างผลึก (crystalline structure) ซึ่งเป็นแท่ง (columnar) และ/หรือ เม็ด (equi-axed grains) และเส้นแบ่งสถานะมีลักษณะรูปร่างซับซ้อน เช่น การขึ้นรูปของอโลหะส่วนใหญ่ที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งเป็นช่วงของอุณหภูมิ

##### 2.1.3 การเปลี่ยนสถานะอย่างต่อเนื่อง (continuous)

สถานะของแข็งและของเหลวกระจายตัวอยู่ทั่วบริเวณที่มีการเปลี่ยนสถานะและไม่มีเส้นแบ่งสถานะที่ชัดเจนระหว่างสถานะทั้งสอง ได้แก่ การขึ้นรูปของขี้ผึ้ง (wax), โพลีเมอร์ (polymer) หรือ แก้ว (glass)

นอกจากนี้ Bejan (1993) แยกความเร็วในการเปลี่ยนสถานะโดยใช้ค่าสเตฟาน  $Ste$

$$Ste = \frac{c_s(T_F - T_C)}{L} \quad (2.1)$$

โดยที่  $c_s$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของแข็ง  $T_F$  คือ อุณหภูมิเยือกแข็ง และ  $L$  คือค่าความร้อนแฝงจำเพาะ ส่วนอุณหภูมิขอบเขตของปัญหาคือ  $T_C$  โดยถ้า  $Ste$  มีค่าน้อย เช่น  $Ste < 1$  จะมีการเปลี่ยนสถานะอย่างช้าๆ สำหรับปัญหาที่พิจารณานี้สมบัติของน้ำ  $c_s = 1.762$  kJ/(kg·K),  $T_F = 0^\circ\text{C}$  และ  $L = 388$  kJ/kg ถ้ากำหนดให้  $T_C = -20^\circ\text{C}$  จะได้  $Ste = 0.104$  ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีค่าน้อย ดังนั้นการเปลี่ยนสถานะของน้ำจึงเกิดขึ้นอย่างช้าๆ

โดยสรุป สำหรับปัญหาการขึ้นรูปของน้ำแข็งเป็นปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งมีค่าคงที่ (isothermal phase change) มีการเปลี่ยนสถานะที่มีการแบ่งสถานะกันชัดเจนระหว่างของแข็งและของเหลว และเกิดการเปลี่ยนสถานะอย่างช้าๆ เนื่องจากค่า  $Ste < 1$

## 2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากเอกสารและงานวิจัยที่ผ่านมา สามารถแบ่งวิธีในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะโดยระเบียบวิธีเชิงเลขได้ในหลายรูปแบบ คือ วิธีการอ้างอิงจุดต่อ ได้แก่ วิธีการเคลื่อนที่ (front tracking) และ วิธีการอยู่กับที่ (fixed grid) และ การใช้ตัวแปรหลักในการพิจารณาค่าความร้อนแฝง ได้แก่ การใช้อุณหภูมิเป็นหลัก และ การใช้เอนทัลปีเป็นหลัก ซึ่ง วิธีเอนทัลปีเป็นหลัก ยังสามารถแบ่งได้อีกหลายวิธี เช่น วิธี basic enthalpy, apparent heat capacity และ latent heat source เป็นต้น

### 2.2.1 วิธีการอ้างอิงจุดต่อ

เนื่องจากเส้นแบ่งสถานะมีการเคลื่อนที่ (moving boundary) และบริเวณดังกล่าวมีปัจจัยสำคัญคือ ปริมาณความร้อนแฝงซึ่งมีค่าสูง จึงเป็นสิ่งสำคัญที่ต้องพิจารณา การพิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่ของจุดต่อ แบ่งออกเป็นดังนี้

#### 2.2.1.1 วิธีการเคลื่อนที่ (front tracking)

เป็นการพิจารณาว่ากริดเคลื่อนที่ตามเส้นแบ่งสถานะ (phase front) อย่างต่อเนื่องโดยอาศัยเงื่อนไขสมมูลความร้อนที่เส้นแบ่งสถานะในการคำนวณตำแหน่งเส้นแบ่งสถานะที่เวลาต่างๆ ซึ่งอาจต้องการสมการการผิดรูปของกริด (deforming grid formulation) เพื่อปรับเปลี่ยน mesh ตามการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะ หรือต้องมีอัลกอริทึมพิเศษ (special algorithm) ในการพิจารณาเงื่อนไขที่บริเวณเส้นแบ่งสถานะ วิธีนี้ให้ผลถูกต้องสำหรับปัญหาที่จุดเยือกแข็งมีอุณหภูมิคงที่ (isothermal

problems) แต่ไม่เหมาะสมกับปัญหาที่อุณหภูมิเยือกแข็งเป็นช่วงของอุณหภูมิ (mushy problem) ซึ่ง  $\Delta T_f \neq 0$  เพราะต้องการคำตอบเริ่มต้นสำหรับตำแหน่งเส้นเปลี่ยนสถานะที่ยังไม่ทราบในตอนแรก และจะมีความยุ่งยากในการแก้ปัญหาหลายมิติ (Furzeland, 1980, cited in Dalhuijsen and Segal, 1986) ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้ เช่น Voller and Cross (1981, 1983), Rubinsky and Cravahlo (1981) และ Askar (1987)

### 2.2.1.2 วิธีกริดอยู่กับที่ (fixed grid)

เป็นการให้กริดอยู่กับที่ ส่วนตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะจะทราบจากอุณหภูมิที่คำนวณได้ วิธีนี้ถูกหามาจาก weak formulation ซึ่งเงื่อนไขที่เส้นแบ่งสถานะ มีความหมายอยู่ในสมการแล้ว จึงไม่ต้องใช้เงื่อนไขดังกล่าวในการหาตำแหน่งการเปลี่ยนสถานะไปพร้อมๆกัน ข้อดีคือ ไม่จำเป็นต้องทราบตำแหน่งเริ่มต้นของการเปลี่ยนสถานะ ทำให้เหมาะสมกับปัญหาที่มีช่วงอุณหภูมิเยือกแข็ง (mushy problems) ปัญหาที่มีรูปแบบการแข็งตัวที่ซับซ้อน และปัญหาการแข็งตัวในหลายมิติ (Atthey, 1975, cited in Dalhuijsen and Segal, 1986) ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้ เช่น Comini et al. (1974), Morgan et al. (1978), Roose and Storrer (1984), Pham (1986), Dalhuijsen and Segal (1986), Dhatt et al. (1989), Comini et al. (1990) และ Tamma and Namburu (1990)

จากความสะดวกในการแก้ปัญหาในหลายมิติ ดังนั้นจึงเลือกวิธี fixed grid ในการแก้ปัญหาการขึ้นรูปของน้ำแข็งในวิทยานิพนธ์นี้

### 2.2.2 ตัวแปรหลักในการพิจารณาค่าความร้อนแฝง

ปัญหาที่สำคัญในการคำนวณการเปลี่ยนสถานะอยู่ที่ปริมาณความร้อนแฝง (latent heat) จากเอนทาลปีทั้งหมด (total enthalpy)  $H$  เท่ากับพลังงานความร้อนสัมผัส (sensible heat) รวมกับพลังงานความร้อนแฝง (latent heat) ดังสมการ (2.2) (Celentano et al., 1994)

$$H = \rho \int_{T_{ref}}^T c dT + \rho L f_{pc} \quad (2.2)$$

โดย  $T_{ref}$  คืออุณหภูมิอ้างอิง (reference temperature),  $T$  คืออุณหภูมิ,  $\rho$  คือ ค่าความหนาแน่นของสสาร (mass density),  $c$  คือค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสาร (specific heat) และ  $f_{pc}$  คือฟังก์ชันการเปลี่ยนสถานะ (phase-change function) สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งเป็นค่าคงที่ ค่า  $f_{pc}$  จะถูกกำหนดดังนี้

$$f_{pc} = 0 \text{ เมื่อ } T \leq T_F \quad (2.2a)$$

$$f_{pc} = 1 \text{ เมื่อ } T > T_F \quad (2.2b)$$

โดยสามารถอ้างอิงตัวไม่ทราบค่าที่เกี่ยวข้องกับความร้อนแฝง ในหลากหลายรูปแบบซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 กรณีใหญ่ๆ คือ การพิจารณาอุณหภูมิเป็นหลักและเอนทัลปีเป็นหลัก

### 2.2.2.1 กรณีให้อุณหภูมิเป็นตัวไม่ทราบค่า

เป็นการอ้างอิงค่าความร้อนแฝงจากอุณหภูมิ ดังสมการ (2.3)

$$\left(\rho c + \rho L \frac{\partial f_{pc}}{\partial T}\right) \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.3)$$

โดยที่  $k$  คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity)

ข้อดีของวิธีนี้คือ ไม่จำเป็นต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่างเอนทัลปีและอุณหภูมิ ( $H-T$ ) แต่มีความยุ่งยากในการแปลงความร้อนแฝงมาเป็นอุณหภูมิ เช่น ต้องมีการประมาณค่า  $\partial f_{pc} / \partial T$  ในสมการ (2.3) และ ประมาณเมตริกซ์จาโคเบียนเพื่อแก้สมการไม่เชิงเส้นตรงด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) เช่นในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Crivelli and Idelsohn (1986) และ Celentano et al. (1994)

### 2.2.2.2 กรณีให้เอนทัลปีเป็นตัวไม่ทราบค่า

เป็นการอ้างอิงค่าความร้อนแฝงจากเอนทัลปี วิธีนี้เป็นที่นิยมและขยายผลได้เป็นอีกหลายรูปแบบดังต่อไปนี้

#### 2.2.2.2.1 วิธี basic enthalpy

ซึ่งกำหนดให้

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.4)$$

สำหรับกรณี Isothermal phase change

$$H = \int_{T_{ref}}^T \rho c_S dT \quad \text{เมื่อ } T < T_F \quad (2.5a)$$

$$H = \int_{T_{ref}}^{T_F} \rho c_S dT + \rho L + \int_{T_F}^T \rho c_L dT \quad \text{เมื่อ } T \geq T_F \quad (2.5b)$$

โดยที่  $c_S$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของแข็ง และ  $c_L$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของเหลว

สำหรับกรณีที่มีช่วงอุณหภูมิในการแข็งตัว (finite freezing interval) ระหว่าง  $T_{F1}$  และ  $T_{F2}$  เอนทาลปีจะอยู่ในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

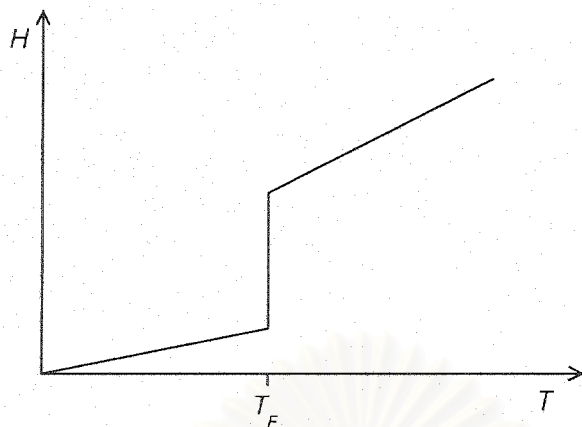
$$H = \int_{T_{ref}}^T \rho c_S dT \quad \text{เมื่อ } T < T_{F1} \quad (2.6a)$$

$$H = \int_{T_{ref}}^{T_{F1}} \rho c_S dT + \int_{T_{F1}}^T \left[ \rho \left( \frac{dL}{dt} \right) + \rho c_F \right] dT \quad \text{เมื่อ } T_{F1} \leq T \leq T_{F2} \quad (2.6b)$$

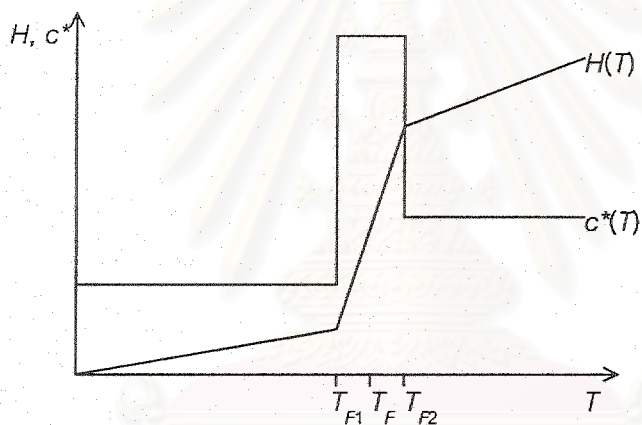
$$H = \int_{T_{ref}}^T \rho c_S dT + \rho L + \int_{T_{F1}}^{T_{F2}} \rho c_F dT + \int_{T_{F2}}^T \rho c_L dT \quad \text{เมื่อ } T > T_{F2} \quad (2.6c)$$

โดย  $c_F$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในช่วงเปลี่ยนสถานะ  $T_{F1} \leq T \leq T_{F2}$

โดยจะคำนวณอุณหภูมิที่จุดต่อ (node) ในแต่ละช่วงเวลาออกมาก่อน แล้วจึงใช้ความสัมพันธ์ระหว่างเอนทาลปีและอุณหภูมิหาค่าเอนทาลปี (Dalhuijsen and Segal, 1986; Dhatt et al., 1989) แต่อย่างไรก็ตาม วิธีนี้มีปัญหาในกรณีการเปลี่ยนสถานะที่อุณหภูมิคงที่ (isothermal phase change) หรือช่วงการแข็งตัวที่  $\Delta T_F = 0$  เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของกราฟ  $H-T$  ที่จุดเยือกแข็งดังแสดงในรูปที่ 2.1 ทำให้ต้องกำหนดช่วงอุณหภูมิเยือกแข็งขึ้นมาเองเพื่อให้  $\Delta T_F \neq 0$  ดังแสดงในรูปที่ 2.2 (Bonacina et al., 1973, cited in Dalhuijsen and Segal, 1986) จะได้การประมาณเชิงตรงบริเวณนี้ได้ ซึ่งต้องระมัดระวังค่าของ  $\Delta T_F$  ควรมีค่าน้อย จะได้ไม่เกิดความผิดพลาดไปจากความเป็นจริง แต่ต้องไม่น้อยเกินไปเมื่อเทียบกับช่วงเวลาที่ใช้ มิฉะนั้นจะเกิดการกระโดดข้าม ส่งผลให้ช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (time step)  $\Delta t$  ควรมีค่าน้อยๆ ตามไปด้วย (Rolph III and Bathe, 1982; Dalhuijsen and Segal, 1986)



รูปที่ 2.1 ช่วงการแข็งตัวกรณี isothermal phase change  $\Delta T_F = 0$



รูปที่ 2.2 ช่วงการแข็งตัวกรณี finite freezing interval  $\Delta T_F \neq 0$

#### 2.2.2.2.2 วิธี apparent heat capacity

หรือเรียกว่า effective heat capacity เป็นวิธีที่นิยมสำหรับการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นการดัดแปลงมาจากความสัมพันธ์

$$\rho c = \frac{dH}{dT} = c^* \quad (2.7)$$

โดยที่  $c^*$  คือ effective heat capacity และกำหนดให้

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (2.8)$$

แทนลงในสมการ (2.4) โดยตรง (Dalhuijsen and Segal, 1986) จะได้

$$c^* \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.9)$$

เมื่อ

$$c^* = \rho c_S \quad \text{เมื่อ } T \leq T_{F1} \quad (2.10a)$$

$$c^* = \rho c_F + \frac{L}{T_{F2} - T_{F1}} \quad \text{เมื่อ } T_{F1} \leq T \leq T_{F2} \quad (2.10b)$$

$$c^* = \rho c_L \quad \text{เมื่อ } T \geq T_{F2} \quad (2.10c)$$

จากการคำนวณ  $c^*$  ยังมีขีดจำกัด เรื่องช่วงอุณหภูมิเยือกแข็ง  $\Delta T_F$  และช่วงเวลา  $\Delta t$  ยังคงเหมือนวิธี basic enthalpy แต่หากใช้  $c^*$  จากวิธีการคำนวณโดยตรง จะมีปัญหาที่เกิดขึ้นเพิ่มเติมอีก คือ ค่าของ  $c^*$  เป็นลักษณะขั้นบันได (step-like) ตรงช่วงรอยต่อสถานะลักษณะกราฟ (ดังรูป 2.2) เป็น sharp peak ค่าความชันบริเวณนี้จะไม่มีความหยาบหรือค่าไม่ได้ อาจทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ อาจเกิดการสั่น (oscillation) ได้ในกรณีที่ทำการทำซ้ำเพื่อแก้สมการ (iterative solution method) จึงต้องใช้  $c^*$  จากวิธีการคำนวณโดยประมาณ

ตัวอย่างเช่น Comini et al. (1974) เสนอให้กำหนดตัวแปรใหม่ขึ้นมาคือ เอนทาลปี ให้มีค่าเท่ากับผลการอินทิเกรตได้กราฟ  $\rho c-T$  และใช้ค่าเอนทาลปีที่ทราบในการประมาณค่าความจุความร้อนที่บริเวณดังกล่าว ดังนี้

$$c^* = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \bigg/ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial T} \bigg/ \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial T} \bigg/ \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.11)$$

Hibbitt (1976), cited in Morgan et al. (1978) กล่าวว่า การประมาณตามสมการ (2.11) สำหรับบางปัญหาจะได้ผลเฉลยที่มีความคลาดเคลื่อนมาก Morgan et al. (1978) จึงเสนอต่างจาก Comini et al. (1974) โดยไม่ได้ใช้การประมาณ  $c^*$  อย่างสมการ (2.11) แต่หา  $c^*$  จากนิยามที่ว่า  $c^*$  เท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของเอนทาลปีเทียบกับอุณหภูมิ แล้วประยุกต์ simple backward difference โดยที่  $m$  และ  $m-1$  แทนค่าลำดับของเวลา ได้ดังนี้



$$c^* = \frac{H^m - H^{m-1}}{T^m - T^{m-1}} \quad (2.12)$$

แต่อย่างไรก็ตามสมการ (2.12) ยังมีข้อเสียคือผลลัพธ์ที่ได้อาจเกิดการสั่นได้ และถ้าช่วงเวลาไม่อยู่ในช่วงที่จำกัด สมดุลความร้อนอาจไม่ถูกต้อง (Thomas et al., 1984, cited in Dalhuijsen and Segal, 1986)

Giudice et al. (1978), cited in Dalhuijsen and Segal (1986) ประมาณ  $c^*$  อีกแบบคือ

$$c^* = \frac{\left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]}{\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

และ Thomas et al. (1984), cited in Dalhuijsen and Segal (1986) ว่าได้นำค่า  $c^*$  ในสมการ (2.13) ไปใช้ได้ผลถูกต้องเป็นที่ยอมรับได้

หรือประมาณ  $c^*$  ตาม Lemmon (1979), cited in Dalhuijsen and Segal (1986) ในสมการ (2.14) ซึ่งเมื่อนำไปใช้จะได้ผลถูกต้องดีคือ

$$c^* = \frac{\left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

### 2.2.2.2.3 วิธี latent heat source

หรือในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เรียกว่า fictitious heat flow method ใช้หลักการจำลองตัวแปรปริมาณความร้อนสะสมที่ถ่ายเทออกให้เป็นตัวแทนปริมาณความร้อนแฝง เมื่ออุณหภูมิถึงจุดเยือกแข็งโดยจะให้ค่าอุณหภูมิคงที่ไว้ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา แล้วความร้อนสะสมก็เริ่มถ่ายเทจนกระทั่งมีค่าเกินปริมาณความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะ จะสมมติว่าจุดต่อ (node) นั้นๆ มีการเปลี่ยนสถานะ และอุณหภูมิจึงเปลี่ยนแปลงตามเวลาต่อไปได้ Rolph III and Bathe (1982) กล่าวว่า วิธีนี้สามารถหาค่าตำแหน่งการเปลี่ยนสถานะได้ถูกต้องแม้ว่าขนาดของระยะระหว่างจุดต่อ

(space steps) จะหยาบและช่วงเวลา (time step) มาก แต่อย่างไรก็ตาม Dalhuijsen and Segal (1986) พบว่าผลของตำแหน่งการเปลี่ยนสถานะถูกต้องจริงดังที่กล่าว แต่ผลด้านอุณหภูมิจะไม่แม่นยำนัก หากต้องการให้ผลของอุณหภูมิถูกต้องมากขึ้น ต้องใช้ขนาดของระยะระหว่างจุดต่อและช่วงเวลาน้อยๆ และเสนอว่าวิธีนี้เหมาะสมกับปัญหาที่ค่าความร้อนแฝงมีค่ามากกว่าค่าความร้อนสัมผัสมากๆ ดังที่ Bejan (1993) กล่าวว่า ถ้า  $Ste < 1$  จะแก้ปัญหาแบบ quasi-steady ได้

Voller (1985), cited in Salcudean and Abdullah (1988) ได้แยกเอาเทอมไปทั้งหมดเป็นพจน์ของความร้อนสัมผัสและความร้อนแฝง ดังนั้นสมการ (2.4) จึงกลายเป็น

$$\rho \frac{\partial(cT + \Delta H)}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (2.15)$$

โดย  $\Delta H$  คือ ปริมาณความร้อนแฝง เมื่อจัดรูปสมการ (2.15) ใหม่จะได้สมการสำหรับวิธี latent heat source คือ

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T) + S \quad (2.16)$$

โดยที่  $S = -\rho \frac{\partial \Delta H}{\partial t}$  เป็นค่าความแตกต่างของความร้อนแฝงที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลา

ขั้นตอนในการคำนวณ สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งระบุใน Dalhuijsen and Segal (1986) ได้ใช้ตัวแปร 3 ตัวในการพิจารณาการเปลี่ยนสถานะ ได้แก่

- $Q_{tot}$  เป็นค่าความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะที่แต่ละจุดต่อ (node)
- $Q_{lat}$  เป็นปริมาณความร้อนแฝงที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลา (เป็น fictitious heat flow)
- $Q_{accu}$  เป็นปริมาณความร้อนแฝงสะสมเมื่อพิจารณาการทำซ้ำทั้งหมด (accumulated latent heat flow)

กำหนดให้ค่าความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะที่แต่ละจุดต่อ (node)  $k$  โดยการอินทิเกรต  $\rho L/\Delta t$  ตลอดปริมาตร  $\Omega$  โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ด้วยฟังก์ชัน  $N_k$

$$Q_{tot,k} = \int_{\Omega} \frac{\rho L}{\Delta t} N_k d\Omega \quad (2.17)$$

ที่เวลาเริ่มต้นในแต่ละช่วงเวลา ค่าความร้อนแฝงจะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ คือ  $Q_{lat,k}^0 = 0$  หลังจากนั้นที่การทำซ้ำ  $i$  แต่ละครั้งในช่วงเวลาหนึ่งๆ โดยที่  $n$  แทน อันดับของช่วงเวลา เมื่ออุณหภูมิที่จุดต่อ (node) ผ่านอุณหภูมิจุดเยือกแข็ง  $T_f$  จะเริ่มทำการคำนวณความร้อนแฝงสมมุติถ้า

$T_k^{n+1,i} \geq T_F$ ,  $T_k^{n+1,i} < T_F$  หรือ  $T_k^{n+1,i-1} \leq T_F$ ,  $T_k^{n+1,i} > T_F$  จะคำนวณ

$$\Delta Q_{lat,k}^i = - \int_{\Omega} \frac{\rho c^{n+1,i-1}}{\Delta t} (T_k^{n+1,i} - T_F) N_k d\Omega \quad (2.18)$$

จากนั้นจะได้ latent heat flow

$$Q_{lat,k}^i = Q_{lat,k}^{i-1} + \Delta Q_{lat,k}^i \quad (2.19)$$

และอุณหภูมิที่จุดต่อ จะถูกกำหนดไว้ที่อุณหภูมิเยือกแข็ง

$$T_k^{n+1,i} = T_F \quad (2.20)$$

ผลรวมของ latent heat flow จะได้จาก

$$Q_{accu,k}^i = Q_{accu,k}^{i-1} + \Delta Q_{accu,k}^i \quad (2.21)$$

เมื่อพิจารณาการทำซ้ำทั้งหมด (over all iterations, e.g. not only in one time step)

กระบวนการนี้จะกระทำซ้ำจนกระทั่ง  $Q_{accu,k} = Q_{tot,k}$  ที่จุดต่อ หลังจากนั้นอุณหภูมิที่จุดต่อจะไม่ถูกกำหนดไว้ที่  $T_F$  อีกต่อไป และค่าของ  $Q_{lat,k}$  ก็จะไม่เพิ่มขึ้นอีก เมื่อผลลัพธ์มีการลู่เข้า (convergence) ก็จะเริ่มคิดที่ช่วงเวลาถัดไป

#### 2.2.2.2.4 รูปทั่วไปของการใช้เอนทาลปีเป็นตัวไม่ทราบค่า

จากสมการ (2.4), (2.9) และ (2.16) ข้างต้น สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla \phi) + S \quad (2.22)$$

โดยค่าตัวแปรในสมการได้ระบุในตารางที่ 2.1

เมื่อพิจารณาวิธีการต่างๆ ข้างต้นพบว่า วิธี latent heat source น่าจะเป็นวิธีที่เหมาะสมในการประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เพราะจากกระบวนการคำนวณค่าความร้อนแฝงให้ความหมายทางกายภาพที่ชัดเจน แต่ในวิทยานิพนธ์นี้จะคำนวณค่าความร้อนแฝงต่างจากหัวข้อ 2.2.2.2.3 ดังจะแสดงในหัวข้อ 3.5.1 ในบทถัดไป

ตารางที่ 2.1 รูปแบบทั่วไปของสมการการขึ้นรูปของน้ำแข็ง

ลำดับที่	ระเบียบวิธี	$\phi$	$\rho c$	$\alpha$	S
1.สมการ (2.4)	basic equation	H	1	0	$\nabla \cdot (k \nabla T)$
2.สมการ (2.9)	apparent heat capacity	T	$c^*$	k	0
3.สมการ (2.16)	latent heat source	T	$\rho c$	k	$-\rho \frac{\partial \Delta H}{\partial t}$

### 2.3 บทสรุป

จากการสำรวจงานวิจัยที่ผ่านมา สามารถจัดหมวดหมู่ตามระเบียบวิธีที่ใช้ ชนิดของปัญหาที่เหมาะสมในการประยุกต์ใช้ วิธีการพิจารณาจุดต่อ วิธีการอ้างอิงตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับค่าความร้อนแฝง และวิธีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังสรุปในตารางที่ 2.2 จะเห็นว่าระเบียบวิธีการที่ใช้เป็นส่วนมากคือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยพิจารณาจุดต่อแบบอยู่กับที่ และอ้างอิงตัวแปรหลักคือเอนทาลปีแล้วประยุกต์ด้วยวิธี apparent heat capacity ซึ่งต้องมีการประมาณ apparent heat capacity ที่เหมาะสม อย่างไรก็ตามเพื่อเป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหา งานวิจัยฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยพิจารณาจุดต่อแบบอยู่กับที่ และอ้างอิงตัวแปรหลักคือเอนทาลปีแล้วประยุกต์ด้วยวิธี latent heat source โดยนำแนวคิดวิธี latent heat source ที่แก้ปัญหา โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาปรับปรุงให้เหมาะสมกับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 2.2 การสรุปงานวิจัยที่ผ่านมาสำหรับการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ (● หมายถึง ใช้)

ค.ศ.	ผู้วิจัย	ระเบียบวิธี	ปัญหา		จุดต่อ		ตัวแปรหลัก (ที่คิด latent heat)			time-stepping scheme			
			non-isothermal	isothermal	front-tracking	fixed grid	temperature	Enthalpy			one step		
								basic H	c*	fictitious heat flow	explicit	Crank-Nicolson	fully implicit
1974	Comini et al.	FE	●			●		●					●
1978	Morgan et al.	FE	●			●							●
1981	Voller and Cross	FD	●	●	●		●			●			
1981	Rubisky and Cravahlo	FE		●	●				●	●			
1982	Rolph III and Bathe	FE	●	●		●			●			●	
1983	Voller and Cross	FD		●	●		●			●		●	
1984	Roose and Storrer	FE	●	●		●			●				
1986	Pham	FE		●		●	●			●			●
1986	Crivelli and Idelsohn	FE		●		●	●					●	
1986	Dalhuijsen and Segal	FE		●		●		●	●				●
1987	Askar	FE		●	●		●					●	
1989	Dhatt et al.	FE	●	●		●	●			●			
1990	Comini et al.	FE	●	●		●		●					●
1990	Voller et al.	FE FV	●	●		●	●	●	●			●	
1990	Tamma and Namburu	FE	●	●		●		●		●		●	
1994	Celentano et al.	FE	●	●		●						●	



### บทที่ 3

## ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ สมการพีชคณิต และขั้นตอนการคำนวณ

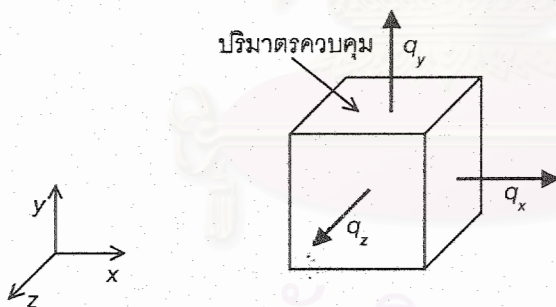
ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดในการหาคำตอบของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ โดยจะพิจารณาในรูปทั่วไป คือ สามมิติ แล้วทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาในสองมิติ และแสดงขั้นตอนการคำนวณ

### 3.1 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์จะพิจารณาจากสมการครอบคลุม (governing equation) และ สมการเฉพาะเจาะจง (constitutive equations) ได้ดังนี้

#### 3.1.1 สมการครอบคลุม (governing equation)

รูปที่ 3.1 แสดงตัวอย่างปริมาตรควบคุมในสามมิติ ที่มีการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อนผ่านขอบเขตของปริมาตรควบคุม



รูปที่ 3.1 รูปตัวอย่างปริมาตรควบคุม

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในทั้งหมด  $U$  ของปริมาตรควบคุมเทียบกับเวลา  $t$  มีค่าเท่ากับ ผลรวมของอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิเข้าสู่ปริมาตรควบคุมและอัตราการผลิตความร้อนขึ้นเองภายในปริมาตรควบคุม  $q_{gen}$  สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการนำความร้อนภายใต้สถานะต่างๆไปที่ไม่อยู่ตัว (Holman, 1981) คือ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_{gen} \quad (3.1)$$

โดย  $q_x$ ,  $q_y$  และ  $q_z$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อน (heat transfer rate) ในแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ

### 3.1.2 สมการเฉพาะเจาะจง (constitutive equations)

สมการเฉพาะเจาะจงประกอบด้วย

1) จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's Law) อัตราการถ่ายเทความร้อน  $\vec{q}$  ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  และความชันของกระจายของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้ (Incropera and DeWitt, 1996: 45)

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} - k \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \quad (3.2)$$

ค่าของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  จะขึ้นกับอุณหภูมิ  $T$  ในเบื้องต้นจะพิจารณาให้  $k$  ในแต่ละสถานะมีค่าคงที่

2) พลังงานภายในทั้งหมดเท่ากับมีค่าเท่ากับผลรวมของความร้อนสัมผัส (sensible heat) กับความร้อนแฝง (latent heat) (Dalhuijsen and Segal, 1986)

$$U = \int_{T_{ref}}^T \rho c_s dT \quad \text{เมื่อ } T < T_F \quad (3.3a)$$

$$U = \int_{T_{ref}}^{T_F} \rho c_s dT + \rho L + \int_{T_F}^T \rho c_L dT \quad \text{เมื่อ } T \geq T_F \quad (3.3b)$$

โดยที่  $c_s$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของแข็ง  $c_L$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของเหลว และเนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายในจำเพาะ (specific internal energy)  $u$  และเอนทาลปีจำเพาะ (specific enthalpy)  $h$  ที่ระบุใน Wylen et al. (1994: 112) คือ

$$dh = du + d(Pv) = du + Pdv + vdP \quad (3.4)$$

โดยที่  $v$  คือ ปริมาตรจำเพาะ (specific volume) และ  $P$  คือ ความดัน (pressure) สำหรับของเหลว และของแข็งถือว่าไม่สามารถอัดตัวได้ (incompressible)  $dv \approx 0$  จึงได้

$$dh \approx du + vdP \quad (3.5)$$

และทั้งสองสถานะดังกล่าว ค่าปริมาตรจำเพาะมีค่าน้อยมาก  $v \approx 0$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$dh \approx du \quad (3.6)$$

### 3.1.3 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

จากสมการ (3.1), (3.2), (3.3) และ (3.6) และไม่มีการผลิตความร้อนขึ้นเองภายในระบบ ( $q_{gen} = 0$ ) จะได้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการขึ้นรูปของน้ำแข็ง คือ

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.7)$$

โดยที่

$$H = \int_{T_{ref}}^T \rho c_S dT \quad \text{เมื่อ } T < T_F \quad (3.8)$$

$$H = \int_{T_{ref}}^{T_F} \rho c_S dT + \rho L + \int_{T_F}^T \rho c_L dT \quad \text{เมื่อ } T \geq T_F \quad (3.9)$$

## 3.2 การแบ่งขอบเขตของปัญหา

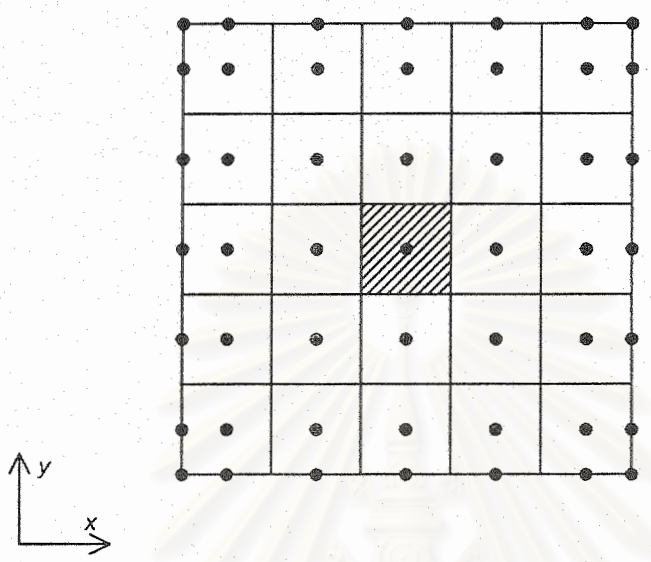
การแบ่งขอบเขตของปัญหาแบ่งเป็นการแบ่งรูปร่าง (spatial discretisation) และการแบ่งเวลา (time discretisation) ดังจะแสดงต่อไปนี้

### 3.2.1 การแบ่งรูปร่าง (spatial discretisation)

ในที่นี้จะแสดงการแบ่งรูปร่างสำหรับปัญหา 2 มิติ (อย่างไรก็ตามด้วยกระบวนการในทำนองเดียวกันนี้ยังสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหา 1 และ 3 มิติได้) เริ่มจากการแบ่งรูปร่างให้เป็นปริมาตรย่อยๆ (control volume) แล้วให้จุดต่อ (node) อยู่ตรงกลางแต่ละปริมาตรในรูปแบบของ cell-



centred grid arrangement ซึ่งปริมาตรที่กำหนดจะมีขนาดเท่ากันหรือไม่ก็ได้ (Patankar, 1980; Versteeg and Malalasekera, 1995) แต่ในงานวิจัยนี้จะใช้ปริมาตรขนาดเท่ากัน (uniform control volumes) ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การแบ่งรูปร่างแบบ cell-centred grid arrangement

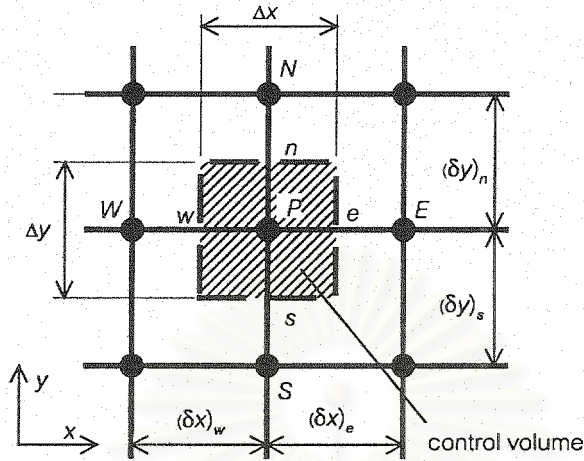
และตัวอย่างปริมาตรควบคุมได้ถูกแสดงในรูปที่ 3.3 เมื่อพิจารณาจุดต่อ  $P$  จะเห็นว่าจุดต่อนี้มี จุดต่อข้างเคียง (neighbor nodes) ได้แก่ จุดต่อ  $E$  และ  $W$  ในแนวแกน  $x$  ( $E$  แทน east node และ  $W$  แทน west node) และ จุดต่อ  $N$  และ  $S$  ในแนวแกน  $y$  ( $N$  แทน north node และ  $S$  แทน south node) เส้นประแสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมในแต่ละด้าน  $e, w, n$  และ  $s$  ซึ่งการถ่ายเทความร้อนข้ามผ่านขอบเขตของปริมาตรควบคุมจะเกิดขึ้นที่ด้านเหล่านี้ และสำหรับปัญหา 2 มิติ เมื่อสมมติให้ความยาวในทิศทาง  $z$  เท่ากับ 1 หน่วยความยาว จะได้ปริมาตรควบคุมมีขนาด  $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times 1$

### 3.2.2 การแบ่งเวลา (time discretisation)

เราสามารถหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่เวลาขณะใดขณะหนึ่งได้โดยอ้างอิงค่าที่ทราบแล้วที่เวลาเริ่มต้น การประมาณค่าสามารถทำได้โดยพิจารณาที่ละชั้นของเวลาโดยการแบ่งโดเมนของเวลาออกเป็นส่วย่อยๆ จะได้ ขนาดช่วงเวลา (time step)  $\delta t$  ดังนี้

$$\delta t = t^{n+1} - t^n \tag{3.10}$$

โดย  $t$  เป็นเวลาขณะใดขณะหนึ่ง ส่วนด้วย  $n$  หมายถึงลำดับชั้นของเวลา



รูปที่ 3.3 ตัวอย่างปริมาตรควบคุม

### 3.3 การสร้างสมการพีชคณิต

#### 3.3.1 สมการพีชคณิตในรูปทั่วไป

เนื่องจากอัลกอริทึมที่จะอธิบายในหัวข้อ (3.5.1) ได้หาค่าความร้อนแฝงจากความร้อนสัมผัสสมมุติ (fictitious sensible heat) ดังนั้นจะเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ (3.7) ในอีกรูปแบบ โดยให้ซ้ายมือของสมการเป็นพจน์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงความร้อนสัมผัส สำหรับปัญหาสองมิติ ได้สมการดังนี้

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

การสร้างสมการพีชคณิตเริ่มจากการพิจารณาปริมาตรควบคุมภายใน (เนื่องจากพิจารณา 2 มิติ ดังนั้นให้เสมือน  $\Delta z = 1$ ) ทำการอินทิเกรตสมการ (3.11) ตลอดทั้งปริมาตรควบคุมและตลอดช่วงเวลา  $t$  ถึง  $t + \Delta t$  จะได้

$$\int_{sw}^{ne} \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy = \int_{sw}^{ne} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) dt dx dy + \int_{sw}^{ne} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dt dx dy \quad (3.12)$$

การพิจารณาพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.12) ซึ่งเป็นพจน์การเปลี่ยนแปลงในสภาวะชั่วคราว (transient term) เมื่อสมมติให้  $\rho$  และ  $c$  มีค่าคงที่ในแต่ละสถานะ จะได้

$$\rho c \int_{s_w}^{n_e} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy \approx (T_p^1 - T_p^0) \rho c \Delta x \Delta y \quad (3.13)$$

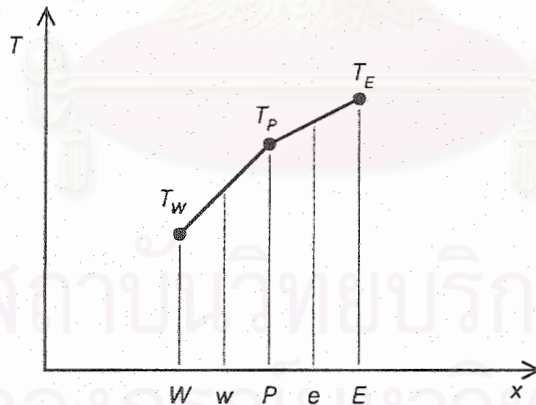
โดยที่ 1 คือ ตำแหน่งของเวลาที่  $t + \Delta t$  และ 0 คือ ตำแหน่งของเวลาที่  $t$

การพิจารณาพจน์ทางขวามือของสมการ (3.12) ซึ่งคือ diffusion term เมื่อทำการประมาณการกระจายตัวของตัวแปรตามแต่ละจุดเป็นแบบเชิงเส้นตรง (piecewise linear profile) จึงสามารถประมาณพจน์ของอนุพันธ์เทียบกับระยะทางด้วยการประมาณเชิงเส้นตรงได้ (linear interpolation) ดังแสดงโพรไฟล์เชิงเส้นตรงตามแกน  $x$  ในรูปที่ 3.4 โดยตัวห้อย (subscript) เช่น  $W, P, E$  แทนตำแหน่งของจุดต่อ ดังนั้นพจน์แรกทางขวามือของสมการ (3.12) จะได้

$$\int_{s_w}^{n_e} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) dt dx dy \approx \int_t^{t+\Delta t} \left( k_e \frac{(T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{(\delta x)_w} \right) \Delta y \Delta t \quad (3.14)$$

และในทำนองเดียวกัน พจน์สุดท้ายทางขวามือของสมการ (3.12) จะได้

$$\int_{s_w}^{n_e} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dt dx dy \approx \int_t^{t+\Delta t} \left( k_n \frac{(T_N - T_P)}{(\delta x)_n} - k_s \frac{(T_P - T_S)}{(\delta x)_s} \right) \Delta x \Delta t \quad (3.15)$$

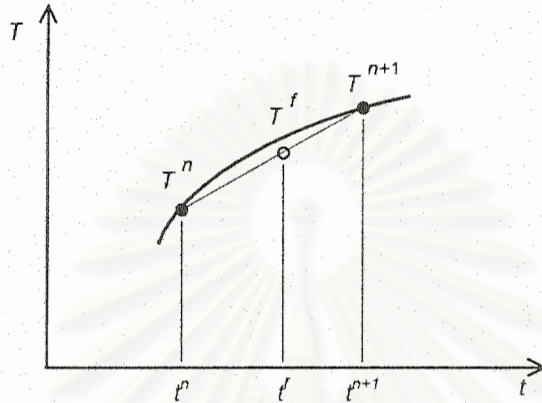


รูปที่ 3.4 โพรไฟล์เชิงเส้นตรง (piecewise-linear profile)

แต่จะเห็นว่าสมการ (3.14) และ (3.15) ยังติดค่าการอินทิเกรตของเวลา จึงต้องประมาณ  $T_p, T_e, T_w, T_n,$  และ  $T_s$  ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา  $t$  ถึง  $t + \Delta t$  ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะพิจารณากลุ่มวิธีแบบ one step หรือ two-time level schemes ดังนี้

$$\int_t^{t+\Delta t} T_p dt = (fT_p^{n+1} + (1-f)T_p^n) \Delta t \quad (3.16)$$

เมื่อ  $f$  อยู่ในช่วง  $[0,1]$  กล่าวคือ เมื่อทราบค่าของ  $T^n$  ที่เวลา  $t^n$  สามารถใช้ช่วงเวลา  $\Delta t$  (time step) เพื่อคำนวณหาค่า  $T^{n+1}$  ที่เวลา  $t^{n+1}$  ได้ ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $T$  ที่จุดต่อใดๆ กับเวลา

ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้ได้ดังนี้

$$\int_t^{t+\Delta t} T_p dt = (fT_p^1 + (1-f)T_p^0) \Delta t \quad (3.17)$$

สำหรับค่าของ  $T$  ที่จุดต่ออื่นๆ สามารถประยุกต์ใช้ได้ในการทำงานเดียวกัน ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.13)

ถึง (3.17) เข้าในสมการครอบคลุม (3.12) จะได้

$$\begin{aligned} (T_p^1 - T_p^0) \rho c \Delta x \Delta y = & f \left( k_e \frac{(T_E^1 - T_p^1)}{(\delta x)_e} - k_w \frac{(T_p^1 - T_W^1)}{(\delta x)_w} \right) \Delta x \Delta t \\ & + f \left( k_n \frac{(T_N^1 - T_p^1)}{(\delta x)_n} - k_s \frac{(T_p^1 - T_S^1)}{(\delta x)_s} \right) \Delta y \Delta t \\ & + (1-f) \left( k_e \frac{(T_E^0 - T_p^0)}{(\delta x)_e} - k_w \frac{(T_p^0 - T_W^0)}{(\delta x)_w} \right) \Delta x \Delta t \\ & + (1-f) \left( k_n \frac{(T_N^0 - T_p^0)}{(\delta x)_n} - k_s \frac{(T_p^0 - T_S^0)}{(\delta x)_s} \right) \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (3.18)$$

เมื่อจัดรูปใหม่ และทำการลดด้วยยก (superscript) 1 ของตัวแปรที่เวลา  $t + \Delta t$  ไว้ในฐานที่  
เข้าใจ จะได้สมการพีชคณิตในรูปทั่วไปดังนี้

$$a_p T_p = \sum a_{nb} (f T_{nb} + (1-f) T_{nb}^0) + (a_p^0 - \sum (1-f) a_{nb}) T_p^0 \quad (3.19)$$

โดยที่

$$a_p = a_p^0 + \sum f(a_{nb}) \quad (3.20)$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t} \quad (3.21)$$

เครื่องหมาย  $\sum$  หมายถึงการรวมค่าทุกจุดต่อข้างเคียง (neighbor nodes,  $nb$ ) ซึ่งประกอบด้วย  $E$ ,  $W$ ,  $N$  และ  $S$  และตัวแปร  $a_{nb}$  แทน สัมประสิทธิ์ของจุดต่อข้างเคียง (neighbor coefficients) ซึ่งคือ  $a_w$  และ  $a_e$  สำหรับปัญหา 1 มิติ และ คือ  $a_w$ ,  $a_e$ ,  $a_s$  และ  $a_n$  สำหรับปัญหา 2 มิติ โดยได้สรุปค่าในตารางที่ 3.1 และขนาดปริมาตรควบคุม  $\Delta V$  สำหรับปัญหา 1 และ 2 มิติเท่ากับ  $\Delta x$  และ  $\Delta x \Delta y$  ตามลำดับ

ตารางที่ 3.1 การสรุปค่าสัมประสิทธิ์ของจุดต่อข้างเคียงสำหรับปัญหา 1 และ 2 มิติ

มิติของปัญหา	$a_w$	$a_e$	$a_s$	$a_n$
1D	$\frac{k_w}{(\delta x)_w}$	$\frac{k_e}{(\delta x)_e}$	---	---
2D	$\frac{k_w}{(\delta x)_w} \Delta y$	$\frac{k_e}{(\delta x)_e} \Delta y$	$\frac{k_s}{(\delta y)_s} \Delta x$	$\frac{k_n}{(\delta y)_n} \Delta x$

### 3.3.2 สัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ

เนื่องจากปัญหาการเปลี่ยนสถานะของน้ำ มีความไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้นบริเวณรอยต่อสถานะ เพราะการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของสมบัติของสาร เมื่อพิจารณาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านพื้นที่ผิว เช่นในสมการ (3.15) หรือ (3.16) จะเห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนจะมีผลต่ออัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิซึ่งจะมีอิทธิพลต่อผลเฉลยที่ได้ จึงทำการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ (interface conductivity)  $k_{INT}$  ต่างๆ กัน ดังนี้ คือ

### 3.3.2.1 แบบ solidus conductivity

เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุมที่กำลังเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง สถานะของพื้นที่ผิวระหว่างปริมาตรทั้งสอง เมื่อเริ่มต้นจะเป็นรอยต่อของของแข็งและของเหลว แต่เมื่อเวลาผ่านไป รอยต่อสถานะก็จะเคลื่อนที่เข้าไปในปริมาตรควบคุมที่กำลังเปลี่ยนสถานะ ทำให้พื้นที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุมทั้งสองในเวลาส่วนมากเป็นของแข็ง ... จึงสามารถประมาณให้  $k_{INT}$  เท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งดังนี้

$$k_{INT} = k_S \quad (3.22)$$

### 3.3.2.2 แบบ arithmetic mean

การใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) ของค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน เป็นค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์ที่พื้นที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุมสองปริมาตรที่มีค่าสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากัน เป็นการประมาณเชิงเส้นตรง ตัวอย่างเช่น เมื่อเวลาแรกๆ ปริมาตรควบคุมที่มีสถานะเป็นของเหลวติดกับปริมาตรที่เป็นของแข็ง และการแบ่งปริมาตรแบบเท่ากัน (uniform control volume) จะได้ว่าเส้นแบ่งสถานะอยู่ตรงกลางระหว่างจุดต่อจึงได้ค่า  $k_{INT}$  เป็นค่าเฉลี่ยระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว ดังนี้

$$k_{INT} = \frac{(k_S + k_L)}{2} \quad (3.23)$$

### 3.3.2.3 แบบ harmonic mean

เมื่อพิจารณาการสมดุลความร้อนที่ออกจากจุดต่อไปยังพื้นที่ผิวสำหรับปัญหา composite materials จะพบว่าการใช้  $k_{INT}$  เป็นค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (harmonic mean) ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของจุดต่อสองจุดที่มีคุณสมบัติต่างกัน เป็นการประมาณค่าเฉลี่ยที่สอดคล้องตามหลักสมดุลความร้อนดังกล่าว (Patankar, 1980) เมื่อนำมาประยุกต์กับปัญหาการเปลี่ยนสถานะและจากการแบ่งปริมาตรแบบขนาดเท่ากันทุกปริมาตร (uniform control volumes) ทำให้ได้การประมาณระหว่างปริมาตรที่อยู่ในสถานะของแข็งและของเหลว ดังนี้

$$k_{INT} = \frac{2k_S k_L}{(k_S + k_L)} \quad (3.24)$$

### 3.3.3 การประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

#### 3.3.3.1 วิธี explicit

เมื่อแทน  $f = 0$  ลงในสมการ (3.19) จะได้สมการพีชคณิตในรูปแบบ explicit หรือ Euler forward วิธีนี้ประมาณพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาแบบผลต่างไปข้างหน้า (forward difference) กล่าวคือเป็นการใช้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาที่ช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n$  ในการคำนวณค่าตัวแปรที่ช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n + 1$  จึงก่อให้เกิดสมการเดียวที่สามารถนำไปใช้ในการคำนวณได้โดยตรง และจะได้ผลลัพธ์ที่มีอันดับความผิดพลาดที่แปรผันตาม  $\Delta t$  หรือมี the first-order temporal accuracy อย่างไรก็ตามวิธี explicit มีข้อจำกัดเรื่องขนาดช่วงเวลา

เนื่องจากหนึ่งในกฎพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Patankar, 1980; Versteeg and Malalasekera, 1995) ระบุว่า สัมประสิทธิ์ทุกตัวใน discretised equation (3.19) ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน เช่น เป็นบวกทุกค่า ดังนั้นจึงต้องการ

$$a_p^0 - \sum a_{nb} > 0 \quad (3.25)$$

เมื่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าคงที่  $k$  และ การแบ่งกริดแบบสม่ำเสมอ (uniform grid spacing) หรือ  $(\delta x)_e = (\delta x)_w = \Delta x$  และ  $(\delta y)_n = (\delta y)_s = \Delta y$  จะได้เงื่อนไขของการจำกัดขนาดช่วงเวลา คือ

$$\Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k}, \quad \text{สำหรับปัญหา 1 มิติ} \quad (3.26)$$

และ

$$\Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2k((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}, \quad \text{สำหรับปัญหา 2 มิติ} \quad (3.27)$$

หากใช้ช่วงเวลาขนาดใหญ่กว่าตามที่กำหนดในข้อจำกัดจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ลู่ออก (diverge)

#### 3.3.3.2 วิธี Crank-Nicolson

วิธี Crank-Nicolson เป็นการใช้ค่าเฉลี่ยของพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาที่ช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n$  และ  $n + 1$  โดยแทนค่า  $f = 1/2$  ลงในสมการ (3.19) และเมื่อประยุกต์สมการเข้ากับทุกจุดต่อภายในบริเวณของปัญหา จะก่อให้เกิดระบบสมการแบบสามแถวแยง (tridiagonal system) การใช้วิธีนี้เนื่องจากการแบ่งย่อยแบบตรงกลาง (central-divided-

difference) ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จะมีอันดับความผิดพลาดขึ้นอยู่กับ  $\Delta t^2$  หรือมี the second-order temporal accuracy และเพื่อความสอดคล้องกับกฎพื้นฐานเรื่องสัมประสิทธิ์ทุกตัวของ discretised equation ต้องมีค่าเป็นบวก จึงต้องการ

$$a_p^0 - \sum \frac{a_{nb}}{2} > 0 \quad (3.28)$$

ซึ่งนำไปสู่ข้อจำกัดของขนาดช่วงเวลา แต่เป็นข้อจำกัดที่ไม่เข้มงวดเท่าวิธี explicit โดยการใช้ช่วงเวลาขนาดใหญ่อาจทำให้เกิดการสั่น (oscillation) ของผลลัพธ์

### 3.3.3.3 วิธี fully implicit

วิธี fully implicit หรือ Euler backward เป็นการแทนค่า  $f = 1$  ในสมการ (3.19) ซึ่งเปรียบเสมือนวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference) ที่มีอันดับความผิดพลาดขึ้นอยู่กับ  $\Delta t$  หรือมี the first-order temporal accuracy โดยเป็นการใช้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาที่ช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n + 1$  ในการคำนวณค่าตัวแปรที่ช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n + 1$  และเมื่อประยุกต์สมการเข้ากับทุกจุดต่อภายในบริเวณของปัญหา จะก่อให้เกิดระบบสมการแบบสามแถวแยง (tridiagonal system) ในลักษณะที่คล้ายคลึงกับวิธี Crank-Nicolson แต่การใช้วิธีนี้ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่เกิดการลู่ออกหรือการสั่นเนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ discretised equation ทุกตัวไม่มีโอกาสเป็นค่าลบ จึงสอดคล้องกับกฎพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูมในทุกขนาดของช่วงเวลา และได้ผลลัพธ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง (smooth solution) อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาที่ช่วงเวลาน้อยๆ ผลลัพธ์จะมีความแม่นยำน้อยกว่าแบบอื่นๆ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2537: 284, 2538: 391)

## 3.4 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดค่าเริ่มต้น และเนื่องจากสมการ (3.19) เป็น discretised equation ของจุดต่อภายใน ในขณะที่จุดต่อที่อยู่ติดขอบเขตจะต้องพิจารณาลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตด้วย จึงต้องมีการพิจารณาต่างหาก

### 3.4.1 เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

ก่อนเริ่มต้นการคำนวณ กำหนดให้ตัวนับจำนวนเวลา  $n$  เท่ากับ 0 และตัวแปรตาม (dependent variables) ทุกตัวให้มีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้นของตัวแปรนั้นๆ



### 3.4.2 เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

#### 3.4.2.1 เงื่อนไขขอบเขตมีอุณหภูมิคงที่ (Dirichlet boundary condition)

การมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นอุณหภูมิคงที่  $T_c$  อุณหภูมิจุดต่อที่ขอบเขตจึงทราบค่าแล้วและสามารถนำไปใช้ได้ทันที ตัวแปรตาม (dependent variables) ในสมการ (3.19) จึงถูกแทนที่ด้วยอุณหภูมิขอบเขตที่กำหนด ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับสัมประสิทธิ์ของจุดต่อข้างเคียง (discretised neighboring coefficient)  $a_{nb}$  ที่สัมพันธ์กันจะกลายเป็นอัตราการถ่ายเทความร้อนข้ามขอบเขตปริมาตรที่ทราบค่าซึ่งถือว่าเป็น source term  $b$  ตัวหนึ่งที่ผลักดันให้เกิดการถ่ายเทความร้อนขึ้นในระบบ ได้สมการดังนี้

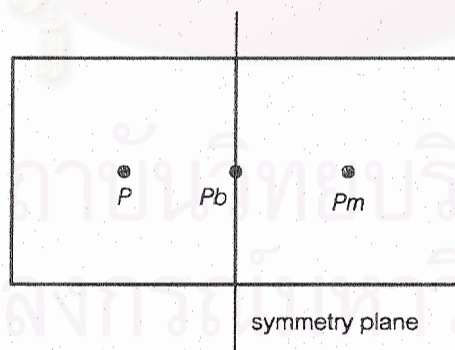
$$a_p T_p = \sum a_{nb} (f T_{nb} + (1-f) T_{nb}^0) + (a_p^0 - \sum (1-f) a_{nb}) T_p^0 + b \quad (3.29)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ของจุดต่อข้างเคียง  $a_{nb}$  ที่แสดงในสมการเป็น  $a_{nb}$  สำหรับจุดต่อข้างเคียงที่เป็นจุดต่อภายใน

#### 3.4.2.2 เงื่อนไขขอบเขตจากความสมมาตรของปัญหา (symmetry plane)

การใช้เงื่อนไขขอบเขตจากความสมมาตรนี้ จะถือว่าไม่มีการถ่ายเทความร้อนในแนวตั้งฉากกับขอบสมมาตร กล่าวคือ ผลลัพธ์เป็นเสมือนภาพสะท้อน (mirror image) ที่เส้นแบ่งครึ่งสมมาตร

รูปร่าง (geometry) และค่าตัวแปรตาม (dependent variables) ที่จุดต่อตามแนวเส้นแบ่งครึ่งสมมาตรจะถือว่าเป็นขอบเขต (boundary nodes)  $P_b$  และถูกแทนที่ด้วยค่าจากภาพสะท้อน (mirror control volume)  $P_m$  และขอบเขตจะเป็นเสมือนผิวของจุดต่อภายใน (รูปที่ 3.6)



รูปที่ 3.6 ตัวอย่างภาพสะท้อนของพื้นที่ที่มีความสมมาตรสำหรับปริมาตรควบคุมสองมิติ

เนื่องจากไม่มีการถ่ายเทความร้อนในแนวตั้งฉากกับขอบสมมาตร จึงได้

$$T_{P_b} = T_{P_m} = T_P \quad (3.30)$$

### 3.5 หลักการคิดวิธี fictitious latent heat

วิธี fictitious latent heat ที่เสนอนี้จะคล้ายคลึงกับวิธี fictitious heat flow ในหัวข้อ 2.2.2.2.3 คือกำหนดค่าความร้อนแฝง (latent heat) ขึ้นมาจากการประมาณให้มีค่าเท่ากับค่าความร้อนสัมผัสสมมุติ (fictitious sensible heat) เพื่อใช้ในการตรวจสอบสถานะของปัญหา แต่มีข้อแตกต่างกันคือในหัวข้อ 2.2.2.2.3 อัลกอริทึมที่แสดงนั้นสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งได้กำหนดพจน์ความร้อนแฝงให้เป็น fictitious heat flow vector และแก้ระบบสมการด้วยการทำซ้ำ (iteration) เพื่อหาค่าความร้อนแฝงดังกล่าว ในขณะที่ในงานวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยขอเสนอการคำนวณค่าความร้อนแฝงจากค่าความร้อนสัมผัสสมมุติ กล่าวคือ ทำการหาค่าอุณหภูมิสมมุติสำหรับจุดต่อที่กำลังจะเปลี่ยนสถานะขึ้นมาก่อน แล้วจึงใช้ค่าอุณหภูมิที่หาได้ในการคำนวณค่าความร้อนแฝง โดยมีขั้นตอนการคำนวณโดยสังเขปดังนี้

#### 3.5.1 ขั้นตอนการคำนวณ

1. กำหนดค่าความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะของปริมาตรควบคุมหนึ่งๆ  $Q_{tot,P}$  ด้วยการอินทิเกรต  $\rho L$  ตลอดปริมาตรควบคุม

$$Q_{tot,P} = \int_V \rho L dV \quad (3.31)$$

2. กำหนดค่าเริ่มต้นของความร้อนแฝงสะสม  $Q_{lat,P}$  ให้มีค่าเท่ากับศูนย์ สถานะของสาร  $phase_p$  เป็นของเหลว และอุณหภูมิจุดต่อ  $T_p$  เท่ากับอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i$

$$Q_{lat,P} = 0 \quad (3.32)$$

$$phase_p = liquid \quad (3.33)$$

$$T_p = T_i \quad (3.34)$$

3. ที่เวลาเริ่มต้นของแต่ละช่วงเวลา แทนค่าความร้อนแฝงสะสมที่เวลาเดิมเมื่อเทียบกับเวลาปัจจุบัน  $Q_{lat,P}^0$  และอุณหภูมิที่เวลาเดิม  $T_p^0$  ด้วยค่าความร้อนแฝงสะสมและค่าอุณหภูมิที่ได้จากช่วงเวลาที่ผ่านมา

$$Q_{lat,P}^0 = Q_{lat,P} \quad (3.35)$$

$$T_p^0 = T_p \quad (3.36)$$

#### 4. ตรวจสอบสถานะของแต่ละจุดต่อ

a) ถ้าปริมาตรควบคุมใดมีสถานะเป็นของเหลว และอุณหภูมิจุดต่อที่เวลาเดิมมีค่าผ่านอุณหภูมิเยือกแข็ง จะกำหนดให้สถานะของปริมาตรควบคุมนั้นเป็น saturated และอุณหภูมิจุดต่อที่เวลาเดิมมีค่าเท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง

$$\begin{aligned} \text{if } \text{phase}_p &= \text{liquid and } T_p^0 \leq T_F \text{ then} \\ \text{phase}_p &= \text{saturated} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$T_p^0 = T_F \quad (3.38)$$

b) ถ้าปริมาตรควบคุมใดมีสถานะเป็น saturated และปริมาณความร้อนแฝงสะสมมีค่าเท่ากับปริมาณความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะของจุดต่อ จะได้ว่าปริมาตรควบคุมนั้นๆ จะมีการเปลี่ยนสถานะเป็นของแข็ง และค่าปริมาณความร้อนแฝงสะสมจะไม่มีเปลี่ยนแปลงอีกต่อไป

$$\begin{aligned} \text{if } \text{phase}_p &= \text{saturated and } Q_{lat,P} \geq Q_{tot,P} \text{ then} \\ \text{phase}_p &= \text{solid} \end{aligned} \quad (3.39)$$

5. ปรับค่าสัมประสิทธิ์ของ discretised equation ตามสถานะของแต่ละจุดต่อ

6. คำนวณหาค่าอุณหภูมิที่แต่ละจุดต่อ  $T_p$

7. ถ้าปริมาตรควบคุมมีสถานะเป็น saturated จะทำการคำนวณค่าความร้อนแฝงด้วยขั้นตอนต่อไปนี้ คือ คำนวณค่าความแตกต่างของความร้อนแฝงในแต่ละช่วงเวลาจากปริมาณความร้อนสัมผัสสมมติ

$$\Delta Q_{lat,P} = \int_V \rho c_L (T_p - T_F) dV \quad (3.40)$$

แล้วคำนวณค่าความร้อนแฝงสะสมจาก

$$Q_{lat,P} = Q_{lat,P}^0 + \Delta Q_{lat,P} \quad (3.41)$$

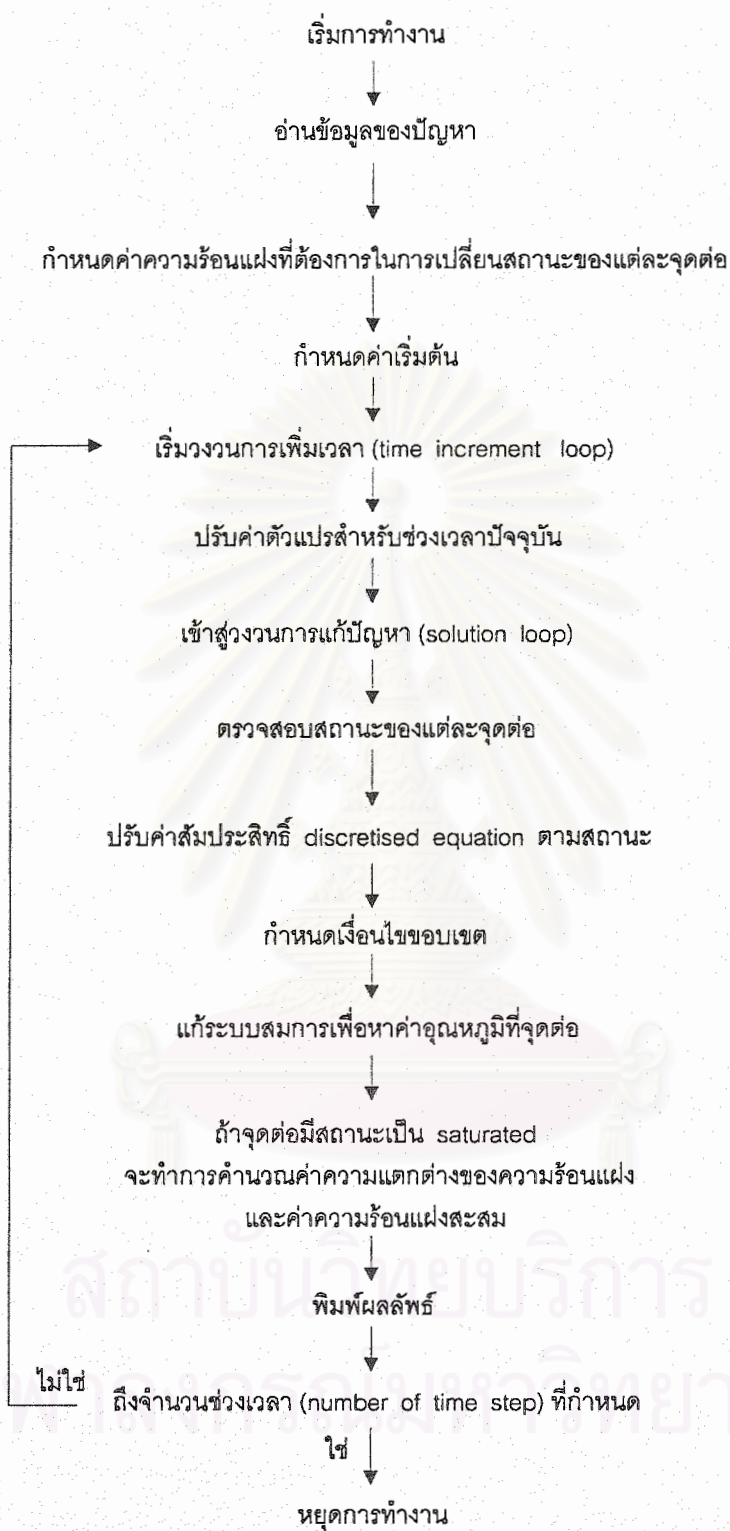
และปรับค่าอุณหภูมิที่จุดต่อให้มีค่าเท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง

$$T_p = T_F \quad (3.42)$$



### 3.6 ขั้นตอนการหาคำตอบ

ในการหาคำตอบจะเริ่มจากอ่านข้อมูลของปัญหา แบ่งรูปร่างปัญหาเป็นปริมาตรย่อยๆ (control volume) แบ่งเวลาทั้งหมดเป็นช่วงเวลา (time step) กำหนดค่าความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะของแต่ละจุดต่อ กำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรต่างๆ แล้วทำการคำนวณในแต่ละช่วงเวลา โดยเริ่มจากตรวจสอบสถานะของจุดต่อซึ่งพิจารณาได้จากสถานะและอุณหภูมิที่เวลาเดิม แล้วปรับค่าสัมประสิทธิ์ของ discretised equation ตามสถานะ และถ้าปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกันมีสถานะต่างกันจะทำการปรับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ หลังจากนั้นทำการคำนวณหาค่าอุณหภูมิที่จุดต่อโดยใช้สมการ (3.19) ในการแก้ระบบสมการ สำหรับวิธี explicit สามารถแก้สมการเดี่ยวได้เนื่องจากสมการของแต่ละจุดต่ออ้างอิงจากค่าที่ทราบแล้วจากเวลาเดิม (ที่ช่วงเวลาการคำนวณครั้งที่  $n$ ) ในการประมาณค่าที่เวลาใหม่ (ที่ช่วงเวลาการคำนวณครั้งที่  $n + 1$ ) สำหรับวิธี Crank-Nicolson และ วิธี fully implicit สมการแต่ละจุดต่ออ้างอิงค่าที่ยังไม่ทราบที่เวลาใหม่ด้วย จึงต้องแก้ระบบสมการ วิธีในการแก้ระบบสมการที่เลือกใช้ คือวิธี TDMA (tri-diagonal matrix algorithm) ซึ่งสามารถแก้ระบบสมการได้โดยตรงสำหรับปัญหา 1 มิติ และแก้ระบบสมการด้วยวิธีการทำซ้ำ (iterative scheme) จากการใช้เทคนิค line-by-line สำหรับปัญหา 2 มิติ และถ้าหากสถานะของจุดต่อเป็น saturated จะทำการคำนวณค่าความร้อนแฝงจากค่าความร้อนสัมผัสสมมุติ กระบวนการหาคำตอบนี้จะทำซ้ำจนครบเวลา ดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 ผังงานแบบง่าย (simple flow chart)

## บทที่ 4

### การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

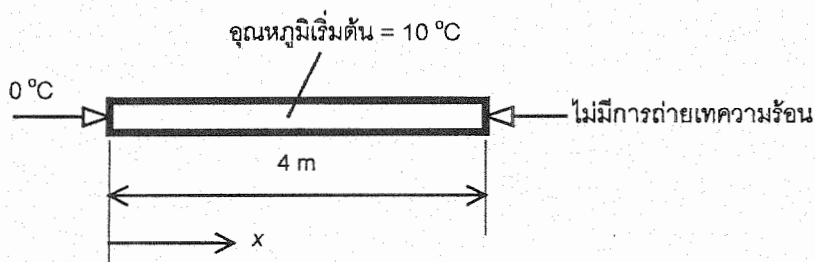
#### กรณี 1 มิติ

เนื่องจากการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ดังนั้นในที่นี้จะทดสอบกับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว (transient heat conduction problem) และปัญหาการเปลี่ยนสถานะ (phase change problem) ตามเงื่อนไขของผลเฉลยแม่นยำ เมื่อผลที่ได้สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำของปัญหานั้นๆ จึงสามารถนำโปรแกรมไปใช้ในปัญหาอื่นๆ ที่ไม่มีผลเฉลยแม่นยำได้

สำหรับบทนี้จะเสนอการตรวจสอบโปรแกรมกับปัญหา 1 มิติ โดยจะทำการเปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากการวิเคราะห์สมการอนุพันธ์โดยตรง สำหรับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มจะแสดงผลที่ได้จากการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาสามวิธี คือ explicit, Crank-Nicolson และ fully implicit schemes และสำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะมีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะเพิ่มเติมโดยเสนอการประมาณ 3 รูปแบบ คือ ประมาณให้เท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว สำหรับคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมวลผล คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล Pentium III 733 MHz

#### 4.1 การนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว

การทดสอบโปรแกรมสำหรับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว 1 มิติ กำหนดให้ที่เวลาเริ่มต้น  $t_0 = 0$  s มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i = 10$  °C สม่่าเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่  $T_c = 0$  °C และเนื่องจากสมการผลเฉลยแม่นยำสำหรับปัญหานี้ดังที่แสดงในภาคผนวก ก.1 เป็นผลเฉลยสำหรับปัญหาที่มีความยาวเป็นระยะกึ่งอนันต์ (semi-infinite length) ในที่นี้จึงกำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมด 8 m และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาเพียงครึ่งหนึ่งคือ ความยาว 4 m ดังรูปที่ 4.1a โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน คุณสมบัติของสาร ซึ่งในที่นี้คือ น้ำ ได้แก่ ค่าการนำความร้อน  $k = 0.556$  W/(m·K) ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c = 4.226$  kJ/(kg·K) ค่าความหนาแน่น  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>



(a) รูปร่างหนึ่งครึ่งหนึ่งของปัญหา เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต



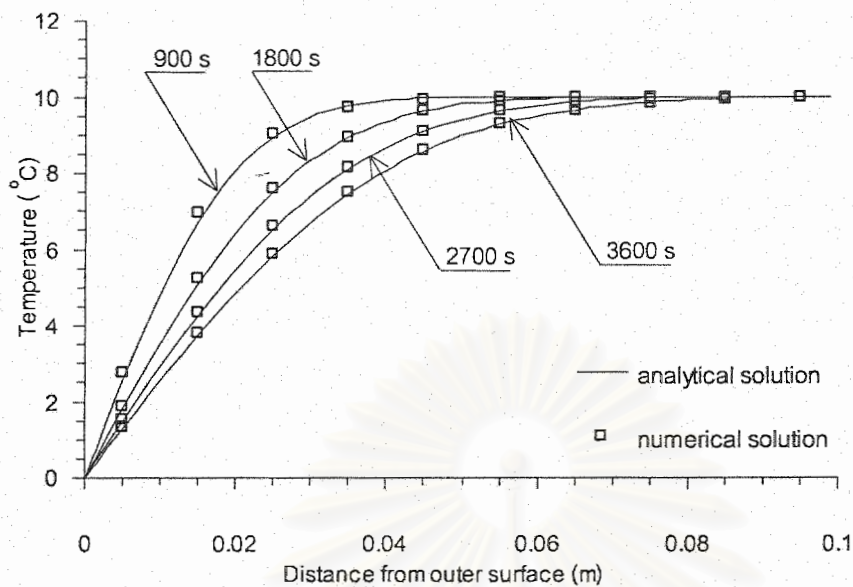
(b) ตัวอย่างการแบ่งกริด

รูปที่ 4.1 ปัญหาการนำความร้อนในสถานะชั่วคราวหนึ่งมิติ: (a) ครึ่งหนึ่งของรูปร่างของปัญหาซึ่งมีความสมมาตร เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต และ (b) ตัวอย่างการแบ่งกริด

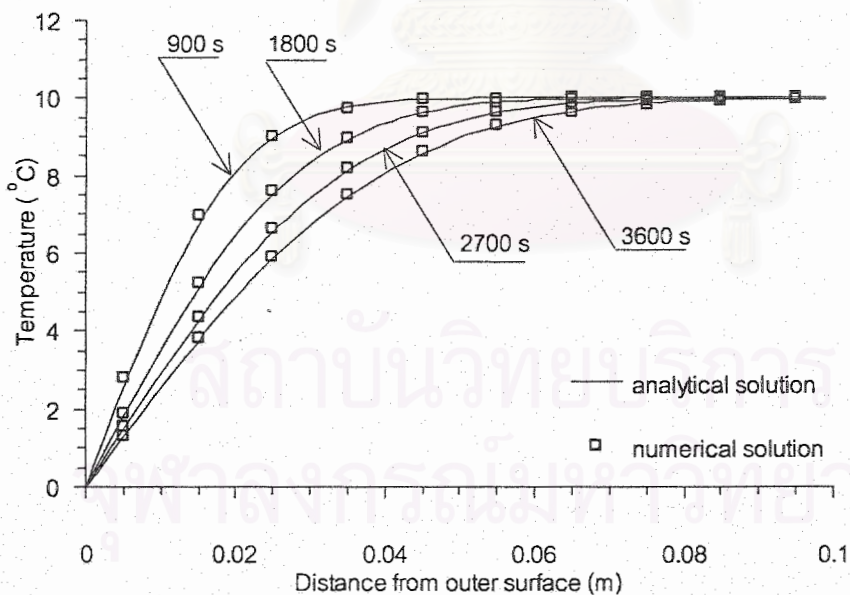
การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ตามความยาวให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาด  $\Delta x$  เท่ากัน (uniform control volumes) ดังรูปที่ 4.1b ในการเปรียบเทียบได้พิจารณาผลของวิธีการในการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ได้แก่ explicit Crank-Nicolson และ fully implicit schemes ด้วยการกระจายของอุณหภูมิ (หัวข้อ 4.1.1) ที่เวลา 900, 1800, 2700 และ 3600 s และการกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด (หัวข้อ 4.1.2) นอกจากนี้ได้พิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ กัน (grid and time step dependency) ในหัวข้อ 4.1.3 ด้วยการใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างๆ กัน คือ 200, 400, 600 และ 800 cells และ ช่วงเวลา  $\Delta t$  ขนาดต่างๆ คือ 900, 100, 10 และ 1 s

#### 4.1.1 การกระจายของอุณหภูมิ

การกระจายของอุณหภูมิ สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่ละวิธี เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาตามที่ ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.2-4.4 ดังนี้

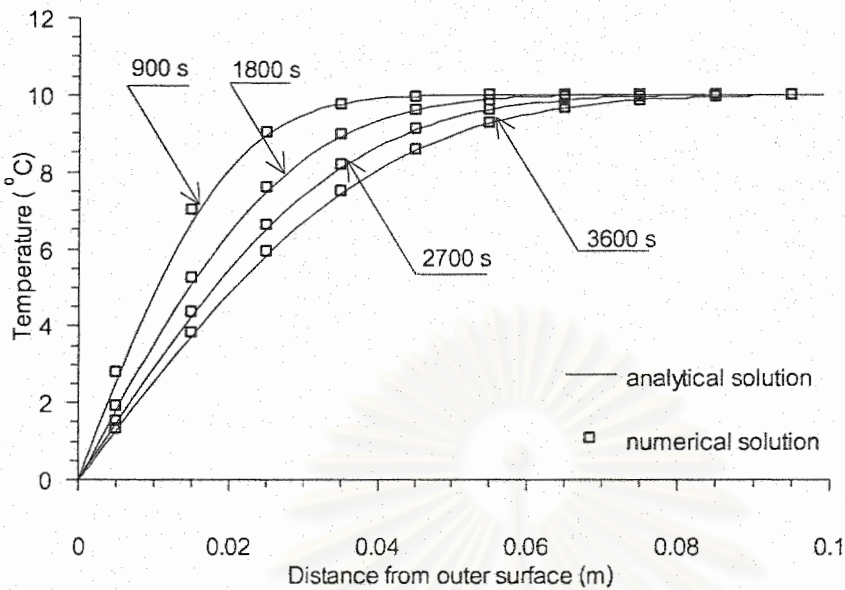


รูปที่ 4.2 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells  $\Delta t = 10$  s และใช้วิธี explicit



รูปที่ 4.3 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells  $\Delta t = 10$  s และใช้วิธี Crank-Nicolson



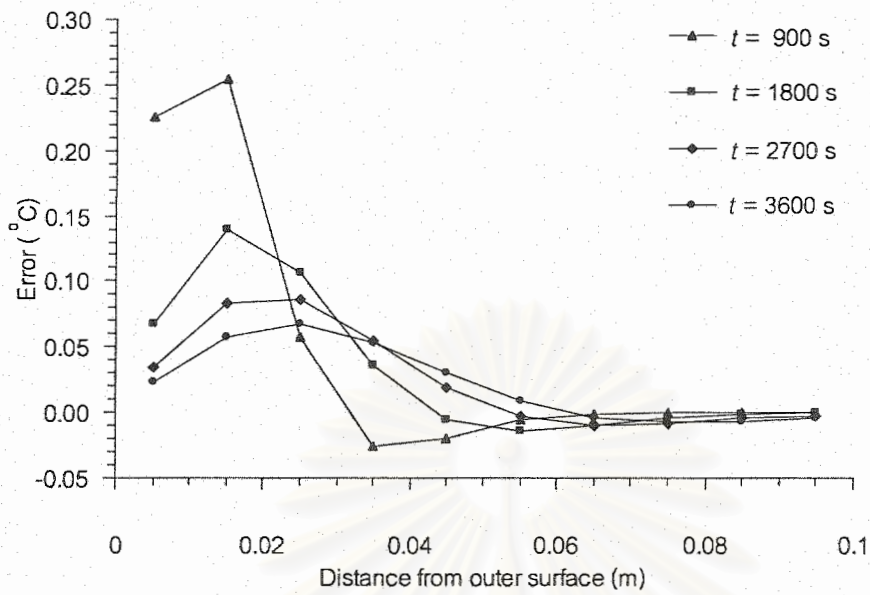


รูปที่ 4.4 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells  $\Delta t = 10$  s และใช้วิธี fully implicit

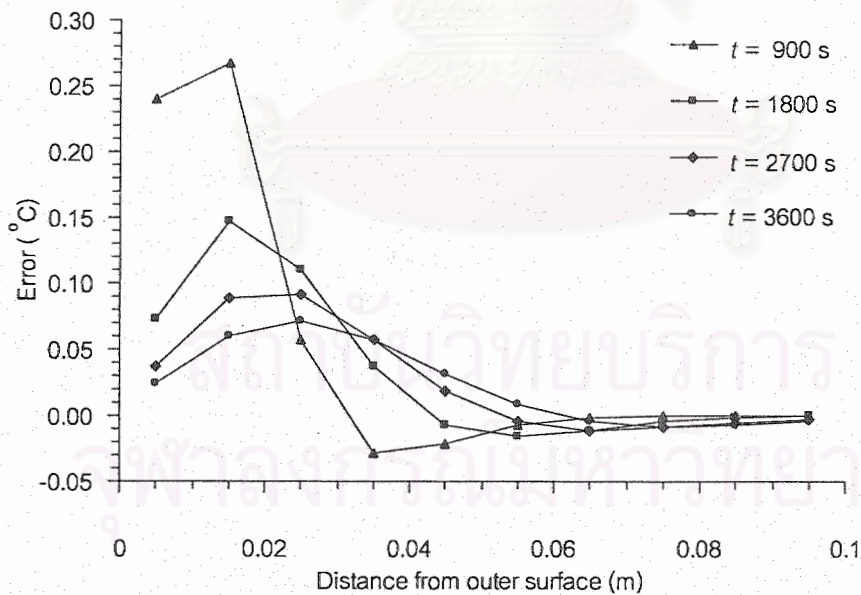
จะเห็นว่าการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทั้งสามวิธีให้ผลการกระจายของอุณหภูมิโดยประมาณมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมาก

#### 4.1.2 การกระจายของค่าความผิดพลาดและค่าความผิดพลาดมากที่สุด

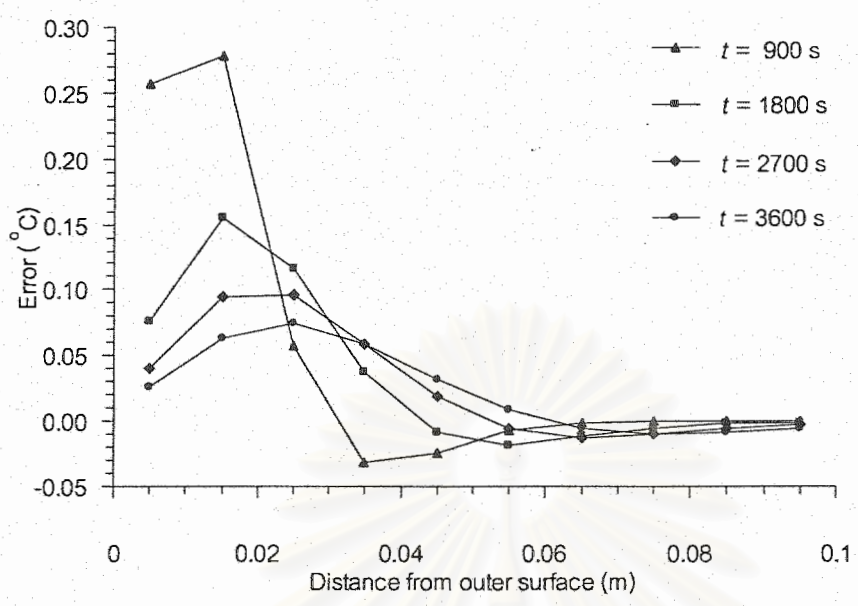
ผลการกระจายของค่าความผิดพลาด ( $T_{P,numerical} - T_{P,analytical}$ ) ตามแกน  $x$  สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่ละวิธี เมื่อใช้  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  คงที่ ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.5-4.7 และพบว่าแนวโน้มของค่าความผิดพลาดทั้งสามวิธีมีลักษณะเหมือนกัน คือมีค่ามากที่สุดที่บริเวณใกล้ขอบและมีค่าลดลงตามเวลา เนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างอุณหภูมิที่ขอบและอุณหภูมิภายในทำให้ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (temperature gradient) มีค่าสูงในช่วงเวลาแรกๆ แต่เมื่อเวลามากขึ้นความแตกต่างของอุณหภูมิดังกล่าวมีค่าลดลง จึงทำให้ค่าความผิดพลาดมากที่สุด  $\max(T_{P,numerical} - T_{P,analytical})$  มีค่าลดลงตามเวลา ดังแสดงในรูปที่ 4.8



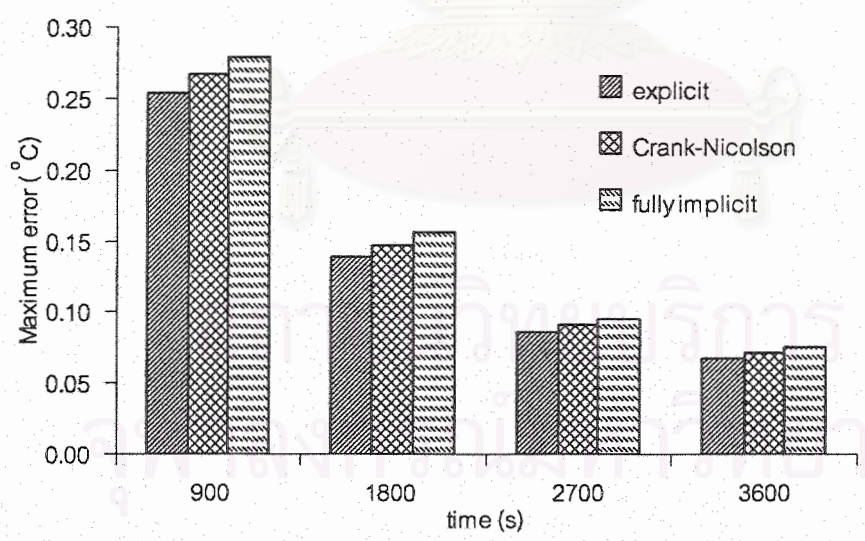
รูปที่ 4.5 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาด เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells  $\Delta t = 10$  s และใช้วิธี explicit



รูปที่ 4.6 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาด เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells  $\Delta t = 10$  s และใช้วิธี Crank-Nicolson



รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาด เมื่อจำลองแบบด้วย 400 cells  $\Delta t = 10$  s และใช้วิธี fully implicit

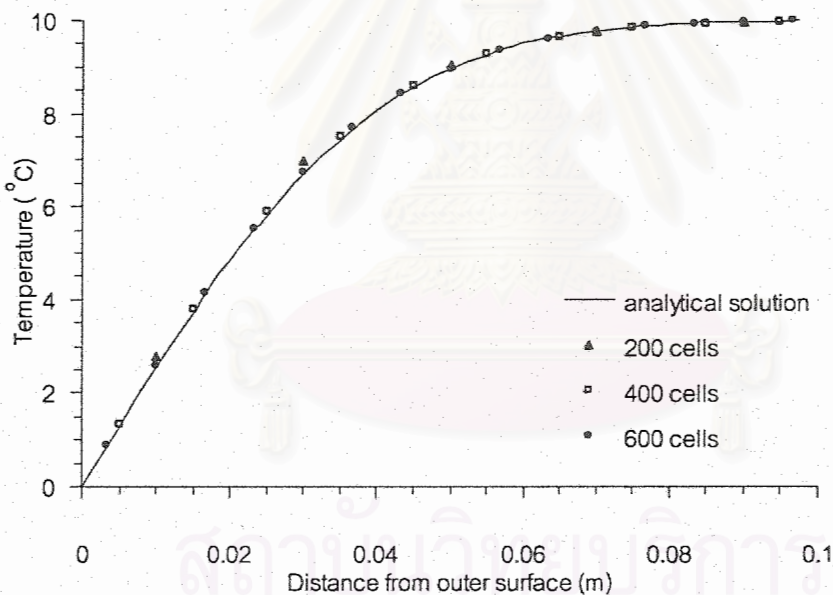


รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้ time-stepping scheme ต่างๆ โดยการจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s

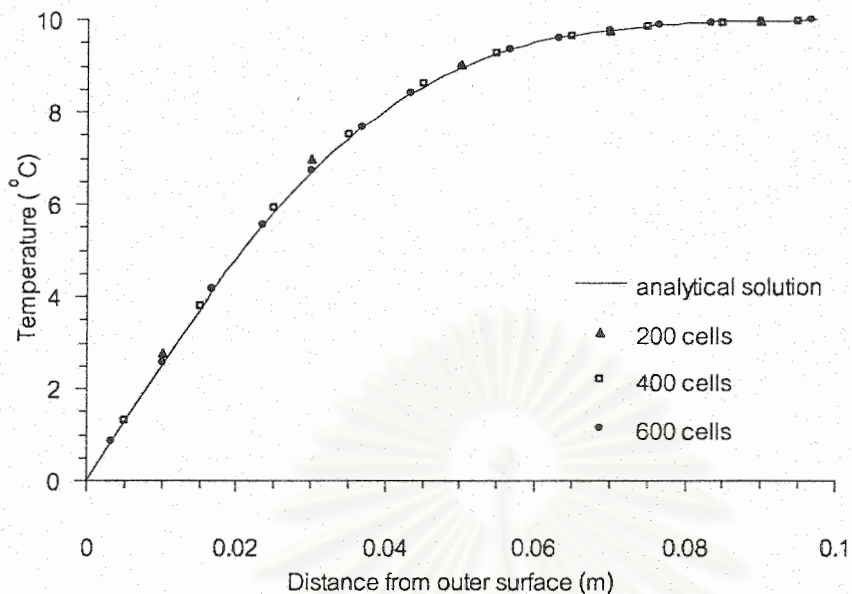
#### 4.1.3 การพิจารณาปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ

ในการพิจารณาผลของขนาดปริมาตรควบคุม  $\Delta x$  ที่มีต่อผลลัพธ์ด้วยการใช้จำนวนปริมาตรควบคุม (control volumes or cells) ต่างๆ กัน ได้แก่ 200, 400 และ 600 cells โดยที่ใช้ช่วงเวลา  $\Delta t = 10$  s สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่ละวิธีได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.9-4.11 พบว่า สำหรับทั้งสามวิธี การแบ่งกริดแบบหยาบที่ใช้ 200 cells ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกันกับผลเฉลยแม่นยำตรง และการใช้กริดแบบละเอียดจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นเนื่องจากการ discretisation มีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามระยะทางให้มีโพรไฟล์เชิงเส้นตรง จึงทำให้มีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม  $\Delta x^2$  หรือมี the second-order spatial accuracy

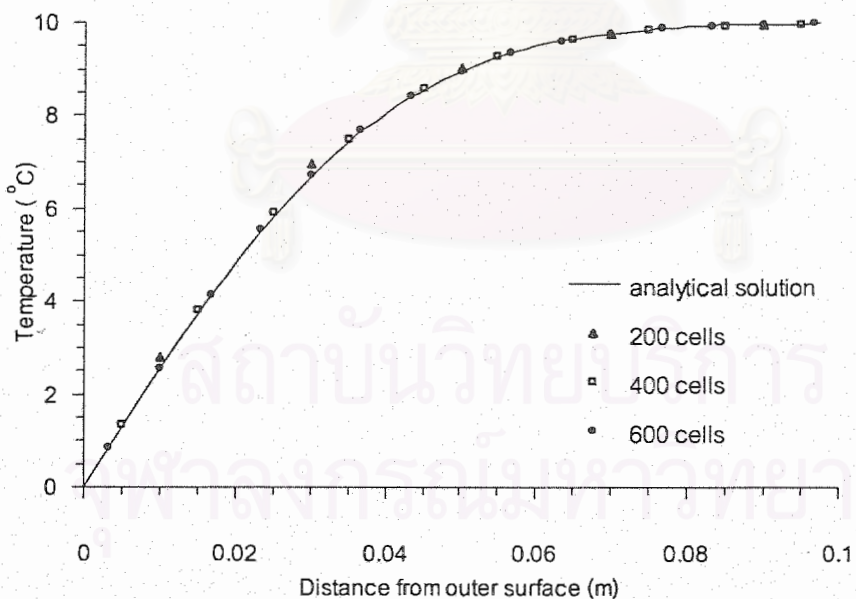
ส่วนตารางที่ 4.1 เป็นตารางสรุปค่าความผิดพลาดมากที่สุด และ เวลาที่ใช้ในการประมวล (CPU time) เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างๆ กัน และ ช่วงเวลาขนาดต่างๆ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละวิธี



รูปที่ 4.9 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ ที่  $t = 3600$  s เมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 4.10 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ ที่  $t = 3600$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s

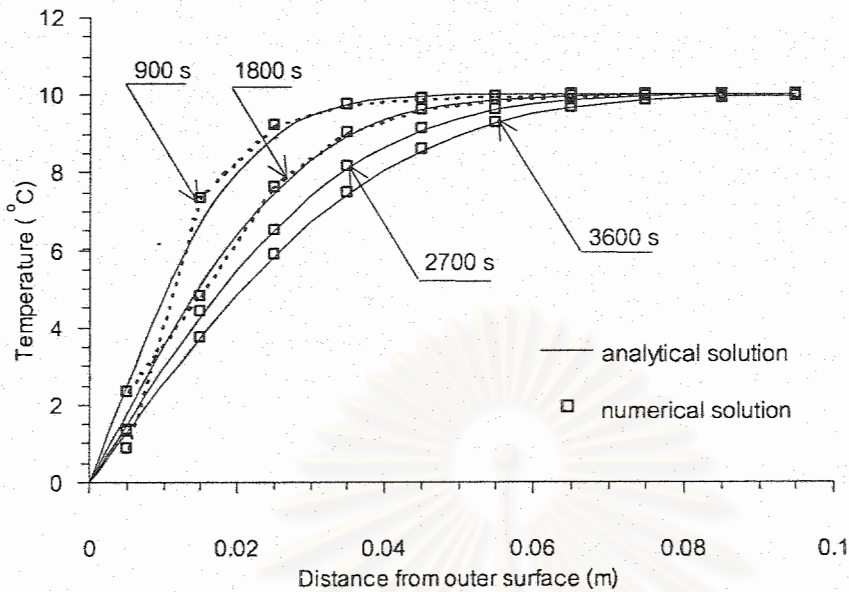


รูปที่ 4.11 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณ ที่  $t = 3600$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s

ตารางที่ 4.1 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุด และเวลาในการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่  $t = 3600$  s สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราวหนึ่งมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme จำนวน cells และ  $\Delta t$  ต่างๆ กัน

scheme	number of cells	maximum error ( $^{\circ}\text{C}$ ) at $t = 3600$ s				CPU time (s)			
		$\Delta t = 900$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s	$\Delta t = 900$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s
explicit	200	0.0758	0.2355	0.2636	0.2663	1.71	1.75	1.92	2.36
	400	diverge	0.0316	0.0670	0.0705	2.58	2.64	2.75	3.41
	600	diverge	-0.008	0.0270	0.0305	diverge	3.58	3.79	4.67
	800	diverge	diverge	0.0133	0.0168	diverge	diverge	4.99	5.55
Crank-Nicolson	200	0.2562	0.2665	0.2666	0.2666	1.54	1.64	1.98	2.14
	400	0.0775	0.0706	0.0709	0.0709	2.36	2.36	2.91	3.95
	600	-0.862	0.0306	0.0309	0.0309	3.60	3.67	3.90	4.89
	800	0.0052	0.0168	0.0172	0.0172	4.01	4.55	4.84	6.75
fully implicit	200	0.6168	0.2963	0.2697	0.2669	1.54	1.82	1.92	2.09
	400	0.4020	0.1098	0.0748	0.0713	2.37	2.64	2.80	3.68
	600	0.3689	0.0698	0.0348	0.0313	3.55	3.65	3.81	5.00
	800	0.3577	0.0558	0.0210	0.0176	4.28	4.61	4.72	6.16

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นว่าแม้การแบ่งกริดแบบละเอียดเช่นใช้ 800 cells จะให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำมากกว่าการแบ่งกริดแบบหยาบเช่นใช้ 400 cells แต่อย่างไรก็ตามจะต้องการเวลาในการประมวลผลมากขึ้นเพราะจุดต่อที่ต้องพิจารณามีจำนวนมากขึ้น นอกจากนี้สำหรับวิธี explicit และ Crank-Nicolson การแบ่งกริดแบบละเอียดยังมีผลต่อค่าจำกัดของขนาดช่วงเวลาให้ต้องมีขนาดเล็กลงด้วยเพื่อความเสถียรภาพ (stability) ของผลลัพธ์ เช่น สำหรับวิธี explicit เมื่อใช้ 400 cells ข้อจำกัดของช่วงเวลาตามสมการ (3.26) คือ  $\Delta t < 380.04$  s แต่เมื่อใช้ 800 cells ข้อจำกัดของช่วงเวลาเป็น  $\Delta t < 95.01$  s และเมื่อพิจารณาว่าการแบ่งกริดเท่ากัน เช่น 400 cells จะเห็นว่าการใช้ขนาดช่วงเวลาขนาดใหญ่ เช่น  $\Delta t = 900$  s ทำให้ผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธี explicit ลู่ออก (diverge) ส่วนผลเฉลยโดยประมาณวิธี Crank-Nicolson มีการสั้นเล็กน้อยเนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ discretised equation ไม่สอดคล้องกับสมการ (3.28) แต่อย่างไรก็ตามไม่เข้มงวดมากจึงมีการสั้นตอนเวลาแรกๆ ที่  $t = 900$  และ  $1800$  s แต่เมื่อเวลามากขึ้นที่  $t = 2700$  และ  $3600$  s ก็จะไม่มีการสั้นดังแสดงตัวอย่างการสั้นด้วยเส้นประในรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 การแสดงตัวอย่างการสั่น (oscillation) ของการกระจายของอุณหภูมิของผลเฉลยโดยประมาณวิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 900$  s

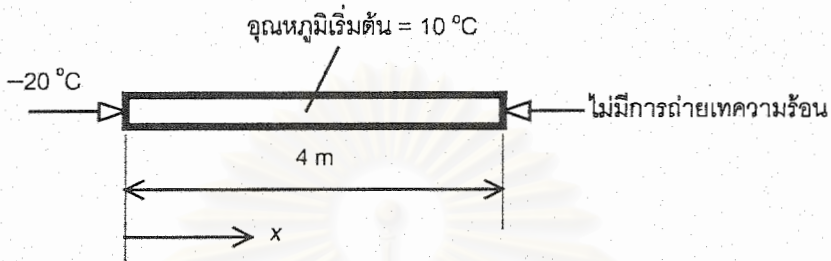
#### 4.1.4 การสรุปผล

ในการทดสอบโปรแกรมกับปัญหาการนำความร้อนสถานะชั่วคราว การประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทุกวิธีให้ผลเฉลยโดยประมาณใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงเมื่อใช้กริดและช่วงเวลาที่มีขนาดเล็ก

## 4.2 การเปลี่ยนสถานะ

การทดสอบโปรแกรมสำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ เป็นการพิจารณาปัญหาที่เวลาเริ่มต้น  $t_0 = 0$  s มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i = 10$  °C สมำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิตลอดที่  $T_c = -20$  °C และเนื่องจากสมการผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้ในภาคผนวก ก.2 เป็นผลเฉลยสำหรับปัญหาที่มีความยาวเป็นระยะกึ่งอนันต์ (semi-infinite length) ในที่นี้ จึงกำหนดความยาวทั้งหมด 8 m และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาเพียงครึ่งหนึ่ง คือ ความยาว 4 m ดังรูปที่ 4.13a โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน คุณสมบัติของสสารซึ่งในที่นี้คือ น้ำ ในสถานะของเหลวมีค่าการนำความร้อน  $k_L = 0.556$  W/(m·K) ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c_L = 4.226$

$\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  ค่าความหนาแน่น  $\rho_L = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$  สำหรับสถานะของแข็งมีค่าการนำความร้อน  $k_s = 2.220 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c_s = 1.762 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  และ ค่าความหนาแน่น  $\rho_s = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$  ปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง  $L = 338 \text{ kJ}/\text{kg}$  และ อุณหภูมิเยือกแข็ง  $T_F = 0^\circ\text{C}$



(a) รูปร่างหนึ่งครั้งหนึ่งของปัญหา เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต



(b) ตัวอย่างการแบ่งกริด

รูปที่ 4.13 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ: (a) ครั้งหนึ่งของรูปร่างของปัญหาซึ่งมีความสมมาตร เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต และ (b) ตัวอย่างการแบ่งกริด

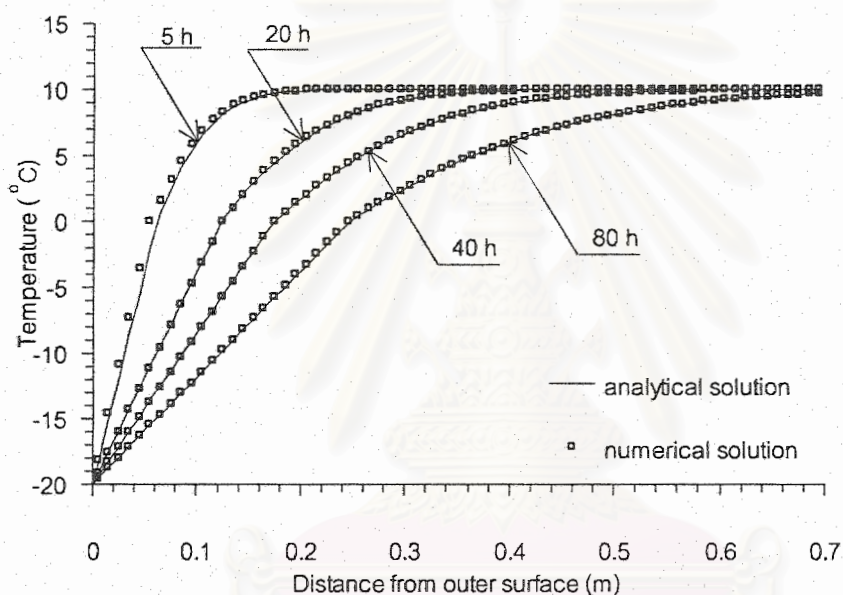
ในการจำลองแบบได้แบ่งกริด (grid) ตามความยาวให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาด  $\Delta x$  เท่ากัน ดังรูปที่ 4.13b สำหรับการเปรียบเทียบที่เพิ่มเติมจากที่พิจารณาในปัญหา 4.1 คือการพิจารณารูปแบบการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ  $k_{int}$  แบบต่าง ๆ คือ การประมาณให้เท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง  $k_s = 2.220 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว  $k_o = 1.388 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  และ ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว  $k_h = 0.889 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

การกระจายของอุณหภูมิในหัวข้อ 4.2.1 จะถูกวิเคราะห์ที่เวลา 5, 20, 40 และ 80 h และการกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุดในหัวข้อ 4.2.2 ส่วนการพิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ กัน (grid and time step dependency) ด้วยการใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างๆ กัน คือ 200, 400, 600 และ 800 cells และ ช่วงเวลา  $\Delta t$  ขนาดต่างๆ คือ 1000, 100, 10 และ 1 s อยู่ในหัวข้อ 4.2.3



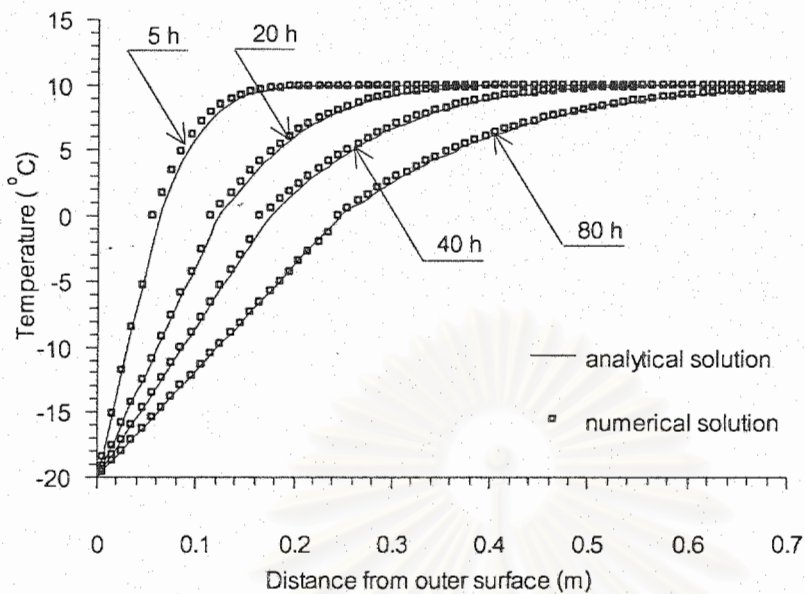
#### 4.2.1 การกระจายของอุณหภูมิ

การกระจายของอุณหภูมิ เมื่อประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ  $k_{INT}$  แบบต่างๆ ได้แก่ การประมาณให้มีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง  $k_s$  ค่าเฉลี่ยเลขคณิต  $k_c$  และ ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว  $k_h$  โดยใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาที่ สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบต่างๆ ได้แก่ วิธี explicit ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.14-4.16 วิธี Crank-Nicolson ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.17-4.19 และ วิธี fully implicit ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.20-4.22 ดังนี้

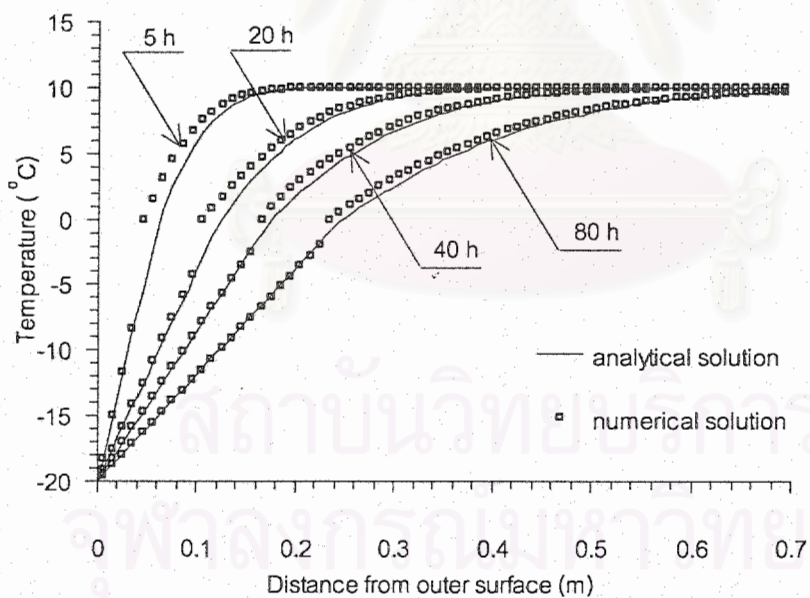


รูปที่ 4.14 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s

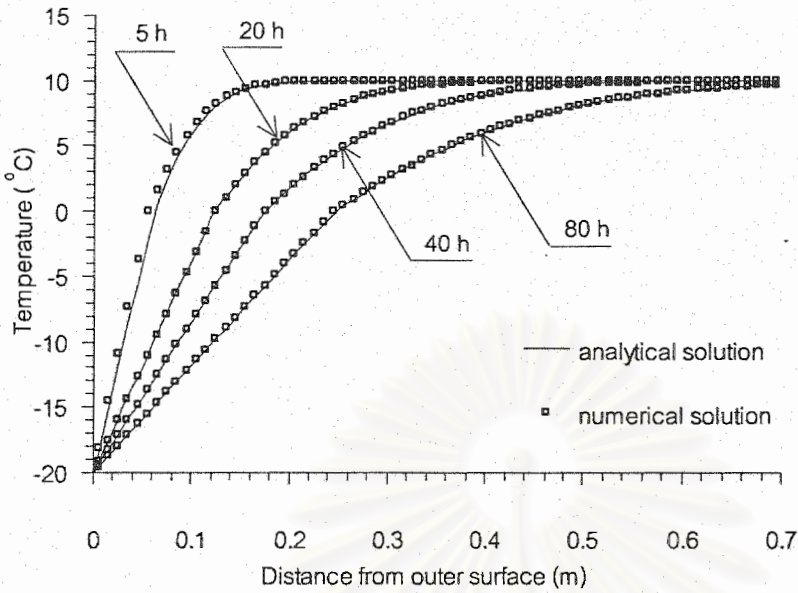
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



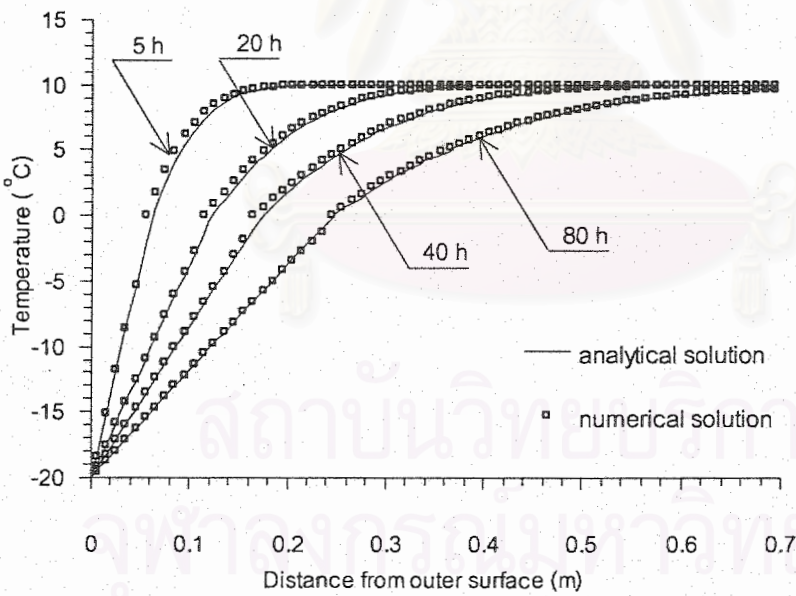
รูปที่ 4.15 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_g$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



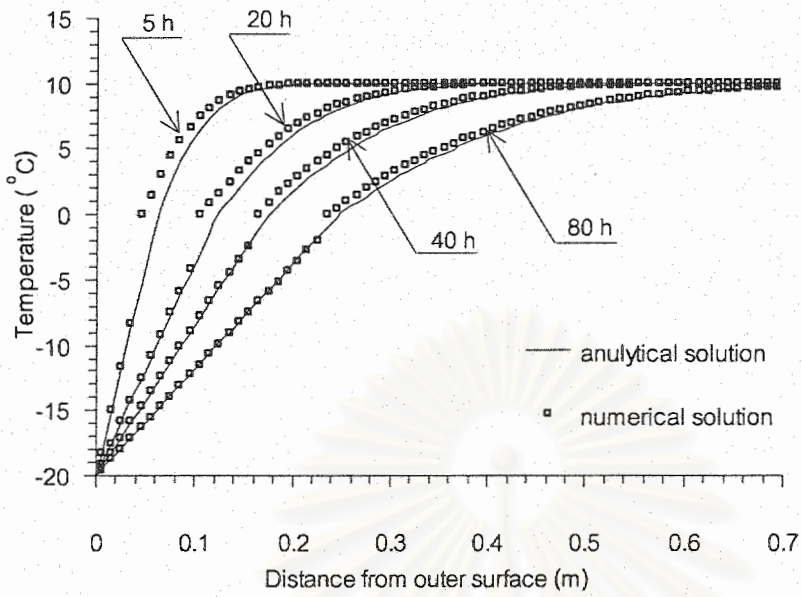
รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_h$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



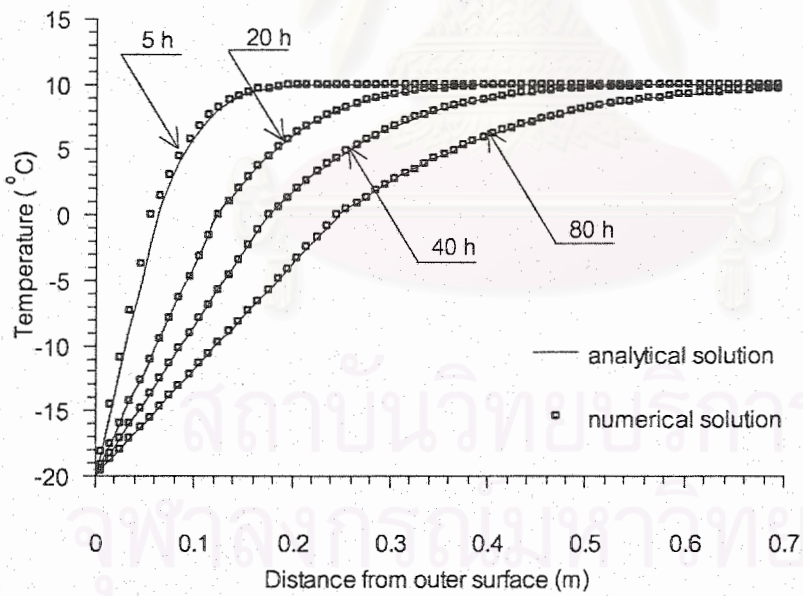
รูปที่ 4.17 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



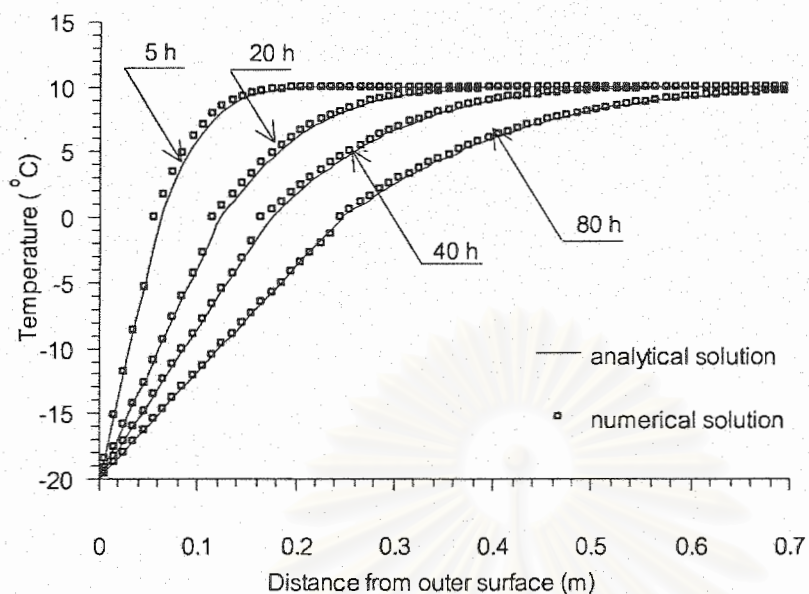
รูปที่ 4.18 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_g$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



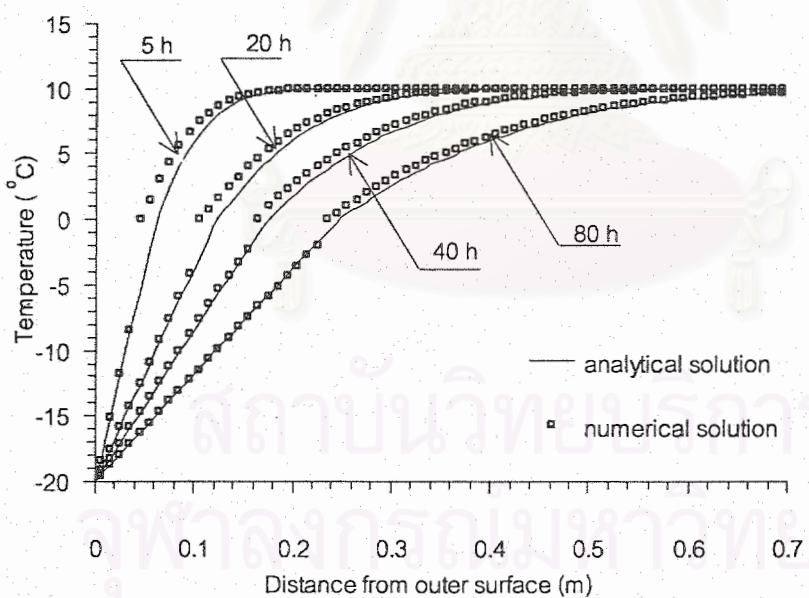
รูปที่ 4.19 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_h$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 4.20 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



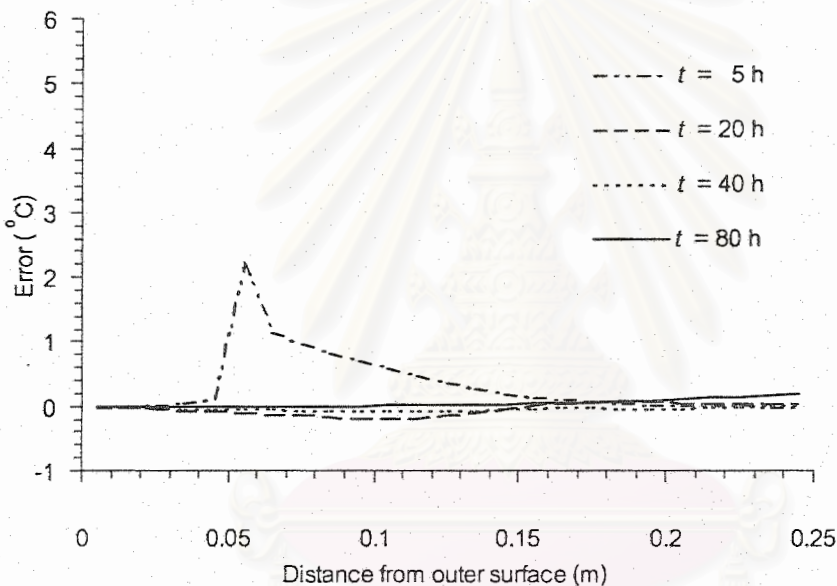
รูปที่ 4.21 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_p$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 4.22 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_p$  โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s

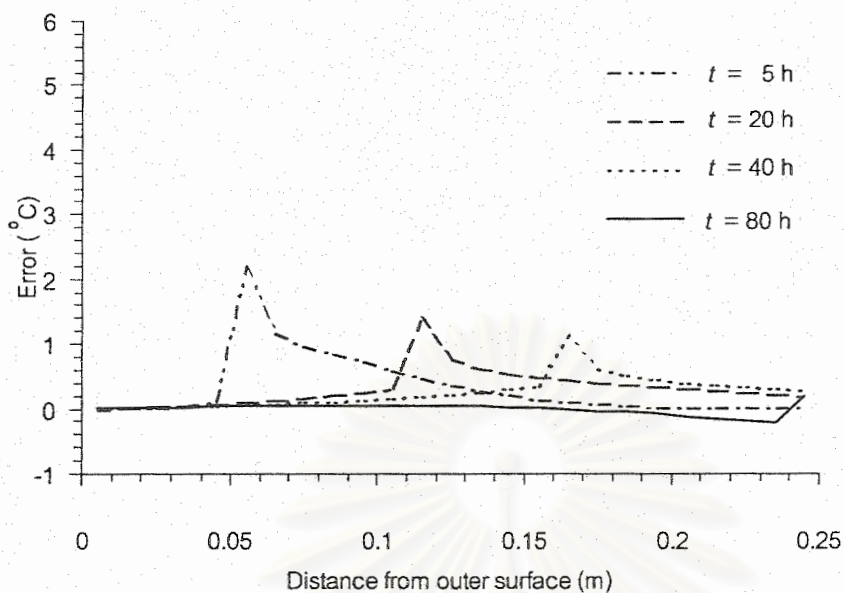
#### 4.2.2 การกระจายของค่าความผิดพลาดและค่าความผิดพลาดมากที่สุด

ผลการกระจายของค่าความผิดพลาด ( $T_{P, numerical} - T_{P, analytical}$ ) ตามแกน  $x$  เมื่อประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ  $k_{INT}$  แบบต่างๆ ได้แก่การประมาณให้มีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง  $k_s$  ค่าเฉลี่ยเลขคณิต  $k_a$  และ ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งและของเหลว  $k_h$  โดยใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบต่างๆ ได้แก่ วิธี explicit ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.23-4.25 วิธี Crank-Nicolson ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.25-4.27 และ วิธี fully implicit ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.28-4.31 ดังนี้

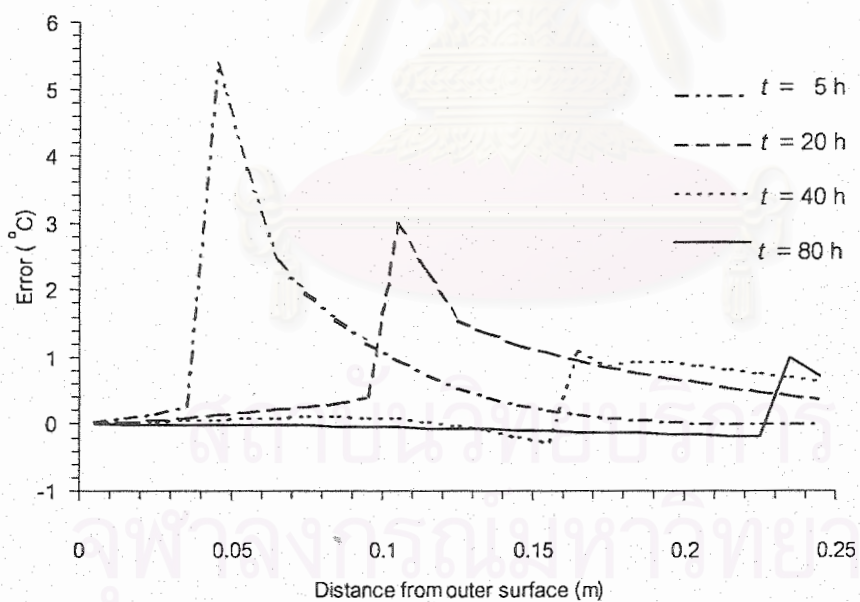


รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$

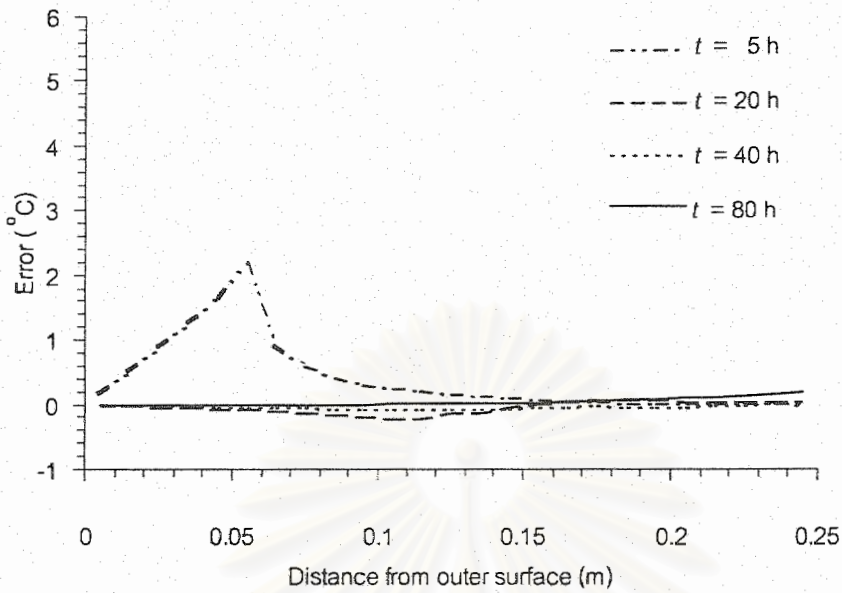
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



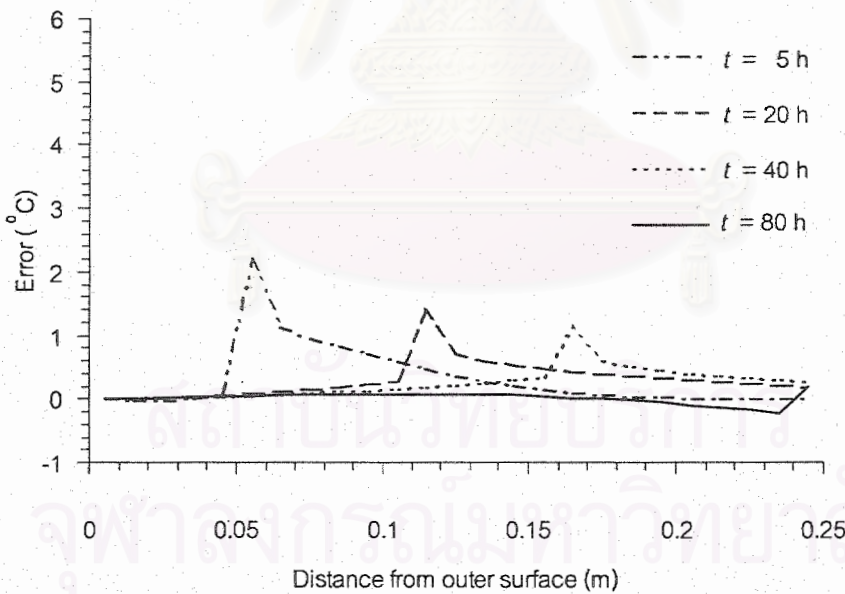
รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_a$



รูปที่ 4.25 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_h$

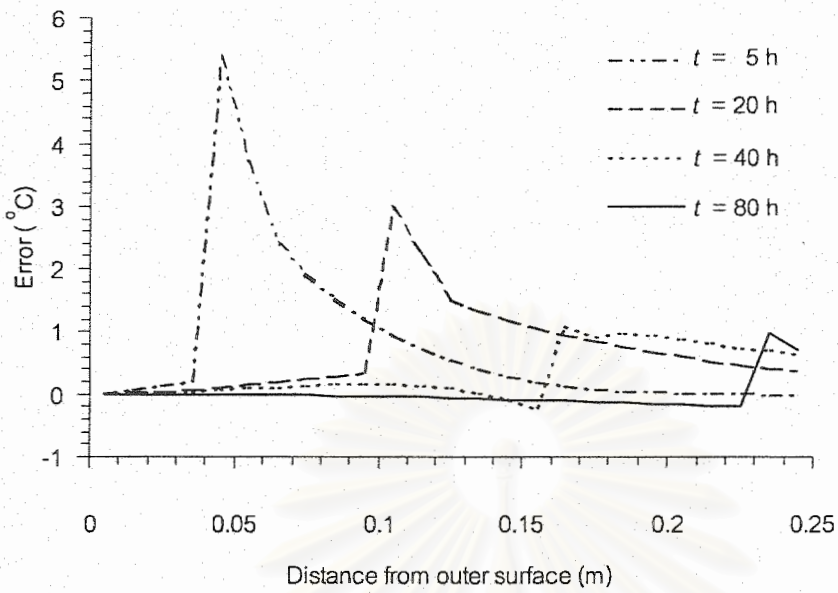


รูปที่ 4.26 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_s$

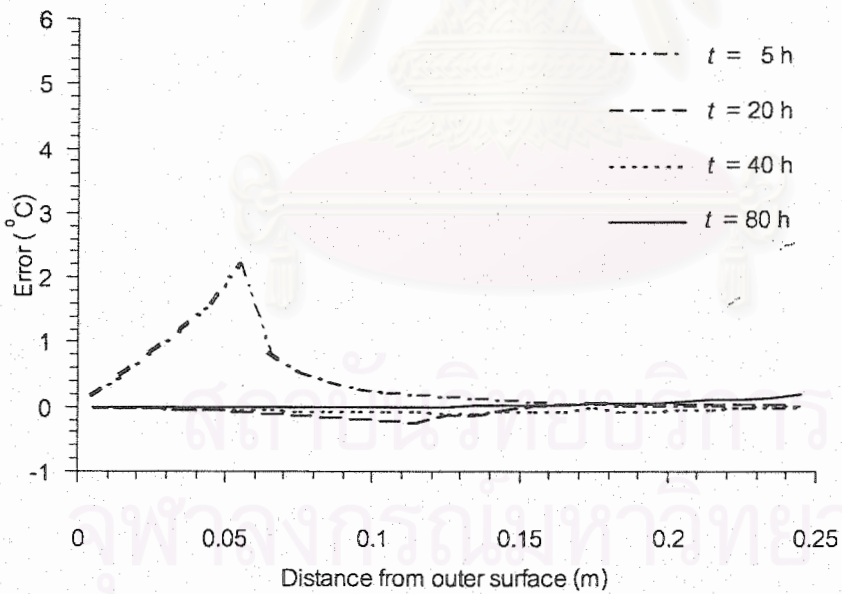


รูปที่ 4.27 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_a$

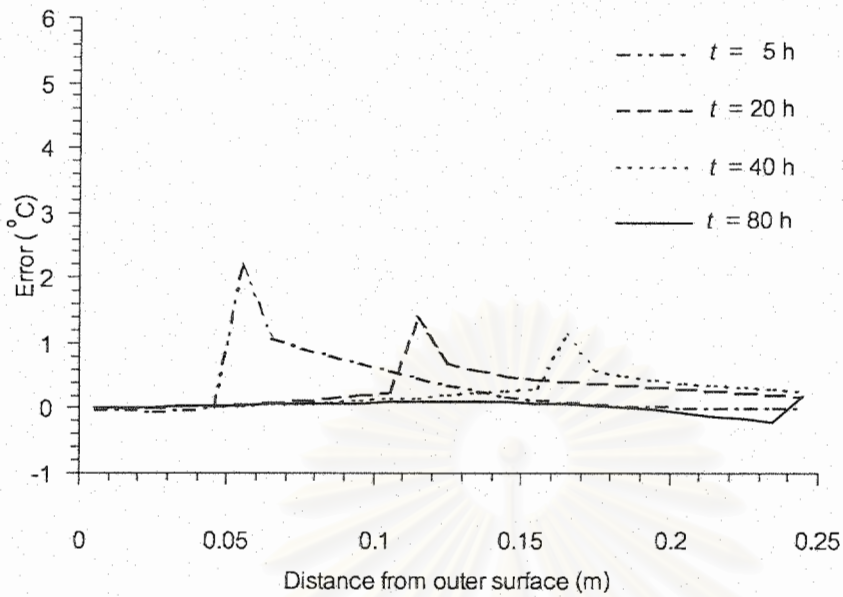




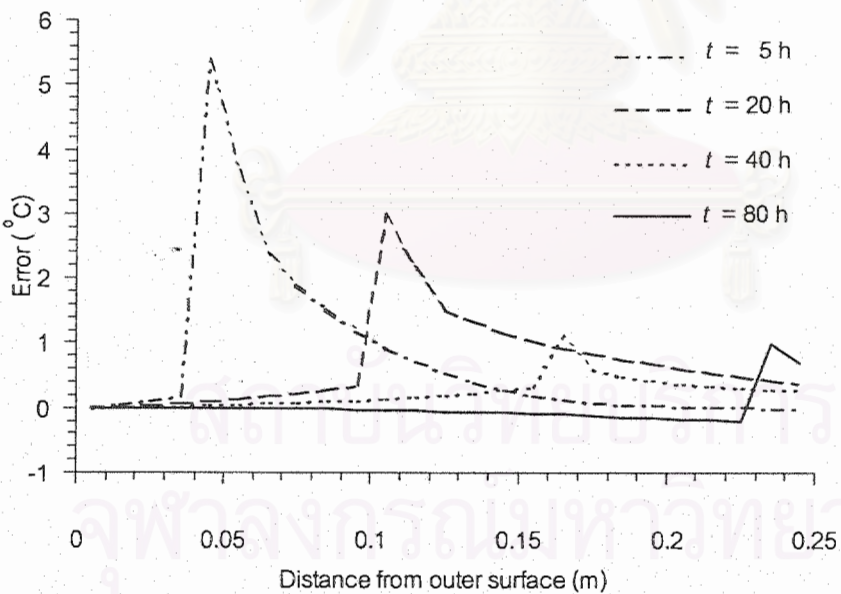
รูปที่ 4.28 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_h$



รูปที่ 4.29 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_s$

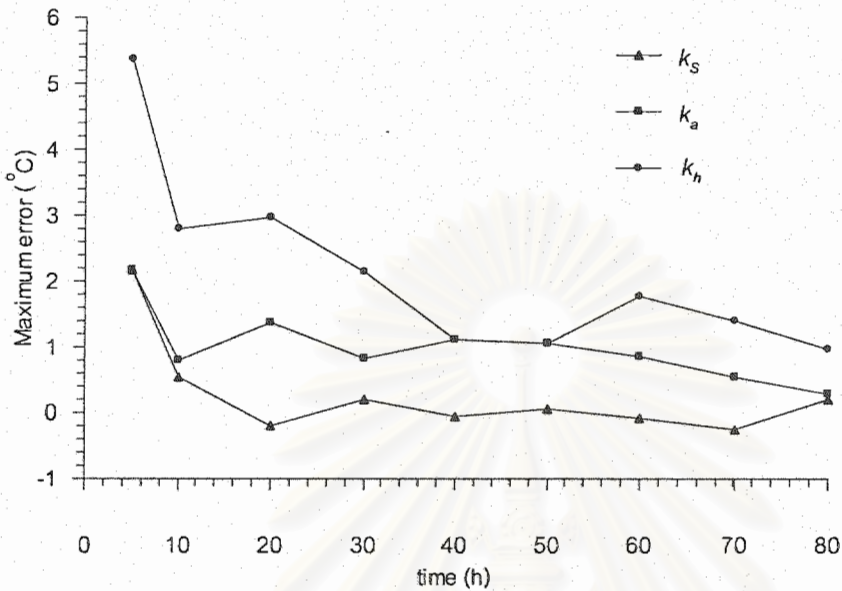


รูปที่ 4.30 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_a$

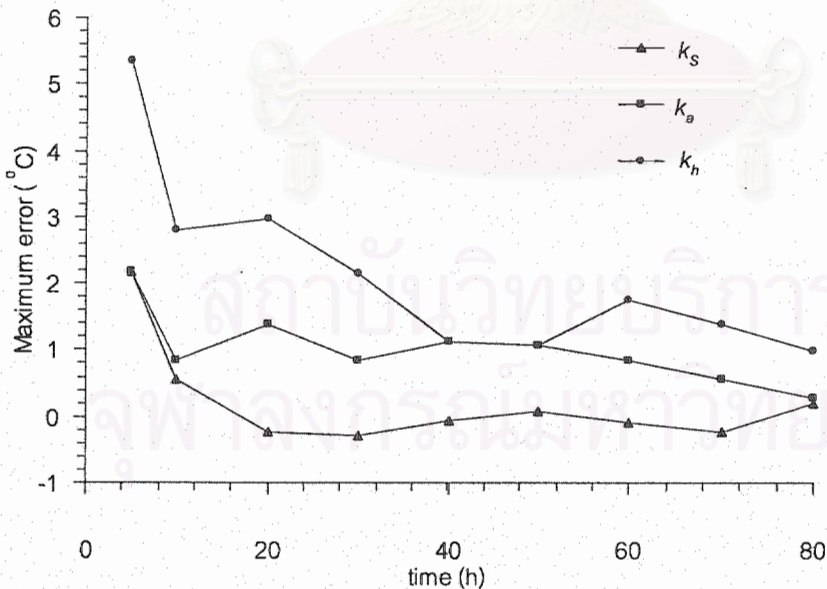


รูปที่ 4.31 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดด้วยการจำลองแบบ 400 cells  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_n$

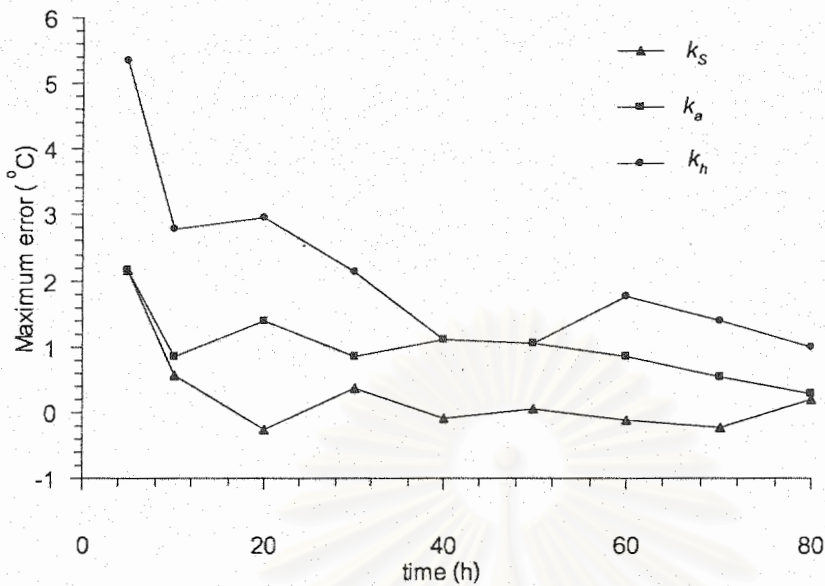
ผลของค่าความผิดพลาดมากที่สุด  $\max(T_{P,numerical} - T_{P,analytical})$  ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.32-4.34 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.32 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้วิธี explicit และ  $k_{INT}$  แบบต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 4.33 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT}$  แบบต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s



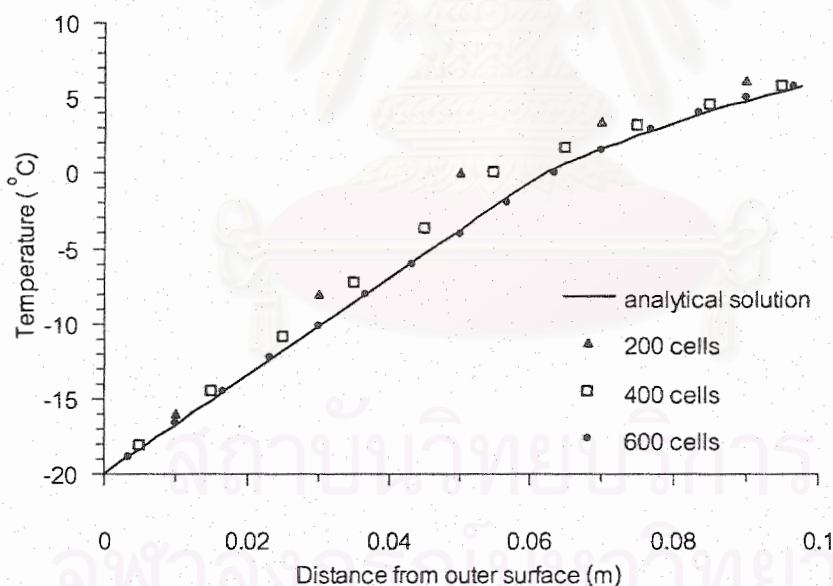
รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT}$  แบบต่างๆ โดยจำลองแบบด้วย 400 cells และ  $\Delta t = 10$  s

จากรูปที่ 4.14-4.34 จะเห็นว่าการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่ละวิธีให้ผลเฉลี่ยในลักษณะเดียวกัน โดยความแม่นยำของคำตอบขึ้นกับการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ  $k_{INT}$  แม้ที่เวลาแรกๆ เช่น 5 h ตำแหน่งของค่าความผิดพลาดมากที่สุดอยู่บริเวณติดขอบและมีค่าความผิดพลาดสูงมาก ซึ่งเป็นเพราะความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิภายในที่ติดขอบและอุณหภูมิขอบเขตที่มีค่าสูงเช่นเดียวกับในการจำลองแบบการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเวลามากขึ้นอุณหภูมิภายในที่ติดขอบจะมีค่าเข้าสู่อุณหภูมิขอบเขต จึงทำให้ค่าความผิดพลาดไม่ได้รับอิทธิพลจากความแตกต่างของอุณหภูมิบริเวณขอบเขต แต่จะขึ้นกับการประมาณ  $k_{INT}$  เป็นหลัก และตำแหน่งของค่าความผิดพลาดมากที่สุดอยู่บริเวณที่กำลังเปลี่ยนสถานะซึ่งมีการคำนวณความร้อนแฝงที่ต้องใช้ค่า  $k_{INT}$  โดยพบว่า การประมาณค่า  $k_{INT}$  ให้มีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง  $k_s = 2.22$  W/(m·K) จะได้คำตอบที่มีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงมากที่สุด เพราะเมื่อเวลาผ่านไปพื้นที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุมได้เปลี่ยนสถานะเป็นของแข็ง ทำให้การประมาณดังกล่าวให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงโดยเป็นการ overestimate ค่า สัมประสิทธิ์ที่พื้นผิวในช่วงแรกๆ ในทางตรงกันข้ามการประมาณด้วยการใช้ค่าเฉลี่ยทั้งแบบเลขคณิต  $k_a = 1.388$  W/(m·K) และ แบบฮาร์มอนิก  $k_h = 0.889$  W/(m·K) ซึ่งมีค่าน้อยกว่า  $k_s$  จึงทำให้อุณหภูมิโดยประมาณที่ได้มีค่าสูงกว่าผลเฉลยแม่นยำตรง และเนื่องจาก  $k_h$  มีค่าน้อย

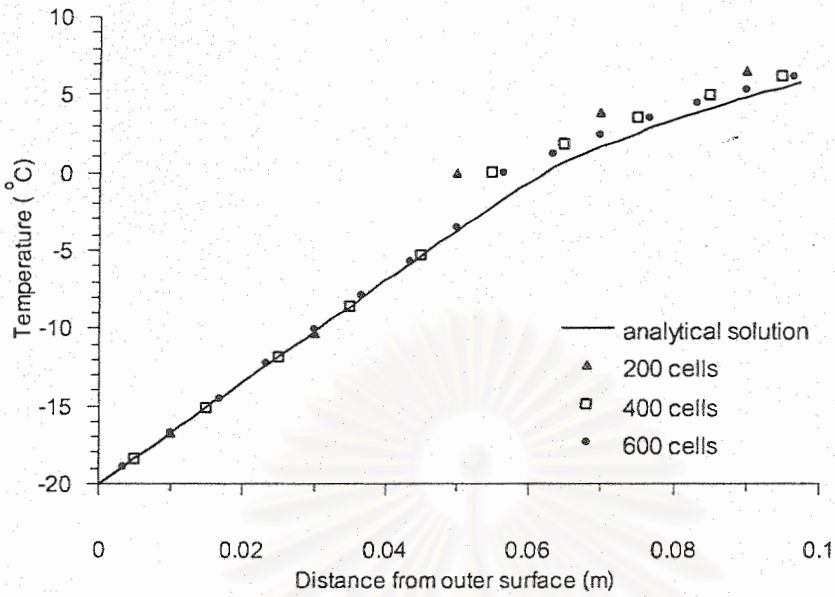
กว่า  $k_s$  ดังนั้นอุณหภูมิที่ได้จากการใช้  $k_h$  จึงสูงกว่าผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าการใช้  $k_s$  ซึ่งถ้าจะอธิบายด้วยความหมายทางกายภาพ คือ การใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและฮาร์มอนิกเป็นการประมาณว่าพื้นที่ผิวของปริมาตรประกอบด้วยส่วนผสมของของแข็งและของเหลว ในขณะที่รอยต่อสถานะได้เคลื่อนที่ผ่านพื้นผิวไปแล้ว ทำให้เกิดการ underestimate ของค่าสัมประสิทธิ์

#### 4.2.3 การพิจารณาปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ

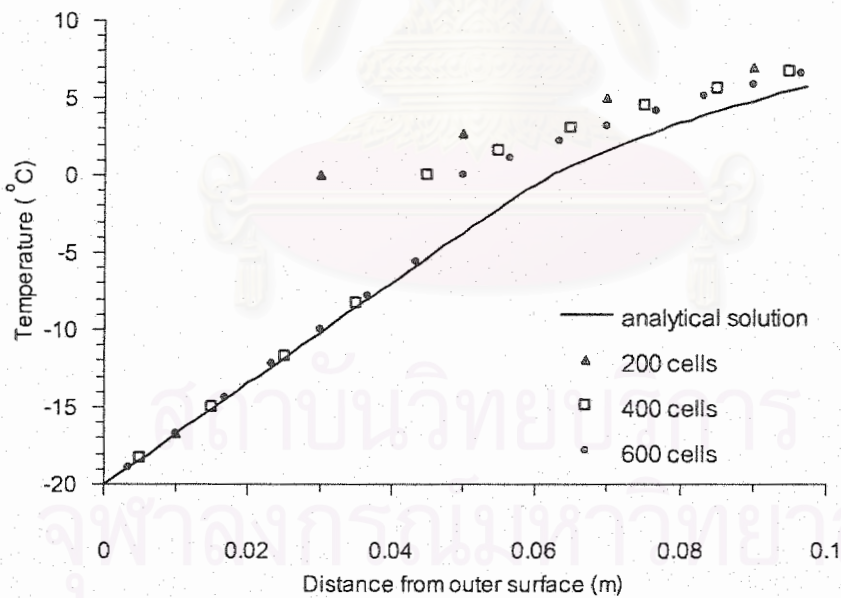
สำหรับการพิจารณาผลของขนาดปริมาตรควบคุม  $\Delta x$  ที่มีต่อผลลัพธ์ด้วยการใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างๆ กัน ได้แก่ 200, 400 และ 600 cells โดยที่ใช้ช่วงเวลา  $\Delta t = 10$  s สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่ละวิธีได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.35-4.43 ส่วนตารางที่ 4.2 เป็นตารางสรุปค่าความผิดพลาดมากที่สุด และ เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU time) เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุม และ ขนาดช่วงเวลา  $\Delta t$  ต่างๆ กัน นอกจากนี้การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อใช้ขนาดช่วงเวลาต่างกัน คือ (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s โดยที่ใช้ปริมาตรควบคุม 400 cells สำหรับวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ได้ถูกแสดงในรูปที่ 4.44-4.45 เพื่อประกอบการวิเคราะห์ผลของการใช้  $\Delta t$  ขนาดใหญ่



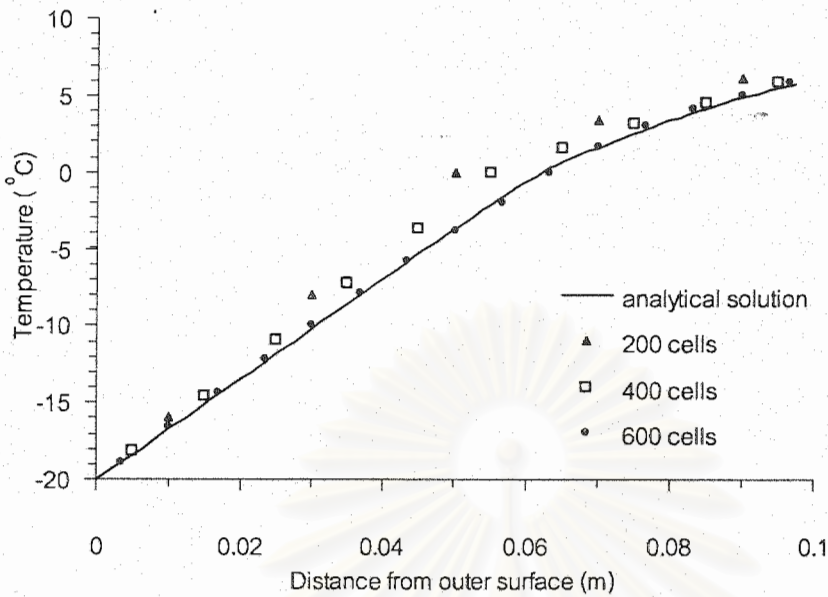
รูปที่ 4.35 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และ  $k_{HT} = k_s$



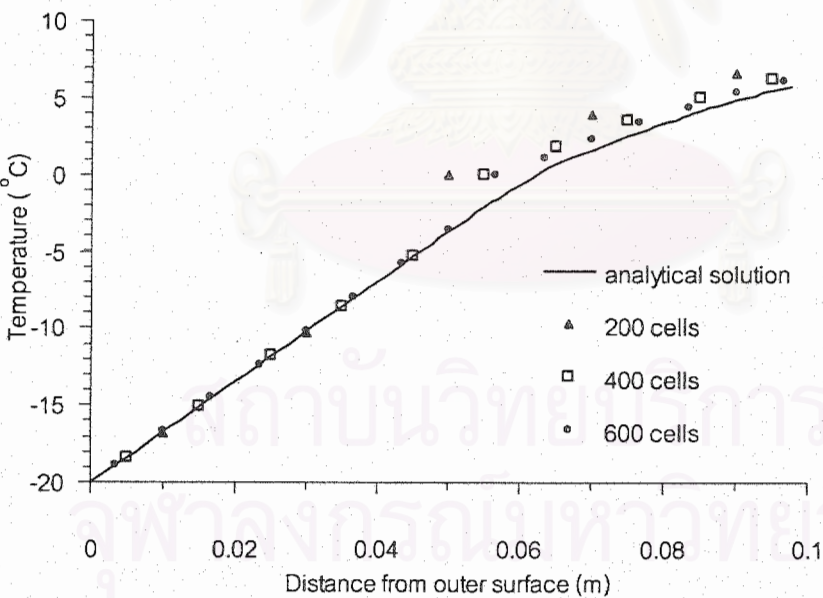
รูปที่ 4.36 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และ  $k_{INT} = k_a$



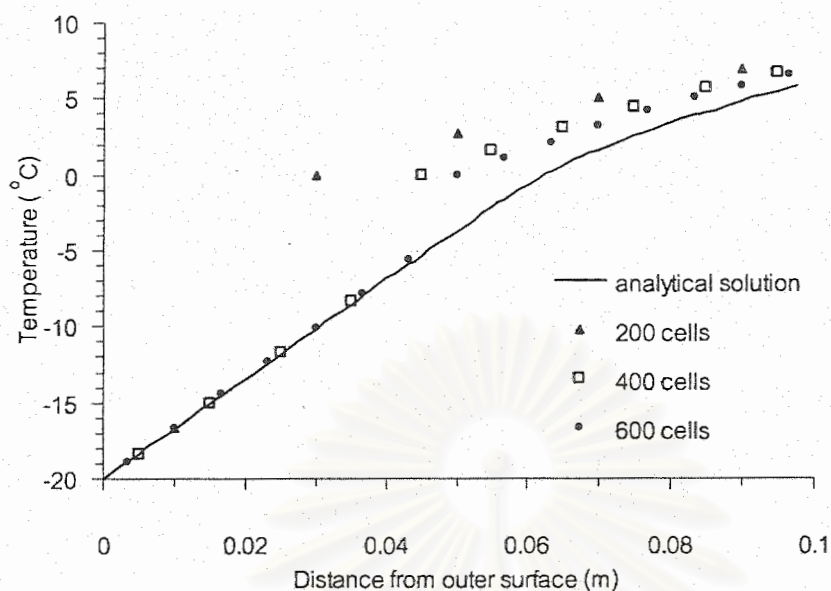
รูปที่ 4.37 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี explicit และ  $k_{INT} = k_h$



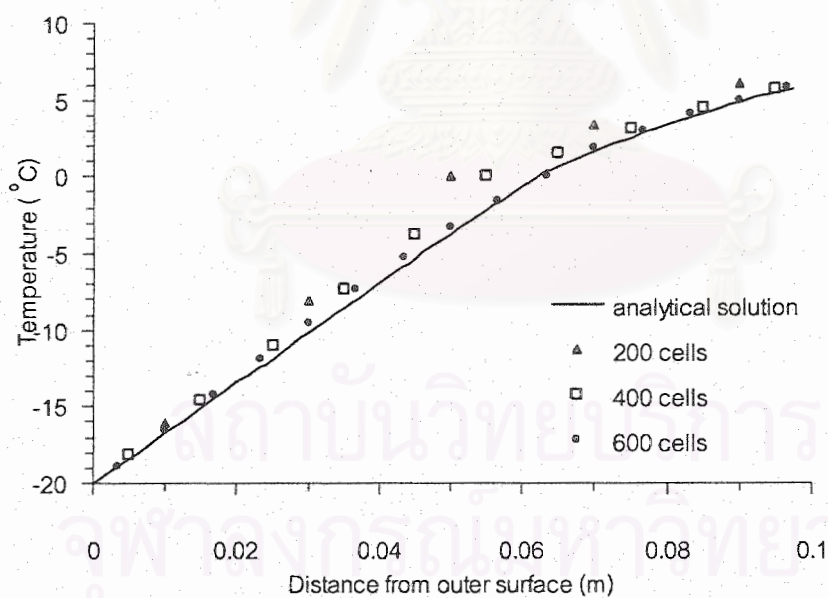
รูปที่ 4.38 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT} = k_s$



รูปที่ 4.39 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT} = k_a$

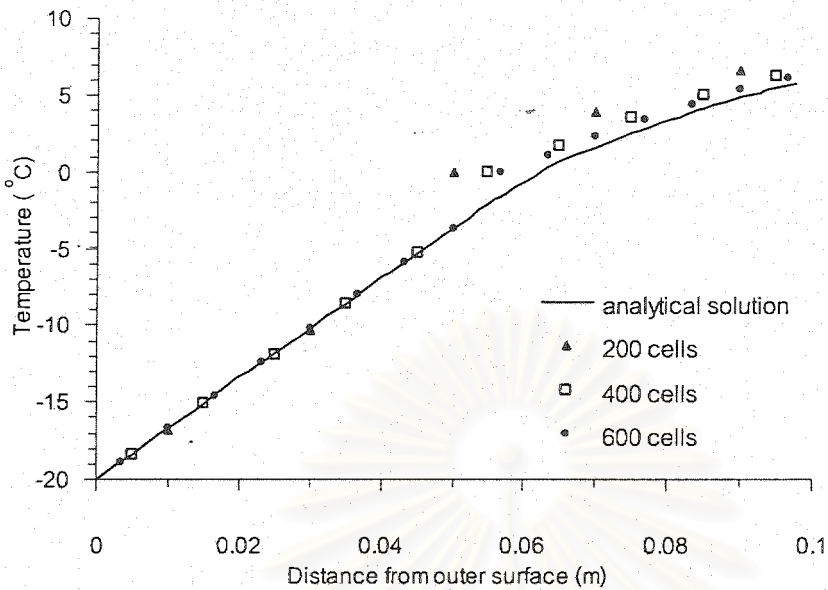


รูปที่ 4.40 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ  $k_{INT} = k_h$

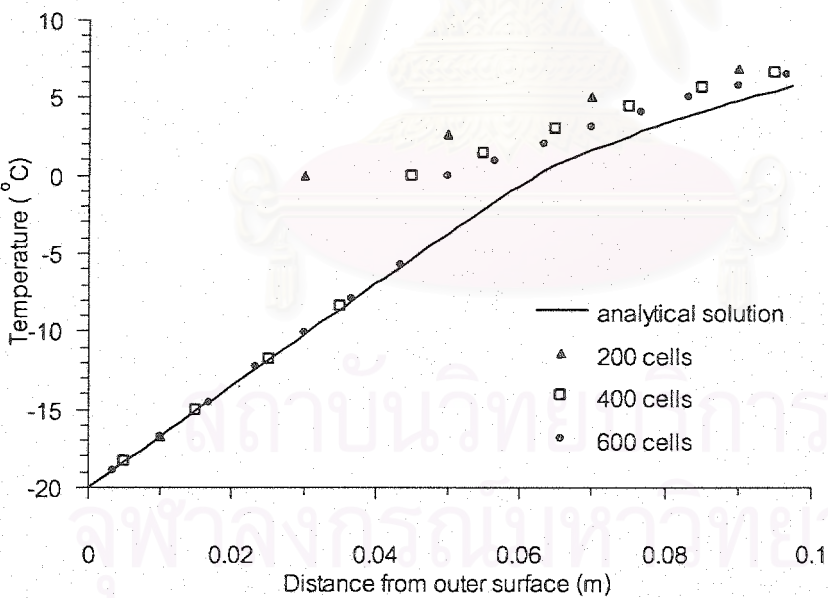


รูปที่ 4.41 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT} = k_s$





รูปที่ 4.42 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT} = k_a$



รูปที่ 4.43 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h โดยจำลองแบบด้วยจำนวน cells ต่างๆ กัน และ  $\Delta t = 10$  s เมื่อใช้วิธี fully implicit และ  $k_{INT} = k_h$

ตารางที่ 4.2 (ลำดับที่ 1) การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุดและเวลาในการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่  $t = 5$  h สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme, interface conductivity จำนวน cells และ  $\Delta t$  ต่างๆ (\* หมายถึง ผลลัพธ์มีการรัน และ div หมายถึง ผลลัพธ์ล้นออก)

$k_{INT}$	time-stepping scheme	number of cells	maximum error ( $^{\circ}$ C)				CPU time (s)			
			at $t = 5$ h				for achieving results at $t = 5$ h			
			$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s	$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s
$k_s$	explicit	200	div	3.759	3.759	3.759	div	1.76	2.20	3.74
		400	div	div	2.170	2.170	div	div	3.13	5.77
		600	div	div	-0.359	-0.371	div	div	4.49	7.75
		800	div	div	div	-0.198	div	div	div	9.95
	Crank-Nicolson	200	10.198	3.759	3.759	3.759	1.81	1.98	2.20	4.28
		400	8.579*	2.170	2.170	2.170	2.96	3.29	3.41	7.63
		600	8.421*	1.642	-0.316	-0.373	3.91	4.12	4.78	11.09
		800	9.388*	1.378	-0.267	-0.209	4.07	4.56	5.55	13.95
	fully implicit	200	10.198	3.760	3.759	3.759	1.64	2.04	2.25	4.72
		400	11.824	2.170	2.170	2.170	2.97	2.91	3.35	6.97
		600	10.198	1.642	0.679	-0.374	4.08	4.31	4.60	10.27
		800	11.011	2.963	0.294	-0.219	4.44	4.51	5.66	14.89
$k_a$	explicit	200	div	3.759	3.759	3.759	div	1.97	2.09	3.41
		400	div	div	2.170	2.170	div	div	3.84	5.72
		600	div	div	1.642	1.642	div	div	4.45	7.91
		800	div	div	div	1.378	div	div	div	11.70
	Crank-Nicolson	200	10.198	3.759	3.759	3.759	1.87	1.76	2.31	4.61
		400	8.579*	2.170	2.170	2.170	2.91	3.13	3.46	7.31
		600	10.69*	1.398	1.642	1.642	3.89	4.18	4.78	10.99
		800	9.388*	2.963	1.378	1.378	4.45	4.72	5.49	14.55
	fully implicit	200	10.198	3.759	3.759	3.759	1.65	1.70	2.14	4.17
		400	11.824	2.170	2.170	2.170	2.86	2.91	3.24	8.62
		600	12.367	3.759	1.642	1.642	3.90	4.40	4.80	10.05
		800	12.638	2.963	1.378	1.378	4.50	4.94	5.93	13.18

ตารางที่ 4.2 (ลำดับที่ 2) การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุดและเวลาในการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่  $t = 5$  h สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme, interface conductivity จำนวน cells และ  $\Delta t$  ต่างๆ (\* หมายถึง ผลลัพธ์มีการล้น และ div หมายถึง ผลลัพธ์ล้นออก)

$k_{INT}$	time-stepping scheme	number of cells	maximum error ( $^{\circ}$ C)				CPU time (s)			
			at $t = 5$ h				for achieving results at $t = 5$ h			
			$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s	$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s
$k_h$	explicit	200	div	10.198	10.198	10.198	div	1.76	2.25	3.95
		400	div	div	5.358	5.358	div	div	3.24	5.49
		600	div	div	3.759	3.759	div	div	4.59	9.61
		800	div	div	div	2.963	div	div	div	9.78
	Crank-Nicolson	200	10.198	10.198	10.198	10.198	1.70	1.75	2.41	4.34
		400	8.579*	5.358	5.358	5.358	2.86	2.85	3.52	7.30
		600	10.20*	3.759	3.759	3.759	3.68	3.90	4.71	10.66
		800	-11.5*	2.963	2.963	2.963	4.45	5.11	5.55	14.50
	fully implicit	200	10.198	10.198	10.198	10.198	1.64	1.65	2.09	4.12
		400	11.824	5.358	5.358	5.358	2.75	3.08	3.35	6.70
		600	12.367	3.759	3.759	3.759	3.87	3.95	4.61	11.15
		800	12.638	4.558	2.963	2.963	4.51	4.66	5.77	12.57

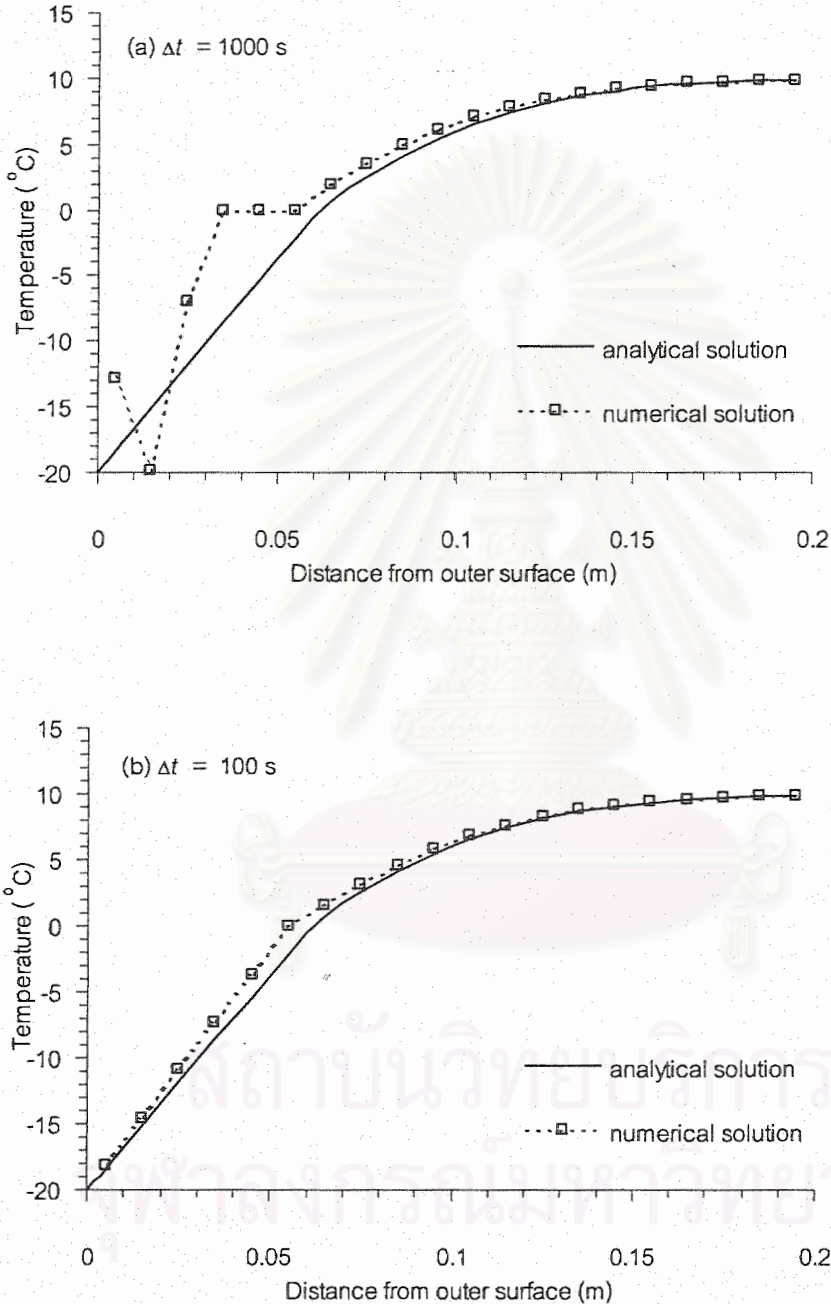
จากรูปที่ 4.35-4.43 ได้ผลของการใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างๆ กันสำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในทำนองเดียวกันกับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วคราว ในหัวข้อ 4.1.3 คือ การแบ่งกริดแบบละเอียดจะช่วยให้ผลลัพธ์มีความแม่นยำมากขึ้น เนื่องจากการ discretisation มีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามระยะทางให้มีโพรไฟล์เชิงเส้นตรง ทำให้มีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม  $\Delta x^2$  หรือมี the second-order spatial accuracy และจากตารางที่ 4.2 จะเห็นว่าแม้การแบ่งกริดแบบละเอียดเช่นใช้ 800 cells จะให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำมากกว่าการแบ่งกริดแบบหยาบเช่นใช้ 400 cells แต่อย่างไรก็ตามจะต้องการเวลาในการประมวลผลมากขึ้นเพราะจุดที่ต้องพิจารณาจำนวนมากขึ้น นอกจากนี้สำหรับวิธี explicit และ Crank-Nicolson การแบ่งกริดแบบละเอียดยังมีผลต่อค่าจำกัดของขนาดช่วงเวลาให้ต้องมีขนาดเล็กลงด้วย เพื่อความเสถียรภาพ (stability) ของผลลัพธ์ เช่น สำหรับวิธี explicit เมื่อใช้ 400 cells ข้อจำกัดของช่วงเวลาตามสมการ (3.26) คือ  $\Delta t < 39.68$  s แต่เมื่อใช้ 800 cells ข้อจำกัดของช่วงเวลาเป็น  $\Delta t < 9.92$  s และการที่ข้อ

จำกัดของช่วงเวลาสำหรับปัญหานี้มีขนาดเล็กกว่าสำหรับปัญหาการนำความร้อนในสถานะชั่วคราวที่ได้แสดงในหัวข้อ 4.1.3 เนื่องจากสมบัติของสสารที่ใช้ใน 4.1.3 เป็นสมบัติในสถานะของเหลวเท่านั้น ส่วนปัญหาการเปลี่ยนสถานะใช้สมบัติของสสารทั้งสถานะของแข็งและของเหลว ขนาดที่จำกัดของช่วงเวลา จึงได้จากการคำนวณค่าขนาดช่วงเวลาจำกัดเมื่อใช้สมบัติของสสารในสถานะของแข็งและของเหลวแล้วนำมาเปรียบเทียบกัน ค่าที่น้อยกว่าจะเป็นข้อจำกัดของช่วงเวลาของปัญหา และจากปัญหานี้ พบว่าขนาดของเวลาที่จำกัดเมื่อใช้สมบัติของสสารในสถานะของแข็งมีค่าน้อยกว่าเมื่อใช้สมบัติของสสารในสถานะของเหลว ข้อจำกัดของช่วงเวลาของปัญหาจึงเป็นค่าที่คำนวณจากสมบัติของสสารในสถานะของแข็ง

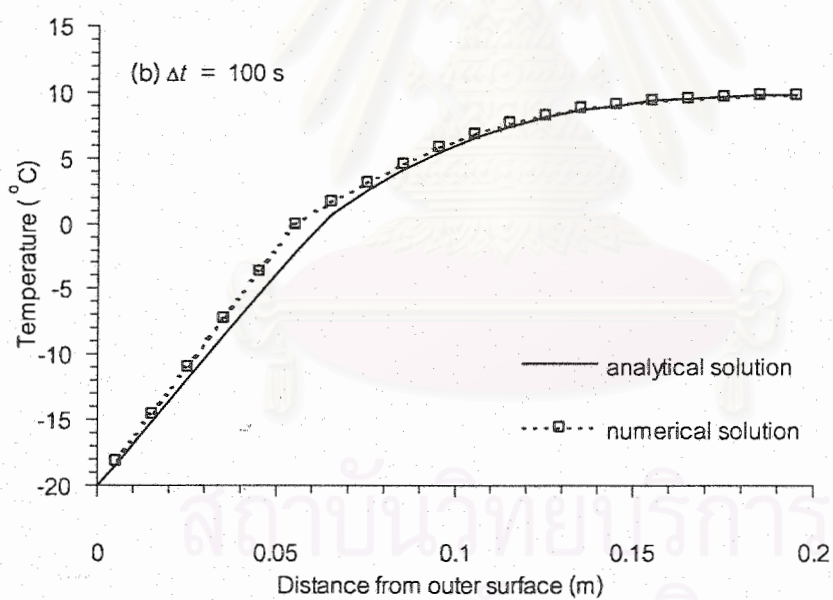
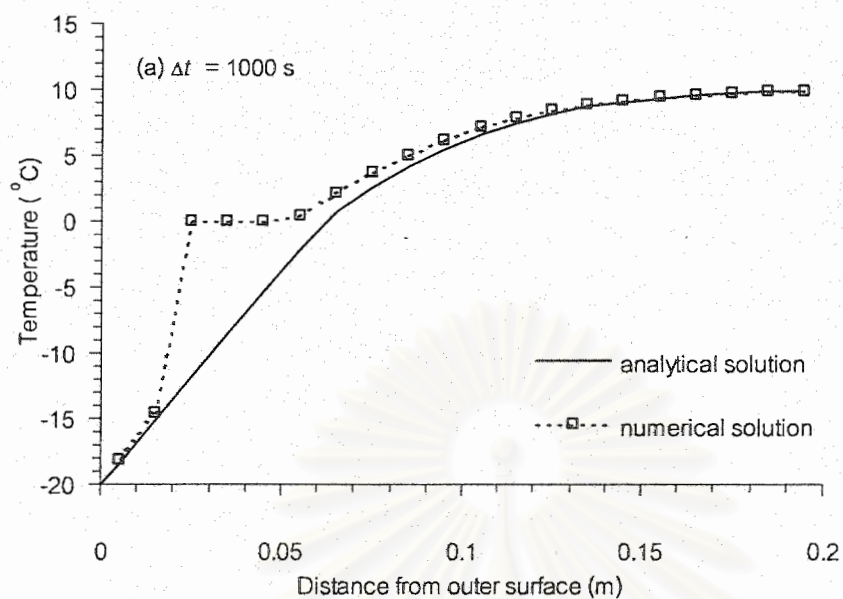
ส่วนผลของการใช้ช่วงเวลาขนาดต่างๆ แม้มีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบ two-time level ซึ่งควรมีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม  $\Delta t$  หรือเป็น the first-order temporal accuracy สำหรับวิธี explicit และวิธี fully implicit และมีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม  $\Delta t^2$  หรือ the second-order temporal accuracy สำหรับวิธี Crank-Nicolson แต่อัลกอริทึมในการคำนวณการเปลี่ยนสถานะต้องการช่วงเวลาขนาดเล็ก เนื่องจากระบุว่าถ้าจุดต่อใดที่มีสถานะเป็นของเหลวและอุณหภูมิผ่านจุดเยือกแข็งจะดำเนินการคำนวณค่าความร้อนแฝงที่จุดต่อนั้นๆ และกำหนดให้จุดต่อนั้นมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง จึงทำให้การใช้ช่วงเวลาขนาดใหญ่จะมีจำนวนจุดต่อที่มีอุณหภูมิผ่านจุดเยือกแข็งได้หลายจุดในคราวเดียวกัน ซึ่งจะถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิกิ่งที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง อันเป็นเหตุให้ diffusion heat transfer ของจุดต่อข้างเคียงจุดต่อเหล่านี้มีค่าน้อยกว่าที่ควรจะเป็น ผลเฉลยที่ได้จึงมีค่าความผิดพลาดมาก ดังแสดงการใช้ช่วงเวลาที่มีขนาดต่างกัน โดยใช้จำนวนปริมาตร 400 cells สำหรับวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ในรูปที่ 4.44 และ 4.45 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อใช้  $\Delta t$  ขนาดใหญ่ เช่น  $\Delta t = 1000$  s จะมีจำนวนจุดต่อที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็งอยู่หลายจุด และผลเฉลยที่ได้มีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำมาก แต่เมื่อใช้  $\Delta t$  ขนาดเล็กลง เช่น  $\Delta t = 100$  s จะมีจำนวนจุดต่อดังกล่าวเพียงจุดเดียว และได้ผลเฉลยที่มีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ นอกจากนี้การใช้ช่วงเวลาขนาดใหญ่สำหรับวิธี Crank-Nicolson ยังคงมีการสั่นเกิดขึ้นด้วยดังแสดงในรูปที่ 4.44a และที่ระบุด้วยเครื่องหมายดอกจัน (\*) ในตารางที่ 4.2 เนื่องจากสมประสิทธิ์ discretised equation ไม่สอดคล้องสมการ (3.28) และในตารางเดียวกันนี้จะเห็นว่าวิธี explicit มีข้อจำกัดเรื่องขนาดช่วงเวลาตามสมการ (3.26) ทำให้ไม่สามารถใช้ช่วงเวลาขนาดใหญ่ได้ เพราะจะเกิดการลู่ออกของผลลัพธ์

เมื่อเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (ตารางที่ 4.2) พบว่าวิธี explicit จะเร็วกว่าวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit เล็กน้อย เนื่องจากวิธี explicit แก่สมการเดียวๆ ในการหาคำตอบแต่ละจุด ในขณะที่วิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ต้องแก้ระบบสมการ แต่อย่างไรก็ตาม

การใช้ขั้นตอนวิธี TDMA แก่ระบบสมการของปัญหาหนึ่งมิติเป็นวิธีโดยตรง ความแตกต่างของ CPU time ระหว่างวิธี explicit กับวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit สำหรับปัญหานี้จึงไม่มาก



รูปที่ 4.44 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่  $t = 5$  h ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และให้  $k_{INT} = k_S$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย 400 cells และ  $\Delta t$  ต่างกัน: (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s



รูปที่ 4.45 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่  $t = 5$  h ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit และให้  $k_{INT} = k_S$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย 400 cells และ  $\Delta t$  ต่างกัน: (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s

#### 4.2.4 การสรุปผล

ในการทดสอบโปรแกรมกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ ได้บทสรุปดังต่อไปนี้

1. การประมาณค่าการนำความร้อนที่รอยต่อสถานะให้มีค่าเท่ากับค่าการนำความร้อนในสถานะของแข็งให้ผลเฉลยที่มีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงมากที่สุด และมีความหมายทางกายภาพที่ใกล้เคียงการเคลื่อนที่ของรอยต่อสถานะมากที่สุด
2. ในการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลานั้น วิธี explicit และ fully implicit มี first-order temporal accuracy ในขณะที่วิธี Crank-Nicolson มีความผิดพลาดต่ำกว่าคือ second-order accuracy แต่เนื่องจากอัลกอริทึมในการคำนวณความร้อนแฝงได้จำกัดขนาดช่วงเวลาสำหรับทุกวิธีที่ใช้ให้ควรมีขนาดเล็ก โดยขนาด  $\Delta t$  และปริมาตรควบคุมที่ทำให้คำตอบมีลักษณะ grid and time step independency สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทั้ง 3 แบบมีขนาดใกล้เคียงกัน ทำให้วิธี explicit มีประสิทธิภาพการใช้ CPU time สูงสุด



## บทที่ 5

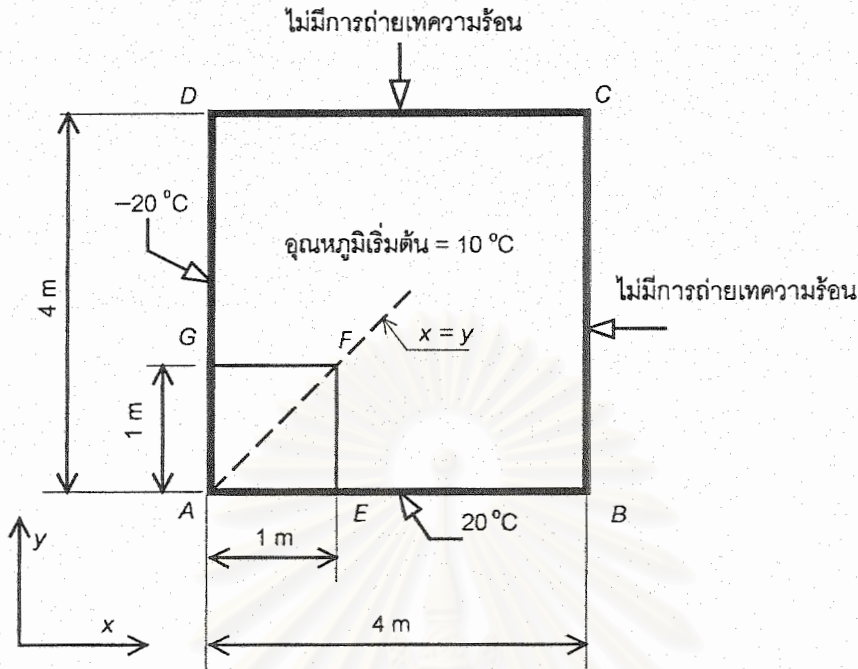
### การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม กับปัญหาการเปลี่ยนสถานะ กรณี 2 มิติ

ในบทนี้เป็นการขยายผลการศึกษาจากปัญหาการเปลี่ยนสถานะ 1 มิติเป็น 2 มิติ ซึ่งมีข้อแตกต่างกันในเรื่องการแก้ระบบสมการสำหรับ Crank-Nicolson และ fully implicit time-stepping schemes โดยปัญหา 1 มิติ สามารถใช้วิธี TDMA แก้ระบบสมการได้โดยตรง ส่วนปัญหา 2 มิติ การแก้ระบบสมการโดยวิธี TDMA สามารถทำได้ด้วยเทคนิค line by line ซึ่งเป็น iterative scheme นอกจากนี้ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหา 2 มิติ ยังมีข้อจำกัดคือต้องกำหนดให้ thermal diffusivity ของทั้งสองสถานะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นบทนี้จึงไม่ได้เปรียบเทียบการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ ส่วนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมวลผลยังคงเป็นเครื่องเดียวกันกับที่ใช้ในปัญหา 1 มิติคือ เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล Pentium III 733 MHz ในการแสดงผลจะทำการเปรียบเทียบผลจากการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทั้งสามวิธี

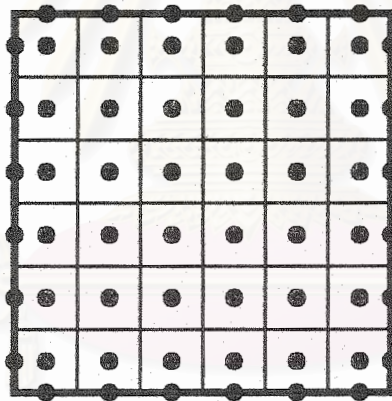
#### 5.1 การเปลี่ยนสถานะในสองมิติ

เนื่องจากผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติที่ถูกเสนอโดย Rathjen and Jiji (1971) ดังแสดงในภาคผนวก ก.3 ใช้ได้กับปัญหาที่มีพื้นที่ขนาดใหญ่ (semi-infinite region) ในที่นี้จะทดสอบกับปัญหาที่มีพื้นที่ขนาด  $8 \text{ m} \times 8 \text{ m}$  ที่เวลาเริ่มต้น  $t_0 = 0 \text{ s}$  มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบทุกด้านมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่  $T_c = -20 \text{ }^\circ\text{C}$  ไม่มีการถ่ายเทความร้อนในทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาเพียงหนึ่งในสี่ของพื้นที่ได้รูปที่ 5.1a โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน คุณสมบัติของสสาร ดังนี้ ปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง  $L = 338 \text{ kJ/kg}$  อุณหภูมิเยือกแข็ง  $T_f = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  และเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำตรงกำหนดให้ thermal diffusivity  $\alpha = k/(\rho c)$  ของสสารในสถานะของเหลวและของแข็งมีค่าเท่ากัน ในที่นี้จึงกำหนดให้ ค่าการนำความร้อน  $k = 2.220 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c = 1.762 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$  และ ค่าความหนาแน่น  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$





(a) รูปร่างหนึ่งในสี่ส่วนของปัญหา เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต



(b) ตัวอย่างการแบ่งกริด

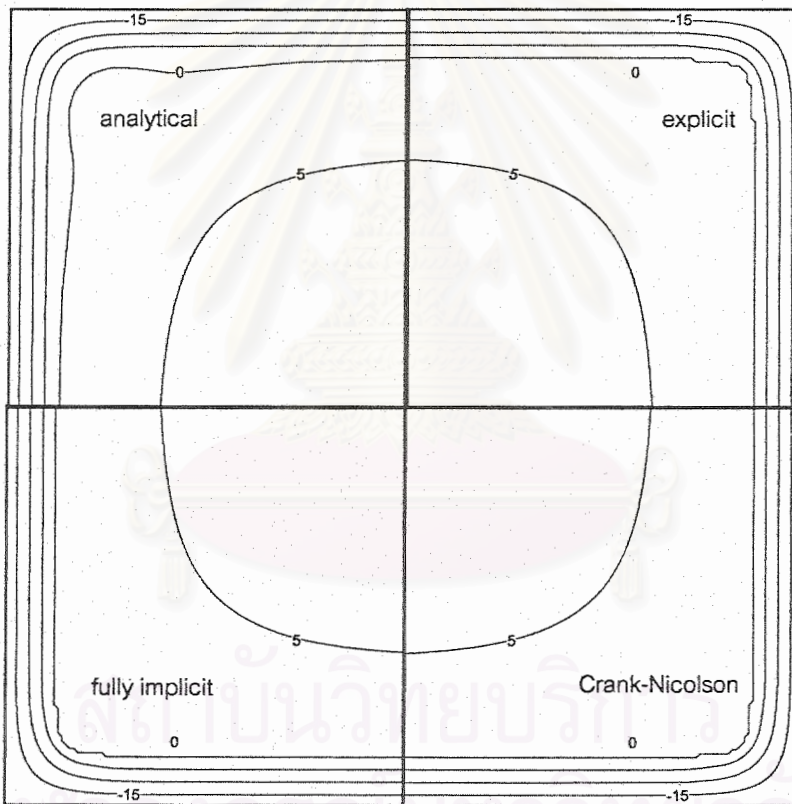
รูปที่ 5.1 รูปร่างปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ: (a) รูปร่างหนึ่งในสี่ส่วนของปัญหา เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต และ (b) ตัวอย่างการแบ่งกริด

การจำลองแบบได้แบ่งกริด (grid) ตามความยาวในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาดเท่ากัน ดังแสดงตัวอย่างการแบ่งกริดในรูปที่ 5.1b ในการเปรียบเทียบ หัวข้อ 5.1.1 จะแสดงผลจากการใช้วิธีในการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาต่างๆ ได้แก่ explicit Crank-Nicolson และ fully implicit เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ได้แก่ การกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  และคอนทัวร์ของอุณหภูมิ (temperature contours) ในบริเวณพื้นที่ A-E-F-G ตามรูปที่ 5.1a

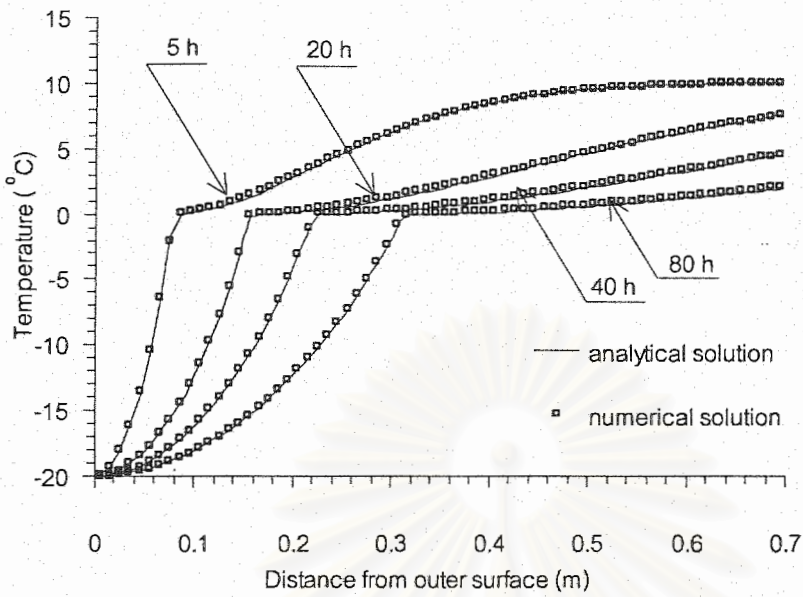
สำหรับหัวข้อ 5.1.2 จะแสดงการกระจายของค่าความผิดพลาด  $T_{numerical} - T_{analytical}$  ตามตำแหน่ง  $x = y$  และค่าความผิดพลาดมากที่สุด  $\max (T_{numerical} - T_{analytical})$  ซึ่งพิจารณาทุกจุดในพื้นที่ ABCD ส่วนการพิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ กัน จะแสดงในหัวข้อ 5.1.3

### 5.1.1 การกระจายของอุณหภูมิ

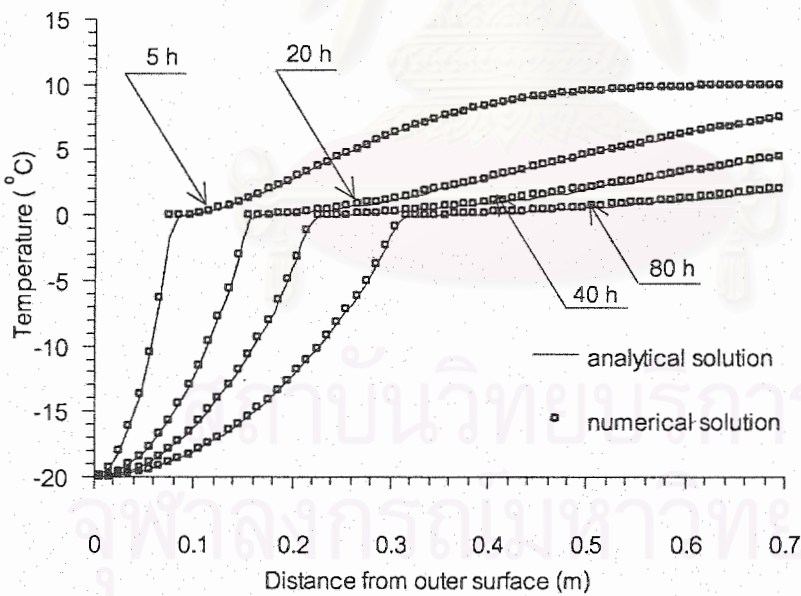
คอนทัวร์ของอุณหภูมิในพื้นที่ AEGF (รูปที่ 5.1a) ที่เวลา 20 h ของผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยโดยประมาณวิธีต่าง ๆ ถูกแสดงในรูปที่ 5.2 และการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 5, 20, 40 และ 80 h สำหรับวิธีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงต่างๆ โดยใช้แบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s ได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.3-5.5



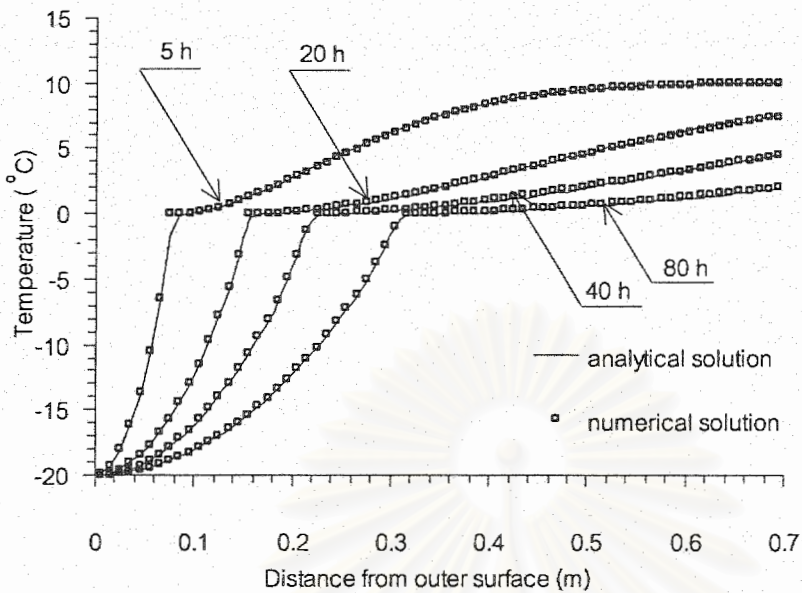
รูปที่ 5.2 การเปรียบเทียบคอนทัวร์ของอุณหภูมิ ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 20$  h เมื่อใช้วิธีต่างๆ โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.4 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณเมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s

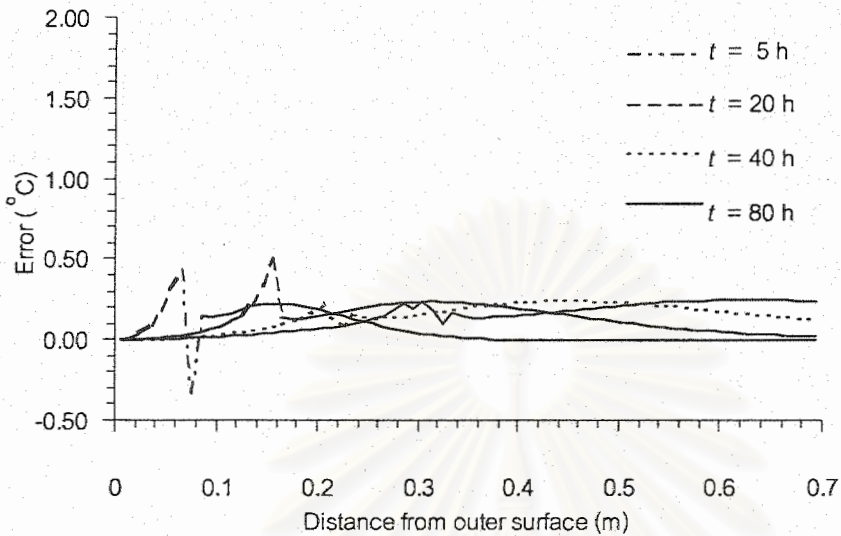
จากรูปที่ 5.2-5.5 จะเห็นว่าการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทุกวิธีให้ผลการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนว  $x = y$  และคอนทัวร์ของอุณหภูมิมี่ความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำเป็นอย่างดี

### 5.1.2 การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด

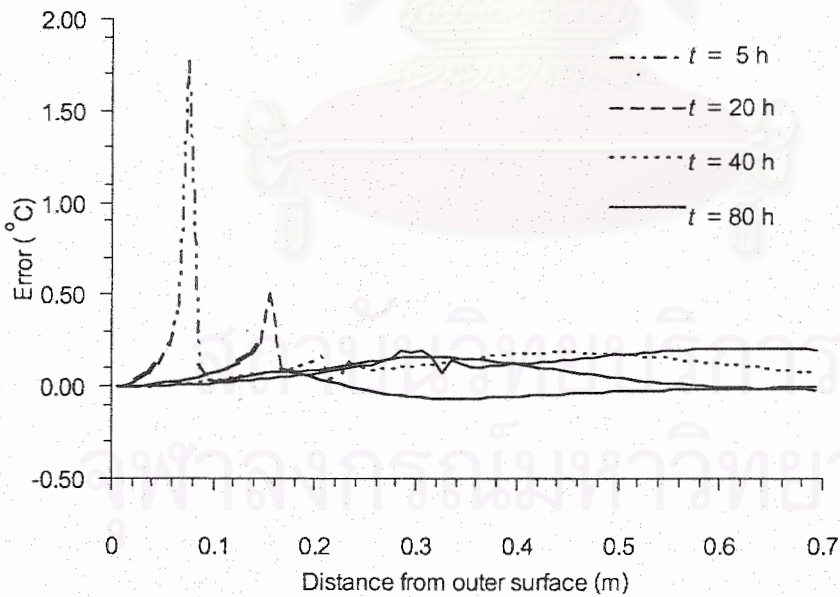
การกระจายของค่าความผิดพลาด  $T_{numerical} - T_{analytical}$  ตามตำแหน่ง  $x = y$  ดังแสดงในรูปที่ 5.6-5.8 ช่วยให้เห็นแนวโน้มของค่าความผิดพลาดว่ามีค่าสูงที่บริเวณใกล้ขอบที่เวลาแรกๆ เช่น 5 h ด้วยเหตุผลในทำนองเดียวกันกับที่ได้อธิบายในหัวข้อ 4.1.2 และ 4.2.2 คือความแตกต่างของอุณหภูมิภายในที่ติดขอบและอุณหภูมิขอบเขตมีค่าสูง

แต่อย่างไรก็ตามค่าความผิดพลาดมากที่สุดที่เกิดขึ้นไม่จำเป็นต้องอยู่ตามแนว  $x = y$  เช่น ที่เวลา 20 h เมื่อใช้วิธี explicit ค่าความผิดพลาดมากที่สุดอยู่ที่ตำแหน่ง (0.125 m, 0.285 m) และ (0.285 m, 0.125 m) ส่วนวิธี Crank-Nicolson ค่าดังกล่าวอยู่ที่ตำแหน่ง (0.135 m, 0.185 m) และ (0.185 m, 0.135 m) และอยู่ที่ตำแหน่ง (0.125 m, 0.255 m) และ (0.255 m, 0.125 m) สำหรับวิธี

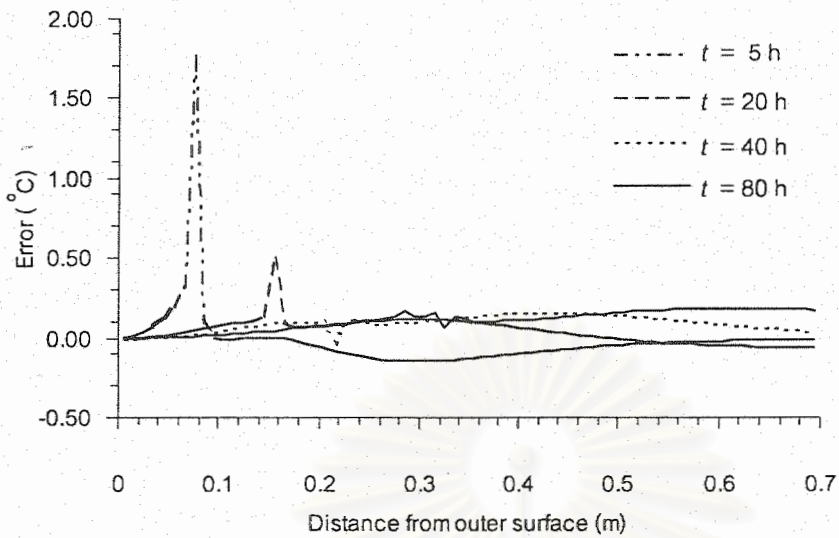
fully implicit ซึ่งจุดเหล่านี้จะอยู่บริเวณรอยต่อสถานะ และได้แสดงค่าความผิดพลาดมากที่สุดที่เวลาต่างๆ ในรูปที่ 5.9 ซึ่งจะเห็นว่าทั้งสามวิธีมีค่าความผิดพลาดมากที่สุดใกล้เคียงกัน



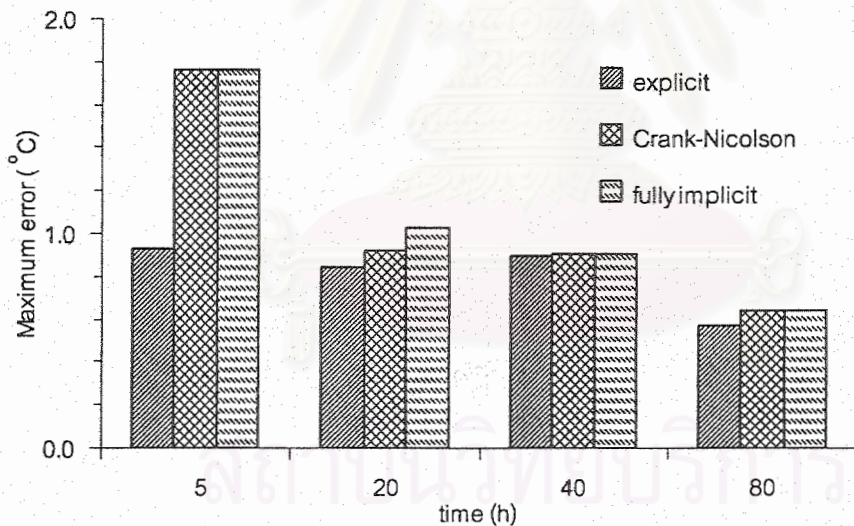
รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง  $x = y$  เมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.7 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง  $x = y$  เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.8 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง  $x = y$  เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.9 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดมากที่สุดตามเวลา เมื่อใช้ time-stepping scheme ต่างๆ โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s

โดยสรุปรวมจากรูปที่ 5.2-5.9 จะเห็นว่าการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทุกวิธี ให้ผลเฉลยโดยประมาณใกล้เคียงผลเฉลยแน่นอนตรงเมื่อกริดและช่วงเวลามีขนาดเล็กเพียงพอ

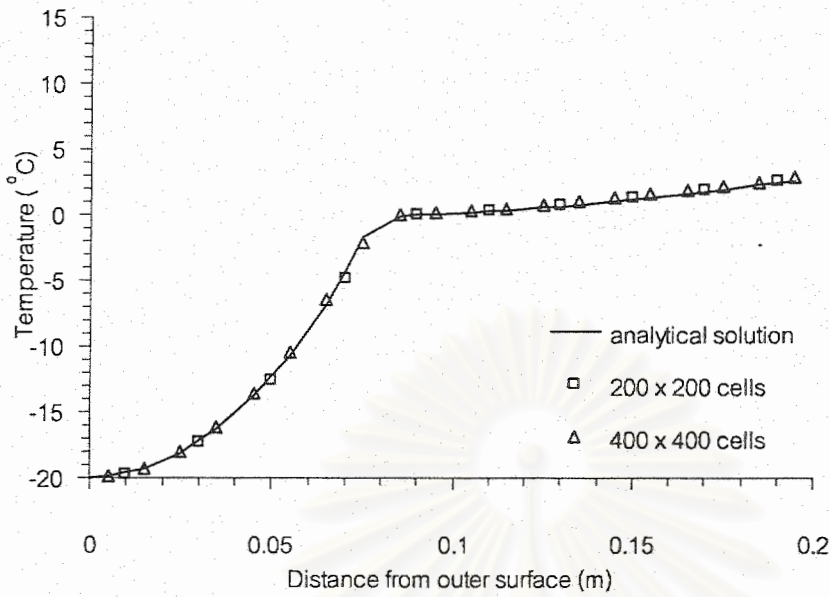
### 5.1.3 การพิจารณาปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่าง ๆ

การพิจารณาผลของขนาดปริมาตรควบคุมที่มีต่อผลลัพธ์ ด้วยการใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างกัน ได้แก่  $200 \times 200$  และ  $400 \times 400$  cells โดยใช้ช่วงเวลา  $\Delta t = 10$  s สำหรับการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่ละวิธี ได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.10-5.12 และตารางที่ 5.1 เป็นตารางสรุปค่าความผิดพลาดมากที่สุดและเวลาที่ใช้ในการประมวลผล เมื่อใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่าง ๆ ส่วนตารางที่ 5.2 เป็นตารางแสดงจำนวนรอบของการทำซ้ำเมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson และ fully implicit และการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 5 h เมื่อใช้ (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s สำหรับวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ได้ถูกแสดงในรูปที่ 5.13 และ 5.14 ตามลำดับ เพื่อประกอบการวิเคราะห์ผลของการใช้  $\Delta t$  ขนาดใหญ่

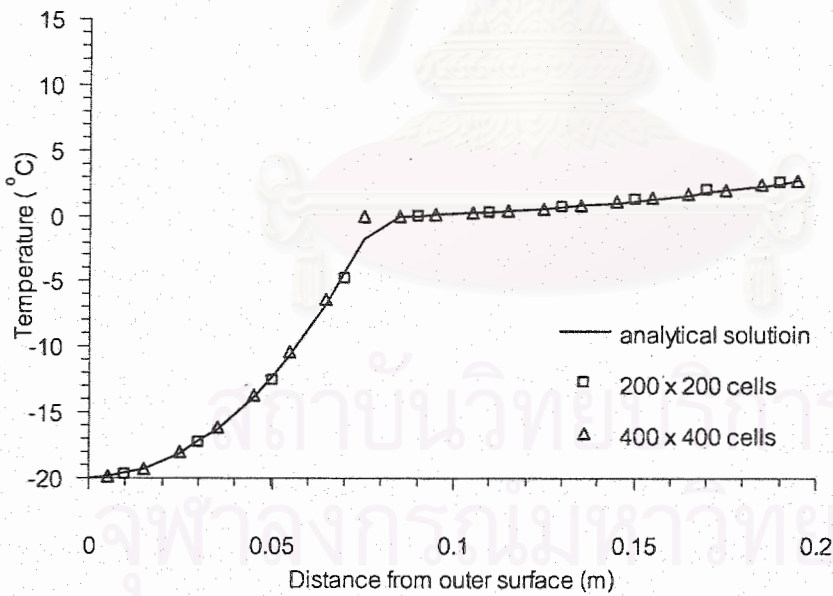
จากรูปที่ 5.10-5.12 พบว่าการแบ่งกริดแบบหยาบเช่น  $200 \times 200$  cells ยังคงให้ผลเฉลยมีแนวโน้มเหมือนผลเฉลยแม่นยำ และการแบ่งกริดแบบละเอียดเช่น  $400 \times 400$  cells จะช่วยเพิ่มความแม่นยำให้กับผลลัพธ์ (ตารางที่ 5.1) ในทำนองเดียวกันกับการอภิปรายผลของการใช้จำนวนปริมาตรควบคุม และ ขนาดช่วงเวลาต่าง ๆ กันในหัวข้อ 4.1.3 และ 4.2.3

เวลาที่ใช้ในการประมวลผลทั้งหมด (total CPU time) คือ เวลาที่ใช้ในการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่  $t = 80$  h เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุม =  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s สำหรับวิธี explicit, Crank-Nicolson, และ fully implicit เท่ากับ 2 h 29 min, 14 h 23 min และ 12 h 32 min ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ใช้เวลาในการประมวลผลมาก เนื่องจากการแก้ระบบสมการต้องมีการทำซ้ำ (iteration) ในขณะที่วิธี explicit สามารถแก้สมการเดียวโดยตรงได้ เมื่อพิจารณาในตารางที่ 5.1 ที่  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t = 10$  s จะเห็นว่าเวลาในการประมวลผลของวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit มากกว่า explicit ประมาณ 7 และ 6 เท่าตามลำดับซึ่งใกล้เคียงกับจำนวนรอบของการทำซ้ำในตารางที่ 5.2

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

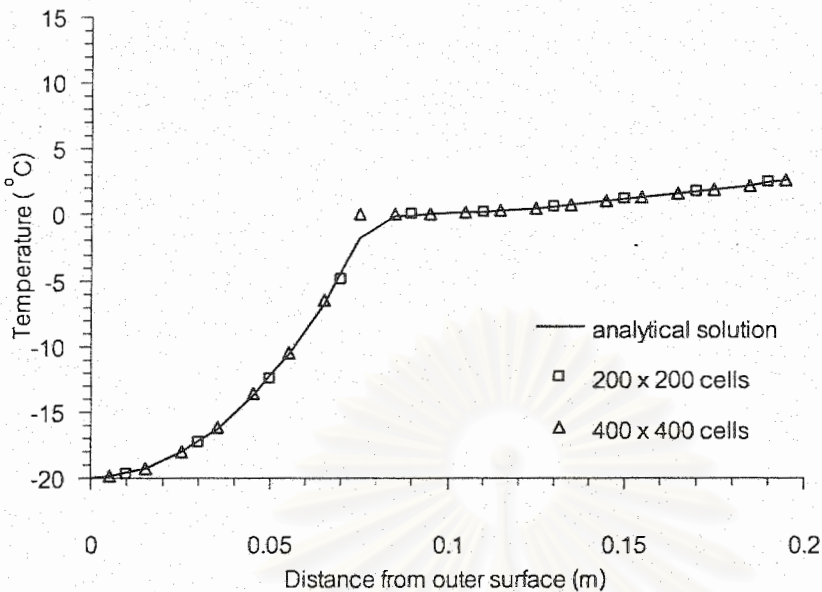


รูปที่ 5.10 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแผ่นตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h เมื่อใช้วิธี explicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างกัน และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 5.11 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแผ่นตรงกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างกัน และ  $\Delta t = 10$  s





รูปที่ 5.12 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรง กับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells ต่างกัน และ  $\Delta t = 10$  s

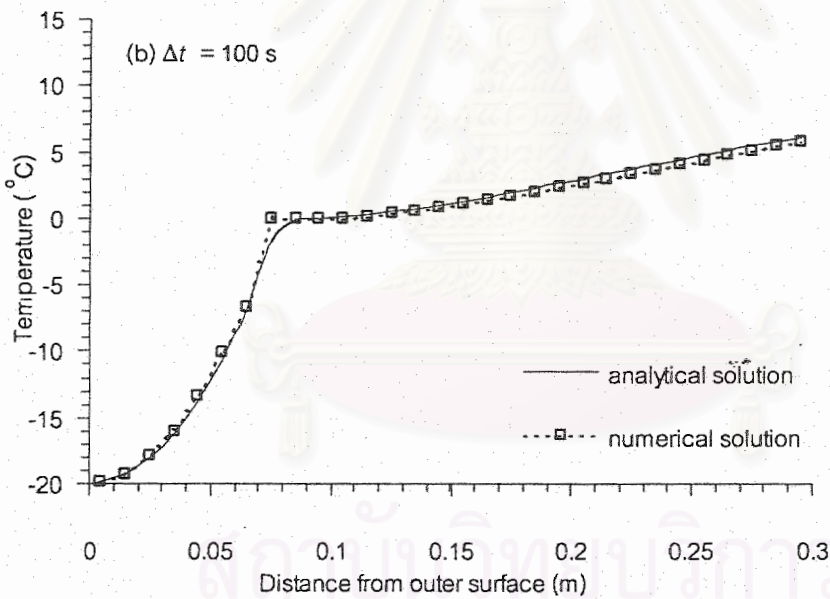
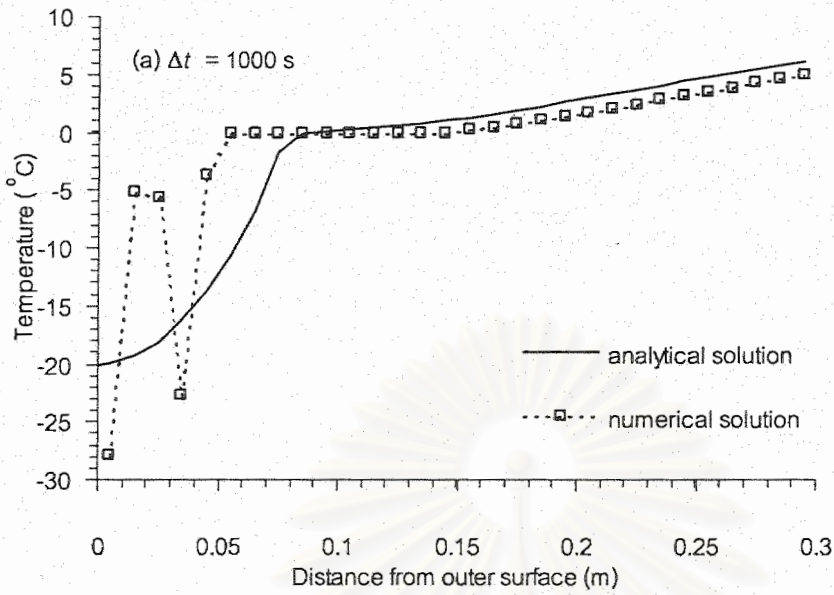
จากตารางที่ 5.1 จะเห็นว่าการใช้ช่วงเวลานานใหญ่ เช่น  $\Delta t = 1000$  s สำหรับวิธี explicit ผลลัพธ์ที่ได้จะลู่ออก โดยค่าจำกัดของช่วงเวลาสำหรับปัญหา 2 มิติจะมีขนาดเล็กกว่าของปัญหา 1 มิติ เช่น เมื่อพิจารณาการแบ่งกริดขนาด  $400 \times 400$  cells จะมีข้อจำกัดของขนาดช่วงเวลา คือ  $\Delta t < 19.84$  s เพราะสมการ discretisation มีจำนวน neighbor coefficients มากกว่า ซึ่งเป็นตัวหารในสมการข้อจำกัดของช่วงเวลา ดังแสดงในสมการ (3.27) ส่วนวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ยังคงหาคำตอบได้แต่จะมีความผิดพลาดสูง และการปรับปรุงความแม่นยำของผลลัพธ์ทำได้โดยการใช้ช่วงเวลาน้อย แต่ทำให้ต้องการเวลาในการประมวลผลมากขึ้นด้วย นอกจากนี้อัลกอริทึมในการคำนวณการเปลี่ยนสถานะที่ระบุว่า ถ้าจุดต่อใดมีสถานะเป็นของเหลวและอุณหภูมิผ่านจุดเยือกแข็ง จะทำการคำนวณค่าความร้อนแฝงที่จุดต่อนั้นๆ และกำหนดให้จุดต่อนั้นมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง ทำให้การใช้ช่วงเวลานานใหญ่ เช่น  $\Delta t = 1000$  s ดังแสดงในรูปที่ 5.13 และ 5.14 จะมีจำนวนจุดต่อที่มีอุณหภูมิผ่านจุดเยือกแข็งได้หลายจุดในคราวเดียวกัน ซึ่งจะถูกระบุให้มีความถี่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง อันเป็นเหตุให้ diffusion heat transfer ของจุดต่อข้างเคียงจุดต่อเหล่านี้มีค่าน้อยกว่าที่ควรจะเป็น เช่นเดียวกันกับในปัญหา 1 มิติ ผลเฉลยที่ได้จึงมีความผิดพลาดมาก และสำหรับวิธี Crank-Nicolson ยังคงมีการสั่นเกิดขึ้นด้วยดังแสดงในรูปที่ 5.13a ด้วยเหตุที่สัมประสิทธิ์ของ discretised equation ไม่สอดคล้องกับสมการ (3.28)

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดมากที่สุดและเวลาในการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่  $t = 5$  h สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme จำนวน cells และ  $\Delta t$  ต่างๆ กัน (\* หมายถึงผลลัพธ์มีการสั่นเล็กน้อย)

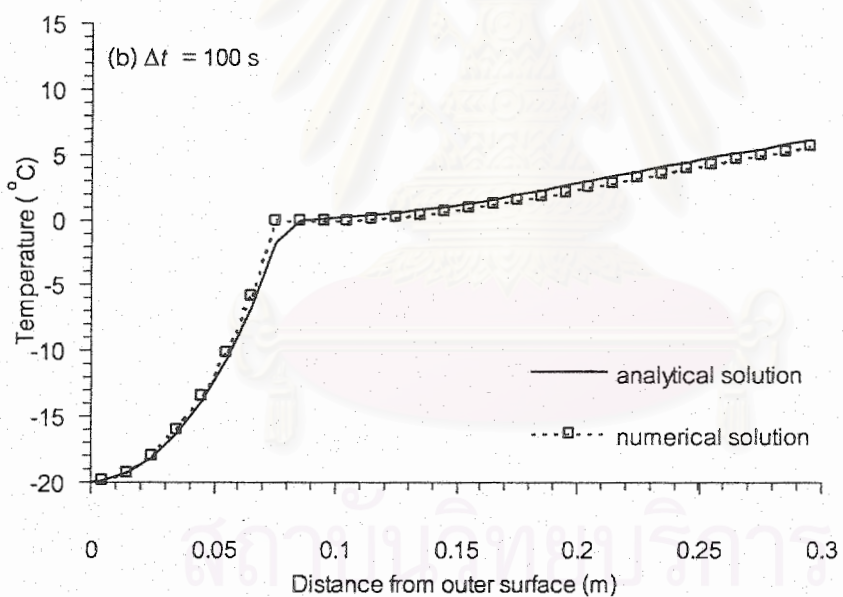
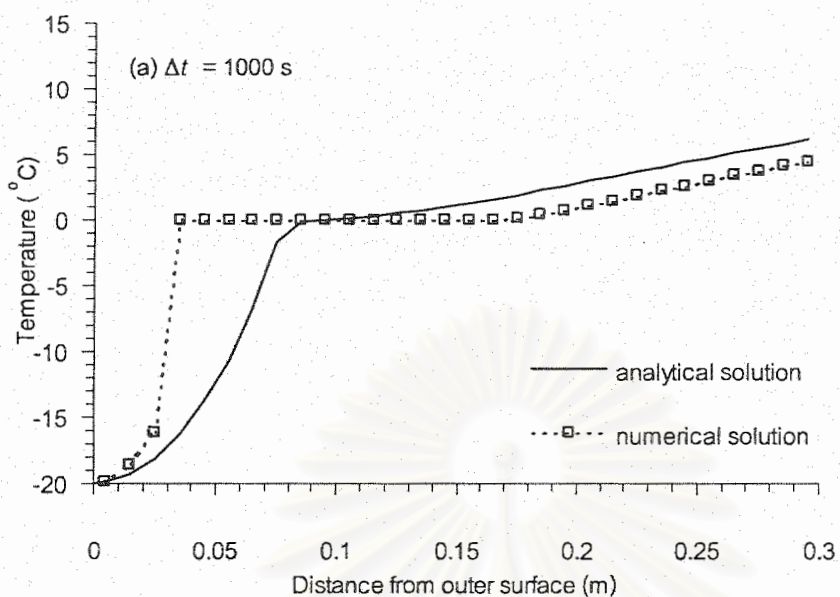
scheme	number of cells	maximum error ( °C)				CPU time (s)			
		at $t = 5$ h				for achieving results at $t = 5$ h			
		$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s	$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s
explicit	200 × 200	diverge	diverge	-1.71	-1.71	diverge	diverge	132.75	1352.04
	400 × 400	diverge	diverge	0.931	0.931	diverge	diverge	528.17	5203.97
Crank-Nicolson	200 × 200	12.32*	4.524	-1.71	-1.71	38.50	97.33	510.26	4227.73
	400 × 400	14.16*	3.313	1.767	0.931	430.2	791.0	3535.7	22435.5
fully implicit	200 × 200	15.420	4.941	-1.70	-1.71	48.45	95.52	472.30	3732.57
	400 × 400	16.559	4.964	1.767	1.624	541.5	922.4	3090.7	21560.8

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำ ที่  $t = 5$  h สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ เมื่อใช้ time-stepping scheme แบบ implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วยจำนวน cells และ  $\Delta t$  ต่างๆ กัน

scheme	number of cells	number of iteration at $t = 5$ h			
		$\Delta t = 1000$ s	$\Delta t = 100$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 1$ s
		Crank-Nicolson	200 × 200	32	9
	400 × 400	96	17	7	4
fully implicit	200 × 200	52	12	6	4
	400 × 400	168	26	8	5



รูปที่ 5.13 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h เมื่อใช้วิธี Crank-Nicolson โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t$  ต่างกัน: (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s



รูปที่ 5.14 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยโดยประมาณที่  $t = 5$  h เมื่อใช้วิธี fully implicit โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $400 \times 400$  cells และ  $\Delta t$  ต่างกัน: (a)  $\Delta t = 1000$  s และ (b)  $\Delta t = 100$  s

#### 5.1.4 การสรุปผล

ในการทดสอบโปรแกรมกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติได้พบสรุปว่า การประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทุกวิธีให้ผลเฉลยได้ค่าใกล้เคียงกัน และจากการ discretisation ที่มีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามระยะทางให้มีโพไรไฟล์เชิงเส้นตรง จึงทำให้มีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม  $\Delta x^2$  หรือมี second-order spatial accuracy และถึงแม้ว่ามีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบ two-time level ซึ่งอันดับความผิดพลาดควรเป็น  $\Delta t$  หรือ the first-order temporal accuracy สำหรับการใช่วิธี explicit และ วิธี fully implicit หรือ  $\Delta t^2$  ซึ่งมี the second-order temporal accuracy สำหรับการใช่วิธี Crank-Nicolson แต่เนื่องจากอัลกอริทึมในการคำนวณความร้อนแฝงได้จำกัดขนาดช่วงเวลาสำหรับทุกวิธีที่ใช้ให้ควรมีขนาดเล็ก ทำให้ความได้เปรียบในการใช้ช่วงเวลาได้ขนาดใหญ่ของวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ไม่เกิดประโยชน์เท่าที่ควร เช่นเดียวกันกับผลสรุปในปัญหา 1 มิติ ในขณะที่มีข้อเสียเปรียบคือต้องการเวลาในการประมวลผลมาก เพราะมีการทำซ้ำในการแก้ระบบสมการ ส่วนวิธี explicit แม้จะมีข้อจำกัดเรื่องเวลา แต่เนื่องจากอัลกอริทึมที่ใช้ต้องการช่วงเวลาขนาดเล็ก ดังนั้นวิธี explicit เป็นวิธีที่น่าจะเหมาะสมที่สุดเนื่องจากให้ผลเฉลยที่มีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำแต่ที่ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด

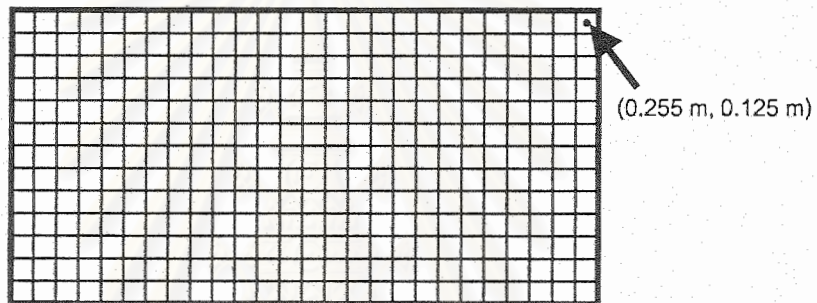
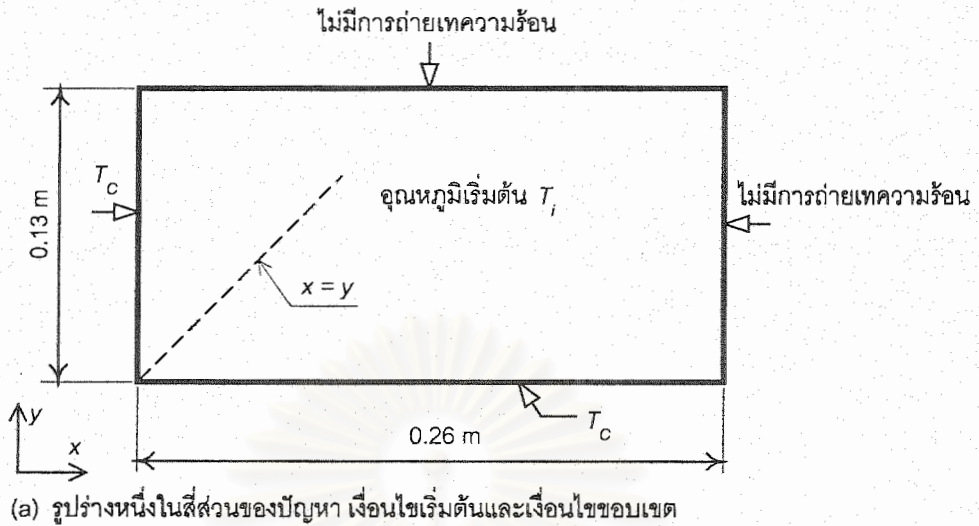
## บทที่ 6 กรณีศึกษา



การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม จากการเปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณกับผลเฉลยแม่นยำในบทที่ 4 และ 5 เป็นการพิจารณาปัญหาที่มีความยาวมาก (semi-infinite slab) และพื้นที่ใหญ่มาก (semi-infinite region) ตามลำดับ เนื่องจากข้อจำกัดของผลเฉลยแม่นยำที่นำมาเปรียบเทียบ นอกจากนี้ผลเฉลยแม่นยำสำหรับปัญหาสองมิติยังมีข้อจำกัดคือการกำหนด thermal diffusivity ของสารทั้งสองสถานะให้มีค่าเท่ากัน อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติรูปร่างของปัญหามีขนาดจำกัด และ thermal diffusivity ของสารในแต่ละสถานะมีค่าต่างกัน แม้ไม่มีผลเฉลยแม่นยำสำหรับปัญหาดังกล่าว แต่การประมาณด้วยระเบียบวิธีเชิงเลขยังคงสามารถหาคำตอบได้ ในบทนี้จะแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ ด้วยวิธีที่ได้ผลดีที่สุดในการตรวจสอบความถูกต้องคือการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบ explicit และการประมาณสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะให้มีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง โดยจะกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น 2 แบบ แบบหนึ่งตามที่กำหนดในบทที่ 4 และ 5 ส่วนอีกแบบตามที่ระบุในตัวอย่างปัญหาบทที่ 1 สำหรับคอมพิวเตอร์ที่ใช้อยู่ยังเป็นเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล Pentium III 733 MHz

### 6.1 ปัญหาตัวอย่าง

ในทางปฏิบัติรูปทรงของปัญหามีขนาดประมาณ  $0.52 \text{ m} \times 0.26 \text{ m} \times 1.40 \text{ m}$  ในการแก้ปัญหาสองมิติจะพิจารณาพื้นที่ภาคตัดซึ่งขนานกับพื้นราบ คือ พื้นที่ขนาด  $0.52 \text{ m} \times 0.26 \text{ m}$  ที่เวลาเริ่มต้น  $t_0 = 0 \text{ s}$  มีอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  สมมติเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบทุกด้านมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่  $T_c = -20 \text{ }^\circ\text{C}$  ไม่มีการถ่ายเทความร้อนในทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่ และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาเพียงหนึ่งในสี่ของพื้นที่ได้รูปที่ 6.1a โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน คุณสมบัติของสารซึ่งในที่นี้คือ น้ำ สำหรับสถานะของเหลวมีค่าการนำความร้อน  $k_L = 0.556 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c_L = 4.226 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$  ค่าความหนาแน่น  $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$  สำหรับสถานะของแข็งมีค่าการนำความร้อน  $k_S = 2.220 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c_S = 1.762 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$  และ ค่าความหนาแน่น  $\rho_S = 1000 \text{ kg/m}^3$  ปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง  $L = 338 \text{ kJ/kg}$  และ อุณหภูมิเยือกแข็ง  $T_F = 0 \text{ }^\circ\text{C}$



(b) ตัวอย่างการแบ่งกริดขนาด  $26 \times 13$  cells

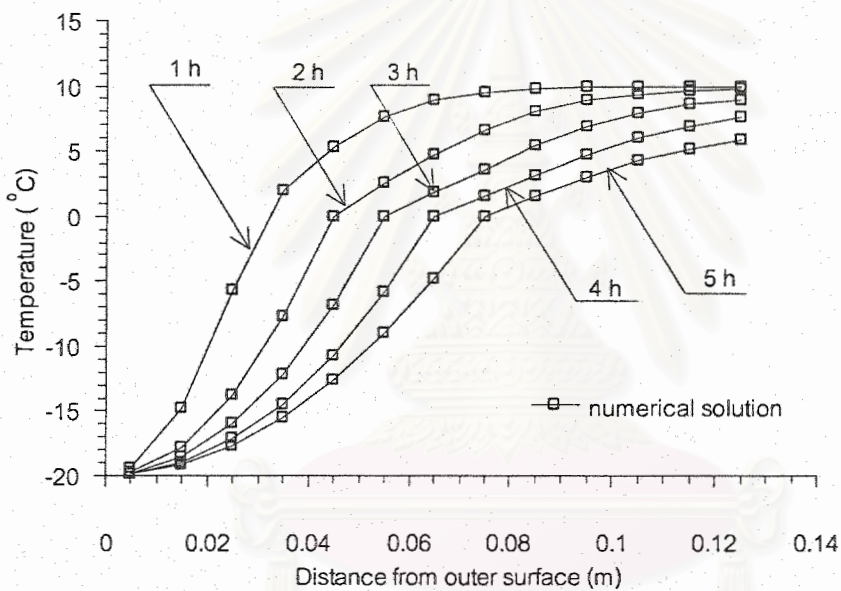
รูปที่ 6.1 การเปลี่ยนสถานะในสองมิติ กรณีศึกษา: (a) รูปร่างหนึ่งในส่วนของปัญหา เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต และ (b) การแบ่งกริดขนาด  $26 \times 13$  cells

ในการจำลองแบบได้แบ่งกริด (grid) ตามความยาวในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาดเท่ากัน (uniform control volumes) โดยในที่นี้แบ่งกริดขนาด  $26 \times 13$  cells ดังแสดงในรูปที่ 6.1b โดยจะแสดงผลการกระจายของอุณหภูมิตามแนวเส้น  $x = y$  คอนทัวร์ของอุณหภูมิที่เวลา  $t = 1$  และ  $5$  h คอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะ ซึ่งก็คือ เส้นที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง ที่  $t = 1, 2, 4, 8$  และ  $16$  h และการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง  $(0.255 \text{ m}, 0.125 \text{ m})$  ซึ่งเป็นตำแหน่งของจุดต่อที่ใกล้บริเวณกึ่งกลางของรูปร่างเต็มของปัญหามากที่สุด (รูปที่ 6.1b) โดยใช้การประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วยวิธี explicit และการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ  $k_{INT}$  ด้วยค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง  $k_s$  และใช้ช่วงเวลา  $\Delta t = 10 \text{ s}$  โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต 2 แบบ คือแบบที่หนึ่ง  $T_i = 10^\circ \text{C}$  และ  $T_c = -20^\circ \text{C}$  ตามที่กำหนดในบทที่ 4-5 และแบบที่สอง  $T_i = 30^\circ \text{C}$  และ  $T_c =$

$-10^{\circ}\text{C}$  ตามที่ระบุในปัญหาตัวอย่างในบทที่ 1 เวลาที่ใช้ในการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่  $t = 80$  h สำหรับการคำนวณตามเงื่อนไขแรกและเงื่อนไขที่สองเท่ากับ 40.59 s และ 32.63 s ตามลำดับ

### 6.1.1 เงื่อนไขแบบที่ 1: $T_i = 10^{\circ}\text{C}$ และ $T_c = -20^{\circ}\text{C}$

เมื่อกำหนดเงื่อนไข  $T_i = 10^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20^{\circ}\text{C}$  จะได้ผลการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ที่เวลา 1, 2, 3, 4 และ 5 h ดังแสดงในรูปที่ 6.2 ซึ่งพบว่ามีลักษณะเดียวกับผลเฉลยในบทที่แล้ว และคอนทัวร์ของอุณหภูมิที่เวลา 1 และ 5 h ได้ถูกแสดงในรูปที่ 6.3 ส่วนคอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะที่  $t = 1, 2, 4, 8$  และ 16 h ถูกแสดงในรูปที่ 6.4

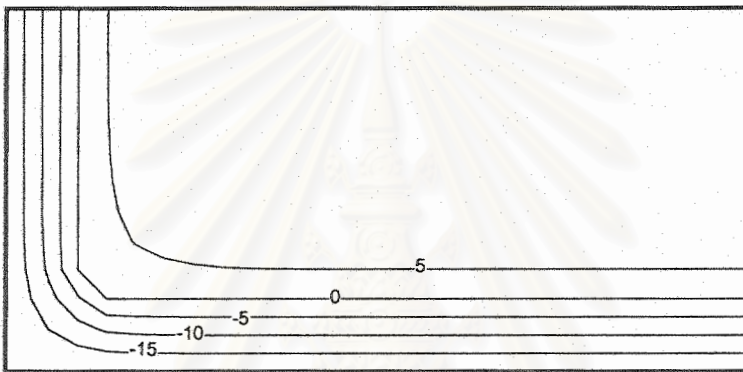
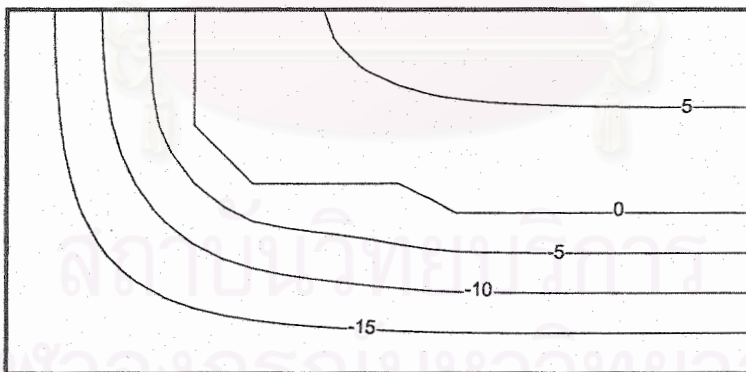


รูปที่ 6.2 การกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ ขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 10^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10$  s

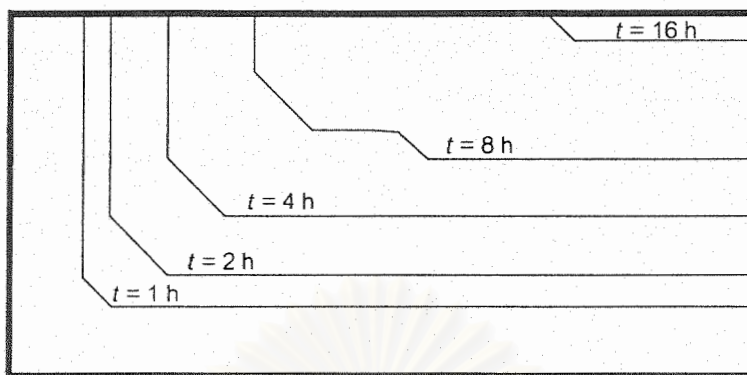
และเนื่องจากจุดต่อที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) เป็นจุดที่ใกล้บริเวณกึ่งกลางของรูปร่างเต็มของปัญหามากที่สุด หากอุณหภูมิที่จุดนี้มีค่าเท่ากับอุณหภูมิขอบเขต จุดต่ออื่นที่อยู่ใกล้ขอบเขตมากกว่าย่อมมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิขอบเขต จึงแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิของจุดต่อดังกล่าวตามเวลาในรูปที่ 6.5 จะเห็นว่าอุณหภูมิของจุดต่อมีค่าลดลงตามเวลาจนกระทั่งถึงอุณหภูมิเยือกแข็ง  $0^{\circ}\text{C}$  อุณหภูมิของจุดต่อจะมีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง  $0^{\circ}\text{C}$  เป็นช่วงเวลาหนึ่งซึ่งการ



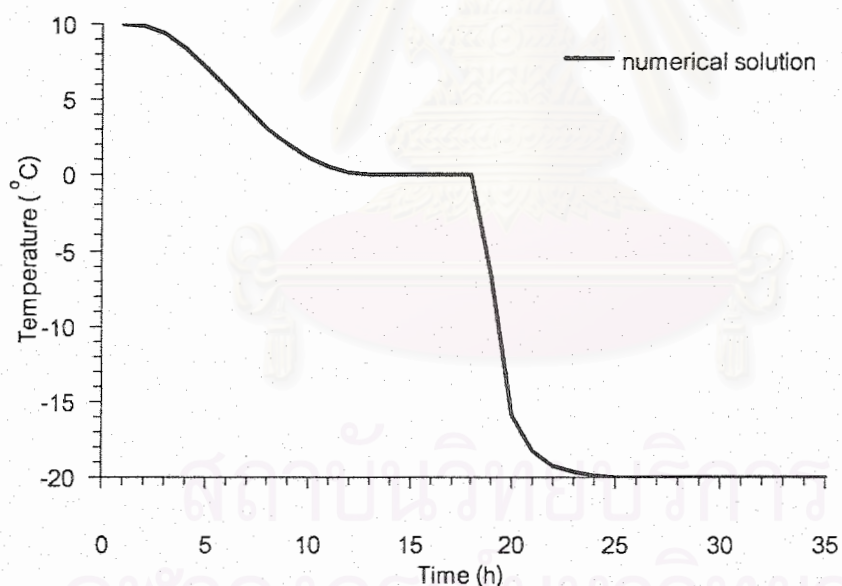
คายความร้อนแฝงจะเกิดขึ้นในช่วงเวลาดังกล่าว จนกระทั่งพลังงานความร้อนแฝงที่คายออกมีปริมาณเพียงพอต่อการเปลี่ยนสถานะ จุดต่อจึงมีการเปลี่ยนสถานะเป็นของแข็ง หลังจากนั้นอุณหภูมิลดลงอย่างรวดเร็ว โดยเร็วกว่าการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในสถานะของเหลว เนื่องจากค่า thermal diffusivity ของสสารในสถานะของแข็งมีค่ามากกว่าในสถานะของเหลว ในที่นี้ค่า thermal diffusivity ของน้ำแข็งและน้ำมีค่าเท่ากับ  $1.26E-06$  และ  $1.32E-07$   $m^2/s$  ตามลำดับ และรูปร่างของปัญหา กลายเป็นน้ำแข็งที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิขอบเขต  $-20$  °C เมื่อเวลาในการทำความเย็น 25 h ขึ้นไป

(a)  $t = 1$  h(b)  $t = 5$  h

รูปที่ 6.3 คอนทัวร์ของอุณหภูมิ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 10$  °C และ  $T_c = -20$  °C เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_S$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10$  s ที่เวลา: (a)  $t = 1$  h และ (b)  $t = 5$  h



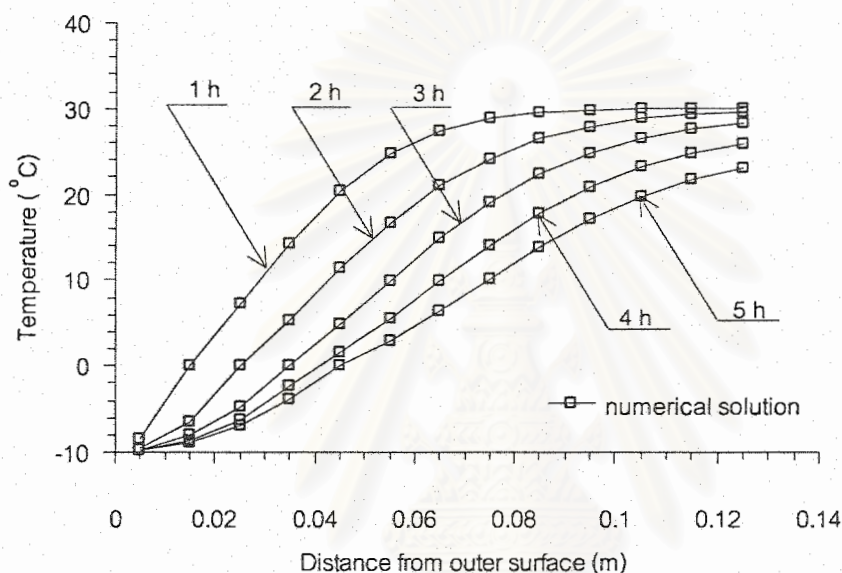
รูปที่ 6.4 คอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะที่เวลาต่างๆ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ ขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลอง ประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 6.5 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) ตามเวลา สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10$  s

### 6.1.2 เงื่อนไขแบบที่ 2: $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ และ $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$

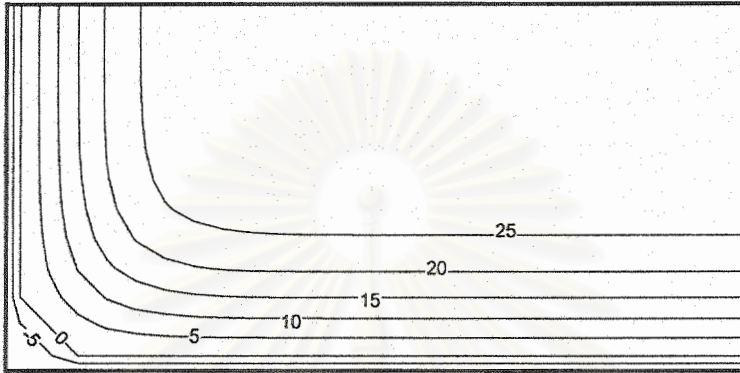
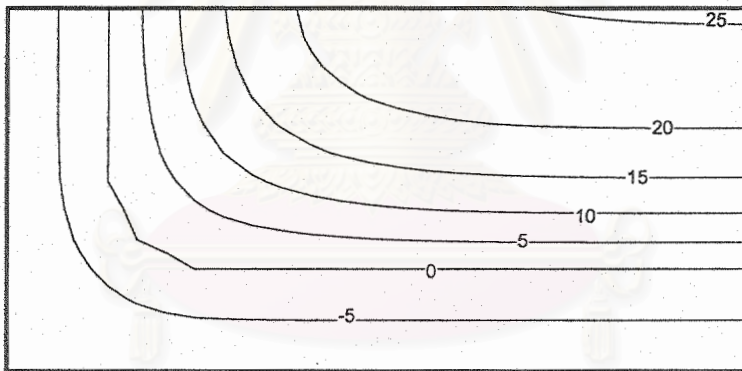
เมื่อกำหนดเงื่อนไข  $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$  จะได้ผลการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  ที่เวลา 1, 2, 3, 4 และ 5 h ดังแสดงในรูปที่ 6.6 คอนทัวร์ของอุณหภูมิที่เวลา 1 และ 5 h ได้ดังแสดงในรูปที่ 6.7 คอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะแสดงในรูปที่ 6.8 และการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) ตามเวลาดังรูปที่ 6.9



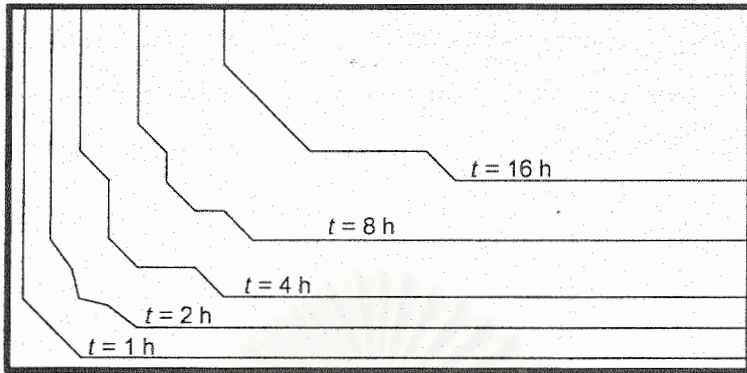
รูปที่ 6.6 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง  $x = y$  สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ ขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_c = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10\text{ s}$

และแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิของจุดต่อที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) ตามเวลา ในรูปที่ 6.9 ด้วยเหตุผลในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 จะเห็นว่าในช่วงที่มีสถานะเป็นของแข็งคือ อุณหภูมิต่ำกว่าจุดเยือกแข็ง  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วกว่าช่วงที่เป็นของเหลว เนื่องจาก thermal diffusivity ของน้ำแข็งมีค่ามากกว่าน้ำ และรูปร่างของปัญหากลายเป็น น้ำแข็งที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิขอบเขต  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  เมื่อเวลาในการทำความเย็น 45 h ขึ้นไป ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหาในทางปฏิบัติที่มีรูปร่างขนาด  $0.52\text{ m} \times 0.26\text{ m} \times 1.40\text{ m}$  อุณหภูมิเริ่มต้น  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และอุณหภูมิขอบเขต  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  จะใช้เวลาในการทำน้ำแข็งที่มีอุณหภูมิ  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  ประมาณ 48 h ขึ้นไป จะเห็นได้ว่าผลเฉลยที่ได้มีความสอดคล้องกับข้อมูลในทางปฏิบัติ แต่อย่างไรก็ตามผลที่ได้จาก

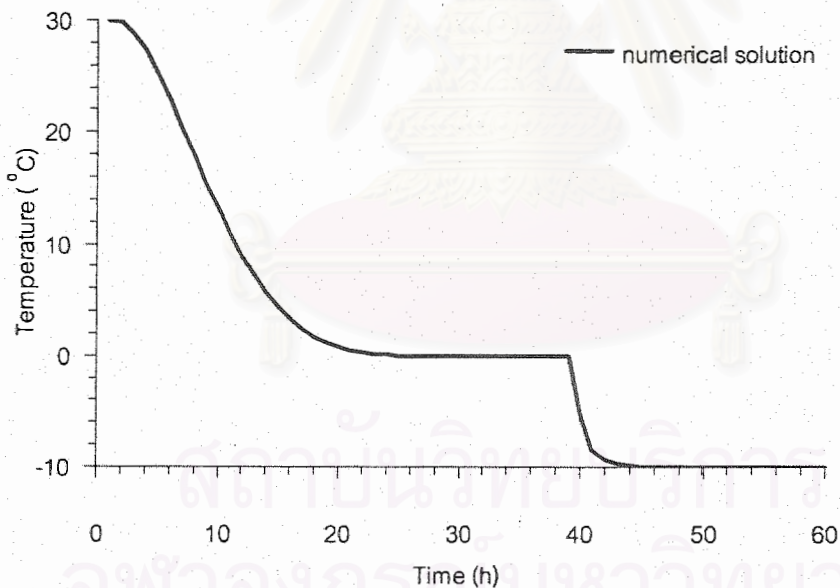
การประมาณเป็นการแก้ปัญหาในสองมิติในแนวระนาบเท่านั้นยังไม่ได้คิดการเปลี่ยนแปลงในแนวตั้ง เวลาในการทำความเข้าใจเร็วกว่าข้อมูลในทางปฏิบัติ

(a)  $t = 1 \text{ h}$ (b)  $t = 5 \text{ h}$ 

รูปที่ 6.7 คอนทัวร์ของอุณหภูมิ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 30 \text{ }^\circ\text{C}$  และ  $T_c = -10 \text{ }^\circ\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10 \text{ s}$  ที่เวลา: (a)  $t = 1 \text{ h}$  และ (b)  $t = 5 \text{ h}$



รูปที่ 6.8 คอนทัวร์ของเส้นรอยต่อสถานะที่เวลาต่างๆ สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ ขนาดจำกัด ที่มี  $T_i = 30^\circ\text{C}$  และ  $T_c = -10^\circ\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลอง ประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10$  s



รูปที่ 6.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง (0.255 m, 0.125 m) ตามเวลา สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติขนาดจำกัดที่มี  $T_i = 30^\circ\text{C}$  และ  $T_c = -10^\circ\text{C}$  เมื่อใช้วิธี explicit และให้  $k_{INT} = k_s$  โดยแบบจำลองประกอบด้วย  $26 \times 13$  cells และ  $\Delta t = 10$  s

## 6.2 บทสรุป

โปรแกรมการคำนวณการเปลี่ยนสถานะ ที่ได้รับการตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยโดยประมาณกับผลเฉลยแม่นยำในหนึ่งและสองมิติสำหรับที่มีขนาดยาวมาก (semi-infinite slab) และพื้นที่ใหญ่มาก (semi-infinite region) ตามลำดับ สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับกรณีศึกษาที่มีขนาดพื้นที่จำกัดได้

โดยในบทที่ผ่านมา ได้ทำการศึกษาผลของวิธีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะที่มีต่อผลลัพธ์ แต่ในการศึกษาปัญหาสองมิติไม่ได้พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ เนื่องจากข้อจำกัดของผลเฉลยแม่นยำ พบว่า วิธี explicit มีประสิทธิภาพการใช้ CPU time ดีที่สุดและในการศึกษาปัญหาหนึ่งมิติที่มีค่า thermal diffusivity ของสสารในสองสถานะต่างกัน พบว่าความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณ ขึ้นกับการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ โดยการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งให้ผลเฉลยที่มีความใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำมากที่สุด จึงได้นำผลสรุปของวิธีที่เหมาะสมคือ วิธีประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบ explicit และการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ ให้มีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งมาใช้ในการแก้ปัญหากรณีศึกษาได้



## บทที่ 7

### สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

เนื่องจากได้มีการอภิปรายผลพร้อมกับการแสดงผลการเปรียบเทียบในหลายบทที่ผ่านมาแล้ว ในบทนี้จึงเป็นการสรุปผลโดยรวม และให้ข้อเสนอแนะสำหรับการขยายผลการศึกษาต่อไป

#### 7.1 สรุปผลการวิจัย

การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะจากน้ำเป็นน้ำแข็งนี้ ได้ผลการประมาณที่มีประสิทธิภาพดี โดยข้อดีของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มคือ ความง่ายในการ discretisation ของโดเมนปัญหาเป็นปริมาตรย่อยๆ ซึ่งแต่ละปริมาตรควบคุมมีจุดต่อที่ใช้ในการคำนวณ 1 จุด และการสร้าง discretised equation ด้วยการอินทิเกรตสมการทางคณิตศาสตร์โดยตรง นอกจากนี้อัลกอริทึมในการคำนวณค่าความร้อนแฝงในแต่ละช่วงเวลาจากค่าความร้อนสัมผัส สมมุติฐานนี้ ยังสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย และให้ผลเฉลยที่มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำ เป็นอย่างดี โดยเฉพาะเมื่อมีการใช้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะที่เหมาะสม

ในที่นี้เมื่อทดสอบกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะ 1 มิติ ได้พบว่าการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะให้มีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็ง จะได้ผลเฉลยโดยประมาณที่มีความใกล้เคียงแม่นยำมากที่สุด แม้ว่าในตอนเริ่มต้นพื้นผิวระหว่างปริมาตรควบคุมที่มีสถานะต่างกันจะเป็นรอยต่อของของแข็งและของเหลว แต่เมื่อเวลาผ่านไปรอยต่อสถานะก็จะเคลื่อนที่เข้าไปในปริมาตรควบคุมที่กำลังเปลี่ยนสถานะ ทำให้พื้นผิวระหว่างปริมาตรควบคุมทั้งสองในเวลาส่วนมากเป็นของแข็ง

ส่วนในการทดสอบปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติ ไม่ได้ทำการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะ เนื่องจากข้อจำกัดของผลเฉลยแม่นยำ แต่อย่างไรก็ตามการทดสอบปัญหาการเปลี่ยนสถานะ 2 มิติ กรณีที่ thermal diffusivity ในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันได้ผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ

ในการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาวิธีต่างๆ ให้ผลเฉลยมีค่าใกล้เคียงกันเมื่อผลลัพธ์มีลักษณะ time step independency โดยเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของแต่ละวิธีจะมีค่าไม่ต่างกันมากสำหรับปัญหา 1 มิติ แต่สำหรับปัญหา 2 มิติ พบว่าวิธี Crank-Nicolson และ fully implicit ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่าวิธี explicit หลายเท่า เนื่องจากการทำซ้ำในการแก้ระบบสมการด้วยเทคนิค line-by-line TDMA

สำหรับการแบ่งกริดแบบหยาบ ยังคงให้ผลเฉลยที่มีแนวโน้มในทิศทางเดียวกันกับผลเฉลยแม่นยำ แต่การแบ่งกริดแบบละเอียดและช่วงเวลาขนาดเล็กจะช่วยเพิ่มความแม่นยำให้กับผลลัพธ์ได้ในระดับหนึ่ง และเนื่องจากความต้องการช่วงเวลาขนาดเล็กของอัลกอริทึมที่ใช้ในการคำนวณค่าความร้อนแฝง จึงทำให้การใช้ช่วงเวลาขนาดใหญ่จะก่อให้เกิดผลเฉลยที่มีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำมาก

โดยสรุปแล้ววิธีการประมาณตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วย วิธี explicit มีประสิทธิภาพดีที่สุด เนื่องจากใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด กอปรกับอัลกอริทึมที่ใช้ต้องการช่วงเวลาขนาดเล็กจึงทำข้อจำกัดเรื่องช่วงเวลาของวิธี explicit ไม่มีผลกระทบ เพราะขนาดช่วงเวลาที่ต้องใช้เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีลักษณะ time step independency มีขนาดเล็กกว่าข้อจำกัดมาก โดยการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อสถานะให้มีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในสถานะของแข็งจะให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมากที่สุด

## 7.2 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะสำหรับการขยายผลการศึกษางานวิจัยนี้ เช่น การศึกษาปัญหาในสามมิติโดยพิจารณารูปทรงตามปัญหาจริง การทำการทดลองเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบกับผลเฉลยโดยประมาณที่ไม่มีผลเฉลยแม่นยำ การใช้คุณสมบัติของสารตามสถานะจริงๆ เช่น ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$ , ค่าความหนาแน่น  $\rho$  และค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $c$  เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (หรือเอนทัลปี) และการลดการประมาณในบทที่ 1 เช่น รวมการขยายตัวของน้ำแข็ง นอกจากนี้ในการหาแนวทางการประหยัดพลังงานในการผลิตน้ำแข็งควรพิจารณาปัญหาทั้งระบบ กล่าวคือ ชั้นแรกเป็นการวิเคราะห์เฉพาะการขึ้นรูปของน้ำแข็ง ต่อไปควรพิจารณาของทำน้ำแข็งเพื่อเลือกขนาดของที่เหมาะสม รวมทั้งพิจารณาการวนของน้ำเกลือ อุปกรณ์ทำความเย็น (evaporator) และอุปกรณ์ระบายความร้อน (condenser) เพื่อออกแบบท่อทำความเย็น ท่อระบายความร้อน และครีบ (fin) ที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น





## รายการอ้างอิง

- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2537. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2538. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Askar, H.G. 1987. The front-tracking scheme for the one-dimensional freezing problem. Int. J. Numer. Methods Eng. 24: 859-869.
- Atthey, D.R. 1975. A finite difference scheme for melting problems based on the method of weak solutions. In Ockendon, J.R. and Hodgkins (eds.), Moving boundary problems in heat flow and diffusion (Proceedings of Conference). pp. 182-191. Oxford: Clarendon Press, University of Oxford. Cited in Dalhuijsen, A.J. and Segal, A. 1986. Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Bejan, A. 1993. Heat Transfer. New York: John Wiley & Sons Inc.
- Bonacina, C., Comini, G., Fasano, A., and Primicerio, M. 1973. Numerical solution of phase change problems. Int. J. Heat Mass Tranf. 16: 1825-1832. Cited in Dalhuijsen, A.J. and Segal, A. 1986. Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. 1959. Conduction of Heat in Solids. London: Clarendon Press.
- Celentano, D., Onate, E., and Oller, S. 1994. A temperature-based formulation for finite element analysis of generalized phase-change problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 37: 3441-3465.
- Comini, G., Guidice, S.D., Lewis, R.W., and Zienkiewicz, O.C. 1974. Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change. Int. J. Numer. Methods Eng. 8: 613-624.
- Comini, G., Guidice, S.D., and Saro, O. 1990. A conservative algorithm for multidimensional conduction phase change. Int. J. Numer. Methods Eng. 30: 697- 709.

- Crivelli, L.A. and Idelsohn, S.R. 1986. A temperature-based finite element solution for phase-change problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 99-119.
- Dalhuijsen, A.J. and Segal, A. 1986. Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Dhatt, G., Song, R. and Cheikh, A.B. 1989. Direct enthalpy method for solidification calculation. in Gruber, R. et al. (eds.), Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, pp. 487-494. Boston: Computational Mechanics Publication.
- Furzeland, R.M. 1980. A comparative study of numerical methods for moving boundary problems. J. Inst. Maths. Applics. 26: 411-429. Cited in Dalhuijsen and Segal, 1986. Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Giudice, S.D., Comini, G. and Lewis, R.W. 1978. Finite element simulation of freezing process in soils. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 2: 223-235. Cited in Dalhuijsen, A.J. and Segal, A. 1986. Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Hibbitt, H.D. 1976. Private Communication. Cited in Morgan, K., Lewis, R.W., and Zienkiewicz, O.C. 1978. An improved algorithm for heat conduction problems with phase change. Int. J. Numer. Methods Eng. 12: 1191-1195.
- Holman, J.P. 1981. Heat Transfer. New York: McGraw-Hill.
- Idelsohn, S.R. and Onate, E. 1994. Finite volumes and finite elements: Two good friends. Int. J. Numer. Methods Eng. 37: 3323-3341.
- Incropera, F.P. and Dewitt, D.P. 1996. Introduction to Heat Transfer. 3<sup>rd</sup> ed. New York: John Wiley&Sons.
- Ku, J.Y. and Chan, S.H. 1990. A generalized Laplace transform technique for phase-change problems. J. Heat Transfer. 112: 495-497.
- Lemmon, E.C. 1979. Phase change techniques for finite element codes. in Lewis, R.W. and Morgan, K. (eds.), Numerical Methods in Thermal Problems. (Proceedings of Conference), pp.149-158. Swensea. Cited in Dalhuijsen, A.J. and Segal, A. 1986.

- Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Maneeratana, K. 2000. Development of the finite volume method for non-linear structural applications. Ph.D Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, University of London.
- Morgan, K., Lewis, R.W., and Zienkiewicz, O.C. 1978. An improved algorithm for heat conduction problems with phase change. Int. J. Numer. Methods Eng. 12: 119-1195.
- Patankar, S. 1980. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publishing Cooperation.
- Pham, Q.T. 1986. The use of lumped capacitance in the finite-element solution of heat conduction problems with phase change. Int. J. Heat Mass Tranf. 29: 285-291.
- Poulikakos, D. 1994. Conduction Heat Transfer. New Jersey: Prentice Hall.
- Rathjen, K.A. and Jiji, L.M. 1971. Heat conduction with melting or freezing in a corner. J. Heat Transfer. 93: 101-109.
- Rolph III, W.D. and Bathe, K.J. 1982. An efficient algorithm for analysis of nonlinear heat transfer with phase changes. Int. J. Numer. Methods Eng. 18: 119-134.
- Roose, J. and Storrer, O. 1984. Modelization of phase changes by fictitious heat flow. Int. J. Numer. Methods Eng. 20: 217-225.
- Rubinsky, B. and Cravahlo, E.G. 1981. A finite element method for the solution of one-dimensional phase change problems. Int. J. Heat Mass Tranf. 24: 1987-1989.
- Tamma, K. and Namburu, R. 1990. Recent advances, trends and new perspective via enthalpy-based finite element formulations for applications to solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 30: 803-820.
- Thomas, B.G., Samarasekera, I.V., and Brimacombe, J.K. 1984. Comparison of numerical modeling techniques for complex two-dimensional, transient heat-conduction problems. Met. Trans. B. 15: 307-318. Cited in Dalhuijsen, A.J. and Segal, A. 1986. Comparison of finite element techniques for solidification problems. Int. J. Numer. Methods Eng. 23: 1807-1829.
- Versteeg, H.K. and Malalasekera, W. 1995. An Introduction to Computational Fluid

Dynamics: The Finite Volume Method. England: Longman Scientific&Technical.

Viskanta, R. 1988. Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals.

J. Heat Transfer. 110: 1025-1219.

Voller, V. and Cross, M. 1981. Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method. Int. J. Heat Mass Tranf. 24: 545-556.

Voller, V. and Cross, M. 1983. An explicit numerical method to track a moving phase change front. Int. J. Heat Mass Tranf. 26: 147-150.

Voller, V. 1985. Implicit finite difference solutions of the enthalpy formulation of Stefan problems. IMA J. Numer. Analysis. 5: 201-214. Cited in Salcudean, M. and Abdullah, Z. 1988. On the numerical modeling of heat transfer during solidification processes. Int. J. Numer. Methods Eng. 25: 445-473.

Voller, V., Swaminathan, C.R., and Thomas, B.G. 1990. Fixed grid techniques for phase change problems: A review. Int. J. Numer. Methods Eng. 30: 875-898.

Wyllen, G.V., Sonntag, R., and Borgnakke, C. 1994. Classical Thermodynamics. 4<sup>th</sup> ed. New York: John Wiley & Sons.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

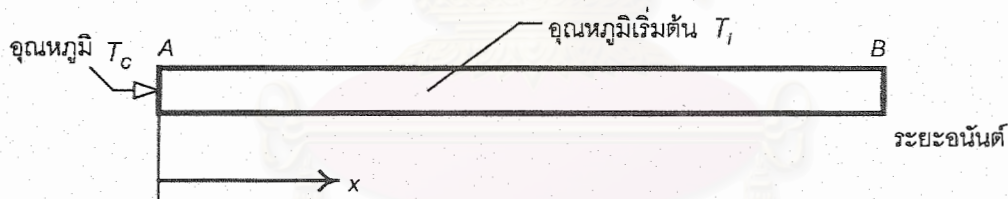
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก ผลเฉลยแม่นยำตรง

การตรวจสอบความแม่นยำของการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถทำได้ด้วยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการจำลองแบบกับผลเฉลยแม่นยำ ดังนั้นจึงต้องทราบเงื่อนไขการได้มาของผลเฉลยแม่นยำ เพื่อพิจารณากรณีศึกษาให้สอดคล้องกับข้อกำหนดของผลเฉลยแม่นยำนั้นๆ ในภาคผนวกนี้จะอธิบายถึงข้อกำหนดและสมการผลเฉลยแม่นยำสำหรับแต่ละปัญหาที่ใช้ในการเปรียบเทียบโดยละเอียด

### ก.1 ปัญหาการนำความร้อนในสถานะชั่วครู่ในหนึ่งมิติ

ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนในสถานะชั่วครู่ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ ก.1 มีเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านหนึ่งมีอุณหภูมิคงที่ และรูปร่างของปัญหามีความยาวมากเป็นระยะกึ่งอนันต์ (semi-infinite) ทำให้ที่ปลายอีกด้านของปัญหามีอุณหภูมิคงเดิมเท่ากับอุณหภูมิเริ่มต้นตลอดเวลา ส่วนในทิศทางตั้งฉากกับ  $AB$  จะไม่มีการถ่ายเทความร้อน Poulikalos (1994) ใช้วิธี Similarity ในการหามผลเฉลยได้ผลดังสมการ (ก.5)



รูปที่ ก.1 รูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต

สมการครอบคลุม (governing equation) คือ

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (\text{ก.1})$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$x = 0 : \quad T = T_c \quad (\text{ก.2})$$

$$x \rightarrow \infty : T \rightarrow T_i \quad (n.3)$$

กำหนดให้

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (n.4)$$

โดยที่  $\alpha$  คือ thermal diffusivity ( $k/\rho c$ )

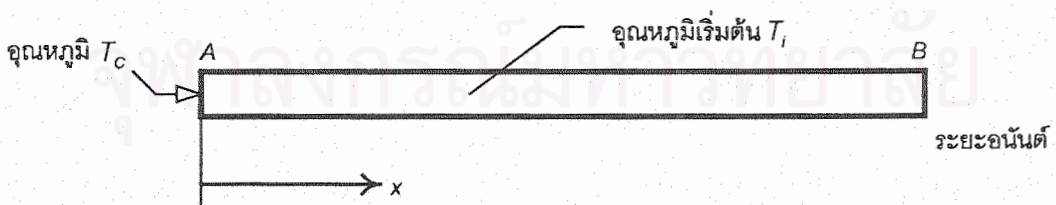
และได้เฉลยแม่นยำตรงของอุณหภูมิ  $T$  คือ

$$T = T_C + (T_i - T_C)\text{erf}(\eta) \quad (n.5)$$

## ก.2 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ

ผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์โดย Carslaw and Jaeger (1959) และ Ku and Chan (1990) ลักษณะของปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่พิจารณาเป็นการเปลี่ยนสถานะที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งเป็นค่าคงที่ (isothermal phase change) โดยที่เวลาเริ่มต้น  $t_0 = 0$  สสารมีสถานะเป็นของเหลวและมีอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i$  ซึ่งมีค่ามากกว่า  $T_F$  เป็นค่าสมำเสมอ เส้นไขขอบเขตที่ปลายด้านหนึ่งที่  $x = 0$  มีอุณหภูมิมคงที่  $T_C$  ซึ่งมีค่าน้อยกว่า  $T_F$  และรูปร่างของปัญหาที่มีความยาวมากเป็นระยะกึ่งอนันต์ทำให้ที่ปลายอีกด้านหนึ่งมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิเริ่มต้นตลอดเวลา ส่วนทิศทางด้านตั้งฉากกับ  $AB$  จะไม่มีการถ่ายเทความร้อน ดังแสดงในรูปที่ ก.2

การเปลี่ยนสถานะจะเริ่มจากทางซ้ายมือไปขวามือ ในการแก้ปัญหาเริ่มจากคำนวณหาตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะ  $x_{st}$  แล้วใช้สมการครอบคลุมของแต่ละสถานะคำนวณหาการกระจายตัวของอุณหภูมิ กำหนดให้ค่าความหนาแน่นในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันจึงไม่คิดผลจากการขยายตัว ส่วนค่าการนำความร้อนและค่าความจุความร้อนจำเพาะในแต่ละสถานะมีต่างกัน โดยเป็นค่าคงที่สำหรับแต่ละสถานะ



รูปที่ ก.2 รูปร่างของปัญหาและเส้นไขขอบเขต

สมการครอบคลุม คือ

$$\rho c_S \frac{\partial T_S}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T_S) \quad 0 < x < x_{SL} \quad (\text{ก.6})$$

$$\rho c_L \frac{\partial T_L}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T_L) \quad x_{SL} < x < \infty \quad (\text{ก.7})$$

โดยที่  $x_{SL}$  คือตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะ  $T_S$  คือ อุณหภูมิในบริเวณที่มีสถานะเป็นของแข็ง  $T_L$  คือ อุณหภูมิในบริเวณที่มีสถานะเป็นของเหลว เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$x = 0 : \quad T = T_C \quad (\text{ก.8})$$

$$x = x_{SL} : \quad T = T_F, \quad k_S \frac{\partial T_S}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho L \frac{dx_{SL}(t)}{dt} \quad (\text{ก.9, ก.10})$$

$$x \rightarrow \infty : \quad T \rightarrow T_i \quad (\text{ก.11})$$

เมื่อกำหนดให้

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \quad (\text{ก.12})$$

$$\alpha_S = \frac{k_S}{\rho c_S} \quad \text{และ} \quad \alpha_L = \frac{k_L}{\rho c_L} \quad (\text{ก.13})$$

$$Ste = \frac{c_S(T_F - T_C)}{L} \quad (\text{ก.14})$$

โดยที่  $\eta$  คือตัวแปรไร้มิติของระยะทาง  $x$  ส่วน  $\alpha_S$  และ  $\alpha_L$  คือ thermal diffusivity ของสสารในสถานะของแข็งและของเหลวตามลำดับ

ได้ผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะของแข็ง คือ

$$T_S = T_C + (T_F - T_C) \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\eta_{SL})} \quad 0 < \eta < \eta_{SL} \quad (\text{ก.15})$$

และการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะของเหลว คือ



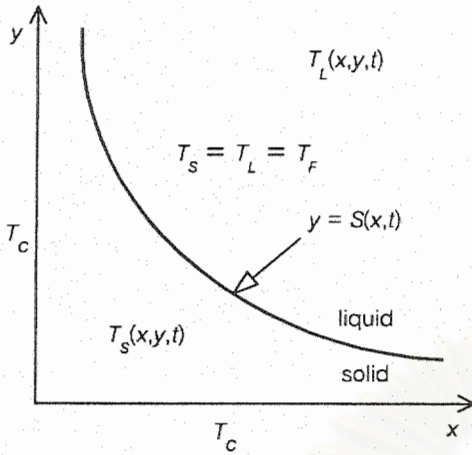
$$T_L = T_i + (T_F - T_i) \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L} \eta)}{\operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L} \eta_{SL})} \quad \eta_{SL} < \eta < \infty \quad (\text{ก.16})$$

โดย  $\eta_{SL}$  คือค่าตัวแปรไร้หน่วยของตำแหน่งเส้นแบ่งสถานะ  $x_{SL}$  และหาค่าได้จากสมการพีชคณิตไม่เชิงเส้นตรง (nonlinear algebraic equation) ดังนี้

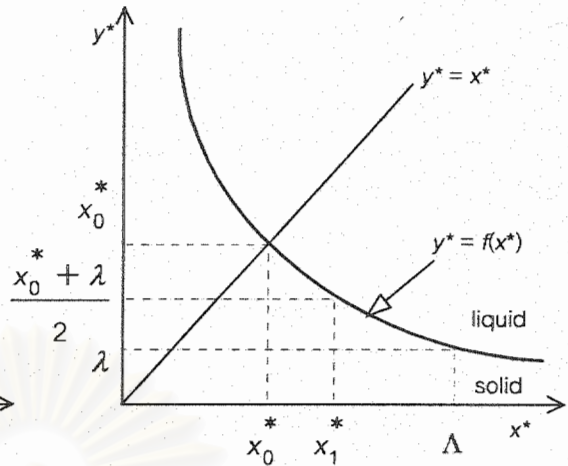
$$\frac{T_F - T_i}{T_F - T_C} \frac{k_L}{k_S} \sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}} \frac{\exp[-(\alpha_S/\alpha_L)\eta_{SL}^2]}{\operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L} \eta_{SL})} + \frac{\exp(-\eta_{SL}^2)}{\operatorname{erf}(\eta_{SL})} - \frac{\sqrt{\pi} \eta_{SL}}{\operatorname{Ste}} = 0 \quad (\text{ก.17})$$

### ก.3 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ

Rathjen and Jiji (1971) ได้เสนอผลเฉลยกึ่งแม่นตรง (semi-analytical solution) สำหรับปัญหาการขึ้นรูปในแนวทแยง  $x, y > 0$  ดังรูปที่ ก.3a ที่สถานะเริ่มต้นเป็นของเหลว โดยมีอุณหภูมิเริ่มต้น  $T_i$  เป็นค่าคงที่สม่ำเสมอและมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิเยือกแข็ง  $T_F$  เงื่อนไขขอบเขต  $T_C$  ที่  $x = 0$  และ  $y = 0$  มีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิจุดเยือกแข็งและเป็นค่าคงที่ โดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันจึงไม่คิดผลจากการขยายตัว และ thermal diffusivity  $\alpha = k/\rho c$  ในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันเพื่อให้สมการครอบคลุมทั้งสองสถานะเหมือนกัน โดยที่เส้นแบ่งสถานะจะใช้ nonlinear, singular, integro-differential equation เพื่อสร้างสมการ superhyperbola ในการประมาณตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะในรูปแบบไร้หน่วย ในรูปที่ ก.3b ดังสมการ (ก.18) โดยที่  $x^*, y^*$  คือตัวแปรไร้หน่วยของระยะทางตามแกน  $x$  และ  $y$  มีค่าเท่ากับ  $x/(4\alpha t)^{1/2}$  และ  $y/(4\alpha t)^{1/2}$  ตามลำดับ  $S$  คือตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะ (interface position) ในโดเมน  $x, y, t$  ส่วน  $f$  คือ ตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะในโดเมน  $x^*, y^*$  สัญลักษณ์  $\lambda$  คือ ค่าคงที่ที่ได้จากการแก้ปัญหานี้มิติหนึ่งคือตำแหน่งเส้นแบ่งสถานะ (stationary interface position) และ  $x_0^*$  คือ จุดตัด (intersection) ของเส้น  $x^* = y^*$  กับเส้นแบ่งสถานะ (interface curve) ในโดเมน  $x^*, y^*$  ส่วน  $x_1^*$  คือ ค่า  $x^*$  ที่สัมพันธ์กับ  $f = (x_0^* + \lambda)/2$  สำหรับ  $\Lambda$  คือ ค่าคงที่ไร้หน่วยโดยที่  $f(x^* > \Lambda) \approx \lambda$



(a) ปัญหา 2 มิติ



(b) schematic แสดง  $x_0^*$ ,  $x_1^*$ ,  $\lambda$ , และ  $\Lambda$

รูปที่ ก.3 ปัญหา 2 มิติ และ schematic แสดงตัวแปรไร้หน่วย

$$f(x^*) = \left[ \lambda^m + \frac{C}{(x^*)^m - \lambda^m} \right]^{1/m} \tag{ก.18}$$

โดย  $x^* = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$  (ก.19)

$m$  คือ เลขชี้กำลังใน superhyperbola และ  $C$  คือ ค่าคงที่ใน superhyperbola  $= (x_0^m - \lambda^m)^2$

ในการหาค่า  $C$  และ  $m$  สามารถทำได้โดยการกำหนดให้

$$f(x_0^*) = x_0^* \tag{ก.20}$$

และ

$$f(x_1^*) = \frac{x_0^* + \lambda}{2} \tag{ก.21}$$

สำหรับ  $x_0^*$  และ  $x_1^*$  หาได้จากวิธีการ trial and error

สมการ (ก.20) และ (ก.21) และสำหรับค่า  $\lambda$  จะขึ้นกับตัวแปรไร้หน่วย  $B$  และ  $T_i^*$  ดังต่อไปนี้

$$\beta = \frac{L}{c_S(T_F - T_C)} \quad (\text{ก.22})$$

$$T_i^* = \frac{(T_i - T_F)}{(T_F - T_C)} \quad (\text{ก.23})$$

โดยตัวแปร  $\lambda$  ในหัวข้อนี้คือตำแหน่งแบ่งสถานะไร้หน่วยใน 1 มิติ (one-dimensional stationary interface position) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\eta_{SL}$  ในหัวข้อ ก.2 และจากสมการ (ก.17) เมื่อประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีค่า thermal diffusivity ในแต่ละสถานะเท่ากันจะได้สมการในการหา  $\lambda$  ดังนี้

$$-T_i^* \frac{\exp(-\lambda^2)}{\operatorname{erfc}(\lambda)} + \frac{\exp(-\lambda^2)}{\operatorname{erf}(\lambda)} - \sqrt{\pi} \beta \lambda = 0 \quad (\text{ก.24})$$

สำหรับปัญหาที่มีสมบัติและเงื่อนไขตามที่แสดงในตารางที่ ก.2 จะได้ค่า  $\lambda$ ,  $x_0^*$ ,  $x_1^*$ ,  $m$ ,  $C$  ตามที่แสดงในตารางที่ ก.2 ภายหลัง

สมการผลเฉลยแม่นยำตรงในรูปไร้หน่วยคือ

$$\begin{aligned} T(x^*, y^*) = & -1 + (1 + T_i^*) \operatorname{erf}(x^*) \operatorname{erf}(y^*) \\ & + \frac{\beta}{2\pi} \sum_{i=1}^{40} \sum_{j=1}^{40} \omega'_i \varpi_j \left[ f(\eta_j) - \eta_j \frac{df(\eta_j)}{d\eta} \right] \\ & \times [K(\eta_j, \tau_i; x^*) K(f(\eta_j), \tau_i; y^*) \\ & + K(f(\eta_j), \tau_i; x^*) K(\eta_j, \tau_i; y^*)] (1 - \tau_i)^{-1} \\ & + \frac{\beta \lambda}{4\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{40} \omega'_i [K(\lambda, \tau_i; y^*) E(\tau_i; \Lambda; x^*) \\ & + K(\lambda, \tau_i; x^*) E(\tau_i; \Lambda; y^*)] \tau_i^{-1/2} (1 - \tau_i)^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{ก.25})$$

โดยที่ตัวถ่วงน้ำหนักปรับปรุง (the adjusted weighting factors)  $\omega'_i$  และ  $\varpi_j$  คือ

$$\omega'_i = \left( \frac{0.9 - 0}{2} \right) \omega_i = 0.45\omega_i \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.26})$$

$$\omega'_{41-i} = \left( \frac{1.0 - 0.9}{2} \right) \omega_i = 0.05\omega_i \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.27})$$

$$\varpi_i = \left( \frac{x_1^* - x_0^*}{2} \right) \omega_i \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.28})$$

$$\varpi_{41-i} = \left( \frac{\Lambda - x_1^*}{2} \right) \omega_i \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.29})$$

$\omega_i$  = weighting factor ได้ถูกกำหนดในตารางที่ ก.1 และ abscissa  $\tau_i$  and  $\eta_j$  มีค่าดังนี้

$$\tau_i = \left( \frac{0.9 - 0}{2} \right) \xi_i + \left( \frac{0.9 + 0}{2} \right) = 0.45\xi_i + 0.45 \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.30})$$

$$\tau_{41-i} = \left( \frac{1.0 - 0.9}{2} \right) \xi_i + \left( \frac{1.0 + 0.9}{2} \right) = 0.05\xi_i + 0.95 \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.31})$$

$$\eta_i = \left( \frac{x_1^* - x_0^*}{2} \right) \xi_i + \left( \frac{x_1^* + x_0^*}{2} \right) \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.32})$$

$$\eta_{41-i} = \left( \frac{\Lambda - x_1^*}{2} \right) \xi_i + \left( \frac{\Lambda + x_1^*}{2} \right) \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (\text{ก.33})$$

$\xi_i$  = abscissa ดังแสดงในตารางที่ ก.1 และ  $f(\eta_j)$  คือ

$$f(\eta_j) = \left[ \lambda^m + \frac{C}{\eta_j^m - \lambda^m} \right]^{1/m} \quad (\text{ก.34})$$

ตารางที่ ก.1 ค่า abscissa และแฟคเตอร์น้ำหนัก (weighting factor) สำหรับการอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian integration)

$\pm\xi_i$	$\omega_i$
0.0765265	0.1527534
0.2277859	0.1491730
0.3737061	0.1420961
0.5108670	0.1316886
0.6360537	0.1181945
0.7463319	0.1019301
0.8391170	0.0832767
0.9122344	0.0626720
0.9639719	0.0406014
0.9931286	0.0176140

ตารางที่ ก.2 ตัวอย่างสมบัติของสารและตัวแปรที่ได้จากสมบัติที่กำหนด

ค่าการนำความร้อน	$k_L = k_s = 2.220$	[W/mK]
ค่าความหนาแน่น	$\rho_L = \rho_s = 1000$	[kg/m <sup>3</sup> ]
ค่าความจุความร้อนจำเพาะ	$c_L = c_s = 2.176$	[J/K]
ค่าความร้อนแฝง	$L = 338$	[kJ/kg]
อุณหภูมิเริ่มต้น	$T_i = 10$	[°C]
อุณหภูมิขอบเขต	$T_c = -20$	[°C]
อุณหภูมิเยือกแข็ง	$T_f = 0$	[°C]

$$\lambda = 0.2075$$

$$x_0^* = 0.258$$

$$x_1^* = 0.303$$

$$m = 1.59003$$

$$C = 0.00115$$



## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาว รจนา ประไพพงษ์ เกิดเมื่อวันที่ 19 มกราคม พ.ศ. 2521 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตจากคณะศึกษาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2542 หลังจากนั้นได้ทำงานในตำแหน่งวิศวกร แผนกวิศวกรรม บริษัทมิติซูบิชิ อีเล็คทริก คอนซูมเมอร์ โปรดักส์ (ประเทศไทย) จำกัด เป็นเวลา 10 เดือน และได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโท ศึกษาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2543



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย