แท่งสี่เหลี่ยมในกล่องขนาดใหญ่

นายวิชัยรัตน์ จันที

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2552

PLANK IN A HUGE BOX

Mr. Wichairat Chuntee

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2009

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แท่งสี่เหลี่ยมในกล่องขนาดใหญ่
โดย	นายวิชัยรัตน์ จันที
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จริยา อุ่ยยะเสถียร)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร. บัญญัติ สร้อยแสง)

วิชัยรัตน์ จันที : แท่งสี่เหลี่ยมในกล่องขนาดใหญ่ (PLANK IN A HUGE BOX) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา, 60 หน้า.

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะศึกษาการวางตัวของแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากในกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยเป้าหมายคือหาลักษณะการวางตัวของแท่งที่ยาวที่สุดในกล่องเมื่อกำหนดหน้าตัดของแท่งมาให้ ซึ่งข้อความคาดการณ์อันยาวนานคือมุมทั้งแปดของแท่งที่ยาวที่สุดจะแตะผนังของกล่องเสมอ โดยเราพบว่าในกล่องที่ใหญ่เมื่อเทียบกับแท่ง แท่งที่ยาวที่สุดในกล่องจะวางตัวในลักษณะที่สอดคล้องกับข้อความคาดการณ์นั้นและวางทแยงมุม

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์............... ลายมือชื่อนิสิต......วิชัยรัตน์ จันที.....................

สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์............ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก..........

ปีการศึกษา 2552

5172448923 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : BOX / COVERING / FITTING / PLANK

WICHAIRAT CHUNTEE : PLANK IN A HUGE BOX. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. WACHARIN WICHIRAMARA, Ph.D., 60 pp.

We study the placing of a right prism with rectangular cross section, called plank, in a box. The goal is to find the way to place the longest plank of given cross section in a given box. The long standing conjecture stated that the longest placement is when all of the 8 corners of the plank are on faces of the box. We show this for huge boxes. In addition, we also prove that the plank must lie diagonally.

Department : Mathematics
Field of Study : Mathematics
Academic Year : 2009

Student's Signature Wichairat Chuntee
Advisor's Signature [illegible]

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร . วัชรินทร์ วิชิรมาลา สำหรับความช่วยเหลือและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ระหว่างการศึกษาและวิจัย ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จริยา อุ่ยยะเสถียร รองศาสตราจารย์ ดร. อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์ และอาจารย์ ดร . บัญญัติ สร้อยแสง สำหรับข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการจั ดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ และขอขอบคุณโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) สำหรับทุนสนับสนุนการศึกษา

สารบัญ

หน้า

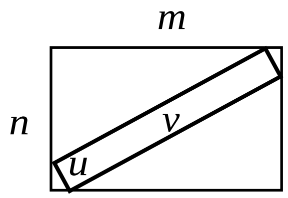
บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

มนุษย์เราได้ใช้เรขาคณิตในการสร้างสรรค์สิ่งต่าง ๆ กันมาตั้งแต่สมัยโบราณ ดังเช่นมีปัญหาที่เรียกว่า fitting problem ซึ่งเป็นปัญหาหนึ่งที่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก โดยปัญหานี้เป็นปัญหาที่พยายามอธิบายการบรรจุวัตถุหนึ่งในอีกวัตถุหนึ่งหรือถ้ามองในอีกแง่หนึ่งก็คือวัตถุหนึ่งสามารถปิดทับอีกวัตถุหนึ่งได้หรือไม่ โดยเริ่มตั้งแต่วัตถุใน 2 มิติ และขยายไปจนถึง n มิติ แต่ปัญหาส่วนใหญ่ที่สามารถตอบได้อย่างไร้ข้อกังขาก็คือปัญหาใน 2 มิติ โดยใน 2 มิติ ก็อาจจะมองปัญหาในแง่ของการปิดทับ เช่น การ บรรจุสามเหลี่ยม A ในสามเหลี่ยม B ก็คือ การปิดทับสามเหลี่ยม A ด้วยสามเหลี่ยม B นอกจากนั้นใน 2 มิติก็ยังมีปัญหา การบรรจุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็นต้น ส่วนใน 3 มิติ ก็อาจจะมองในแง่ของการบรรจุ เช่น ปัญหาหลอดในกล่อง ก็คือปัญหาที่เกี่ยวกับการศึกษาการบรรจุปริซึมหน้าตัดจานกลมในกล่องนั่นเอง นอกจากนั้นใน 3 มิติก็ยังมีปัญหา แท่งสี่เหลี่ยมในกล่อง แท่งสามเหลี่ยมด้านเท่าในกล่อง เป็นต้น

ในชีวิตประจำวันของเรานั้นจะเห็นว่าส่วนใหญ่พื้นห้องมักจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ ถ้ามีการเอาสิ่งของมาวางตกแต่ง อาทิเช่น พรมรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เราจะรู้ได้อย่างไรว่าถ้าเรามีพรมอยู่ผืนหนึ่ง พรมผืนนี้จะปูบนพื้นห้องที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้หรือไม่ ถ้าเราตอบคำถามนี้ได้แล้วกิจกรรมอีกมากมายของคนเราจะง่ายขึ้นมาก โดยในปี ค .ศ. 1956 Ford [5] ได้ตั้งคำถามถึงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอต่อการที่สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งจะบรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าอีกรูปหนึ่งได้ ซึ่งปัญหานี้ได้รับการพิสูจน์โดย Carver [2] ในปี ค.ศ. 1957 ซึ่งก็เป็นการตอบคำถามเกี่ยวกับพรมที่กล่าวมาข้างต้นนั่นเอง และก่อนหน้านั้นในปี ค.ศ. 1914 Franagan [4] ได้ตั้งคำถามที่สำคัญอีกปัญหาหนึ่งคือการหาความยาว v ที่มีค่ามากสุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง u ที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ โดยที่การบรรจุนั้นแต่ละมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ ต้องอยู่บนด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียว และในอีก 6 ปีต่อมา ในปี ค.ศ. 1920 Otto Dunkel [3] ก็สามารถตอบคำถามนี้ได้



รูปที่ 1.1 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สอดคล้องกับคำถามของ Flanagan

ส่วนปัญหาใน 3 มิติที่เกี่ยวข้องในชีวิตประจำวันของเราปัญหาหนึ่งก็คือหลอดในกล่องนม ซึ่งถ้าเราเป็นเจ้าของบริษัทผลิตนมเราคงไม่ต้องการทำหลอดที่ยาวเกินความจำเป็นเพราะจะทำให้เปลืองต้นทุนการผลิต ซึ่งในการทำหลอดหากไม่คิดอะไรมากเราอาจทำให้หลอดยาวกว่าเส้นทแยงมุมของกล่องก็จะรับประกันว่าหลอดจะโผล่พ้นปากกล่องอย่างแน่นอน อันที่จริงแล้วความยาวของหลอดที่น้อยที่สุดที่ทำให้หลอดโผล่พ้นกล่องเสมอไม่ว่าจะใส่หลอดในกล่องในลักษณะใดนั้นจะน้อยกว่าความยาวของเส้นทแยงมุม ซึ่งในปี ค .ศ. 2006 Richard Jerrard, Joel Schneider, Ralph Smallberg และ John Wetzel [7] ได้หาความยาวที่มากที่สุดของหลอดที่วางตัวในแนวทแยงมุมของกล่องได้เป็นผลสำเร็จ และหลายคนอาจคิดว่าถ้าหน้าตัดของหลอดไม่ใช่รูปวงกลมแล้วจะยังหาคำตอบได้หรือไม่ ซึ่งปัญหานี้ยังไม่มีใครสามารถตอบได้เมื่อหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและหน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

โดยในปี ค .ศ. 1923 Garnett [6] ได้ตั้งคำถามเกี่ยวกับการบรรจุวัตถุใน 3 มิติที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งซึ่งก็คือการหาความหนาของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มากที่สุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้านี้สามารถบรรจุในกล่องที่กำหนดให้ได้ ซึ่งปัญหานี้เรียกว่าปัญหา “แท่งสี่เหลี่ยมในกล่อง” แต่เป็นที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าปัญหานี้ยังไม่ได้รับการพิสูจน์ แต่ Carver [1] ได้คาดเดาว่าแท่งสี่เหลี่ยมที่ยาวที่สุดที่สามารถบรรจุได้ในกล่องจะวางในลักษณะที่มุมทั้งแปดของแท่งนั้นแตะผนังของกล่องเสมอ โดยงานของ Carver [1] นั้นได้มีการนำความรู้ใน 2 มิติที่เกี่ยวข้องกับการบรรจุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในสี่เหลี่ยมผืนผ้ามาใช้แก้ปัญหา โดยข้อคาดเดาที่ Carver [1] ใช้นั้นได้มีหลายคนพยายามพิสูจน์แต่ก็ยังไม่มีใครทำสำเร็จ ทำให้เราไม่สามารถหาความยาวของแท่งที่ยาวที่สุดได้จนถึงปัจจุบัน Prof. Ralph Alexander จึงเรียกปัญหา “แท่งสี่เหลี่ยมในกล่อง” นี้ว่า “coffin problem” ซึ่งแปลว่าปัญหาโลงศพ ซึ่งสื่อให้เห็นถึงความยากของปัญหานี้ได้เป็นอย่างดี แม้กระทั่ง Prof. John E. Wetzel ยังกล่าวว่า ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ยาก ตลอดชั่วชีวิตนี้ไม่น่าจะได้เห็นพิสูจน์ ส่วนปัญหาการหาความยาวที่มากที่สุดที่ทำให้แท่งหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสามารถบรรจุได้ในกล่องนั้นก็ยากไม่แพ้กับปัญหาแท่งสี่เหลี่ยมในกล่องและยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้จนถึงปัจจุบันนี้

โดยผู้สนใจปัญหาเหล่านี้มักจะหันไปศึกษาปัญหาอื่นที่เกี่ยวข้องแทน ตัวอย่างเช่น ปัญหาการบรรจุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกล่อง ซึ่งในปัจจุบันก็หาคำตอบ ได้เฉพาะกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้น และการศึกษาเกี่ยวกับวัตถุในมุมก็เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องอีกปัญหาหนึ่งที่มีผู้ให้ความสนใจเป็นอย่างมาก เนื่องจากในการหาความยาวที่มากที่สุดของหลอดที่วางทแยงมุมในกล่องนั้นได้มีการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาจานกลมในมุมในการพิสูจน์ ทำให้เกิดความเชื่อว่าการศึกษาวัตถุในมุมมีแนวโน้มที่จะไปตอบปัญหาการหาความยาวของแท่งที่มากที่สุดที่สามารถบรรจุในกล่องได้

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ของ Carver [1] ดังต่อไปนี้

“แท่งสี่เหลี่ยมที่ยาวที่สุดที่บรรจุได้ในกล่องต้องมีมุมทั้งแปดแตะผนังของกล่องเสมอ”

โดยเราจะทำในกรณีที่กล่องมีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับหน้าตัดของแท่งภายใต้ข้อคาดเดาที่อ่อนกว่าของ Carver [1] โดยบางส่วนของการพิสูจน์จะต้องใช้การคำนวณเชิงตัวเลขเข้าช่วยด้วย

เราจะแบ่งวิทยานิพนธ์ออกเป็น 6 บทใหญ่ ๆ ดังนี้

บทที่ 1 บทนำ เป็นการแนะนำให้เข้าใจถึงปัญหา รวมทั้งงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน ซึ่งประกอบด้วย บทนิยาม การบรรจุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในสี่เหลี่ยมผืนผ้า และแท่งสี่เหลี่ยมที่มุมทั้ง 8 แตะผนังกล่อง

บทที่ 3 ศึกษาการวางวัตถุในมุม ซึ่งประกอบด้วย สี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม (ในส่วนนี้ยังรวมถึงปัญหาลูกเต๋าในมุม) จานกลมในมุม และสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุม ซึ่งมีความสำคัญต่อการศึกษาวัตถุในกล่อง

บทที่ 4 ศึกษาการวางวัตถุในกล่อง ซึ่งประกอบด้วย หลอดในกล่อง แท่งสี่เหลี่ยมในกล่อง แท่งสามเหลี่ยมในกล่อง โดยเน้นไปที่แท่งสี่เหลี่ยมเพื่อจะนำไปใช้ในบทที่ 5

บทที่ 5 ศึกษาการวางตัวของแท่งสี่เหลี่ยมในกล่องที่มีขนาดใหญ่

บทที่ 6 เป็นปัญหาที่ยังคงอยู่และข้อเสนอแนะ

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ใบบทนี้เราจะศึกษาการบรรจุสี่เหลี่ยมผืนผ้าในสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างละเอียดเพื่อเป็นแนวทางการศึกษาต่อไปว่าในบรรดาแท่งที่มุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง ความยาวของแท่งที่ ยาวที่สุดในกล่องหาได้อย่างไร

ก่อนอื่นจะขอแนะนำบทนิยามที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ดังต่อไปนี้

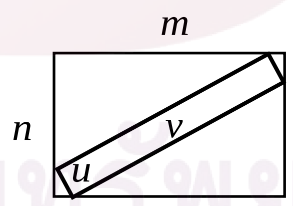
บทนิยาม 2.1 ให้ Ψ และ Φ เป็นเซตใน $\mathbf{R}^n$ เราจะกล่าวว่า Φ ***บรรจุใน*** *(fit)* Ψ ได้ ถ้ามีฟังก์ชันสมมิติ (isometry) $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ซึ่ง $f(\Phi) \subseteq \Psi$

บทนิยาม 2.2 ***กล่อง*** หมายถึงปริซึมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม 2.3 เราเรียกปริซึมฉากที่มีหน้าตัดฉากเป็นรูปจานกลมหรือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าว่า ***แท่ง***

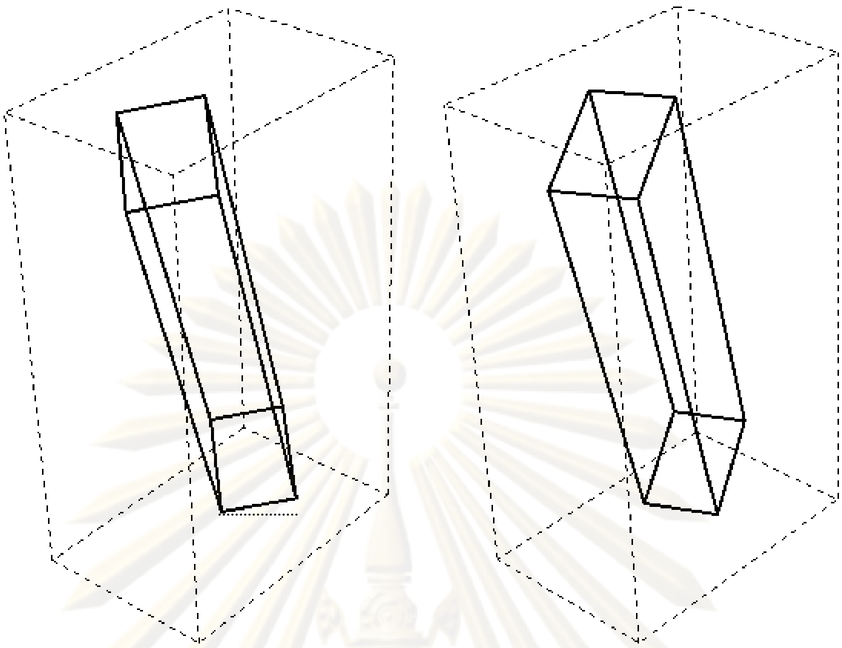
เพื่อความคุ้นเคยเราจะเรียกแท่งหน้าตัดรูปจานกลมว่า***หลอด*** เรียกแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าว่า***แท่งสี่เหลี่ยม*** และเรียกแท่งหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าว่า***แท่งสามเหลี่ยม***

บทนิยาม 2.4 เราจะกล่าวว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ วางทแยงมุมในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ถ้าแต่ละมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ อยู่บนด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียว ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ ที่วางทแยงมุมในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$

บทนิยาม 2.5 ให้ Φ เป็นแท่งและ Ψ เป็นกล่อง เราจะกล่าวว่า Φ วางทแยงมุมใน Ψ ถ้าแต่ละผนังของ Ψ ต้องมีส่วนใดส่วนหนึ่งของ Φ มาแตะ



รูปที่ 2.2 การวางตัวของแท่งสี่เหลี่ยมที่วางทแยงมุมในกล่อง

ในเบื้องต้นจะศึกษาปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในสี่เหลี่ยมผืนผ้าก่อน เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจปัญหาใน 3 มิติ โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้ทราบว่าเมื่อใดสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งจะสามารถบรรจุในอีกรูปหนึ่งได้

ทฤษฎีบท 2.6 [2] ให้ $m \geq n$ และ $v \geq u$ จะได้ว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ก็ต่อเมื่อ

1) $v \leq m$ และ $u \leq n$ หรือ

2) $v > m$ และ $n \geq \dfrac{2uvm + \left(v^2 - u^2\right)\sqrt{v^2 + u^2 - m^2}}{v^2 + u^2}$

ตัวอย่าง 2.7 จงแสดงว่าพรมสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 2 เมตร ยาว 9.5 เมตร ไม่สามารถปูบนพื้นห้องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 3 เมตร ยาว 9 เมตร ได้

วิธีทำ ให้ $v = 9.5, u = 2, n = 3$ และ $m = 9$ จะได้ว่า $v > m$ และ $n < \dfrac{2uvm + \left(v^2 - u^2\right)\sqrt{v^2 + u^2 - m^2}}{v^2 + u^2}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.6 สามารถสรุปได้ว่า พรม

สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 2 เมตร ยาว 9.5 เมตร ไม่สามารถปูบนพื้นห้องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 3 เมตร ยาว 9 เมตร ได้

❑

ต่อไปเป็นปัญหาการหาความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดด้านกว้างมาให้ ที่สามารถบรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้ได้

ข้อสังเกต คำว่าความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าไม่จำเป็นต้องมากกว่าด้านกว้าง แต่ในที่นี้ขอใช้ในความหมายนี้เพื่อความสะดวกในการอธิบายปัญหา

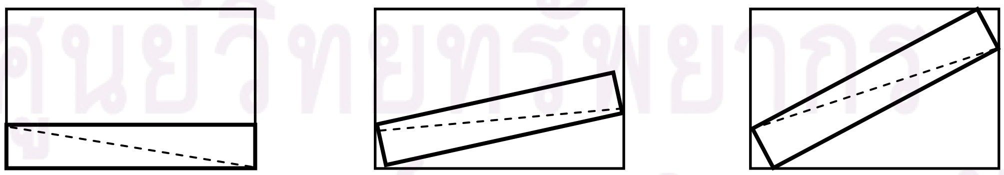
ทฤษฎีบท 2.8 ให้ $m \geq n$ และ $u < n$ จะได้ว่า ถ้า v คือค่ามากสุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ แล้ว สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ จะวางตัวในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ดังรูปที่ 2.3 (ก) หรือรูปที่ 2.3 (ข)

(ก) (ข)

รูปที่ 2.3 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ยาวที่สุด

บทพิสูจน์

วิธีที่ 1

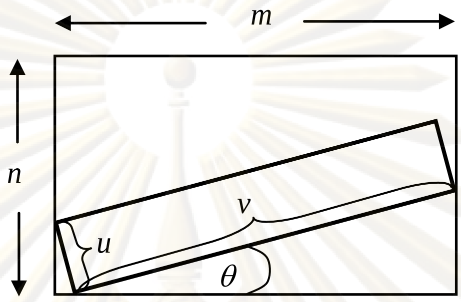


(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.4 ความยาวของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จะเห็นว่าถ้าวางวัตถุดังรูปที่ 2.4 (ข) เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมรูปที่ 2.4 (ข) จะสั้นกว่ารูปที่ 2.4 (ก) หรือรูปที่ 2.4 (ค) เสมอ และการที่รูป สี่เหลี่ยมจะยาวมากที่สุดได้นั้นเส้นทแยงมุมต้องยาวที่สุด จึงสามารถสรุปได้ว่า สี่เหลี่ยมที่ยาวที่สุดต้องวางดังรูปที่ 2.3 (ก) หรือรูปที่ 2.3 (ข) เสมอ

วิธีที่ 2 เนื่องจากการเลื่อนและการสะท้อนเราจึงสามารถพิจารณาการวางตัวของด้านของสี่เหลี่ยมที่ยาว u ดังรูปที่ 2.5 ก็พอ จากนั้นยืดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจนชนขวา จะได้ว่า $u\sin\theta + v\cos\theta = m$



รูปที่ 2.5 ความยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังนั้น $v = \dfrac{m - u\sin\theta}{\cos\theta} = m\sec\theta - u\tan\theta$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{dv}{d\theta} = m\sec\theta\tan\theta - u\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(m\sin\theta - u\right)$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dv}{d\theta}\right|_{\theta=0} = -u < 0$ และ $\dfrac{dv}{d\theta} = 0$ เมื่อ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{a}{m} < \tan^{-1}\dfrac{n}{m} \le 45^\circ$

จึงสามารถสรุปได้ว่า สี่เหลี่ยมที่ยาวที่สุดต้องวางดังรูปที่ 2.3 (ก) หรือรูปที่ 2.3 (ข) เสมอ

❑

ทฤษฎีบท 2.9 [3] ถ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ วางทแยงมุมในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ แล้ว m,n,u,v จะสอดคล้องกับสมการ $\left(m^2+n^2\right)\left(u^2+v^2\right) - 4mnuv - \left(u^2-v^2\right)^2 = 0$

จะเห็นว่า ทฤษฎีบท 2.8 และทฤษฎีบท 2.9 เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการหาความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สามารถบรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ทฤษฎีบท 2.10 ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ บรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ โดยที่สี่เหลี่ยม 2 รูปนี้ไม่ใช่รูปเดียวกัน และ $u > 0$ จะได้ว่า ถ้า v_1 คือค่ามากสุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v_1$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ และ v_2 คือค่ามากสุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v_2$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ แล้ว $v_1 \le v_2$

บทพิสูจน์ เนื่องจากสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v_1$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ และสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ ดังนั้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v_1$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ เพราะฉะนั้น $v_1 \le v_2$

❑

หลายคนคงอาจคิดว่าความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เล็กน่าจะน้อยกว่าความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ ใ ห้ลองพิจารณาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.11 จงหาความยาว v ที่มากที่สุดซึ่งทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $2\times v$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 3×15

วิธีทำ เนื่องจากการวางในท่าทแยงมุม ความยาว v ที่มากที่สุดต้องสอดคล้องกับสมการ $\left(15^2+3^2\right)\left(2^2+v^2\right)-4(15)(3)(2)v-\left(2^2-v^2\right)^2=0$ และสมการนี้มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกเพียงค่าเดียว คือ $v\approx 14.8991<15$ ดังนั้นท่าของการวางสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $2\times v$ ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 3×15 คือแนวนอนตามยาว ทำให้ได้ว่า $v=15$

❑

ตัวอย่าง 2.12 จงหาความยาว v ที่มากที่สุดซึ่งทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $2\times v$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 4×15

วิธีทำ เนื่องจากการวางในท่าทแยงมุม ความยาว v ที่มากที่สุดต้องสอดคล้องกับสมการ $\left(15^2+4^2\right)\left(2^2+v^2\right)-4(15)(4)(2)v-\left(2^2-v^2\right)^2=0$ และสมการนี้มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกเพียงค่าเดียว คือ $v\approx 14.8661<15$ ดังนั้นท่าของการวางสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $2\times v$ ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 4×15 คือแนวนอนตามยาว ทำให้ได้ว่า $v=15$

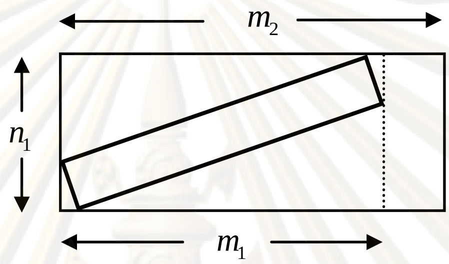
❑

จะเห็นได้จากตัวอย่างทั้ง 2 นี้ว่าไม่จำเป็นเสมอไปว่าความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เล็กจะน้อยกว่าความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่กว่าเสมอไป ซึ่งในทฤษฎีบทต่อไปจะให้เงื่อนไขเพี ยงพอที่จะทำให้สรุปได้ว่าเมื่อใดความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เล็กจะน้อยกว่าความยาวที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่

ทฤษฎีบท 2.13 ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ บรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ โดยที่สี่เหลี่ยม 2 รูปนี้ไม่ใช่รูปเดียวกัน และ $u > 0$ จะได้ว่า ถ้า v_1 คือค่ามากสุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v_1$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ และ v_2 คือค่ามากสุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v_2$ วางทแยงมุมในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ แล้ว $v_1 < v_2$

บทพิสูจน์ ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_1 \times n_1$ บรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m_2 \times n_2$ โดยที่สี่เหลี่ยม 2 รูปนี้ไม่ใช่รูปเดียวกัน และ $u > 0$

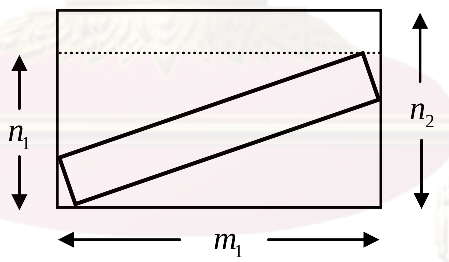
กรณีที่ 1 $m_1 < m_2$ และ $n_1 = n_2$



รูปที่ 2.6 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สอดคล้องกับกรณีที่ 1 ในทฤษฎีบท 2.13

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า $v_1 < v_2$

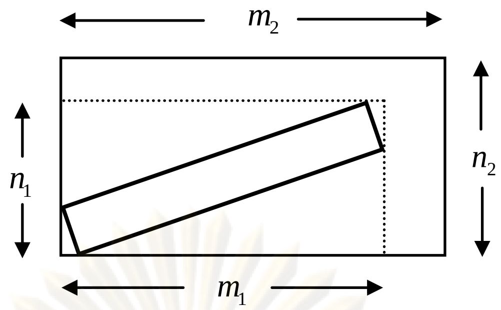
กรณีที่ 2 $m_1 = m_2$ และ $n_1 < n_2$



รูปที่ 2.7 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สอดคล้องกับกรณีที่ 2 ในทฤษฎีบท 2.13

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า $v_1 < v_2$

กรณีที่ 3 $m_1 < m_2$ และ $n_1 < n_2$



รูปที่ 2.8 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สอดคล้องกับกรณีที่ 3 ในทฤษฎีบท 2.13

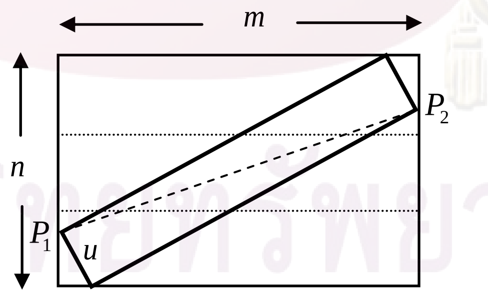
เห็นได้ชัดว่า $v_1 < v_2$

❑

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขว่าเมื่อใดที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ยาวที่สุดจะวางทแยงมุม โดยในการพิสูจน์ของ Carver [1] นั้นใช้การมีอยู่เพียงหนึ่งเดียวของรากที่เป็นบวกของสมการในทฤษฎีบท 2.9 ที่มีค่ามากกว่าความยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่ในที่นี้เราจะเสนอวิธีการพิสูจน์อีกแบบหนึ่งที่ง่ายต่อการเข้าใจ

ทฤษฎีบท 2.14 [1] ให้ $m \geq n$ และ $u < \frac{n}{3}$ จะได้ว่า ถ้า v คือค่ามากสุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ แล้ว สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ จะวางทแยงมุมในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$

บทพิสูจน์



รูปที่ 2.9 การวางตัวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 2.14

ในการพิสูจน์เราจะแบ่งด้านที่ยาว n ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน ถ้าสี่เหลี่ยมวางนอนตามยาวจะได้ว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ สามารถบรรจุได้ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times \frac{n}{3}$ และเนื่องจาก $u < \frac{n}{3}$ ทำให้ได้ว่าความยาวของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม

สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ จะน้อยกว่า $\sqrt{m^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2}$ เสมอ ต่อไปจะพิจารณาสี่เหลี่ยม ผืนผ้าขนาด $u \times v$ ในกรณีที่วางทแยงมุม เนื่องจากมุมทั้ง 4 ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ ต้องแตะด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ดังรูปที่ 2.9 และ $u < \frac{n}{3}$ ทำให้ได้ว่า $|P_1P_2| > \sqrt{m^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2}$ จึงสรุปได้ว่า สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $u \times v$ จะวางทแยงมุมในสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$

❑

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทสำคัญที่ให้เงื่อนไขว่าเมื่อใดแท่งที่ยาวที่สุดในบรรดาแท่งที่มุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่องจะวางทแยงมุม

ทฤษฎีบท 2.15 [1] ให้ B เป็นกล่องขนาด $w \times l \times h$ และ $a,b < \frac{1}{3}\min\{w,l,h\}$ จะได้ว่าถ้าแท่งสี่เหลี่ยมขนาด $a \times b \times L$ สามารถบรรจุได้ในกล่อง B และมุมทั้ง 8 แตะผนังกล่อง แล้วแท่งนั้นจะวางทแยงมุมใน B

ทฤษฎีบท 2.16 [1] ให้ B เป็นกล่องขนาด $w \times l \times h$ จะได้ว่าถ้าแท่งสี่เหลี่ยมขนาด $a \times b \times L$ วางทแยงมุมในกล่อง B และมุมทั้ง 8 แตะผนังกล่อง แล้ว L จะเป็นรากของสมการ $\left(h^2+t^2\right)\left(b^2+L^2\right) - 4htbL - \left(b^2 - L^2\right)^2 = 0$ เมื่อ t เป็นรากที่เป็นบวกของสมการ $\left(l^2+w^2\right)\left(a^2+t^2\right) - 4wlat - \left(a^2 - t^2\right)^2 = 0$

จากทั้ง 2 ทฤษฎีบทของ Carver ทำให้หาความยาวที่มากที่สุดของแท่งสี่เหลี่ยมที่มุมทั้ง 8 แตะผนังกล่องและวางทแยงมุมได้

ตัวอย่าง 2.17 จงหาความยาวที่มากที่สุดของแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2×3 ที่สามารถบรรจุได้ในกล่องขนาด $10 \times 12 \times 16$ และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง

วิธีทำ เนื่องจาก (w,l,h) คือการเรียงสับเปลี่ยนของ $(10,12,16)$ และ (a,b) คือการเรียงสับเปลี่ยนของ $(2,3)$ ดังนั้นเราต้องคำนวณทั้ง 12 กรณี แต่จากสมการในทฤษฎีบท 2.16 จะได้ว่าการสลับ l กับ w จะไม่ส่งผลต่อการหารากของสมการ จึงเหลือเพียงแค่ 6 กรณีที่ต้องพิจารณา

กรณีที่ 1 $(w,l,h) = (10,12,16)$ และ $(a,b) = (2,3)$ จะได้ว่า ราก t ของสมการ
$\left(l^2+w^2\right)\left(a^2+t^2\right) - 4wlat - \left(a^2 - t^2\right)^2 = 0$ มีรากที่เป็นบวกเพียงค่าเดียวคือ
$t = 12.7235$ และโดยทฤษฎีบท 2.16 จะได้ว่า L เป็นรากของของสมการ

$\left(h^2+(12.7235)^2\right)\left(b^2+L^2\right)-4h(12.7235)bL-\left(b^2-L^2\right)^2=0$ และสมการนี้มีรากที่เป็นบวกเพียงค่าเดียวคือ $L=18.1068$

และเช่นเดียวกับกรณีที่ 1 จะได้ว่าเมื่อพิจารณา

กรณีที่ 2 $(w,l,h)=(10,12,16)$ และ $(a,b)=(3,2)$ จะได้ว่า $L=18.5135$

กรณีที่ 3 $(w,l,h)=(16,12,10)$ และ $(a,b)=(2,3)$ จะได้ว่า $L=18.4152$

กรณีที่ 4 $(w,l,h)=(16,12,10)$ และ $(a,b)=(3,2)$ จะได้ว่า $L=18.2560$

กรณีที่ 5 $(w,l,h)=(10,16,12)$ และ $(a,b)=(2,3)$ จะได้ว่า $L=18.2289$

กรณีที่ 6 $(w,l,h)=(10,16,12)$ และ $(a,b)=(3,2)$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $L=18.4376$

เนื่องจากการมีอยู่ของแท่งที่ยาว 18.5135 จึงสรุปได้ว่าความยาวที่มากที่สุดของแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2×3 ที่บรรจุในกล่องขนาด $10\times12\times16$ และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่องคือ 18.5135

❑

ต่อไปเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทสำคัญที่ช่วยให้หาความยาวที่มากที่สุดของแท่งที่มุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่องได้

ทฤษฎีบท 2.18 [1] ให้ B เป็นกล่องขนาด $w\times l\times h$ จะได้ว่าถ้าแท่งสี่เหลี่ยมขนาด $a\times b\times L$ สามารถบรรจุได้ในกล่อง B และมุมทั้ง 8 แตะผนังกล่อง แล้ว

1) $L\in\{w,l,h\}$ หรือ

2) แท่งนั้นจะวางทแยงมุมใน B หรือ

3) L จะเป็นรากของสมการ $\left(w^2+l^2\right)\left(a^2+L^2\right)-4wlaL-\left(a^2-L^2\right)^2=0$ หรือ

4) L จะเป็นรากของสมการ $\left(l^2+w^2\right)\left(t^2+L^2\right)-4lwtL-\left(t^2-L^2\right)^2=0$ เมื่อ t เป็นรากที่เป็นบวกของสมการ $\left(a^2+b^2\right)\left(h^2+t^2\right)-4abht-\left(a^2-b^2\right)^2=0$ และ $\sqrt{a^2+b^2}\ge h$

ตัวอย่าง 2 ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า ในบรรดาแท่งที่มุมทั้ง 8 แตะผนังกล่อง แท่งที่ยาวที่สุดในกล่องเล็กไม่จำเป็นต้องสั้นกว่าแท่งที่ยาวที่สุดในกล่องใหญ่

ตัวอย่าง 2.19 จงหาความยาวที่มากสุดของแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 5×6 ที่สามารถบรรจุได้ในกล่องขนาด $10\times11\times13$ และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง

วิธีทำ ให้ L เป็นค่ามากสุดที่ทำให้แท่งสี่เหลี่ยมขนาด $5\times6\times L$ สามารถบรรจุได้ในกล่อง B และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง โดยทฤษฎีบท 2.18 จะได้ว่าเป็นไปได้ 3 กรณี ในกรณีแรกจะได้ว่า $L\in\{10,11,13\}$ ส่วนในกรณีที่แท่งวางทแยงมุมสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 2.17 ซึ่งความยาวที่มากสุดมีค่าไม่เกิน 13 ในทุกกรณี ส่วนในกรณีที่ 3 จะได้ว่าความยาวที่มากสุดมีค่าไม่เกิน 13 เช่นเดียวกัน และเนื่องจากการมีอยู่ของแท่งที่ยาว 13 จึงสรุปได้ว่าความยาวที่มากสุดของแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 5×6 ที่บรรจุในกล่องขนาด $10\times11\times13$ และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่องคือ 13

❑

ตัวอย่าง 2.20 จงหาความยาวที่มากสุดของแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 5×6 ที่สามารถบรรจุได้ในกล่องขนาด $10\times12\times13$ และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง

วิธีทำ ให้ L เป็นค่ามากสุดที่ทำให้แท่งสี่เหลี่ยมขนาด $5\times6\times L$ สามารถบรรจุได้ในกล่อง B และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง โดยทฤษฎีบท 2.18 จะได้ว่าเป็นไปได้ 3 กรณี ในกรณีแรกจะได้ว่า $L\in\{10,12,13\}$ ส่วนในกรณีที่แท่งวางทแยงมุมสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 2.17 ซึ่งความยาวที่มากสุดมีค่าไม่เกิน 13 ในทุกกรณี ส่วนในกรณีที่ 3 จะได้ว่าความยาวที่มากสุดมีค่าไม่เกิน 13 เช่นเดียวกัน และเนื่องจากการมีอยู่ของแท่งที่ยาว 13 จึงสรุปได้ว่าความยาวที่มากที่สุดของแท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 5×6 ที่บรรจุในกล่องขนาด $10\times12\times13$ และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่องคือ 13

❑

จะเห็นได้จากในตัวอย่างทั้ง 2 นี้ว่าไม่จำเป็นเสมอไปว่าความยาวแท่งที่บรรจุในกล่องที่ใหญ่กว่าจะมากกว่าความยาวแท่งที่บรรจุในกล่องที่เล็กกว่า

หลายคนคงอาจสงสัยว่ามีแต่แท่งหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่ที่คนสนใจหาความยาวที่มากที่สุดกัน ซึ่งคำตอบก็คือไม่ ยังคงมีการศึกษา ปัญหาสำหรับแท่งหน้าตัดรูปจานกลมและแท่งหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แต่ผลที่ได้ก็คือยังไม่มีใครสามารถหาและพิสูจน์คำตอบได้ หากลองคิดดูจะเห็นว่า เราไม่มีทางรู้ได้เลยว่าแท่งที่ยาวที่สุดที่วางตัวในกล่องนั้นวางตัวอยู่ในลักษณะใด จึงไม่น่าแปลกใจว่าทำไมจึงยังไม่มีใครสามารถหาความยาวที่มากที่สุดนี้ได้ ดังนั้นถ้าเรากำหนดเงื่อนไขการวางตัวของแท่งในกล่องแล้วก็มีโอกาสในการหาคำตอบได้มากขึ้น และถ้ากล่องนั้นมี

ขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับหน้าตัดของแท่ง แท่งที่ ยาวที่สุดก็ควรจะวางตัวในแนวทแยงมุมของกล่อง ดังนั้นผู้สนใจปัญหาเหล่านี้ส่วนใหญ่ก็จะหาแท่งที่ยาวที่สุดในบรรดาแท่งที่วางในแนวทแยงมุม เพราะถ้าหาได้เราก็จะสามารถตอบคำถามเรื่องแท่งที่ยาวที่สุดในกล่องที่มีขนาดใหญ่ได้ โดยปัญหาเรื่องหลอด(แท่งหน้าตัดจานกลม)ที่ยาวที่สุดที่วางในแนวทแยงมุมของกล่องนั้นสามารถหาคำตอบได้ในปี ค.ศ. 2006 โดย Richard Jerrard, Joel Schneider, Ralph Smallberg และ John Wetzel [7] ยิ่งไปกว่านั้นยังได้คำตอบด้วยว่าหลอดนี้วางทแยงมุมในกล่องอีกด้วย นั่นคือแต่ละผนังของกล่องต้องมีส่วนใดส่วนหนึ่งของหลอดนี้มาแตะ ทำให้เกิดความเชื่อว่าผลที่ได้นี้ก็น่าจะจริงสำหรับแท่งที่มีหน้าตัดเป็นรูปอื่นด้วย นั่นคือถ้าเป็นแท่งหน้าตั ดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แท่งที่ยาว ที่สุดในบรรดาแท่งที่วางตัวในแนวทแยงมุมนั้นมุมทั้ง 8 ต้องแตะผนังของกล่องเสมอ และสำหรับแท่งหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าก็เช่นเดียวกัน

ดังที่กล่าวมาแล้วว่าได้มีการสนใจหาความยาวที่มากที่สุดของแท่งที่วางตัวในแนวทแยงมุม สังเกตว่าการวางตัวของแท่งเหล่านี้ ปลายทั้ง 2 จะอยู่ที่มุมกล่องที่อยู่ตรงข้ามกัน ด้วยเหตุผลนี้เองทำให้เกิดความสนใจในการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาวัตถุในมุมกันแพร่หลาย อันได้แก่ จานกลมในมุม สี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม สามเหลี่ยมด้านเท่าในมุม เพราะสิ่งเหล่านี้คือหน้าตัดของ หลอด แท่ ง สี่เหลี่ยม แท่งสามเหลี่ยม นั่นเอง และปัญหาลูกเต๋าในมุมก็เป็นอีกปัญหาหนึ่งที่ได้รับความสนใจ ซึ่งการศึกษาวัตถุในมุมก็คือการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวัตถุเหล่านี้ที่แตะทั้ง 3 ระนาบในอัฐภาคที่หนึ่ง ซึ่ง ปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมในกรณีที่มุมทั้ง 4 แตะระนาบกับปัญหาจานกลมในมุมกับสามารถหาคำตอบได้แล้ว ยังคงเหลือปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมในกรณีที่อย่างน้อย 3 มุมแตะระนาบ ปัญหา สามเหลี่ยมด้านเท่าในมุม และปัญหาลูกเต๋าในมุม อันที่จริงปัญหาหลอดในกล่องที่ทำได้นั้นก็ได้อาศัยผลของปัญหาจานกลมในมุมมาช่วยในการพิสูจน์ ทำให้เพิ่มความเชื่อว่าการศึกษาปัญหาวัตถุในมุมมีประโยชน์มากสำหรับการศึกษาแท่งที่ยาวที่สุดที่วางตัวในแนวทแยงมุมของกล่อง

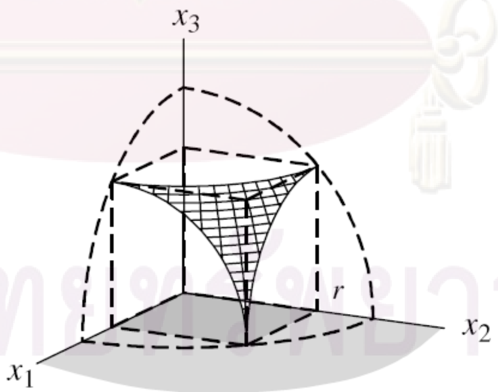
บทที่ 3

ปัญหาวัตถุในมุม

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วว่าได้มีการสนใจศึกษาปัญหาวัตถุในมุมเพราะมีแนวโน้มที่จะไปตอบคำถามของแท่งที่ยาวที่สุดที่วางทแยงมุมในกล่องได้ ใ นบทนี้จึงจะขอกล่าวถึงปัญหาเหล่านั้นโดยละเอียด อันได้แก่ จานกลมในมุม สี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม ลูกเต๋าในมุม และสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุม

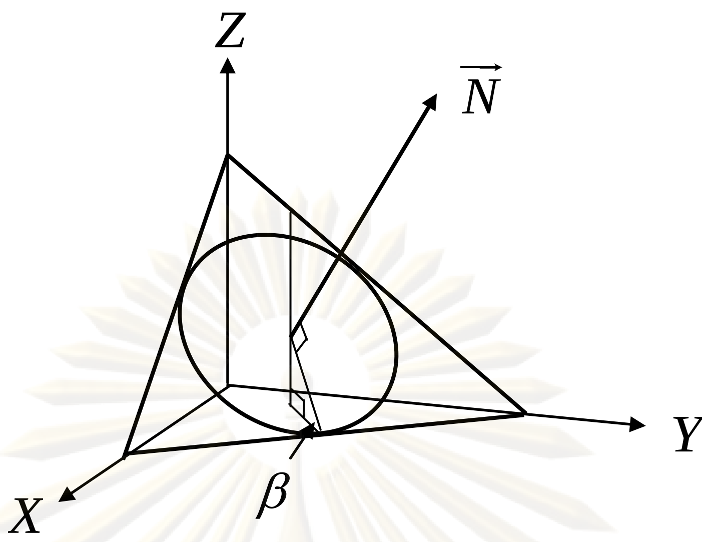
3.1 ปัญหาจานกลมในมุม

ปัญหาจานกลมในมุมเป็นคำถามที่เกิดขึ้นมาตั้งแต่ปี ค .ศ. 1948 ใน Putnam Competition ซึ่งเป็นปัญหาที่ถามถึงตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของจานกลมรัศมี r ที่อยู่ในอัฐภาคที่หนึ่งโดยที่จานกลมนี้ต้องแตะระนาบทั้งสามเสมอ ซึ่งคำถามนี้ได้รับการพิสูจน์โดย Gleason, Greenwood และ Kelly ต่อมาในปี ค.ศ. 2005 J. R. Alexander และ J. E. Wetzel ได้เสนอวิธีการพิสูจน์อีกแบบหนึ่งที่ซับซ้อนน้อยกว่า โดยผลที่ได้คือ ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $\left\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=2r^2 \wedge 0\le x_i \le r, i=1,2,3\right\}$ หรือกล่าวคือตำแหน่งของจุดศูนย์กลางที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นส่วนของทรงกลมรัศมี $\sqrt{2}r$ ดังรูปที่ 3.1 ซึ่งคำตอบของปัญหานี้ยังได้ถูกใช้ในการพิสูจน์หาความยาวของหลอดที่มากที่สุดที่วางทแยงมุมในกล่องในปี ค .ศ. 2006 โดย Richard Jerrard, Joel Schneider, Ralph Smallberg และ John Wetzel [7] อีกด้วย

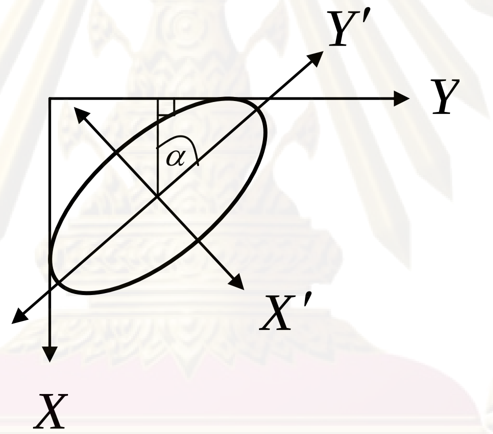


รูปที่ 3.1 ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของจานกลมในมุม [7]

ในที่นี้เราจะเสนอวิธีในการสร้างแบบจำลองในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของจานกลมในมุมอีกวิธีหนึ่งดังนี้



รูปที่ 3.2 แสดงเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}$ และมุม β



รูปที่ 3.3 ภาพฉายของจานกลมบนระนาบ XY

ให้ β แทน 90° - มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากกับระนาบ XY

ให้ α แทนมุมระหว่างภาพฉายของแกน Y' กับแกน X

จากรูปจะได้ว่าภาพฉายของจานกลมในระบบพิกัด $X'Y'$ มีสมการเป็น

$$\left(\frac{x'}{r\cos\beta}\right)^2+\left(\frac{y'}{r}\right)^2=1$$

หาอนุพันธ์ของ y' เทียบกับ x' จะได้ว่า $\dfrac{2x'}{r^2\cos^2\beta}+\dfrac{2y'}{r^2}\dfrac{dy'}{dx'}=0$ ดังนั้น

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{-x'}{y'\cos^2\beta}$$

ต่อไปจะหาจุดบนวงรีที่สัมผัสกับแกน Y เนื่องจากจุดบนวงรีที่สัมผัสกับแกน Y มีความชันในระนาบ $X'Y'$ เป็น $\tan\alpha$ และค่าตามแนวแกน Y' ไม่เป็นลบ ดังนั้น

$$y'=r\sqrt{1-\left(\frac{x'}{r\cos\beta}\right)^2}$$

ทำให้ได้ว่า $\tan\alpha=\dfrac{dy'}{dx'}=\dfrac{-x'}{y'\cos^2\beta}=\dfrac{-x'}{r\sqrt{1-\left(\dfrac{x'}{r\cos\beta}\right)^2}\cos^2\beta}$

และเนื่องจาก $x'<0$ ดังนั้น $x'=-\dfrac{r\cos\beta\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}$

ทำให้ได้ว่าจุดบนวงรีที่มีความชันเป็น $\tan\alpha$ คือจุด

$$\left(-\frac{r\cos\beta\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}},r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}\right)$$

ต่อไปจะหาจุดบนวงรีที่สัมผัสกับแกน X เนื่องจากจุดบนวงรีที่สัมผัสกับแกน X มีความชันเป็น $-\cot\alpha$ และค่าตามแนวแกน Y' ไม่เป็นบวก ดังนั้น

$$y'=-r\sqrt{1-\left(\frac{x'}{r\cos\beta}\right)^2}$$

ทำให้ได้ว่า $-\cot\alpha=\dfrac{dy'}{dx'}=\dfrac{-x'}{y'\cos^2\beta}=\dfrac{x'}{r\sqrt{1-\left(\dfrac{x'}{r\cos\beta}\right)^2}\cos^2\beta}$

และเนื่องจาก $x'<0$ ดังนั้น $x'=-\dfrac{r\cos\beta\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}}$

ทำให้ได้ว่าจุดบนวงรีที่มีความชันในระนาบ $X'Y'$ เป็น $-\cot\alpha$ คือจุด

$$\left(-\frac{r\cos\beta\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}},-r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}}\right)$$

ต่อไปจะหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังแกน Y โดยจะเริ่มด้วยการหาสมการเส้นตรงของแกน Y ในระบบพิกัด $X'Y'$

เนื่องจากสมการเส้นตรงคือ $y'-r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}=\tan\alpha\left(x'-\left(-\frac{r\cos\beta\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}\right)\right)$

นั่นคือ $y'-x'\tan\alpha-\left(r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}+\tan\alpha\frac{r\cos\beta\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}\right)=0$

ต่อไปจะหาระยะทางจากจุด $(0,0)$ ไปยังเส้นตรงนี้

ถ้า d_x คือระยะทางจากจุด $(0,0)$ ไปยังเส้นตรงนี้จะได้ว่า

$$d_x=\frac{\left|0-0\tan\alpha-\left(r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}+\tan\alpha\frac{r\cos\beta\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}\right)\right|}{\sqrt{(-\tan\alpha)^2+1^2}}$$

$$=\frac{r\left(\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}+\frac{\cos\beta\tan^2\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta+\tan^2\alpha}}\right)}{\sqrt{\sec^2\alpha}}$$

ต่อไปจะหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังแกน X โดยจะเริ่มต้นด้วยการหาสมการเส้นตรงของแกน X ในระบบพิกัด $X'Y'$

เนื่องจากสมการเส้นตรงคือ

$$y'-\left(-r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}}\right)=-\cot\alpha\left(x'-\left(-\frac{r\cos\beta\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}}\right)\right)$$

นั่นคือ $y'+x'\cot\alpha+\left(r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}}+\cot\alpha\frac{r\cos\beta\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+\sec^2\beta}}\right)=0$

ต่อไปจะหาระยะทางจากจุด $(0,0)$ ไปยังเส้นตรงนี้

ถ้า d_y คือระยะทางจากจุด $(0,0)$ ไปยังเส้นตรงนี้จะได้ว่า

$$d_y = \frac{\left|0 + 0\cot\alpha + \left(r\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\cot^2\alpha + \sec^2\beta}} + \cot\alpha \frac{r\cos\beta\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha + \sec^2\beta}} \right)\right|}{\sqrt{(\cot\alpha)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{r\left(\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\cot^2\alpha + \sec^2\beta}} + \frac{\cos\beta\cot^2\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha + \sec^2\beta}} \right)}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha}}$$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของของจานกลมในมุมคือ (x, y, z) เมื่อ

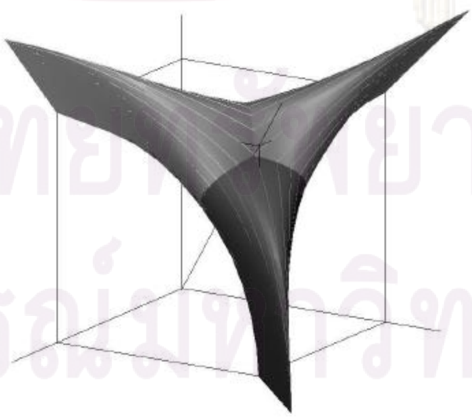
$$x = \frac{r\left(\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\beta + \tan^2\alpha}} + \frac{\cos\beta\tan^2\alpha}{\sqrt{\sec^2\beta + \tan^2\alpha}} \right)}{\sqrt{\sec^2\alpha}},$$

$$y = \frac{r\left(\sqrt{\frac{\sec^2\beta}{\cot^2\alpha + \sec^2\beta}} + \frac{\cos\beta\cot^2\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha + \sec^2\beta}} \right)}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha}}$$

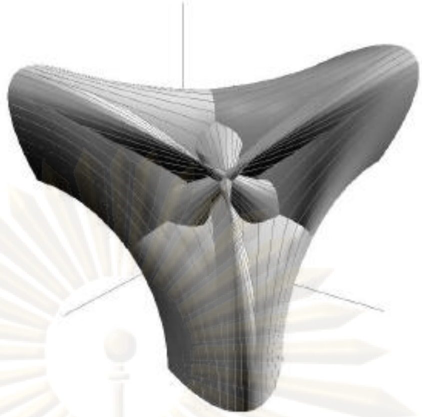
และ $z = r\sin\beta$ โดยที่ $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ และ $0^\circ \le \beta \le 90^\circ$

3.2 ปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม

ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจอีกปัญหาหนึ่ง โดยปัญหานี้จะพิจา รณาหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่วางตัวในอัฐภาคที่หนึ่ง โดยที่มุมทั้ง 4 ของสี่เหลี่ยมต้องแตะระนาบทั้ง 3 ระนาบเสมอ โดยในปี ค.ศ. 2009 Richard P. Gerrard และ John E. Wetzel [8] ได้ทำการพิสูจน์เป็นที่สำเร็จ ซึ่งผลที่ได้นั้นมีความซับซ้อนมาก ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.4 และรูปที่ 3.5



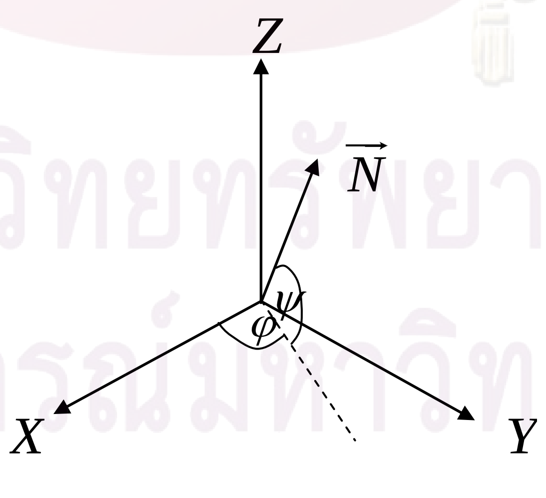
รูปที่ 3.4 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมจัตุรัสในมุม [8]



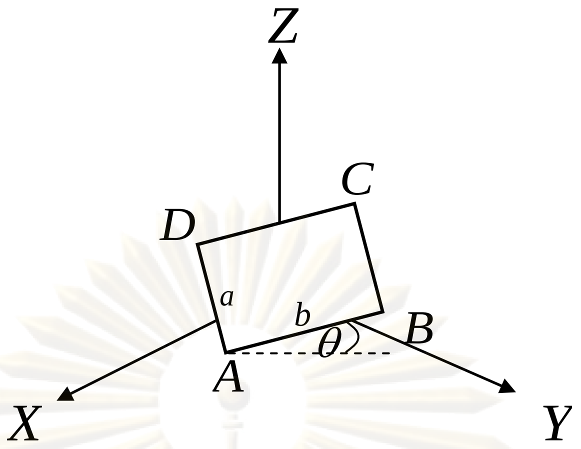
รูปที่ 3.5 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนกว้างต่อยาว เท่ากับ $2:3$ ในมุม [8]

โดยในที่นี้เราสร้างแบบจำลองที่ใช้หาตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่วางตัวในอัฐภาคที่หนึ่ง โดยที่อย่างน้อย 3 มุมของสี่เหลี่ยมต้องแตะระนาบทั้ง 3 ระนาบเสมอ

ในการพิจารณาหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมนั้น เริ่มแรกจะดูการวางตัวของสี่เหลี่ยมใน 3 มิติ ที่ไม่จำเป็นต้องอยู่ที่มุม จากนั้นก็จะทำการเลื่อนสี่เหลี่ยมให้เข้ามาอยู่ที่มุมดังนี้ 1) เลื่อนสี่เหลี่ยมใน 3 มิติ ให้มาอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง 2) เลื่อนสี่เหลี่ยมตามแนวแกน Z ลงมาจนชนระนาบ XY 3) เลื่อนสี่เหลี่ยมตามแนวแกน Y จนชนระนาบ XZ 4) เลื่อนสี่เหลี่ยมตามแนวแกน X จนชนระนาบ YZ ดังนั้นต้องมีอย่างน้อย 3 มุมที่แตะระนาบและเนื่องจากการสะท้อนเราจะสามารถสร้างแบบจำลองของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมได้ดังนี้



รูปที่ 3.6 การวางตัวของเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}$ ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม



รูปที่ 3.7 การวางตัวของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม

ให้ A แทนมุมของสี่เหลี่ยมที่แตะระนาบ XY

B แทนมุมของสี่เหลี่ยมที่ไม่จำเป็นต้องแตะระนาบ

C แทนมุมของสี่เหลี่ยมที่แตะระนาบ YZ

D แทนมุมของสี่เหลี่ยมที่แตะระนาบ XZ

M แทนจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยม

ψ แทนมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากกับระนาบ XY

φ แทนมุมระหว่างภาพฉายของเวกเตอร์แนวฉากกับแกน X

$\overrightarrow{AB_0}$ แทนเวกเตอร์รอยตัดของระนาบที่สี่เหลี่ยมผืนผ้านี้อยู่กับระนาบ XY

θ แทนมุมระหว่างเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AB_0}$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์ s_γ และ c_γ แทน $\sin\gamma$ และ $\cos\gamma$ ตามลำดับ ดังนั้น $\vec{N}=\left(c_\psi c_\varphi, c_\psi s_\varphi, s_\psi\right)$ เนื่องจากเวกเตอร์รอยตัด $\overrightarrow{AB_0}$ ตั้งฉากกับ $\overline{\left(c_\psi c_\varphi, c_\psi s_\varphi, 0\right)}$ ดังนั้น $\overrightarrow{AB_0}=b\overline{\left(-s_\varphi, c_\varphi, 0\right)}$ ต่อไปเราจะหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ซึ่งก็คือเวกเตอร์ที่เกิดจากการหมุนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB_0}=b\overline{\left(-s_\varphi, c_\varphi, 0\right)}$ ในทิศทวนเข็มนาฬิการอบ $\vec{N}$ ไปเป็นมุม θ เนื่องจากเมตริกซ์การหมุนรอบ $\vec{N}$

คือ $R=\begin{pmatrix} 0 & -s_\psi & c_\psi s_\varphi \\ s_\psi & 0 & -c_\psi c_\varphi \\ -c_\psi s_\varphi & c_\psi c_\varphi & 0 \end{pmatrix} s_\theta + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - P \right) c_\theta + P$

เมื่อ $P=\begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi \\ c_\psi s_\varphi \\ s_\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi \\ c_\psi s_\varphi \\ s_\psi \end{pmatrix}^t$ ดังนั้น $\overrightarrow{AB}=Rb\overline{\left(-s_\varphi,c_\varphi,0\right)}$ ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{AD}=\frac{a}{b}\left(\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{AB}\right)$

ดังนั้น (ดูในส่วนที่ 1 ของภาคผนวก)

$$A=\left(\left(bc_\theta-as_\theta\right)s_\varphi+c_\varphi\left(ac_\theta+bs_\theta\right)s_\psi, a\left(c_\varphi s_\theta+c_\theta s_\varphi s_\psi\right),0\right)$$
$$B=\left(-as_\theta s_\varphi+ac_\theta c_\varphi s_{\psi,}\ c_\varphi\left(bc_\theta+as_\theta\right)+\left(ac_\theta-bs_\theta\right)s_\varphi s_\psi, bc_\psi s_\theta\right)$$
$$C=\left(0,b\left(c_\theta c_\varphi-s_\theta s_\varphi s_\psi\right),c_\psi\left(ac_\theta+bs_\theta\right)\right)$$
$$D=\left(b\left(c_\theta s_\varphi+c_\varphi s_\theta s_\psi\right),0,ac_\theta c_\psi\right)$$
$$M=\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}$$

กล่าวโดยสรุปก็คือเราจะศึกษาการวางตัวของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $a\times b$ ในมุม โดยใช้เวกเตอร์ $\overrightarrow{N}$ ที่ตั้งฉากกับสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ และใช้มุม φ กับ ψ เป็นตัวอธิบายตำแหน่งของ $\overrightarrow{N}$ ดังรูป สังเกตว่า $\varphi,\psi\in\left\lfloor 0,90^\circ\right\rfloor$ และเมื่อ $\theta=0^\circ$ จะได้ว่า B อยู่บนระนาบ XY เมื่อ θ เพิ่มมากขึ้น B ก็จะเข้าใกล้ระนาบ YZ มากขึ้น ให้ θ_1 เป็นมุมที่เล็กที่สุดซึ่งทำให้ B อยู่บนระนาบ YZ สังเกตว่า $\theta_1\le 90^\circ$

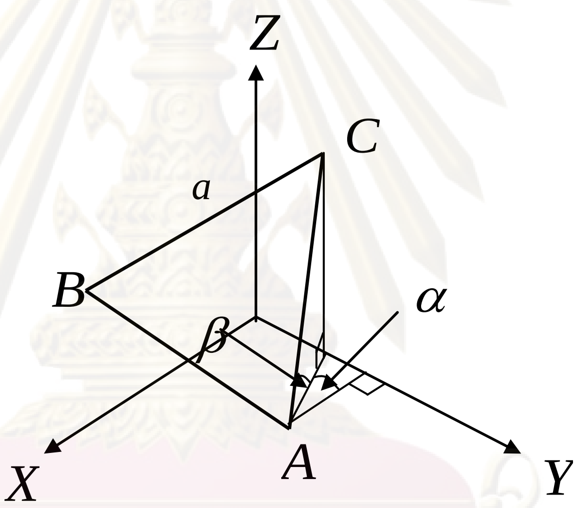
อนึ่ง จากผลลัพธ์ของปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมทำให้เราสามารถการหาจุดศูนย์กลางของลูกเต๋าในอัฐภาคที่หนึ่งที่มีมุมอย่างน้อย 3 มุมแตะ 3 ระนาบ ซึ่งทำได้ดังนี้ เนื่องจากจุดศูนย์กลาง M ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a\times a$ คือ $M=\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}$ โดยที่ $b=a$ ดังนั้นจุดศูนย์กลางของลูกเต๋าในมุมคือ $M+\frac{a}{2}\frac{\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|}$

3.3 ปัญหาสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุม

ปัญหาการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุมก็เป็นปัญหาทางเรขาคณิตอีกปัญหาหนึ่งที่มีการศึกษากันมาอย่างยาวนานนอกเหนือไปจาก ปัญหาการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม โดยปัญหานี้จะพิจารณาหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่วางตัวในอัฐภาคที่หนึ่ง โดยที่มุมทั้ง 3 ของสามเหลี่ยมต้องแตะระนาบทั้ง

3 ระนาบเสมอและปัญหานี้ยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้ หลังจาก Wetzel ถามถึงลักษณะพิเศษบางอย่างของตำแหน่งที่เป็นไปได้ วัชรินทร์ วิชิรมาลา และ Daniel Lichtblau ก็ได้ศึกษาเรื่องนี้ล่าสุดได้ใช้โปรแกรม Mathematica วาดตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุมได้ ซึ่งผลที่ได้นั้นมีความซับซ้อนมากกว่าตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุม

โดยในที่นี้เราจะเสนอแบบจำลองที่ใช้หาตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุมอีกแบบหนึ่ง โดย เริ่มแรกจะดูการวางตัวของสามเหลี่ยมด้านเท่าใน 3 มิติ ที่ไม่จำเป็นต้องอยู่ที่มุม จากนั้นก็จะทำการเลื่อนสามเหลี่ยมให้เข้ามาอยู่ที่มุมดังนี้ 1) เลื่อนสามเหลี่ยมใน 3 มิติ ให้มาอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง 2) เลื่อนสามเหลี่ยมตามแนวแกน Z ลงมาจนชนระนาบ XY 3) เลื่อนสามเหลี่ยมตามแนวแกน Y จนชนระนาบ XZ 4) เลื่อนสามเหลี่ยมตามแนวแกน X จนชนระนาบ YZ



รูปที่ 3.8 การวางตัวของสามเหลี่ยมด้านเท่าในมุม

จากนั้นเราจะสร้างแบบจำลองของสามเหลี่ยมดังนี้

ให้ A แทนมุมของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แตะระนาบ XY

B แทนมุมของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แตะระนาบ XZ

C แทนมุมของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แตะระนาบ YZ

D แทนจุดกึ่งกลางของด้าน AC

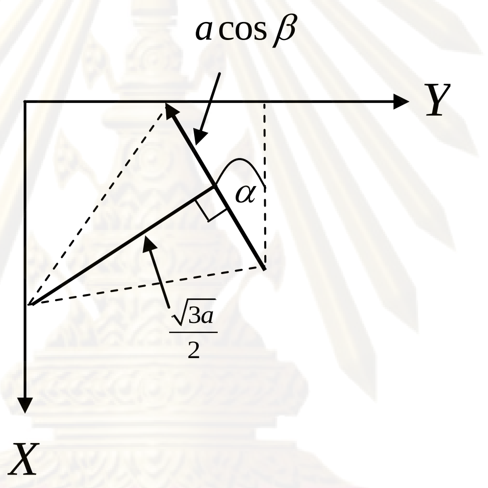
a แทนขนาดของด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่า

β แทนมุมระหว่างด้าน AC กับระนาบ XY

α แทนมุมที่วัดจากเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปตั้งฉากกับแกน Y ไปยังภาพฉายของ AC ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

γ แทนมุมในการหมุนส่วนของเส้นตรง BD รอบ AC โดยกำหนดให้ $\gamma = 0$ เมื่อ BD ขนานกับระนาบ XY

และกำหนดพิกัดของแต่ละจุดใน 3 มิติ ดังนี้ $A=(x_A, y_A, z_A)$, $B=(x_B, y_B, z_B)$, $C=(x_C, y_C, z_C)$



รูปที่ 3.9 ภาพมองจากด้านบนของ $\overrightarrow{DB_{\gamma=0}}$

เนื่องจาก $z_A = 0$, $y_B = 0$, $x_C = 0$, $z_C = a\sin\beta$, $y_A = y_C + a\cos\beta\sin\alpha$ และ $x_A = a\cos\beta\cos\alpha$ ดังนั้นถ้ารู้พิกัดของ x_B, z_B และ y_C ก็จะรู้ครบทุกพิกัด เริ่มต้นด้วยการหาพิกัด y_C จะเห็นว่า $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-a\cos\beta\cos\alpha, -a\cos\beta\sin\alpha, a\sin\beta)}$

ต่อไปเราจะศึกษาภาพมองจากด้านบนของ $\overrightarrow{AC_{\gamma=0}}$ ดังรูปที่ 3.9 ดังนั้น $\overrightarrow{AC_{z=0}} = \overrightarrow{(-a\cos\beta\cos\alpha, -a\cos\beta\sin\alpha, 0)}$ ทำให้ได้ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ภาพฉายนี้คือ $\overrightarrow{(-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)}$ เมื่อหมุนเวกเตอร์นี้ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 90° บนระนาบ XY จะได้เวกเตอร์ $\overrightarrow{(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)}$ ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{DB_{\gamma=0}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\overrightarrow{(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)}$

เนื่องจากพิกัดของจุด B จะขึ้นอยู่กับมุม γ ดังนั้นเพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ B_γ แทนพิกัดของจุด B ณ มุม γ ใด ๆ

เนื่องจาก $B = C + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ ดังนั้น $y_C + y_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{DB}} = y_B = 0$
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
y_C &= -y_{\overrightarrow{CD}} - y_{\overrightarrow{DB}} \\
&= -y_{D-C} - y_{\overrightarrow{DB}} \\
&= -y_{\frac{A+C}{2}-C} - y_{\overrightarrow{DB}} \\
&= -y_{\frac{\overrightarrow{CA}}{2}} - y_{\overrightarrow{DB}} \\
&= \ y_{\frac{\overrightarrow{AC}}{2}} - y_{\overrightarrow{DB}}
\end{aligned}$$

เมื่อ $\overrightarrow{DB}$ คือ $\overrightarrow{DB_{\gamma=0}}$ ที่หมุนรอบเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ไปเป็นมุม γ

จากนั้นก็สามารถหาพิกัดของ x_B และ z_B ได้ดังนี้

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} + x_{\overrightarrow{DB}} \text{ และ } z_B = \frac{z_A + z_C}{2} + z_{\overrightarrow{DB}}$$

โดยที่ α และ β เป็นมุมที่ทำให้จุด A, B และ C อยู่ในอัฐภาคที่ 1

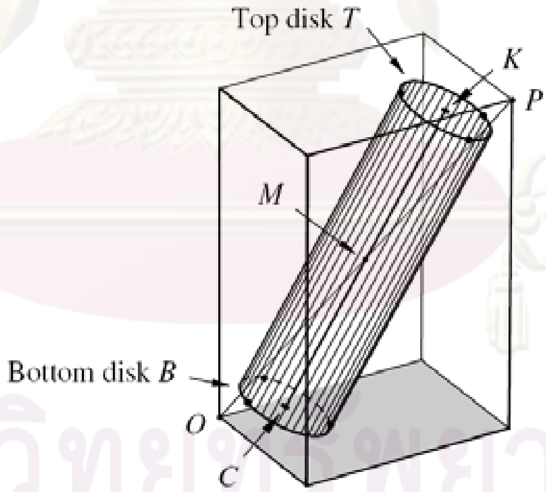
บทที่ 4

ปัญหาวัตถุในกล่อง

ตามที่กล่าวมาแล้วว่าได้มีการศึกษาหาความยาวที่มากที่สุดของแท่งหน้าตัดรูปต่าง ๆ ที่สามารถบรรจุได้ในกล่องใบหนึ่ง ในบทนี้จึงจะขอกล่าวถึงปัญหาเหล่านั้นโดยละเอียด

4.1 ปัญหาหลอดในกล่อง

ปัญหาหลอดในกล่องเป็นการศึกษาหาความยาวที่มากที่สุดของแท่งหน้าตัดรูปจานกลมที่สามารถบรรจุได้ในกล่องซึ่งปัจจุบันนี้ยังไม่มีใครสามารถหาคำตอบและพิสูจน์ได้ แต่ความก้าวหน้าของงานชิ้นนี้ก็ไม่ใช่ว่าจะไม่มีเลย โดยในบรรดา แท่งที่วางในแนวทแยงมุมกล่องนั้นสามารถหาแท่งที่ยาวที่สุดได้ โดยผลงานนี้ได้รับการพิสูจน์ในปี ค .ศ. 2006 โดย Richard Jerrard, Joel Schneider, Ralph Smallberg และ John Wetzel [7] ซึ่งปัญหานี้เกี่ยวข้องโดยตรงกับปัญหาจานกลมในมุมเนื่องจากปลายทั้ง 2 ข้างของแท่งที่ยาวที่สุดนั้นก็คือจานกลมที่อยู่ที่มุมนั่นเอง และยิ่งไปกว่านั้นในการพิสูจน์หาแท่งที่ยาวที่สุดที่วางในแนวทแยงมุมในกล่องนั้นยังได้มีการนำเอาตำแหน่งจุดศูนย์กลางของจานกลมในมุมมาใช้ในการพิสูจน์อีกด้วย



รูปที่ 4.1 การวางตัวของแท่งหน้าตัดรูปจานกลมที่ยาวที่สุดที่วางในแนวทแยงมุมในกล่อง [7]

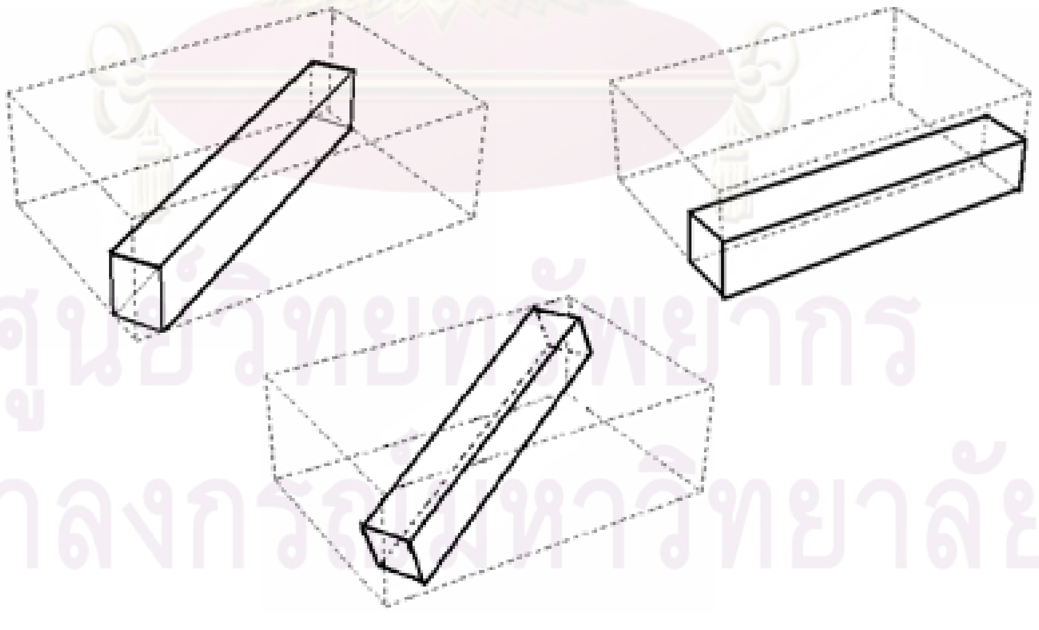
ทฤษฎีบท 4.1 [7] ในบรรดาแท่งหน้าตัดรูปจานกลมรัศมี r ที่วางในแนวทแยงมุมในกล่องขนาด $a_1 \times a_2 \times a_3$ แท่งที่ยาวที่สุดจะยาว $2t$ เมื่อ t เป็นรากของสมการ

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{r^2+t^2}\left(m_i r+\varepsilon_i t\sqrt{r^2-m_i^2+t^2}\right)\right)^2=2$$ โดยที่ $\varepsilon_i=+1$ หรือ -1 และ $m_i=\frac{a_i}{2}$

4.2 ปัญหาแท่งสี่เหลี่ยมในกล่อง

ในปี ค .ศ. 1923 Garnett [6] ได้ถามหาความหนาของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มากที่สุดที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้านี้สามารถบรรจุในกล่องที่กำหนดให้ ซึ่งปัญหานี้เรียกว่าปัญหา "แท่งสี่เหลี่ยมในกล่อง" แต่เป็นที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าปัญหานี้ยังไม่ได้รับการเฉลยและพิสูจน์ แต่ ในปี ค.ศ. 1925 Carver [1] ได้เฉลยปัญหานี้ภายใต้ข้อคาดเดาที่ว่าแท่งสี่เหลี่ยมที่ยาวที่สุดที่สามารถบรรจุได้ในกล่องจะวางในลักษณะที่มุมทั้งแปดของแท่งนั้นจะต้องแตะผนังของกล่องเสมอ ซึ่งข้อคาดเดาที่ Carver [1] ใช้นั้นได้มีหลายคนได้พยายามพิสูจน์แต่ก็ยังไม่มีใครทำสำเร็จ ทำให้เราไม่สามารถหาความยาวของแท่งที่ยาวที่สุดได้จนถึงปัจจุบัน

โดยในการศึกษาปัญหานี้เราจะกำหนดให้กล่องมีขนาด $w \times l \times h$ และแท่งมีขนาดหน้าตัดเป็น $a \times b$ แต่เพื่อความสะดวกในการพิจารณาเราจะศึกษากล่องที่วางตัวอยู่ในระบบพิกัด 3 มิติ โดยที่มุม ๆ หนึ่งของกล่องอยู่ที่จุดกำเนิดและอีกมุมหนึ่งอยู่ที่จุด (w,l,h) สังเกตว่าการวางตัวของกล่องสามารถทำได้อย่างมาก 6 วิธีที่แตกต่างกัน เนื่องจากผลของการเลื่อนและการสะท้อนทำให้ได้ว่าเราสามารถศึกษาแท่งที่มีปลายข้างหนึ่งอยู่ที่มุมกล่องที่จุดกำเนิดได้เสมอ และผลจากการเลื่อนทำให้ได้ว่าปลายแท่งที่แตะมุมกล่องที่จุดกำเนิดต้องแตะอย่างน้อย 3 จุด ทำให้เราสามารถนำปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมในบทที่แล้วมาสร้างแบบจำลองที่จะใช้อธิบายการวางตัวของแท่งสี่เหลี่ยมที่วางทแยงมุมในกล่องได้ ยิ่งไปกว่านั้นเราจะแสดงในบทต่อไปอีกด้วยว่าแท่งที่ยาวที่สุดนั้นต้องมีสมบัติที่ว่ามุมทั้ง 8 ของแท่งต้องแตะผนังของกล่องเสมอภายใต้ข้อสมมติบางอย่าง



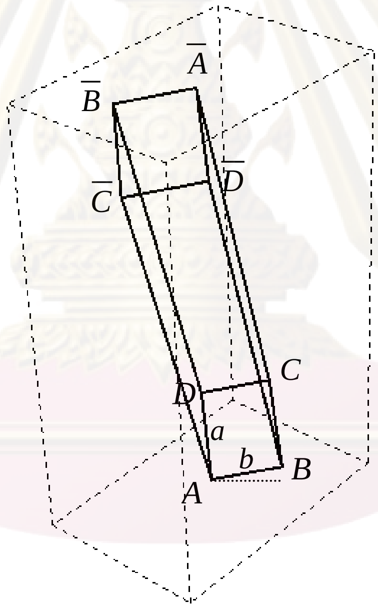
รูปที่ 4.2 การวางตัวของแท่งสี่เหลี่ยมที่มุมทั้ง 8 แตะผนังกล่อง

เราจะสร้างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนี้ เราจะเริ่มด้วยมุม $\varphi_0, \psi_0, \theta_0$ ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $a \times b$ ที่มุม ณ ตำแหน่งจุดกำเนิด จากนั้นเราจะหมุนแท่งในทิศทวนเข็มนาฬิกาในลักษณะที่ปลายอีกข้างหนึ่งยังคงสัมผัสมุมที่อยู่ตรงกันข้าม ซึ่งเงื่อนไขที่ทำให้เป็นปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ และ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ซึ่งสมนัยกับ $\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{N}$ และภายใต้การกระบวนการนี้จะเห็นว่า φ กับ ψ ขึ้นอยู่กับ θ นั่นคือเมื่อ $\theta = \theta_0$ จะได้ว่า $\varphi = \varphi_0$ กับ $\psi = \psi_0$

ให้ L เป็นความยาวของแท่ง จะได้ว่า L ขึ้นอยู่กับ w, l, h, a, b, θ

ให้ $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{M}$ เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด A, B, C, D และ M ของแท่ง

จะได้ว่า $\overline{A} = E - A$ เมื่อ $E = (w, l, h)$ และเช่นเดียวกันสำหรับ $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ และ $\overline{M}$



รูปที่ 4.3 การวางตัวของแท่งสี่เหลี่ยมที่แตะอย่างน้อย 6 จุด ในกล่อง

ทฤษฎีบทต่อไปจะช่วยให้เราสามารถกำจัดแท่งที่สั้นเกินไปออกจากการเป็นแท่งที่ยาวที่สุด

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ B เป็นกล่องขนาด $w \times l \times h$ และ $a,b < \frac{1}{3}\min\{w,l,h\}$ จะได้ว่ามีแท่งสี่เหลี่ยมขนาด $a \times b \times L$ ที่บรรจุในกล่อง B ได้ โดยที่

$$L \geq \sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.15 จะได้ว่ามีแท่งที่ยาว $a \times b \times L$ ที่วางทแยงมุมใน B และมุมทั้ง 8 แตะผนังของกล่อง จะแสดงว่า $L \geq \sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$ โดยวางกล่อง B ให้ผนังขนาด $w \times l$ อยู่บนระนาบ XY โดยให้ด้านที่ยาว w วางตามแนวแกน X และด้านที่ยาว l วางตามแนวแกน Y โดยมีมุม ๆ หนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด และอีกมุมหนึ่งอยู่ที่พิกัด (w,l,h) จะได้ว่าจุดกึ่งกลางของปลายแท่งที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดอยู่ในกล่องลูกบาศก์ที่มีความยาวด้านเท่ากับ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ที่จุดกำเนิดและจุดกึ่งกลางของปลายแท่งที่อยู่ใกล้จุด (w,l,h) อยู่ในกล่องลูกบาศก์ที่มีความยาวด้านเท่ากับ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ที่พิกัด (w,l,h) เนื่องจากระยะทางสั้นสุดจากลูกบาศก์ทั้งสองนี้คือ $\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$ ทำให้สามารถสรุปได้ตามต้องการ

❑

บทแทรก 4.3 ให้ B เป็นกล่องขนาด $w \times l \times h$ จะได้ว่า ถ้า $a,b < \frac{1}{3}\min\{w,l,h\}$ และ c เป็นจำนวนที่มากที่สุดที่ทำให้กล่องขนาด $a \times b \times c$ บรรจุใน B ได้ แล้ว

$$c \geq \sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 4.2

❑

4.3 ปัญหาแท่งสามเหลี่ยมในกล่อง

การศึกษาหาความยาวที่มากที่สุดของแท่งหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่สามารถบรรจุได้ในกล่องใบหนึ่งนั้นยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์คำตอบได้จนกระทั่งถึงปัจจุบันนี้

บทที่ 5

ปัญหาแท่งสี่เหลี่ยมที่ยาวที่สุด

ในบทนี้เราจะแสดงว่าการบรรจุแท่งสี่เหลี่ยมในกล่องใหญ่มากและหนานั้น แท่งที่ยาวที่สุดจะวางตัวในลักษณะที่มุมทั้ง 8 ต้องแตะผนังของกล่องเสมอและวางทแยงมุม ดังนั้นก่อนอื่นเราจะขอแนะนำคำว่าใหญ่มากและหนากันก่อน

โดยเราจะกล่าวว่า กล่อง***ใหญ่***เมื่อเทียบกับแท่ง ถ้า $\min\{w,l,h\} > 13500\sqrt{a^2+b^2}$ กล่อง***ใหญ่มาก*** ถ้า $\min\{w,l,h\} > 15000\sqrt{a^2+b^2}$ กล่อง**หนา** ถ้า $\min\{w,l,h\} > \cot 80^\circ \max\{w,l,h\}$

เนื่องจากในบทนี้เราจะสนใจเฉพาะแท่งสี่เหลี่ยม ดังนั้นเพื่อความสะดวก เราจึงจะขอใช้คำว่าแท่งแทนคำว่าแท่งสี่เหลี่ยม

เนื่องจาก $L\vec{N} = \overrightarrow{AC} = \vec{E} - \vec{C} - \vec{A} = \vec{E} - 2\vec{M}$ ดังนั้น $L = \left(\vec{E} - 2\vec{M}\right)\cdot\vec{N}$

จากความสัมพันธ์ของตัวแปร $w,l,h,a,b,\theta,\varphi,\psi$ จะได้ว่า φ,ψ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เทียบกับ θ ซึ่งทำให้ L เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เทียบกับ θ ด้วย

เนื่องจาก $\left\|\vec{N}\right\| = 1$ ดังนั้น $\vec{N}\cdot\vec{N}' = 0$

หาอนุพันธ์ของ L เทียบ θ จะได้

$$
\begin{aligned}
L' &= -2\overrightarrow{M'}\cdot\vec{N} + \left(\vec{E} - 2\vec{M}\right)\cdot\overrightarrow{N'} \\
&= -2\overrightarrow{M'}\cdot\vec{N} + L\vec{N}\cdot\overrightarrow{N'} \\
&= -2\overrightarrow{M'}\cdot\vec{N} + 0L \\
&= -2\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta} + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\varphi}\varphi' + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\psi}\psi'\right)\cdot\vec{N} \\
&= -2\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}\cdot\vec{N} - 2\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\varphi}\cdot\vec{N}\varphi' + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\psi}\cdot\vec{N}\psi'\right)
\end{aligned}
$$

ให้ $\tilde{L} = -2\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}\cdot\vec{N}$

ก่อนอื่นจะขอแนะนำสัญลักษณ์ที่จะใช้ดังต่อไปนี้

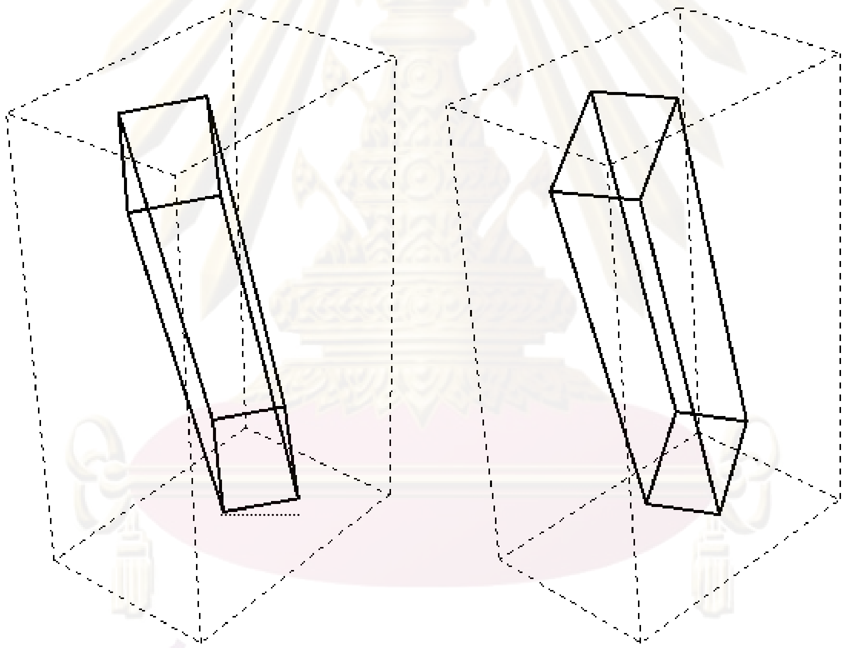
ให้ φ_d แทนมุมระหว่างภาพฉายของเส้นทแยงมุมกล่องกับแกน X

และให้ ψ_d แทนมุมระหว่างเส้นทแยงมุมของกล่องกับระนาบ XY

สังเกตว่าสำหรับกล่องที่มีขนาดใหญ่ เราสามารถประมาณ φ และ ψ ของแท่งได้ด้วย φ_d และ ψ_d ของกล่อง ตามลำดับ ดังนั้นในที่นี้เราจะขอใช้ข้อสมมติที่ว่า $|\varphi'| < 0.000025$ และ $|\psi'| < 0.000025$ สำหรับกล่องที่มีขนาดใหญ่

เราจะกล่าวว่ากล่อง B' ขนาด $w' \times l' \times h'$ เป็นกล่องที่ได้จากการ***ลดขนาด***กล่อง B ขนาด $w \times l \times h$ ถ้า $w' \le w$, $l' \le l$ และ $h' \le h$ และ $B' \ne B$ และจะกล่าวว่าแท่ง***คับแน่น***ในกล่องถ้าไม่สามารถกดผนังกล่องใดลงไปได้อีก นั่นคือถ้าแท่งอยู่กับที่แล้วเราไม่สามารถลดขนาดกล่องลงไปได้อีกโดยที่ผนังของกล่องยังขนานกับผนังเดิมและแท่งยังคงบรรจุได้ในกล่องนั้น

สังเกตว่าถ้าเราลดขนาดกล่องใหญ่มากลงไม่เกิน 10% แล้วกล่องที่ได้ใหม่นั้นจะเป็นกล่องใหญ่



รูปที่ 5.1 รูปแสดงการวางตัวของแท่งที่คับแน่นในกล่อง

สังเกตว่าแท่งที่คับแน่นในกล่องไม่จำเป็นที่มุมทั้ง 8 ต้องแตะผนังของกล่อง

ทฤษฎีบทตั้ง 5.1 ถ้ากล่องใหญ่ แล้ว $\left|L' - \tilde{L}\right| < 0.0001(a+b)$ สำหรับทุก $0 \le \theta \le \theta_1$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก

$$\left|\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \varphi}\cdot\overrightarrow{N}\right| = \left|\frac{1}{2}c_\psi\left(bc_\theta c_{2\varphi} - s_\theta\left(a + bs_{2\varphi}s_\psi\right)\right)\right| \le \frac{a}{2} + b < a + b$$

และ

$$\left|\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \psi}\cdot\overrightarrow{N}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(c_{2\psi}\left(ac_\theta + bc_\varphi^2 s_\theta\right) - bs_\theta s_\varphi^2\right)\right| \le \frac{a}{2} + b < a + b$$

ดังนั้นโดยข้อสมมติจะได้ว่า

$$\left|L' - \tilde{L}\right| = \left|-2\left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \varphi}\cdot\overrightarrow{N}\varphi' + \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \psi}\cdot\overrightarrow{N}\psi'\right)\right| \le 2(a+b)\left(|\varphi'| + |\psi'|\right)$$
$$< 2(0.00005)(a+b) \qquad = 0.0001(a+b)$$

❑

ทฤษฎีบทตั้ง 5.2 ถ้า $x, y \ge 4$ แล้ว $\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \le 2$

บทพิสูจน์ ให้ $x, y \ge 4$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 + 2xy + 8x + 8y \le x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right) + 2x^2 + 2y^2 + 8$

ดังนั้น $x^2 + y^2 + 2xy \le x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right) + 2x^2 + 2y^2 + 8 - 8x - 8y$

นั่นคือ $(x+y)^2 \le 4\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right)$

เพราะฉะนั้น $x + y \le 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

ดังนั้น $x + y \le 3 + 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

ทำให้ได้ว่า $2x + 2y \le 6 + 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

เพราะฉะนั้น $0 \le 6 + 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 2x - 2y$

ดังนั้น $x^2 + y^2 \le 6 + 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 2x - 2y + x^2 + y^2$

นั่นคือ $x^2 + y^2 \le 4 + 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + (x-1)^2 + (y-1)^2$

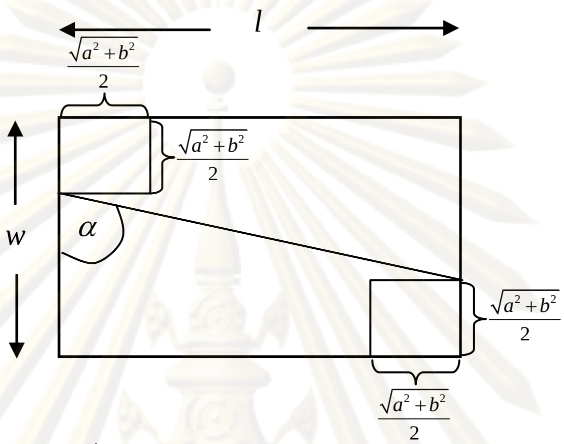
ดังนั้น $x^2 + y^2 \le \left(2 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^2$

นั่นคือ $\sqrt{x^2 + y^2} \le 2 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

❑

ทฤษฎีบท 5.3 ถ้าแท่งคับแน่นในกล่องใหญ่ แล้ว $|\varphi-\varphi_d|<0.01^\circ$ และ $|\psi-\psi_d|<0.01^\circ$ สำหรับทุก $0\le\theta\le\theta_1$

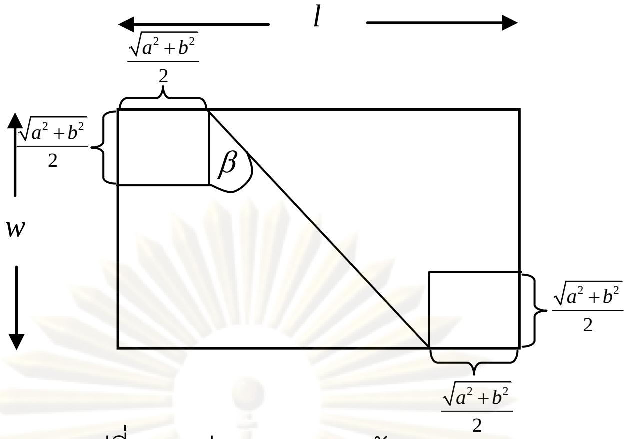
บทพิสูจน์ เนื่องจากปลายทั้งสองของแท่งต้องแตะกล่องอย่างน้อย 3 จุด ดังนั้น M และ $\overline{M}$ ต้องอยู่ในลูกบาศก์ขนาด $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ที่จุดกำเนิดและจุด (w,l,h) ตามลำดับ



รูปที่ 5.2 รูปแสดงการวางตัวของมุม α

เนื่องจาก $-90^\circ<\varphi-\varphi_d\le\alpha-\varphi_d<90^\circ$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\tan(\varphi-\varphi_d) &\le \tan(\alpha-\varphi_d)\\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\varphi_d}{1+\tan\alpha\tan\varphi_d}\\
&= \frac{\dfrac{l}{w-\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{l}{w}}{1+\dfrac{l}{w-\sqrt{a^2+b^2}}\dfrac{l}{w}}\\
&< \frac{\dfrac{l}{w-\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{l}{w}}{\dfrac{l}{w-\sqrt{a^2+b^2}}\dfrac{l}{w}}\\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{l}\\
&< \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{13500\sqrt{a^2+b^2}}\\
&< 0.00008\\
&< 0.00017\\
&< \tan 0.01^\circ
\end{aligned}
$$

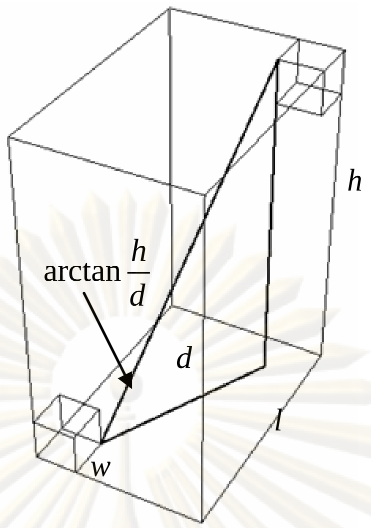


รูปที่ 5.3 รูปแสดงการวางตัวของมุม β

เนื่องจาก $90^\circ < \varphi_d - \varphi \le \varphi_d - \beta < 90^\circ$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\tan(\varphi_d - \varphi) &\le \frac{\dfrac{l}{w} - \dfrac{l - \sqrt{a^2+b^2}}{w}}{1 + \dfrac{l}{w}\dfrac{l - \sqrt{a^2+b^2}}{w}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{w + \dfrac{l\left(l - \sqrt{a^2+b^2}\right)}{w}} \\
&< \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{w} \\
&< \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{13500\sqrt{a^2+b^2}} \\
&< 0.00008 \\
&< 0.00017 \\
&< \tan 0.01^\circ
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\tan$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-90^\circ, 90^\circ)$ เพราะฉะนั้น $|\varphi - \varphi_d| < 0.01^\circ$



รูปที่ 5.4 รูปแสดงมุม $\arctan\dfrac{h}{d}$

เนื่องจาก $-90^\circ < \psi - \psi_d \le \arctan\dfrac{h}{d} - \psi_d < 90^\circ$ และทฤษฎีบทตั้ง 5.2 จะได้ว่า

$$\tan\left(\psi-\psi_d\right) \le \frac{\dfrac{h}{\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}}-\dfrac{h}{\sqrt{w^2+l^2}}}{1+\dfrac{h}{\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}}\dfrac{h}{\sqrt{w^2+l^2}}}$$

$$< \frac{\dfrac{h}{\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}}-\dfrac{h}{\sqrt{w^2+l^2}}}{\dfrac{h}{\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}}\dfrac{h}{\sqrt{w^2+l^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{w^2+l^2}-\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}}{h}$$

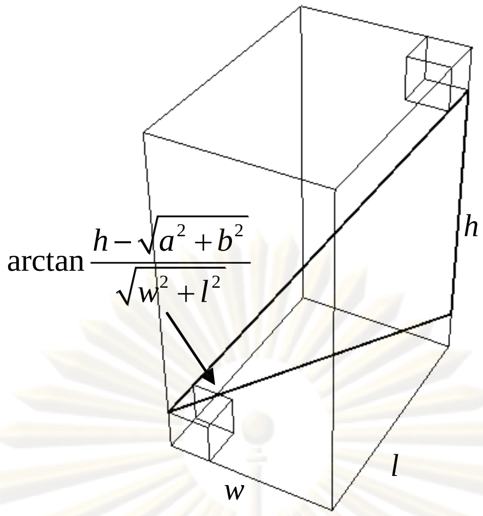
$$\le \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{h}$$

$$\le \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{13500\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$< 0.00015$$

$$< 0.00017$$

$$< \tan 0.01^\circ$$



รูปที่ 5.5 รูปแสดงมุม $\arctan \frac{h-\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{w^2+l^2}}$

เนื่องจาก $-90^\circ < \psi_d - \psi \le \psi_d - \arctan \frac{h-\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{w^2+l^2}} < 90^\circ$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\tan(\psi_d - \psi) &\le \frac{\dfrac{h}{\sqrt{w^2+l^2}} - \dfrac{h-\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{w^2+l^2}}}{1+\dfrac{h}{\sqrt{w^2+l^2}}\dfrac{h-\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{w^2+l^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{w^2+l^2}+\dfrac{h\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{w^2+l^2}}} \\
&< \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{w^2+l^2}} \\
&< \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{w} \\
&< \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{13500\sqrt{a^2+b^2}} \\
&< 0.00008 \\
&< 0.00017 \\
&< \tan 0.01^\circ
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก tan เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-90^\circ, 90^\circ)$ เพราะฉะนั้น $|\psi - \psi_d| < 0.01^\circ$

❑

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะอาศัยแนวคิดที่ว่าในกล่องใหญ่ L' จะถูกประมาณด้วย $\tilde{L}$

ทฤษฎีบท 5.4 สำหรับกล่องที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 1) $|\varphi-\varphi_d|<0.01^\circ$ และ $|\psi-\psi_d|<0.01^\circ$ 2) ($10^\circ<\varphi_d<80^\circ$ และ $7^\circ<\psi_d<76^\circ$) หรือ ($9^\circ<\varphi_d<81^\circ$ และ $6^\circ<\varphi_d<78^\circ$) และ 3) $|\varphi'|<0.000025$ และ $|\psi'|<0.000025$ จะได้ว่า ในบรรดาแท่งที่ คับแน่นในกล่องด้วย $0\le\theta\le\theta_1$ L จะมีค่ามากสุดเมื่อ $\theta=0$ หรือ $\theta=\theta_1$

บทพิสูจน์ ให้ $\bar{\theta}=\arctan\dfrac{bc_{\varphi_1}^2 s_{\psi_1}}{bc_{\varphi_1}s_{\varphi_1}+as_{\psi_1}}$

เนื่องจาก $|\psi-\psi_d|<0.01^\circ$ และ $|\psi_1-\psi_d|<0.01^\circ$

ดังนั้น $|\psi-\psi_1|<0.02^\circ$

ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\theta_0}\tilde{L}\,d\theta &= \int_0^{\theta_0} -2c_\psi\left(bc_\theta c_\varphi^2 s_\psi - s_\theta\left(bc_\varphi s_\varphi + as_\psi\right)\right)d\theta \\
&= \int_0^{\theta_0} -2c_\psi bc_\theta c_\varphi^2 s_\psi\,d\theta + \int_0^{\theta_0} 2c_\psi s_\theta\left(bc_\varphi s_\varphi + as_\psi\right)d\theta \\
&\le \int_0^{\theta_0} -2c_{\psi_1+0.02^\circ} bc_\theta c_{\varphi_1+0.02^\circ}^2 s_{\psi_1-0.02^\circ}\,d\theta \\
&\quad + \int_0^{\theta_0} 2c_{\psi_1-0.02^\circ} s_\theta\left(bc_{\varphi_1-0.02^\circ} s_{\varphi_1+0.02^\circ} + as_{\psi_1+0.02^\circ}\right)d\theta \\
&= -2c_{\psi_1+0.02^\circ} bc_{\varphi_1+0.02^\circ}^2 s_{\psi_1-0.02^\circ}\int_0^{\theta_0} c_\theta d\theta \\
&\quad + 2c_{\psi_1-0.02^\circ}\left(bc_{\varphi_1-0.02^\circ} s_{\psi_1+0.02^\circ} + as_{\psi_1+0.02^\circ}\right)\int_0^{\theta_0} s_\theta d\theta \\
&= -2c_{\psi_1+0.02^\circ} bc_{\varphi_1+0.02^\circ}^2 s_{\psi_1-0.02^\circ} s_{\theta_0} \\
&\quad - 2c_{\psi_1-0.02^\circ}\left(c_{\theta_0}-1\right)\left(bc_{\varphi_1-0.02^\circ} s_{\varphi_1+0.02^\circ} + as_{\psi_1+0.02^\circ}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)
\end{aligned}
$$

และ

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \tilde{L}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} -2c_\psi \left(bc_\theta c_\varphi^2 s_\psi - s_\theta \left(bc_\varphi s_\varphi + as_\psi \right) \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} -2c_\psi bc_\theta c_\varphi^2 s_\psi \, d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} 2c_\psi s_\theta \left(bc_\varphi s_\varphi + as_\psi \right) d\theta$$

$$\geq \int_{\theta_0}^{\theta_1} -2c_{\psi_1 - 0.02^\circ} bc_\theta c^2_{\varphi_1 - 0.02^\circ} s_{\psi_1 + 0.02^\circ} d\theta$$

$$+ \int_{\theta_0}^{\theta_1} 2c_{\psi_1 + 0.02^\circ} s_\theta \left(bc_{\varphi_1 + 0.02^\circ} s_{\varphi_1 - 0.02^\circ} + as_{\psi_1 - 0.02^\circ} \right) d\theta$$

$$= -2c_{\psi_1 - 0.02^\circ} bc^2_{\varphi_1 - 0.02^\circ} s_{\psi_1 + 0.02^\circ} \int_{\theta_0}^{\theta_1} c_\theta d\theta$$

$$+ 2c_{\psi_1 + 0.02^\circ} \left(bc_{\varphi_1 + 0.02^\circ} s_{\psi_1 - 0.02^\circ} + as_{\psi_1 - 0.02^\circ} \right) \int_{\theta_0}^{\theta_1} s_\theta d\theta$$

$$= -2c_{\psi_1 - 0.02^\circ} bc^2_{\varphi_1 - 0.02^\circ} s_{\psi_1 + 0.02^\circ} \left(s_{\theta_1} - s_{\theta_0} \right)$$

$$- 2c_{\psi_1 + 0.02^\circ} \left(c_{\theta_1} - c_{\theta_0} \right) \left(bc_{\varphi_1 + 0.02^\circ} s_{\varphi_1 - 0.02^\circ} + as_{\psi_1 - 0.02^\circ} \right)$$

$$\geq -2c_{\psi_1 - 0.02^\circ} bc^2_{\varphi_1 - 0.02^\circ} s_{\psi_1 + 0.02^\circ} \left(s_{\arctan\left(s_{\psi_1} \cot \varphi_1\right)} - s_{\theta_0} \right)$$

$$- 2c_{\psi_1 + 0.02^\circ} \left(c_{\arctan\left(s_{\psi_1} \cot \varphi_1\right)} - c_{\theta_0} \right) \left(bc_{\varphi_1 + 0.02^\circ} s_{\varphi_1 - 0.02^\circ} + as_{\psi_1 - 0.02^\circ} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

โดยใช้โปรแกรม Mathematica version 7.0 (ดูในส่วนที่ 3 ของภาคผนวก) จะได้ว่า สำหรับ $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1$, $\left|\frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{10}$ และ $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 10$ ปริมาณ (1) จะมีค่าน้อยกว่า $-0.0001\theta_0 (a+b)$ หรือ ปริมาณ (2) มีค่ามากกว่า $0.0001(\theta_1 - \theta_0)(a+b)$ เสมอ ดังตารางต่อไปนี้

a:b	1:1000	1:100	1:10	10:1	100:1	1000:1
min	-0.5786	-0.5683	-0.4744	0.0013	0.0016	0.0017
max	-0.0024	-0.0024	-0.0016	0.4747	0.5685	0.5788

a:b $\in$	$\left(0,\frac{1}{1000}\right]$	$\left[\frac{1}{1000},\frac{1}{100}\right]$	$\left[\frac{1}{100},\frac{1}{10}\right]$	$[10,100]$	$[100,1000]$	$[1000,\infty)$
min	-0.5797	-0.5786	-0.5683	0.0013	0.0016	0.0017
max	-0.0024	-0.0024	-0.0016	0.5685	0.5788	0.5800

และสำหรับ $0\le\theta_0\le\theta_1$ และ $0.1\le\left|\frac{a}{b}\right|\le 10$, ถ้า $0\le\theta_0\le\bar{\theta}$ แล้ว ปริมาณ (1) จะมีค่าน้อยกว่า $-0.0001\theta_0(a+b)$ และถ้า $\bar{\theta}\le\theta_0\le\theta_1$ ปริมาณ (2) มีค่ามากกว่า $0.0001(\theta_1-\theta_0)(a+b)$ เสมอ ดังตารางต่อไปนี้

a:b	1:10	1:2	1:1	2:1	10:1
min	0.000108	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015
max	-0.0022	-0.0016	-0.0012	-0.0008	-0.0002

a:b $\in$	$\left[\frac{1}{10},\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$[1,2]$	$[2,10]$
min	0.000108	0.0005	0.0008	0.0011
max	-0.0016	-0.0012	-0.0008	-0.0002

ถ้าปริมาณ (1) มีค่าน้อยกว่า $-0.0001\theta_0\left(a+b\right)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
L\left(\theta_0\right)-L\left(0\right) &= \int_0^{\theta_0} L'\,d\theta \\
&\le \int_0^{\theta_0} \left|L'-\tilde{L}\right| d\theta + \int_0^{\theta_0} \tilde{L}\,d\theta \\
&< 0.0001\theta_0\left(a+b\right) - 0.0001\theta_0\left(a+b\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ถ้าปริมาณ (2) มีค่ามากกว่า $0.0001\left(\theta_1-\theta_0\right)\left(a+b\right)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
L\left(\theta_1\right)-L\left(\theta_0\right) &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} L'\,d\theta \\
&\ge \int_{\theta_0}^{\theta_1} -\left|L'-\tilde{L}\right| d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tilde{L}\,d\theta \\
&> -0.0001\left(\theta_1-\theta_0\right)\left(a+b\right) + 0.0001\left(\theta_1-\theta_0\right)\left(a+b\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ในทุก ๆ กรณี จะได้ว่า $L\left(\theta_0\right)$ น้อยกว่า $L\left(0\right)$ หรือ $L\left(\theta_1\right)$ สำหรับ $0 \le \theta_0 \le \theta_1$

❑

ทฤษฎีบท 5.5 ให้ B' เป็นกล่องที่ได้จากการลดขนาดกล่องใหญ่มากและหนา B จะได้ว่าถ้า B' ไม่ใหญ่ แล้วแท่งที่ยาวที่สุดใน B' จะไม่ใช่แท่งที่ยาวที่สุดใน B

บทพิสูจน์ ให้ B' เป็นกล่องไม่ใหญ่ขนาด $w'\times l'\times h'$ ที่ได้จากการลดขนาดกล่องใหญ่มากและหนา B ที่มีขนาด $w\times l\times h$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติว่าด้านที่ถูกลดขนาดคือด้านที่ยาว w

จะได้ว่า ความยาวของแท่งที่ยาวที่สุดใน B' จะต้องไม่เกิน $\sqrt{\left(\frac{9}{10}w'\right)^2+l'^2+h'^2}$

เนื่องจาก $w'<w,\ l'\le l$ และ $h'\le h$ ดังนั้น $\sqrt{\left(\frac{9}{10}w'\right)^2+l'^2+h'^2} < \sqrt{\left(\frac{9}{10}w\right)^2+l^2+h^2}$

เนื่องจาก $l\le 6w$ และ $h\le 6w$ ทำให้ได้ว่า $2\sqrt{a^2+b^2}\left(w+l+h\right)\le 26\sqrt{a^2+b^2}\,w$

และเนื่องจาก $w>200\sqrt{a^2+b^2}$ ทำให้ได้ว่า $26\sqrt{a^2+b^2}\,w<\frac{19}{100}w^2$

เพราะฉะนั้น $2\sqrt{a^2+b^2}\left(w+l+h\right)\le 26\sqrt{a^2+b^2}\,w<\frac{19}{100}w^2$

จึงสรุปได้ว่า $0<\frac{19}{100}w^2-2\sqrt{a^2+b^2}\,(w+l+h)+3\left(a^2+b^2\right)$

ดังนั้น

$$\frac{81}{100}w^2+l^2+h^2 < w^2+l^2+h^2-2\sqrt{a^2+b^2}\,(w+l+h)+3\left(a^2+b^2\right)$$
$$=\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{\left(\frac{9}{10}w'\right)^2+l'^2+h'^2}<\sqrt{\left(\frac{9}{10}w\right)^2+l^2+h^2}$$
$$<\sqrt{\left(w-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(l-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$$

ดังนั้นโดยบทแทรก 4.3 จะได้ว่า แท่งที่ยาวที่สุดใน B' จะสั้นกว่าแท่งที่ยาวที่สุดใน B

❑

ทฤษฎีบทตั้ง 5.6 สำหรับกล่องใหญ่ที่ได้จากการลดขนาดกล่องใหญ่มากและหนา จะได้ว่า $9^\circ<\varphi_d<81^\circ$ และ $6^\circ<\psi_d<78^\circ$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\min\{w,l,h\}>\cot 80^\circ\max\{w,l,h\}$, $\max\{w',l',h'\}\le\max\{w,l,h\}$ และ $\min\{w',l',h'\}>\frac{9}{10}\min\{w,l,h\}$ ดังนั้นเราจะได้ 4 อสมการดังต่อไปนี้

1. $$\frac{l'}{w'}\le\frac{\max\{w',l',h'\}}{\min\{w',l',h'\}}\le\frac{10}{9}\frac{\max\{w,l,h\}}{\min\{w,l,h\}}<\frac{10}{9}\tan 80^\circ<6.302<6.31<\tan 81^\circ$$
2. $$\frac{l'}{w'}\ge\frac{\min\{w',l',h'\}}{\max\{w',l',h'\}}\ge\frac{9}{10}\frac{\min\{w,l,h\}}{\max\{w,l,h\}}>\frac{9}{10}\cot 80^\circ>0.1586>0.1584>\tan 9^\circ$$
3. $$\frac{h'}{\sqrt{l'^2+w'^2}}\le\frac{\max\{w',l',h'\}}{\sqrt{2}\min\{w',l',h'\}}<\frac{10}{9\sqrt{2}}\frac{\max\{w,l,h\}}{\min\{w,l,h\}}<\frac{10}{9}\frac{\tan 80^\circ}{\sqrt{2}}<4.6<4.7<\tan 78^\circ$$
4. $$\frac{h'}{\sqrt{l'^2+w'^2}}\ge\frac{\min\{w',l',h'\}}{\sqrt{2}\max\{w',l',h'\}}>\frac{9}{10\sqrt{2}}\frac{\min\{w,l,h\}}{\max\{w,l,h\}}>\frac{9}{10}\frac{\cot 80^\circ}{\sqrt{2}}>0.112>0.11>\tan 6^\circ$$

เนื่องจาก $\varphi_d=\frac{l'}{w'}$ และ $\psi_d=\frac{h'}{\sqrt{l'^2+w'^2}}$ ดังนั้น φ_d และ ψ_d อยู่ในช่วงที่ระบุ

❑

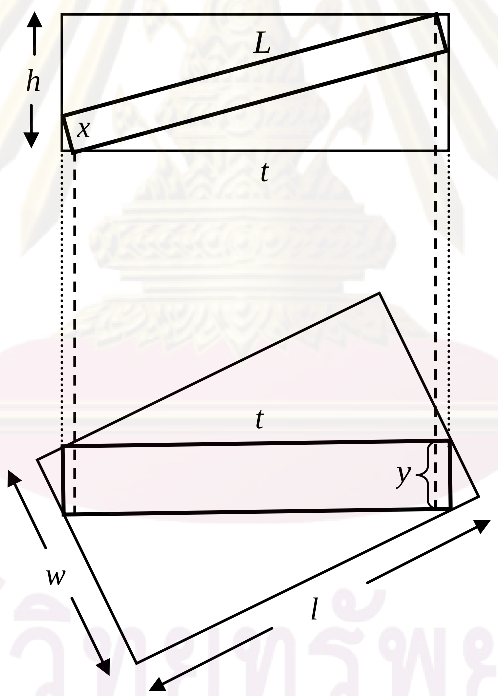
บทแทรก 5.7 ในบรรดาแท่งที่คับแน่นในกล่องใหญ่ที่ได้จากการลดขนาดกล่องใหญ่มากและหนา แท่งที่ยาวที่สุดต้องมีมุมทั้งแปดแตะผนังกล่อง

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 5.3 ทฤษฎีบท 5.4 และทฤษฎีบทตั้ง 5.6

❑

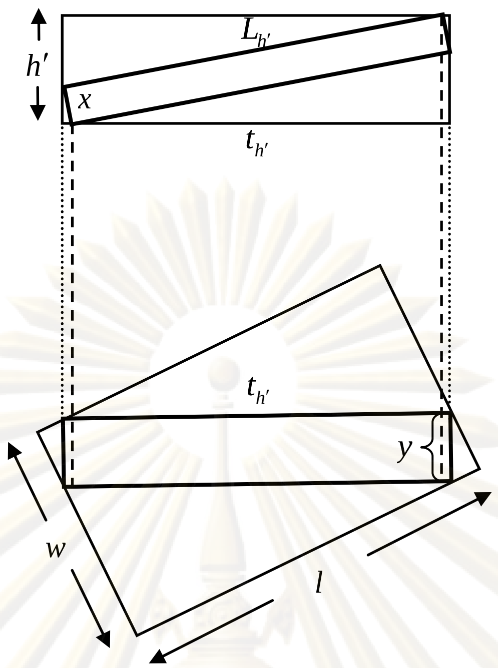
ทฤษฎีบท 5.8 ให้ B เป็นกล่องใหญ่มากและหนาขนาด $w\times l\times h$ และ B' เป็นกล่องใหญ่ขนาด $w'\times l'\times h'$ ที่ไม่เท่ากับ B โดยที่ $w'\le w$, $l'\le l$ และ $h'\le h$ จะได้ว่า ในบรรดาแท่งใน B' ที่มุมทั้งแปดแตะผนังกล่อง และวางตัวในแนวทแยงมุม แท่งที่ยาวที่สุดจะไม่ใช่แท่งที่ยาวที่สุดใน B

บทพิสูจน์ เราจะแสดงว่าแท่งดังกล่าวใน B' สั้นกว่าแท่งที่แตะผนังกล่อง 8 จุดและวางตัวในแนวทแยงมุมใน B ดังรูป โดยที่ $\{x,y\}=\{a,b\}$



รูปที่ 5.6 รูปแสดงภาพฉายของแท่งสี่เหลี่ยมในกล่องขนาด $w\times l\times h$

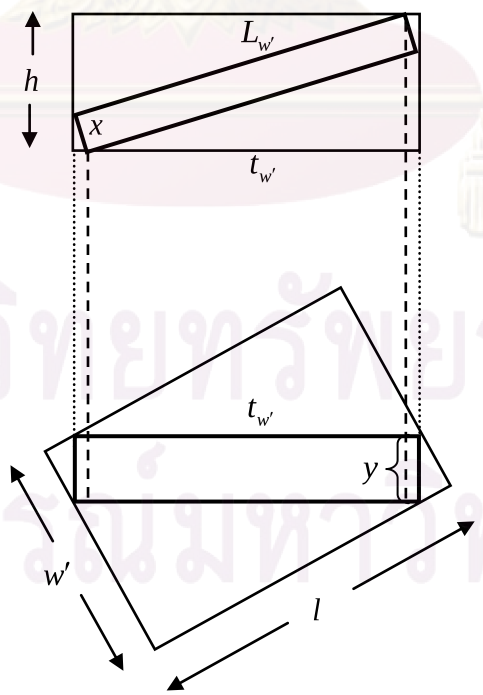
กรณีที่ 1 $h'<h$ ให้พิจารณาภาพฉายของแท่งดังกล่าวในกล่อง B' บนระนาบ XY และพิจารณารอยตัดของระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบ XY กับแท่งในกล่อง จะได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 5.7 รูปแสดงภาพฉายของแท่งสี่เหลี่ยมในกล่องขนาด $w \times l \times h'$

เนื่องจาก $t_{h'} = t$ และ $h' < h$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.13 และทฤษฎีบท 2.14 ทำให้ได้ว่า $L_{h'} < L$

กรณีที่ 2 $w' < w$ ให้พิจารณาภาพฉายของแท่งในกล่องบนระนาบ XY และพิจารณารอยตัดของระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบ XY กับแท่งในกล่อง จะได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 5.8 รูปแสดงภาพฉายของแท่งสี่เหลี่ยมในกล่องขนาด $w' \times l \times h$

โดยทฤษฎีบท 2.13 และทฤษฎีบท 2.14 ทำให้ได้ว่า $t_{w'} < t$

เนื่องจาก $t_{w'} < t$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.13 และทฤษฎีบท 2.14 ทำให้ได้ว่า $L_{w'} < L$

กรณีที่ 3 $l' < l$ ทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2

❑

ทฤษฎีบทตั้ง 5.9 ถ้ากล่องหนา แล้ว $10^\circ < \varphi_d < 80^\circ$ และ $7^\circ < \psi_d < 76^\circ$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\min\{w,l,h\} > \cot 80^\circ \max\{w,l,h\}$ ดังนั้นเราจะได้ 4 อสมการดังต่อไปนี้

1. $$\frac{l}{w} \le \frac{\max\{w,l,h\}}{\min\{w,l,h\}} < \tan 80^\circ$$

2. $$\frac{l}{w} \ge \frac{\min\{w,l,h\}}{\max\{w,l,h\}} > \cot 80^\circ = \tan 10^\circ$$

3. $$\frac{h}{\sqrt{l^2+w^2}} \le \frac{\max\{w,l,h\}}{\sqrt{2}\min\{w,l,h\}} < \frac{\tan 80^\circ}{\sqrt{2}} < 4.0103 < 4.0107 < \tan 76^\circ$$

4. $$\frac{h}{\sqrt{l^2+w^2}} \ge \frac{\min\{w,l,h\}}{\sqrt{2}\max\{w,l,h\}} > \frac{\cot 80^\circ}{\sqrt{2}} > 0.124 > 0.123 > \tan 7^\circ$$

เนื่องจาก $\varphi_d = \dfrac{l}{w}$ และ $\psi_d = \dfrac{h}{\sqrt{l^2+w^2}}$ ดังนั้น φ_d และ ψ_d อยู่ในช่วงที่ต้องการ

❑

บทแทรก 5.10 ในบรรดาแท่งที่คับแน่นในกล่องใหญ่มากและหนา แท่งที่ยาวที่สุดต้องมีมุมทั้งแปดแตะผนังกล่อง

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 5.3 ทฤษฎีบท 5.4 และทฤษฎีบทตั้ง 5.9

❑

ทฤษฎีบท 5.11 ในกล่องใหญ่มากและหนา แท่งที่ยาวที่สุดต้องต้องมีมุมทั้งแปดแตะผนังกล่องและวางตัวในแนวทแยงมุม

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 5.5 บทแทรก 5.7 ทฤษฎีบท 5.8 และบทแทรก 5.10

❑

บทที่ 6

ปัญหาที่ยังคงอยู่และข้อเสนอแนะ

ในบทนี้เราจะเสนอปัญหาและแนวทางในการปรับปรุงผลงานวิจัยนี้

1) โดยลดข้อสมมติลง โดยสมมติว่า $|\varphi'| < 0.000025$ และ $|\psi'| < 0.000025$ สำหรับกล่องที่มีขนาดใหญ่มากและหนา แต่ถ้าเราลดข้อสมมติลงเหลือแค่กล่องใหญ่มากและหนา เราก็จะไม่สามารถใช้กับกล่องที่มีการลดขนาดซึ่งไม่ใช่กล่องใหญ่มากและหนาได้ ทำให้ไม่สามารถใช้วิธีการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 5.4 กับกล่องที่มีการลดขนาดได้ ส่วนในการจะพิสูจน์ข้อคาดเดานั้น ความยากจะอยู่ที่ขนาด และจำนวนของตัวแปรในสูตรของ φ' และ ψ' ซึ่งยากต่อการที่จะหาขอบเขตของฟังก์ชันทั้งสอง

2) ปรับปรุงให้ใช้กับกล่องให้ได้หลายขนาดมากขึ้นกว่าเดิม โดยไปปรับปรุงการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 5.3 เนื่องจากทฤษฎีบทนี้เป็นตัวกำหนดขนาดของกล่อง

รายการอ้างอิง

[1] Carver, W. B. Solution to Problem 3036. Amer. Math. Monthly. 32 (1925) : 47-49.

[2] Carver, W. B. Solution to Problem E1225. Amer. Math. Monthly. 64 (1957) : 114-116.

[3] Dunkel, O. Solution I to Problem 416. Amer. Math. Monthly. 27 (1920) : 327-330.

[4] Flanagan, C. E. Problem 416. Amer. Math. Monthly. 22 (1914) : 156.

[5] Ford, L. R. Problem E1225. Amer. Math. Monthly. 63 (1956) : 421.

[6] Garnett, F. M. Problem 3036. Amer. Math. Monthly. 30 (1923) : 337.

[7] Gerrard, R. P., Schneider, J., Smallberg, R., and Wetzel, J. E. Straw in a Box. The College Mathematics Journal. 37 (2006) : 93-102.

[8] Gerrard, R. P., and Wetzel, J. E. Tile in a Corner. Mathematics Magazine Draft. 82 (2009) : 1-10.

[9] Wetzel, J. E. Rectangles in Rectangles. Mathematics Magazine. 73 (2000) : 204-211.

ภาคผนวก

ภาคผนวกจะประกอบด้วย 4 ส่วนดังต่อไปนี้

1. แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าในมุมโดยที่อย่างน้อย 3 มุมแตะทั้ง 3 ระนาบและปัญหาแท่งสี่เหลี่ยมที่วางทแยงมุมในกล่องซึ่งสร้างจากโปรแกรม Mathematica 7.0

```
zA = 0;
xC = 0;
yD = 0;
Nn = {xNn, yNn, zNn} = {Cos[ψ] Cos[φ], Cos[ψ] Sin[φ], Sin[ψ]};
AB0 = {-b Sin[φ], b Cos[φ], 0};
```

$$P = (*N^tN*) \begin{pmatrix} xNn^2 & xNn\,yNn & xNn\,zNn \\ xNn\,yNn & yNn^2 & yNn\,zNn \\ xNn\,zNn & yNn\,zNn & zNn^2 \end{pmatrix};$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -zNn & yNn \\ zNn & 0 & -xNn \\ -yNn & xNn & 0 \end{pmatrix} Sin[\theta] + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - P \right) Cos[\theta] + P;$$

```
AB = {xAB, yAB, zAB} = R.AB0;
```

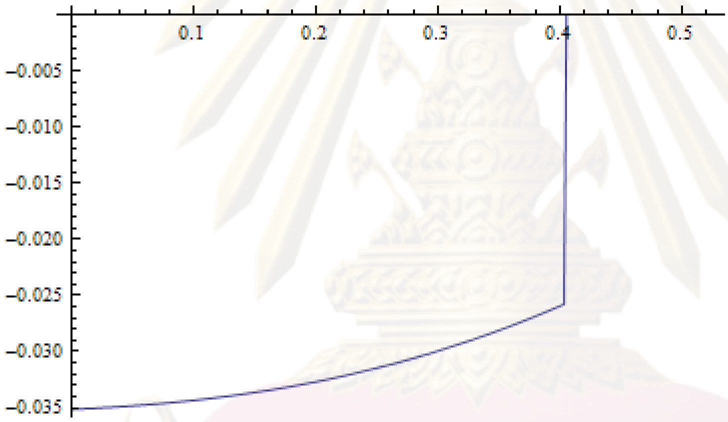
$$AD = \{xAD, yAD, zAD\} = \frac{a}{b} Cross[Nn, AB];$$

```
zB = zAB;
zD = zAD;
yA = -yAD;
yB = yAB - yAD;
xA = xC - xAD - xAB;
xB = xC - xAD;
xD = xC - xAB;
A = {xA, yA, zA};
B = {xB, yB, zB};
Dd = {xD, yD, zD};
Cc = {xC, yC, zC} = Dd + AB;
Ab = {w, l, h} - A;
Bb = {w, l, h} - B;
Cb = {w, l, h} - Cc;
Db = {w, l, h} - Dd;
```

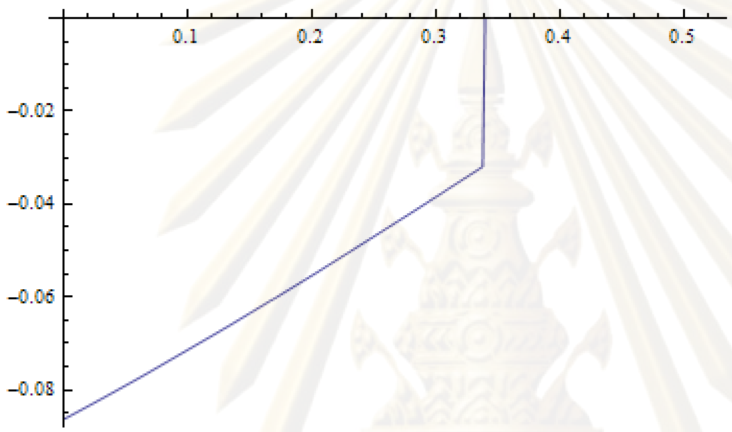
$$M = \frac{B + Dd}{2};$$

2. ตัวอย่างของกล่องไม่ใหญ่ที่ทำให้ $|\varphi'| > 0.000025$ และ $|\psi'| > 0.000025$
โดยเราเริ่มจากการแก้สมการหาสูตรของ φ' และ ψ'

```
w = 100;
l = 80;
h = 50;
a = 10;
b = 20;
Plot[If[(xB ≥ 0), φ', 0] /. FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0},
   {φ, 20 °}, {ψ, 20 °}], {θ, 0, 30 °}, PlotPoints → 5]
w =.;
l =.;
h =.;
a =.;
b =.;
```



```
w = 100;
l = 80;
h = 50;
a = 20;
b = 10;
Plot[If[(xB ≥ 0), ψ', 0] /. FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0},
   {φ, 20 °}, {ψ, 20 °}], {θ, 0, 30 °}, PlotPoints → 5]
w =.;
l =.;
h =.;
a =.;
b =.;
```



จากตัวอย่างทั้งสองจะเห็นว่า $|\varphi'|$ และ $|\psi'|$ ของแท่งหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 10×20 ในกล่องขนาด $100\times 80\times 50$ มีค่ามากกว่า 0.000025

3. การหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดในทฤษฎีบท 5.4 โดยแบ่งเป็น 6 กรณี ได้แก่ 1) $w \geq l \geq h$ 2) $l \geq w \geq h$ 3) $h \geq l \geq w$ 4) $l \geq h \geq w$ 5) $w \geq h \geq l$ 6) $h \geq w \geq l$

```
In[1]:= t = 0.02 °; b = 1; θ1 = ArcTan[Cot[φ1] Sin[ψ1]];
        quan1 =
          -2 (b Cos[φ1 + t]^2 Cos[ψ1 + t] Sin[θ0] Sin[ψ1 - t] +
             (-1 + Cos[θ0]) Cos[ψ1 - t] (b Cos[φ1 - t] Sin[φ1 + t] + a Sin[ψ1 + t]));
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          0.01 ≤ a ≤ 0.1, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          0.01 ≤ a ≤ 0.1, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.01 ≤ a ≤ 0.1, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.01 ≤ a ≤ 0.1, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 45.01 °,
          0.01 ≤ a ≤ 0.1, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 44.99 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.01 ≤ a ≤ 0.1, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        t =.
        a =.
        b =.
Out[3]= {-0.0458013, {a → 0.1, θ0 → 0.103943, φ1 → 0.785573, ψ1 → 0.104545}}
Out[4]= {-0.00210657, {a → 0.1, θ0 → 0.016508, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}
Out[5]= {-0.00161163, {a → 0.1, θ0 → 0.153536, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
Out[6]= {-0.0830508, {a → 0.1, θ0 → 0.774196, φ1 → 0.785573, ψ1 → 1.36153}}
Out[7]= {-0.00210657, {a → 0.1, θ0 → 0.016508, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}
Out[8]= {-0.00161163, {a → 0.1, θ0 → 0.153536, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
```

นั่นคือในกรณีที่ $\frac{a}{b} \in \left[\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right]$ จะได้ว่าปริมาณที่ (1) มีค่าน้อยกว่า $-0.0001\theta_0(a+b)$

```
In[1]:= t = 0.02 °; b = 1; θ1 = ArcTan[Cot[φ1] Sin[ψ1]];
        quan2 =
          -2 (b (Sin[θ1] - Sin[θ0]) Cos[φ1 - t]^2 Cos[ψ1 - t] Sin[ψ1 + t] +
             (Cos[θ1] - Cos[θ0]) Cos[ψ1 + t] (b Cos[φ1 + t] Sin[φ1 - t] + a Sin[ψ1 - t]));
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          10 ≤ a ≤ 100, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          10 ≤ a ≤ 100, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          10 ≤ a ≤ 100, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          10 ≤ a ≤ 100, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 45.01 °,
          10 ≤ a ≤ 100, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 44.99 ° < ψ1 < 78.01 °,
          10 ≤ a ≤ 100, 0 ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        t =.
        a =.
        b =.

Out[3]= {0.00500338, {a → 10., θ0 → 0., φ1 → 0.785573, ψ1 → 0.104545}}

Out[4]= {0.00131775, {a → 10., θ0 → 0., φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[5]= {0.0378985, {a → 10., θ0 → 0., φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.615229}}

Out[6]= {0.126004, {a → 10., θ0 → 0., φ1 → 0.785573, ψ1 → 1.36153}}

Out[7]= {0.00131775, {a → 10., θ0 → 0., φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[8]= {0.0278, {a → 10., θ0 → 8.98106 × 10^-25, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
```

นั่นคือในกรณีที่ $\frac{a}{b} \in [10,100]$ จะได้ว่าปริมาณที่ (2) มีค่ามากกว่า $0.0001(\theta_1 - \theta_0)(a+b)$

```
In[1]:= t = 0.02 °; b = 1; θ̄ = ArcTan[(b Cos[φ1]^2 Sin[ψ1]) / (b Cos[φ1] Sin[φ1] + a Sin[ψ1])];
        quan1 =
          -2 (b Cos[φ1 + t]^2 Cos[ψ1 + t] Sin[θ0] Sin[ψ1 - t] +
             (-1 + Cos[θ0]) Cos[ψ1 - t] (b Cos[φ1 - t] Sin[φ1 + t] + a Sin[ψ1 + t]));
        NMaximize[{quan1 / (θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1 / (θ0 (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1 / (θ0 (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1 / (θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1 / (θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 45.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1 / (θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 44.99 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        t =.
        a =.
        b =.

Out[3]= {-0.0257122, {a → 1., θ0 → 0.0860923, φ1 → 0.785573, ψ1 → 0.104545}}

Out[4]= {-0.001244, {a → 1., θ0 → 0.0098495, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[5]= {-0.00568887, {a → 1., θ0 → 0.0192633, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.615229}}

Out[6]= {-0.0508858, {a → 1., θ0 → 0.319431, φ1 → 0.785573, ψ1 → 1.36153}}

Out[7]= {-0.001244, {a → 1., θ0 → 0.0098495, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[8]= {-0.00244569, {a → 1., θ0 → 0.021087, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
```

```
In[1]:= t = 0.02 °; b = 1; θ1 = ArcTan[Cot[φ1] Sin[ψ1]];
        θ̄ = ArcTan[(b Cos[φ1]^2 Sin[ψ1])/(b Cos[φ1] Sin[φ1] + a Sin[ψ1])];
        quan2 =
          -2 (b (Sin[θ1] - Sin[θ0]) Cos[φ1 - t]^2 Cos[ψ1 - t] Sin[ψ1 + t] +
             (Cos[θ1] - Cos[θ0]) Cos[ψ1 + t] (b Cos[φ1 + t] Sin[φ1 - t] + a Sin[ψ1 - t]));
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 45.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2/((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 44.99 ° < ψ1 < 78.01 °,
          0.5 ≤ a ≤ 1, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        t =.
        a =.
        b =.

Out[3]= {0.00323854, {a → 0.5, θ0 → 0.0941815, φ1 → 0.785573, ψ1 → 0.104545}}

Out[4]= {0.000534591, {a → 0.5, θ0 → 0.0123377, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[5]= {0.0102924, {a → 0.5, θ0 → 0.0371043, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}

Out[6]= {0.0471663, {a → 0.5, θ0 → 0.459088, φ1 → 0.785573, ψ1 → 1.36153}}

Out[7]= {0.000534591, {a → 0.5, θ0 → 0.0123377, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[8]= {0.0102924, {a → 0.5, θ0 → 0.0371043, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
```

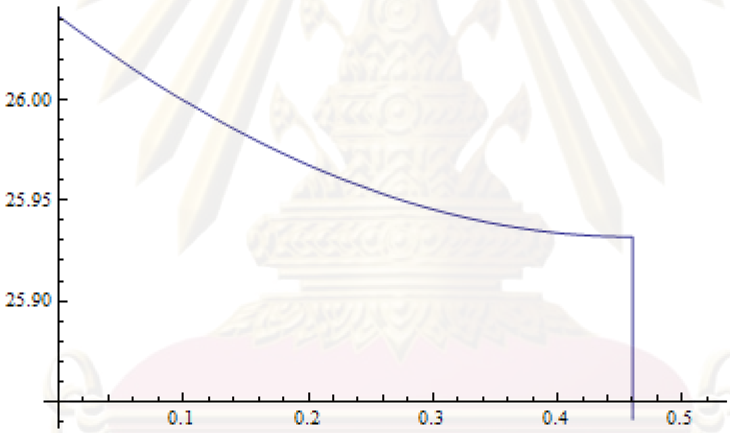
```
In[1]:= t = 0.02 °; b = 1; θ̄ = ArcTan[(b Cos[φ1]^2 Sin[ψ1])/(b Cos[φ1] Sin[φ1] + a Sin[ψ1])];
        quan1 =
          -2 (b Cos[φ1 + t]^2 Cos[ψ1 + t] Sin[θ0] Sin[ψ1 - t] +
              (-1 + Cos[θ0]) Cos[ψ1 - t] (b Cos[φ1 - t] Sin[φ1 + t] + a Sin[ψ1 + t]));
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          1 ≤ a ≤ 2, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          1 ≤ a ≤ 2, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 45.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMaximize[{quan1/(θ0 (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 44.99 ° < ψ1 < 78.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, 0 ≤ θ0 ≤ θ̄}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        t =.
        a =.
        b =.

Out[3]= {-0.017133, {a → 2., θ0 → 0.073465, φ1 → 0.785573, ψ1 → 0.104545}}

Out[4]= {-0.000829176, {a → 2., θ0 → 0.00701849, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[5]= {-0.00163065, {a → 2., θ0 → 0.0113157, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}

Out[6]= {-0.0337417, {a → 2., θ0 → 0.196475, φ1 → 0.785573, ψ1 → 1.36153}}

Out[7]= {-0.000829176, {a → 2., θ0 → 0.00701849, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[8]= {-0.00163065, {a → 2., θ0 → 0.0113157, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
```

```
In[1]:= t = 0.02 °; b = 1; θ1 = ArcTan[Cot[φ1] Sin[ψ1]];
        θ̄ = ArcTan[(b Cos[φ1]^2 Sin[ψ1]) / (b Cos[φ1] Sin[φ1] + a Sin[ψ1])];
        quan2 =
          -2 (b (Sin[θ1] - Sin[θ0]) Cos[φ1 - t]^2 Cos[ψ1 - t] Sin[ψ1 + t] +
             (Cos[θ1] - Cos[θ0]) Cos[ψ1 + t] (b Cos[φ1 + t] Sin[φ1 - t] + a Sin[ψ1 - t]));
        NMinimize[{quan2 / ((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          1 ≤ a ≤ 2, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2 / ((θ1 - θ0) (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 35.28 °,
          1 ≤ a ≤ 2, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2 / ((θ1 - θ0) (a + b)), 44.99 ° < φ1 < 81.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2 / ((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 45.01 °, 35.25 ° < ψ1 < 78.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2 / ((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 5.99 ° < ψ1 < 45.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        NMinimize[{quan2 / ((θ1 - θ0) (a + b)), 8.99 ° < φ1 < 81.01 °, 44.99 ° < ψ1 < 78.01 °,
          1 ≤ a ≤ 2, θ̄ ≤ θ0 ≤ θ1}, {θ0, φ1, ψ1, a}]
        t =.
        a =.
        b =.

Out[3]= {0.00510663, {a → 1., θ0 → 0.0860923, φ1 → 0.785573, ψ1 → 0.104545}}

Out[4]= {0.000827604, {a → 1., θ0 → 0.00984949, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[5]= {0.0154898, {a → 1., θ0 → 0.021087, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}

Out[6]= {0.0717728, {a → 1., θ0 → 0.319431, φ1 → 0.785573, ψ1 → 1.36153}}

Out[7]= {0.000827604, {a → 1., θ0 → 0.00984949, φ1 → 1.41389, ψ1 → 0.104545}}

Out[8]= {0.0154898, {a → 1., θ0 → 0.021087, φ1 → 1.41389, ψ1 → 1.36153}}
```

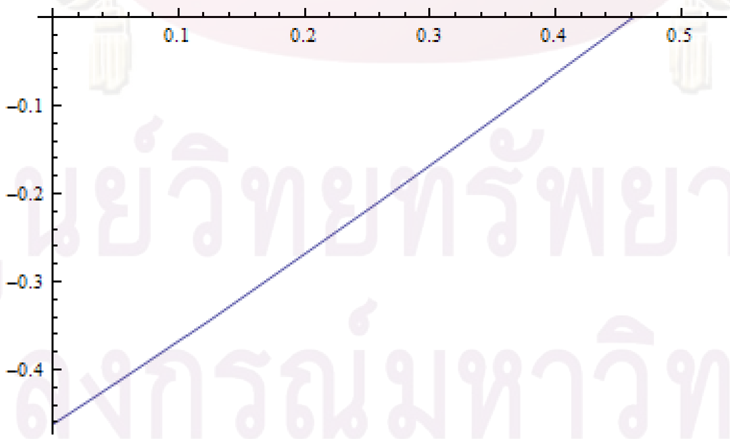
4. ตัวอย่างที่ใช้แสดงว่าทำไมในการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดในทฤษฎีบท 5.4 ในกรณีที่ $\left|\frac{a}{b}\right| \le \frac{1}{10}$ และ $\left|\frac{a}{b}\right| \ge 10$ จึงไม่ต้องพิจารณา $\bar{\theta}$ และกรณีที่ $\frac{1}{10} \le \left|\frac{a}{b}\right| \le 10$ จึงต้องพิจารณา $\bar{\theta}$

```
In[81]:= w = 20; l = 15; h = 10; a = .00001; b = 1;
         Plot[If[(xB ≥ 0), Norm[Cb - A], 0] /.
           FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0}, {φ, 45 °},
            {ψ, 45 °}], {θ, 0, 30 °}, PlotPoints → 5]
         Plot[
          If[(xB ≥ 0),
            (-2)
             (Cos[ψ]
               (b Cos[θ] Cos[φ]^2 Sin[ψ] - Sin[θ] (b Cos[φ] Sin[φ] + a Sin[ψ]))), 0] /.
           FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0}, {φ, 45 °},
            {ψ, 45 °}], {θ, 0, 30 °}, PlotPoints → 5]
```

Out[82]=

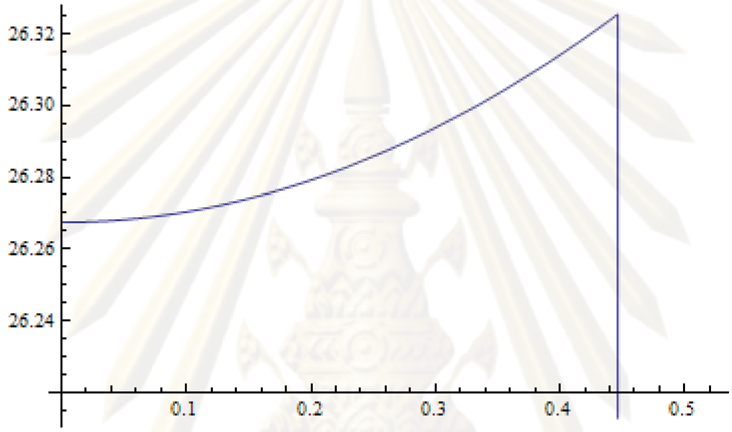


Out[83]=

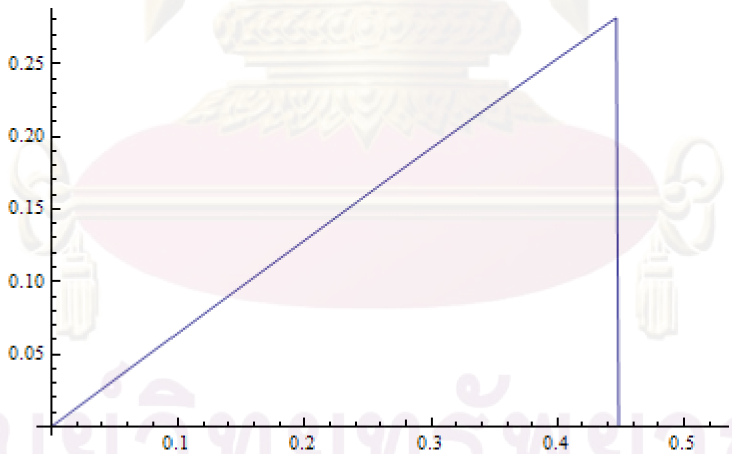


```
In[27]:= w = 20; l = 15; h = 10; a = 1; b = 0.00001;
         Plot[If[(xB ≥ 0), Norm[Cb - A], 0] /.
           FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0}, {φ, 45 °},
            {ψ, 45 °}], {θ, 0, 30 °}, PlotPoints → 5]
         Plot[
          If[(xB ≥ 0),
            (-2)
             (Cos[ψ]
               (b Cos[θ] Cos[φ]^2 Sin[ψ] - Sin[θ] (b Cos[φ] Sin[φ] + a Sin[ψ]))),
            0] /. FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0},
            {φ, 45 °}, {ψ, 45 °}], {θ, 0, 30 °}, PlotPoints → 5]
```

Out[28]=

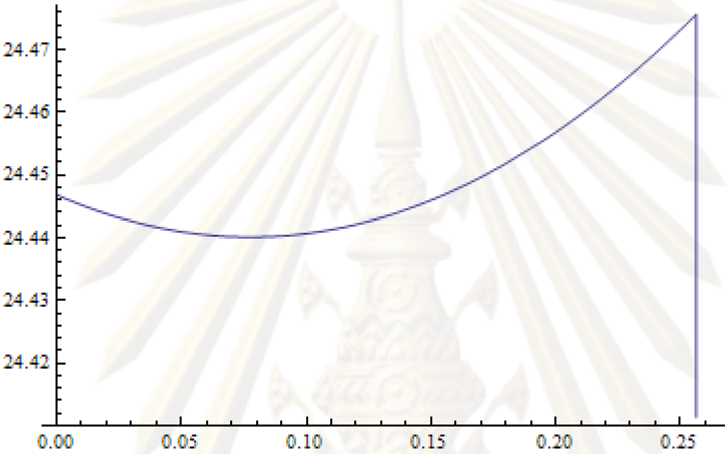


Out[29]=

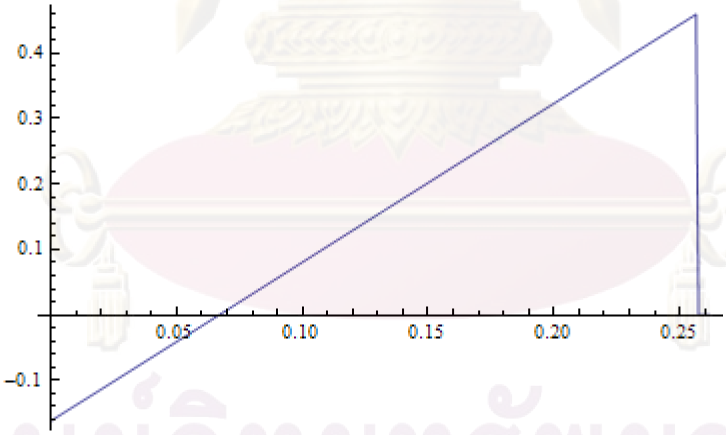


```
In[93]:= w = 10; l = 20; h = 15; a = 2; b = 1;
         Plot[If[(xB ≥ 0), Norm[Cb - A], 0] /.
           FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0}, {φ, 45 °},
            {ψ, 45 °}], {θ, 0, 15 °}, PlotPoints → 5]
         Plot[
          If[(xB ≥ 0),
            (-2)
             (Cos[ψ]
               (b Cos[θ] Cos[φ]^2 Sin[ψ] - Sin[θ] (b Cos[φ] Sin[φ] + a Sin[ψ]))), 0] /.
           FindRoot[{(B - A).(Cb - A) == 0, (Cc - A).(Cb - A) == 0}, {φ, 45 °},
            {ψ, 45 °}], {θ, 0, 15 °}, PlotPoints → 5]
```

Out[94]=



Out[95]=



เนื่องจากเมื่อ a มีค่าใกล้เคียงกับ b จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อ $\bar{\theta} \le \theta \le \theta_1$ เราควรจะเทียบความยาวแท่งกับความยาว ณ $\theta = \theta_1$ ส่วนเมื่อ $0 \le \theta \le \bar{\theta}$ เราควรจะเทียบความยาวแท่งกับความยาว ณ $\theta = 0$ แต่ถ้า a มีค่าไม่ใกล้เคียงกับ b จะได้ว่าทุก $0 \le \theta \le \theta_1$ ถ้า a > b เราจะเทียบความยาวแท่งกับความยาว ณ $\theta = \theta_1$ และถ้า a < b เราจะเทียบความยาวแท่งกับความยาว ณ $\theta = 0$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวิชัยรัตน์ จันที เกิดเมื่อวันที่ 2 กรกฎาคม พ.ศ. 2529 ที่จังหวัดราชบุรี ประเทศไทย สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง) สาขาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศิลปากร ด้วยทุน พัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) เมื่อปี พ.ศ. 2551 และเข้าศึกษาในระดับปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ด้วยทุนพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551 ถึงปัจจุบัน