รายการอ้างอิง

[1] P.A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control.* Prentice Hall, 1996.

[2] K.S. Tsakalis and P.A. Ioannou, *Linear Time Varying Systems: Control and Adaptation.* Prentice Hall, 1993.

[3] C.J. Chien and L.C. Fu, "An adaptive variable structure control for fast time-varying unknown plants," *Proc. 32nd IEEE CDC,* pp. 1428-1433, 1993.

[4] A.M. Annaswamy and K.S. Narendra, "Adaptive control of simple time-varying systems," *Proc. 28th IEEE CDC,* pp. 1014-1018, 1989.

[5] K.D. Young, "Design of variable structure model-following control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, pp. 1079-1085, 1978.

[6] V.I. Utkin, *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems.* Moscow : MIR Publishers , 1978.

[7] R.A. Decarlo, S.H. Zak and G.P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," *Proc. of IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.

[8] Y.Y. Hsu and C.H. Cheng, "Variable structure and adaptive control of a synchronous generator," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems.*, vol. 24, pp. 337-345, 1988.

[9] D.S. Yoo and M.J. Chung, "A variable structure control with simple adaptation laws for upperbounds on norm of the uncertainties," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 860-865, 1992.

[10] W.J. Wang and Y.T. Fan, "Output feedback in variable structure systems with a simple adaptation law," *Proc. 32nd IEEE CDC,* pp. 422-423, 1993.

[11] D. Recker, P. Kokotovic, D. Rhode and J. Winkelman, "Adaptive nonlinear control of systems constaining a dead-Zone," *Proc. 30th IEEE CDC,* pp. 2111-2115, 1991.

[12] G. Tao and P. Kokotovic, "Adaptive control of plants with unknown dead-zones," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 59-68, 1994.

[13] J.E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control.* Prentice-Hall , 1991.

[14] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis.* Prentice-Hall, 1993.

[15] D.G. Taylor, P.V. Kokotovic, R. Marino and I. Kanellakopoulos, "Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics," *IEEE Trans. on Automat. Contr.,* vol.34, pp. 405 -412, 1989.

รายการอ้างอิง(ต่อ)

[16] S.S. Sastry and A. Isidori , "Adaptive control of linearizable systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol.34, No.11, pp. 1123-1131 , 1989.

[17] Xianzhong Cui and Kang G. Shin, "Direct control and coordination using neural networks," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol.23, pp. 686-697, 1993.

[18] L. Jin, P.N. Nikiforuk and M.M. Gupta, "Direct adaptive output tracking control using multilayer neural network," *IEE* vol.140, pp. 393-398, 1993.

[19] G. Tao and P.V. Kokotovic, "Adaptive control of plants with unknown hystereses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.40, pp. 200-212, 1995.

[20] K.S. Narenda and A.M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems.* Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, 1989.

[21] G. Kreisselmeier and B.D.O. Anderson, "Robust model reference adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.31, pp. 127-133, 1986.

[22] P.A. Ioannou and K. Tsakalis, "A robust direct adaptive controller" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.31, pp. 1033-1043, 1986.

[23] G. Tao and P.V. Kokotovic, *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities.* John Wiley & Sons, Inc. 1996.

[24] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Adaptive control.* Addison Wesley, Inc. 1995.

[25] C.A. Sacher and G.F. Inbar, "Tracking of the muscle recruitment characteristic during adaptive control of the electrically stimulated knee," *Proc. Ann. Int. Conf. IEEE Engineering in Medicine and Biology Soc.*, vol. 12, pp. 2315-2317, 1990.

[26] K. Ogata, *Modern Control Engineering.* Prentice Hall, 1990.

[27] G. Feng, "Robust direct adaptive control with least prior knowledge," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 42, pp. 30-34, 1995.

[28] G. Feng, "Robust direct adaptive controllers with a new normalization technique," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 2330-2334, 1994.

[29] K. Nonaka, M. Yamakita and K. Furuta, "Model following control based on an adaptive sliding surface for a class of plants with unmatched parametric uncertainties," *Proc. 35th IEEE CDC*, pp. 3510-3515, 1996.

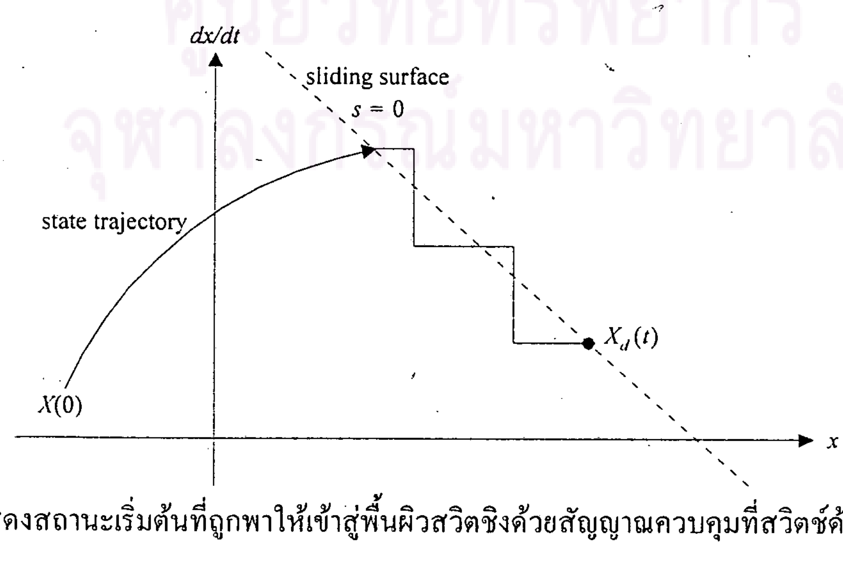
ภาคผนวก

ก. การควบคุมแบบโครงสร้างแปรผัน

การควบคุมแบบโครงสร้างแปรผัน คือการควบคุมชนิดหนึ่งที่อาศัยการป้อนกลับของสัญญาณสวิตชิง มีรากฐานมาจากการควบคุมแบบแบงแบง (Bang-bang control) ตัวอย่าง เช่น ในสัญญาณควบคุมมีอัตราขยาย (Gain) ในส่วนป้อนกลับสลับไปมาระหว่างค่าสองค่าตามกฎที่กำหนดไว้ สัญญาณควบคุมที่ใช้จะมีประสิทธิภาพและความมั่นคงในการควบคุมระบบไม่เป็นเชิงเส้น

การควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันใช้สัญญาณควบคุมสวิตชิงในการพาให้วิถีสถานะ (State trajectory) ของระบบลู่เข้าหาพื้นผิวที่เลือกไว้ในปริภูมิสถานะ (State space) นั้นและบังคับให้วิถีสถานะคงอยู่บนพื้นผิวนี้ตลอดเวลา พื้นผิวนี้เรียกว่า *พื้นผิวไถล* (Sliding surface) หรือ *พื้นผิวสวิตชิง* (Switching surface) คำว่าวิถีสถานะในที่นี้แทนฟังก์ชันของตัวแปรสถานะที่อยู่ในปริภูมินั้นๆซึ่งฟังก์ชันนี้อาจจะเป็นเชิงเส้นกับตัวแปรสถานะหรือไม่ก็ได้ขึ้นอยู่กับลักษณะเฉพาะของระบบ

การเรียกว่าพื้นผิวสวิตชิงก็เพราะว่าในกรณีที่วิถีสถานะอยู่เหนือพื้นผิวสัญญาณควบคุมก็จะใช้อัตราขยายค่าหนึ่งและจะเปลี่ยนไปใช้อีกค่าถ้าวิถีสถานะต่ำกว่าพื้นผิว ดังนั้นเมื่อวิถีสถานะลู่เข้าหาพื้นผิวสวิตชิงแล้วมันก็จะแกว่งไปมาบนพื้นผิวนั้น ถ้าสัญญาณควบคุมมีการสลับไปมาด้วยความเร็วสูงมันก็จะแกว่งไปมาด้วยความถี่ที่สูงเช่นกันแต่การแกว่งนั้นจะใกล้กับพื้นผิวได้มากกว่าสัญญาณควบคุมที่มีความเร็วของการสวิตช์ต่ำกว่า ในทางอุดมคติความเร็วในการสวิตชิงจะสูงมากจนวิถีสถานะทับพื้นผิวสวิตชิงได้พอดี



รูปที่ ก.1 แสดงสถานะเริ่มต้นที่ถูกพาให้เข้าสู่พื้นผิวสวิตชิงด้วยสัญญาณควบคุมที่สวิตช์ด้วยความเร็วต่ำ

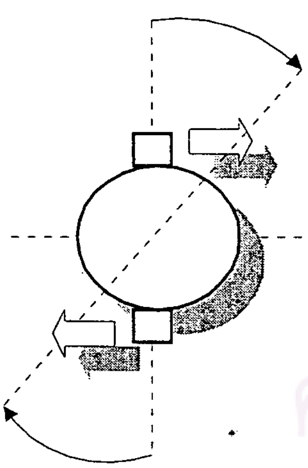
การออกแบบพื้นผิวสวิตชิงจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของระบบและพื้นผิวที่ถูกต้องจะสามารถทำให้การควบคุมบรรลุจุดประสงค์ได้ เช่น การทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพ หรือ การตามสัญญาณ เป็นต้น

จุดประสงค์ของบทนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันโดยได้แสดงตัวอย่างต่างๆในการออกแบบไว้เพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ รายละเอียดทางทฤษฎีนั้นสามารถหาอ่านได้จากเอกสารอ้างอิง [5, 6, 7, 8, 9, 13]

ก.1 แนวคิดพื้นฐาน

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของตัวควบคุมตามกฎที่ตั้งไว้เพื่อให้ผลตอบสนองของระบบเป็นไปตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ ก.1 ลองพิจารณาระบบสัญญาณเข้าเดี่ยวที่วัดตัวแปรสถานะ x_1, x_2 ได้ ระบบนี้เป็นแบบจำลอง 1 มิติของดาวเทียมในปริภูมิอิสระดังรูปที่ ก.2

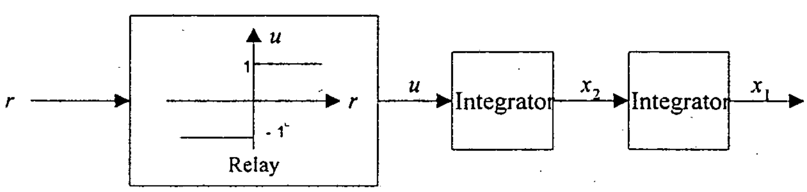


รูปที่ ก.2 การควบคุมดาวเทียมโดยใช้การเปิด-ปิดทรัสเตอร์ (Thrusters)

กำหนดให้ระบบอธิบายได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad |u| \le 1 \qquad (ก.1.1)$$

แผนภูมิกล่องที่ใช้แทน (ก.1.1) เป็นไปตามรูปที่ ก.3



รูปที่ ก.3 ระบบอันดับสองที่บรรยายได้ด้วยสมการ (ก.1.1)

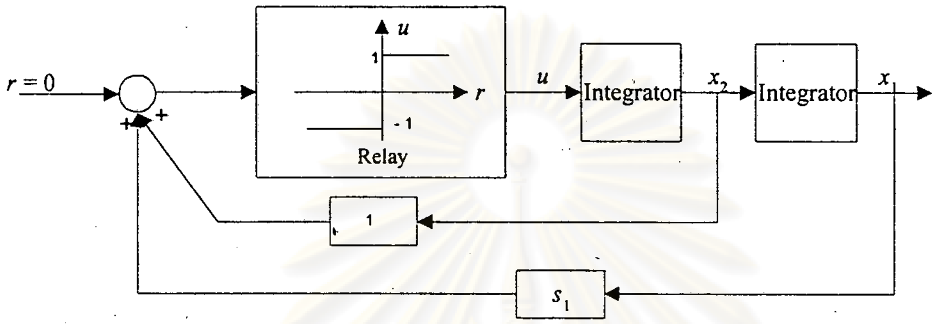
สัญญาณควบคุมที่ใช้คือ

$$u = \operatorname{sgn}\left[s(x_1, x_2)\right] \qquad (ก.1.2)$$

โดย

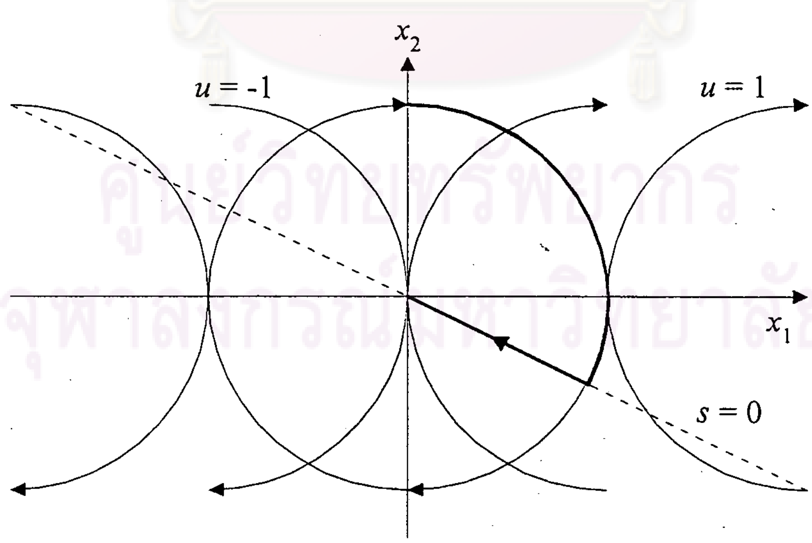
$\mathrm{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases}$ และ $s(x_1, x_2) = g_1 x_1 + x_2 = 0$ เรียกว่า พื้นผิวสวิตชิง ดังนั้นวิถีสถานะคือ $g_1 x_1 + x_2$

แผนภูมิกล่องของระบบวงปิดแสดงไว้ในรูปที่ ก.4



รูปที่ ก.4 ระบบวงปิดสำหรับ (ก.1.1) ที่ใช้สัญญาณควบคุม (ก.1.2)

สมมุติว่าส่วนที่เป็นรีเลย์ในรูปที่ ก.4 มีการสวิตช์ได้อย่างสมบูรณ์คือ การประวิงเวลาในการสวิตช์น้อยมาก เราลองมาศึกษาพฤติกรรมของระบบสำหรับค่า g_1 ต่างๆ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือสำหรับพื้นผิวสวิตชิงที่แตกต่างกัน ระนาบเฟส (Phase plane) ที่ได้จากระบบ (ก.1.1) กับสัญญาณควบคุม (ก.1.2) แสดงไว้ในรูปที่ ก.5 และ ก.6 ในรูปทั้งสองลูกศรชี้ขึ้นหมายถึงใช้ $u = 1$ และชี้ลงใช้ $u = -1$

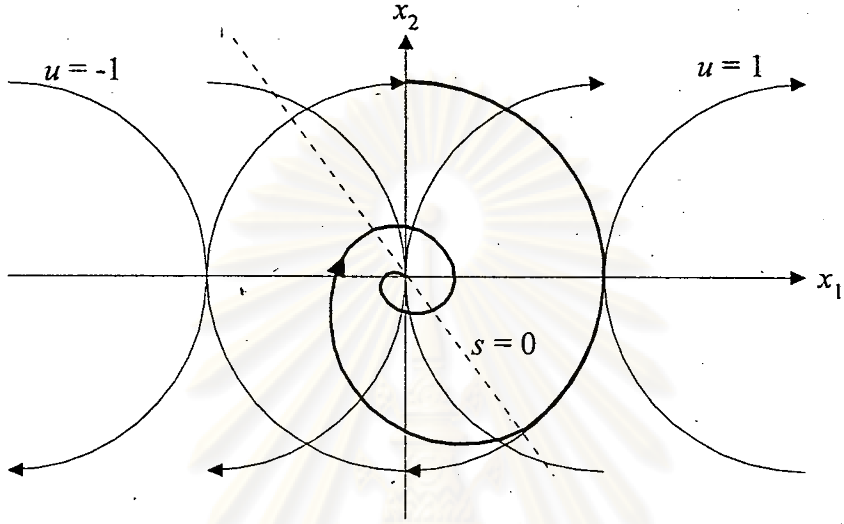


รูปที่ ก.5 ระนาบเฟสของระบบวงปิด (ก.1.1) และ (ก.1.2) เมื่อ $g_1 > 0$ มีค่าน้อย

จากรูปที่ ก.5 จะเห็นว่าวิถีสถานะจะลู่เข้าหาพื้นผิวสวิตชิง $s(t) = 0$ จากนั้นก็จะวิ่งต่อไปยังจุดศูนย์ คุณลักษณะที่สำคัญเมื่อระบบเข้าสู่พื้นผิว $s(t) = 0$ แล้วคือพฤติกรรมของระบบจะขึ้นอยู่กับความ

ชัน g_1 เท่านั้นหมายความว่าระบบวงปิดจะไม่ไวต่อการแปรเปลี่ยนหรือการขยับพารามิเตอร์ของระบบที่อยู่ในแถวล่างของเมทริกซ์ A หรือในจินตภาพ (Image) ของเมทริกซ์ $B = [0 \quad 1]^T$ ใน (ก.1.1)

ในรูปที่ ก.6 ระนาบเฟสจะมีความซับซ้อนขึ้นเพราะว่าวิถีสถานะมีลักษณะเป็นเกลียวแต่มันก็ลู่เข้าสู่ศูนย์ได้เช่นเดียวกัน



รูปที่ ก.6 ระนาบเฟสของระบบวงปิด (ก.1.1) และ (ก.1.2) เมื่อ $g_1 > 0$ มีค่ามาก

สิ่งหนึ่งที่สังเกตได้ในรูปที่ ก.5 และ ก.6 คือการเลือกพื้นผิวสวิตชิงที่แตกต่างกันผลตอบสนองที่ได้ก็จะแตกต่างกันด้วย หลังจากที่วิถีสถานะได้ตัดกับพื้นผิวในครั้งแรกมันจะยังคงอยู่บนพื้นผิวนี้ตลอดเวลา คุณสมบัติในการคงอยู่บนพื้นผิวสวิตชิงหลังจากการตัดกันในครั้งแรกถูกเรียกว่า *แบบไถล* (Sliding mode)

แบบไถลจะมีอยู่สำหรับระบบหนึ่งๆได้ถ้าในบริเวณใกล้ๆพื้นผิวสวิตชิง มีทิศทางอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์สถานะชี้ไปยังพื้นผิวนั้น

ในการออกแบบตัวควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันแบ่งได้เป็น 2 ระยะหลักๆคือ

1. การสร้างพื้นผิวสวิตชิงโดยถ้าเป็นพื้นผิวที่ถูกต้องเมื่อวิถีสถานะถูกจำกัดให้อยู่บนพื้นผิวแล้วการควบคุมจะต้องบรรลุจุดประสงค์ด้วย
2. การสร้างสัญญาณควบคุมสวิตชิง (การหาอัตราขยายป้อนกลับเหมาะสมซึ่งเป็นอัตราขยายที่ต้องถูกสวิตช์ไปมา) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขเพียงพอ (Sufficient conditions) สำหรับการมีอยู่และเข้าถึงได้ (Reachability) ของแบบไถล

ก.2 ขั้นตอนการออกแบบ

สมมุติว่าระบบที่พิจารณาแทนได้ด้วยแบบจำลองซึ่งไม่เป็นเชิงเส้นกับตัวแปรสถานะ x แต่เป็นเชิงเส้นกับสัญญาณควบคุม u

$$\dot{x}(t) = f(t,x) + B(t,x)u(t) \qquad (ก.2.1)$$

โดย ตัวแปรสถานะ $x(t) \in \Re^n$ สัญญาณควบคุม $u(t) \in \Re^m$ $f(t,x) \in \Re^n$ และ $B(t,x) \in \Re^{n\times m}$ $f(t,x)$ และ $B(t,x)$ ยังถูกสมมุติอีกว่าอนุพันธ์เทียบกับ x มีขอบเขต

สัญญาณควบคุมที่ถูกสวิตช์ $u(t) \in \Re^m$ อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^+ & \text{เมื่อ} \quad s_i(x) \ge 0 \\ u_i^- & \text{เมื่อ} \quad s_i(x) < 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m \qquad (ก.2.2)$$

โดย $s(x) = [s_1(x), \ldots\ldots, s_m(x)]^T = 0$ ใน [3, 10] เป็นตัวอย่างการใช้สัญญาณควบคุมลักษณะนี้

แม้ว่าพื้นผิวสวิตชิง $s(x)$ สามารถเลือกเป็นแบบไม่เชิงเส้นได้แต่การวิเคราะห์และออกแบบจะมีความยุ่งยากกว่า ดังนั้นเพื่อความสะดวกพื้นผิวสวิตชิงที่สนใจจะเป็นเชิงเส้นกับตัวแปรสถานะดังนี้

$$s(x) = Gx(t) = 0 \qquad (ก.2.3)$$

โดย G แทนเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แบบไถลจะมีอยู่ได้ อย่างน้อยที่สุดวิถีสถานะจะต้องมีเสถียรภาพในบริเวณใกล้ๆกับพื้นผิวสวิตชิงและจะลู่เข้าหาพื้นผิวในที่สุด บริเวณที่กว้างที่สุดนี้ถูกเรียกว่า *บริเวณดึงดูด* (Region of attraction)

ปัญหาการมีอยู่ของแบบไถลอาจมองเป็นปัญหาทางด้านเสถียรภาพก็ได้ ดังนั้นเราอาจใช้วิธีที่สองของเลียปูนอฟโดยเลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟ $V(t,x)$ ซึ่งเป็นบวกแน่นอนและมีอนุพันธ์ของมันเทียบกับเวลาเป็นลบในบริเวณดึงดูด

แบบไถลจะเข้าถึงได้แบบทั่วถึง (Globally reachable) ถ้าบริเวณดึงดูดนั้นเป็นปริภูมิสถานะ แต่บริเวณดึงดูดอาจเป็นเพียงสับเซตหนึ่งของปริภูมิสถานะก็ได้

การเลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟก็มีผลต่อความยากง่ายในการวิเคราะห์เสถียรภาพ สำหรับระบบสัญญาณเข้าเดี่ยวฟังก์ชันเลียปูนอฟที่เหมาะสมได้แก่ $V(t,x) = 0.5s^2(x)$ ซึ่ง s จะขึ้นกับสัญญาณควบคุมโดยอัตราขยายป้อนกลับที่สวิตช์ไปมาจะต้องถูกเลือกให้

$$0.5\frac{ds^2}{dt} = s\frac{ds}{dt} < 0 \qquad (ก.2.4)$$

ในบริเวณพื้นผิวดึงดูด เพื่อให้วิถีสถานะลู่เข้าหาพื้นผิวและถูกจำกัดให้อยู่บนพื้นผิวตลอดเวลา

ตัวอย่างที่ ก.2 เพื่อแสดงขั้นตอนในการออกแบบตัวควบคุมแบบโครงสร้างแปรผัน พิจารณาระบบเพนดูลัมเดี่ยว (Single pendulum) ซึ่งมีแบบจำลองสถานะ $\dot{x} = A(x)x(t) + Bu(t)$ ไม่เป็นเชิงเส้น โดยที่ $x = [x_1 \quad x_2]^T$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\sin(x_1)}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ใช้สัญญาณควบคุม $u(t) = k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2$ โดย

$k_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x), & s(x)x_i \ge 0 \\ \beta_i(x), & s(x)x_i < 0 \end{cases}$ และ $s(x) = [g_1 \quad g_2]x$ ส่วนป้อนกลับ $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ จะถูกเลือกเพื่อให้ $s(x)\dot{s}(x) < 0$

$$s(x)\dot{s}(x) = s(x)x_1\left[g_2\left(k_1(x) - \frac{\sin(x_1)}{x_1}\right)\right] + s(x)x_2\left[g_1 + g_2 k_2(x)\right] < 0$$

ถ้า

$$\alpha_1(x) = \alpha_1 < \min_{x_1}\left[\frac{\sin(x_1)}{x_1}\right] = -1 \quad \text{และ} \quad \beta_1(x) = \beta_1 > \max_{x_1}\left[\frac{\sin(x_1)}{x_1}\right] = 1$$

และ $\alpha_2 < -(s_1/s_2),\ \beta_2 > -(s_1/s_2)$ เราจึงคำนวณอัตราขยายป้อนกลับได้จากความสัมพันธ์เหล่านี้

ในกรณีของระบบที่มีหลายสัญญาณเข้าการพิสูจน์โดยการใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟนั้นทำได้ยากยกเว้นเพียงบางกรณีที่ระบบมีลักษณะพิเศษ [6]

ดังที่กล่าวไว้แล้วว่าการวิเคราะห์ระบบวงปิดด้วยฟังก์ชันเลียปูนอฟขึ้นอยู่กับการเลือกฟังก์ชันพื้นผิวสวิตชิง และกฎควบคุม (Control law) ที่เหมาะสม สำหรับบางตัวเลือกเราอาจจะไม่สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบได้เลยยกตัวอย่างเช่น ระบบหลายสัญญาณเข้าต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{ก.2.5}$$

โดย

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

และเลือกพื้นผิวสวิตชิง

$$s(x) = Gx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และกฎควบคุม $u(t) = \psi x(t)$ โดย $\psi = [\psi_{ij}]$ และ

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \psi_{ij}^{+}, & x_j s_i > 0 \\ \psi_{ij}^{-}, & x_j s_i < 0 \end{cases} \quad \text{สำหรับ} \quad i = 1, 2 \text{ และ } j = 1, 2, 3 \tag{ก.2.6}$$

โดยกำหนดให้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V(t,x,s) = s^T s \tag{ก.2.7}$$

ด้วยตัวเลือกทั้งหมดนี้เราไม่สามารถหา ψ ที่ทำให้ $\dot{V} = s^T\dot{s} < 0$ ได้ ดังนั้นเราอาจเลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟหรือกฎควบคุมที่ต่างไปจาก (ก.2.6) เพื่อให้ปัญหาง่ายขึ้น ในที่นี้เราจะใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ (ก.2.7) เดิมแต่เปลี่ยนกฎควบคุมใหม่เป็น

$$u(x) = -(GB)^{-1}GAx - (GB)^{-1}\frac{s}{\|s\|^2}$$

กฎควบคุมนี้สามารถบังคับให้ $\dot{V} = s^T\dot{s} = -1 < 0$ ดังนั้นจึงประกันได้ว่ามีแบบไถลหนึ่งอยู่บนพื้นผิวไถล $s(x) = Gx$ และสามารถเข้าถึงได้สำหรับทุกๆ $x \in \Re^3$

เราอาจจะเลือกพื้นผิวสวิตชิงใหม่แต่ยังคงใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ (ก.2.7) และกฎควบคุม (ก.2.6) เดิมก็ได้เช่นถ้าเลือก

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2\varepsilon & -1 \\ 2 & -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$ โดยที่ ε เป็นค่าคงที่บวกเล็กๆ

เราก็จะสามารถหาค่า $\psi_{ij}^{+}, \psi_{ij}^{-}$ ที่เหมาะสมได้

การออกแบบตัวควบคุม

ยังมีวิธีอื่นๆในการออกแบบตัวควบคุมซึ่งช่วยให้ปัญหาง่ายขึ้นได้แก่

1. **วิธีทำให้ทแยงมุม** (Diagonalization Methods) เป็นวิธีการเปลี่ยนปัญหาการออกแบบสำหรับระบบ m สัญญาณเข้าให้กลายเป็นปัญหาสำหรับระบบสัญญาณเข้าเดี่ยว m ปัญหา
2. **วิธีการลำดับชั้นของการควบคุม** (Hierarchy of Controls Method) เป็นวิธีที่อาศัยลำดับชั้นของการควบคุมในการออกแบบตัวควบคุม ตัวอย่างการจัดลำดับชั้นในการควบคุมเช่น ในตอนแรกสัญญาณควบคุม u_1 จะพาระบบจากสภาวะเริ่มต้นไปยังพื้นผิว $s_1 = 0$ สัญญาณควบคุม u_2 จะพาระบบไปยังส่วนที่ตัดกันระหว่าง $s_1 = 0$ และ $s_2 = 0$ ขณะที่ u_1 ยังคงรักษาแบบไถล $s_1 = 0$ เอาไว้ ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งสัญญาณควบคุมสุดท้าย u_m พาระบบไปสู่แบบไถลที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิวสวิตชิงทั้งหมด (m พื้นผิว) ดังนั้นท้ายที่สุดแล้ว $s_1 = s_2 = \ldots\ldots = s_m = 0$ เช่น ในระบบ 4 สัญญาณออก 3 สัญญาณเข้าที่ต้องการให้ระบบตามแบบจำลองอ้างอิง ถ้าเราเลือก $s_1 = 10e_1 + e_2,\ \ s_2 = e_3,\ \ s_3 = e_4$ โดย e_i แทนความคลาดเคลื่อนในการตามของสัญญาณออกที่ i ในสภาวะสุดท้ายเมื่อ $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ จะต้องรับประกันได้ว่า $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ ตัวอย่างการนำไปประยุกต์ใช้ได้แก่ [5, 8]
3. **วิธีการอื่นๆ** (Other Approaches) ในความเป็นจริงแล้วโครงสร้างของตัวควบคุมที่ต่างไปจาก (ก.2.6) มีได้มากมายนับไม่ถ้วน แต่ส่วนใหญ่แล้วจะอยู่ในลักษณะ

$$u_i = u_{ieq} + u_{iN}$$

โดย u_{ieq} เป็นองค์ประกอบที่ i ของส่วนควบคุมเทียบเท่า (Equivalent control) (สัญญาณต่อเนื่อง) และ u_{iN} เป็นส่วนสวิตชิง (สัญญาณไม่ต่อเนื่อง) ซึ่งเป็นส่วนที่มีลักษณะแตกต่างกันไป ใน [9] ถือได้ว่าเป็นตัวอย่างหนึ่งของวิธีนี้

การออกแบบพื้นผิวสวิตชิง

ส่วนสำคัญสุดท้ายที่ต้องพิจารณาคือพื้นผิวสวิตชิง วิธีการหนึ่งที่ยังคงใช้กันคือ *วิธีของการควบคุมเทียบเท่า* (Method of equivalent control) [6] ความหมายของมันก็คือเราจะพิจารณาระบบหลังจากที่วิถีสถานะตัดกับพื้นผิวสวิตชิง $s = 0$ ที่เวลา t_0 ดังนั้นแบบไถลจะเกิดขึ้นเมื่อ $t \ge t_0$ การมีอยู่ของแบบไถลหมายความว่า $\dot{s}(x(t)) = 0$ และ $s(x(t)) = 0$ สำหรับทุกๆ $t \ge t_0$ จากกฎลูกโซ่

$$\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]\dot{x} = \left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]\left[f(t,x) + B(t,x)u_{eq}\right] = 0$$

โดย u_{eq} ซึ่งถูกเรียกว่า ส่วนควบคุมเทียบเท่า ที่ได้มาจากการแก้สมการนี้ หลังจากแทน u_{eq} ลงในระบบเริ่มต้น (ก.2.1) พฤติกรรมของระบบจะถูกจำกัดอยู่บนพื้นผิวสวิตชิงโดยมีสภาวะเริ่มต้นเป็นไปตามเงื่อนไข $s(x(t_0)) = 0$

สมมุติว่าผลคูณเมทริกซ์ $\left[\dfrac{\partial s}{\partial x}\right] B(t,x)$ ไม่เอกฐาน (Nonsingular) สำหรับทุกๆ t และ x ดังนั้น

$$u_{eq} = -\left[\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right] B(t,x)\right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(t,x) \tag{ก.2.8}$$

เมื่อแทน u_{eq} ลงในระบบเริ่มต้น (ก.2.1) จะได้ว่า

$$\dot{x} = \left[I - B(t,x)\left[\frac{\partial s}{\partial x} B(t,x)\right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x}\right] f(t,x) \tag{ก.2.9}$$

ดังนั้นความเป็นไปของระบบบนพื้นผิวสวิตชิงสำหรับ $t \geq t_0$ บรรยายได้ด้วยสมการ (ก.2.9) และในกรณีที่พื้นผิวสวิตชิงเป็นเชิงเส้นกับสถานะ $s(x) = Gx$ สมการ (ก.2.9) จะลดลงเหลือ

$$\dot{x} = \left[I - B(t,x)\left[GB(t,x)\right]^{-1} G\right] f(t,x) \tag{ก.2.10}$$

จาก (ก.2.9) ต้องพิจารณาควบคู่ไปกับข้อบังคับ $s(x(t)) = 0$ ทำให้สมการที่พิจารณามีอันดับ (Order) ลดลง สำหรับพื้นผิวสวิตชิงเป็นเชิงเส้นถ้าเราสมมุติให้ x_d เป็นสถานะที่ต้องการตาม ดังนั้นวัตถุประสงค์ของการควบคุมแบบโครงสร้างผันแปร คือ การหาโครงสร้างของตัวควบคุมพร้อมทั้งพารามิเตอร์ของมันและเลือก G ที่จะสามารถรับประกันได้ว่า $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$ โดย $e(t) = x(t) - x_d(t)$ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จาก (ก.2.10)

สำหรับบางระบบต้องการพื้นผิวสวิตชิงแปรตามเวลา $s(t,x) = 0$ ในกรณีนี้

$$\dot{s}(t,x) = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)\dot{x}$$

เหมือนกับการควบคุมด้วยวิธีอื่นๆที่จะต้องคำนึงถึงการใช้งานในทางปฏิบัติ สิ่งสำคัญที่ควรพิจารณาสำหรับการควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันได้แก่ ความไม่แน่นอนของระบบและแชตเตอริง (Chattering) สำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอนส่วนใหญ่จะอาศัยการผสมผสานระหว่างพื้นฐานที่ได้กล่าวมาแล้ว (การใช้ u_{eq}) กับวิธีที่สองของเลียปูนอฟโดยจะต้องรู้พารามิเตอร์เบื้องต้นและขนาดความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์นั้นๆด้วย การสวิตช์ของสัญญาณควบคุมแม้จะเร็วเท่าไรก็ไม่สามารถเป็นไปตามอุดมคติได้ซึ่งเป็นที่มาของปัญหาแชตเตอริง ดังนั้นสัญญาณควบคุมจะมีความถี่สูงมากจนไปกระตุ้นระบบทำให้เกิดพฤติกรรมบางอย่างที่ต่างไปจากแบบจำลองของระบบที่พิจารณาในตอนแรกซึ่งอาจทำให้ระบบขาดเสถียรภาพหรือแม้ว่าระบบจะยังคงมีเสถียรภาพอยู่แต่จะเกิดสัญญาณรบกวน (Noise) ที่เป็นผลมาจากการสวิตช์ของอุปกรณ์ต่างๆออกไปรบกวนระบบข้างเคียง วิธีที่จะลดปัญหาแชตเตอริงทำได้โดยการแทนส่วนสวิตชิงที่มีลักษณะเป็นรีเลย์ให้เป็นการอิ่มตัวแทน ถ้าบริเวณเชิงเส้นของการอิ่มตัวแคบขนาดของความคลาดเคลื่อนก็จะเล็กตามไปด้วยแต่ความถี่ของสัญญาณควบคุมจะสูงกว่ากรณีที่บริเวณเชิงเส้นกว้าง

ข. เสถียรภาพ

การศึกษาเรื่องเสถียรภาพก็เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงลักษณะพฤติกรรมของระบบพลวัต เสถียรภาพมีความสำคัญมากในทางทฤษฎีระบบ (System theory) และทางวิศวกรรมระบบควบคุม แนวคิดพื้นฐานที่สุดในการวิเคราะห์เสถียรภาพถูกเสนอโดยนักคณิตศาสตร์และวิศวกรชาวรัสเซียชื่อ Alexander Lyapunov (ค.ศ. 1892) งานของ Lyapunov ได้ถูกขยายและนำมาใช้อย่างกว้างขวางในทางวิศวกรรมระบบควบคุมและทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ โดย LaSalle และ Lefschetz (ค.ศ. 1960, 1961, 1963), Krasovskii (ค.ศ. 1963), Hahn (ค.ศ. 1963), Massera (ค.ศ. 1956), Malkin (ค.ศ. 1958), Kalman และ Bertram (ค.ศ. 1960) และอื่นๆอีกมากมาย ในบทนี้จะกล่าวถึงเพียงบางส่วนของเสถียรภาพเลียปูนอฟ (Lyapunov Stability) และทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้องเฉพาะที่จะนำไปใช้ในวิทยานิพนธ์เท่านั้น ทฤษฎีที่กล่าวถึงไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ในที่นี้สำหรับผู้ที่สนใจสามารถหาอ่านได้จากหนังสือเกี่ยวกับการควบคุมแบบปรับตัวเองทั่วๆไป

ข.1 พื้นฐานเบื้องต้น

ข.1.1 ค่าประจำและปริภูมิ L_p (Norm and L_p Spaces)

เรานิยามคุณสมบัติของค่าประจำ (Norm) ไว้ดังนี้

นิยามที่ ข.1.1 ค่าประจำ $|x|$ ของเวกเตอร์ x คือ ฟังก์ชันค่าจริงที่มีคุณสมบัติดังนี้

1. $|x| \geq 0$ และ $|x| = 0$ ถ้าและเพียงแต่ถ้า $x = 0$
2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$ สำหรับค่าสเกลาร์ α ใดๆ
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ อสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality)

ค่าประจำ $|x|$ ของเวกเตอร์ x อาจคิดได้ว่าเป็นขนาดหรือความยาวของเวกเตอร์ x ในทำนองเดียวกัน $|x - y|$ อาจคิดได้ว่าเป็นระยะห่างระหว่าง x และ y

สำหรับฟังก์ชันของเวลาเรานิยามค่าประจำ L_p (L_p norm) ได้ดังนี้

$$\|x\|_p = \left(\int_0^\infty |x(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}$$

โดยที่ $p \in [1, \infty)$ และกล่าวว่า $x \in L_p$ เมื่อ $\|x\|_p$ มีค่าจำกัด

ในทำนองเดียวกันค่าประจำ L_∞ (L_∞ norm) นิยามได้ดังนี้

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

และเรียกว่า $x \in L_\infty$ เมื่อ $\|x\|_\infty$ มีค่าจำกัด

นิยามของค่าประจำ L_p, L_∞ ที่กล่าวมาแล้วนั้น $x(t)$ เป็นได้ทั้งฟังก์ชันสเกลาร์หรือเวกเตอร์ ถ้า x เป็นฟังก์ชันสเกลาร์แล้ว $|\,.\,|$ แทนค่าสัมบูรณ์ ถ้า x เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ใน $\Re^n$ แล้ว $|\,.\,|$ แทนค่าประจำใน $\Re^n$

ถ้า x มีลักษณะเป็นลำดับ (sequence) เรานิยามค่าประจำ l_p ได้ดังนี้

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

และค่าประจำ l_∞ ได้ดังนี้

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\ge1}|x_i|$$

โดยที่ $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ และ $x_i \in \Re$

ฟังก์ชันบางอย่างที่สนใจอาจไม่อยู่ใน L_p เพื่อให้เราสามารถหาค่าประจำของฟังก์ชันเหล่านั้นได้ เราจะนิยามค่าประจำ L_{pe} ได้ดังนี้

$$\|x_t\|_p = \left(\int_0^t|x(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}$$

สำหรับ $p \in [1, \infty)$ และกล่าวว่า $x \in L_{pe}$ เมื่อ $\|x_t\|_p$ มีค่าจำกัดสำหรับค่าจำกัด t ใดๆ

และค่าประจำ $L_{\infty e}$ นิยามได้ดังนี้

$$\|x_t\|_\infty = \sup_{0\le\tau\le t}|x(\tau)|$$

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน t^2 ไม่ได้อยู่ใน L_p แต่ $t^2 \in L_{pe}$ นั่นคือฟังก์ชันเวลาที่อยู่ใน L_{pe} แต่อาจไม่อยู่ใน L_p ก็ได้

สำหรับแต่ละ $p \in [1, \infty)$ เซตของฟังก์ชันจากปริภูมิเวกเตอร์เชิงเส้นหนึ่งที่อยู่ใน L_p (L_{pe}) เรียกว่า ปริภูมิ L_p (ปริภูมิ L_{pe})

ถ้าเรานิยามฟังก์ชันรอยตัด (Truncated function) f_t ดังนี้

$$f_t(\tau) = \begin{cases} f(\tau), & 0 \le \tau \le t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $t \in [0, \infty)$ แล้วจะเห็นได้ว่าสำหรับ $p \in [1, \infty)$ การที่ $f \in L_{pe}$ แสดงว่า $f_t \in L_p$ สำหรับค่าจำกัด t ใดๆ ดังนั้นปริภูมิ L_{pe} อาจถูกเรียกว่าเป็นส่วนขยายของปริภูมิ L_p และถูกนิยามในลักษณะเซตของทุกๆฟังก์ชัน f ซึ่ง $f_t \in L_p$

จะเห็นได้ว่าค่าประจำ L_p และ L_{pe} มีคุณสมบัติของค่าประจำในนิยามที่ ข.1.1 โดยสมาชิกของ L_p และ L_{pe} เป็นชั้นเทียบเท่า (Equivalent classes) หรือ อีกนัยหนึ่ง คือ ถ้า $f, g \in L_p$ และ $\|f-g\|_p = 0$ ฟังก์ชัน f และ g จะถูกพิจารณาให้เป็นสมาชิกเดียวกันใน L_p แม้ว่า $f(t) \ne g(t)$ สำหรับบางค่าของ t บทตั้ง (Lemma) ต่อไปนี้จะแสดงคุณสมบัติของปริภูมิ L_p และ L_{pe}

บทตั้งที่ ข.1.1 (Hölder's inequality) ถ้า $p, q \in [1, \infty]$ และ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ แล้ว $f \in L_p$, $g \in L_q$ หมายความว่า $fg \in L_1$ และ

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$$

เมื่อ $p = q = 2$ อสมการของ Hölder จะกลายเป็นอสมการของ Schwartz นั่นคือ

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_2 \|g\|_2 \tag{ข.1.1}$$

บทตั้งที่ ข.1.2 (Minkowski inequality) สำหรับ $p \in [1, \infty]$, $f, g \in L_p$ หมายความว่า $f+g \in L_p$ และ

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \tag{ข.1.2}$$

บทตั้งที่กล่าวมาข้างต้นยังคงใช้ได้กับฟังก์ชันรอยตัด f_t , g_t ของ f, g ตามลำดับ ตัวอย่างเช่นถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว $f, g \in L_{pe}$ นั่นคือ $f_t, g_t \in L_p$ สำหรับค่าจำกัด t ใดๆ $t \in [0, \infty)$ จาก (ข.1.1) จะได้ว่า $\| (fg)_t \|_1 \le \|f_t\|_2 \|g_t\|_2$ นั่นคือ

$$\int_0^t |f(\tau)g(\tau)|\, d\tau \le \left(\int_0^t |f(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_0^t |g(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

ตัวอย่างที่ ข.1.1 พิจารณาฟังก์ชัน $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$

ดังนั้น

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\ge 0} \left|\frac{1}{1+t}\right| = 1, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2} dt\right)^{1/2} = 1$$

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty \frac{1}{1+t} dt = \lim_{t\to\infty} \ln(1+t) \to \infty$$

เพราะฉะนั้น $f \in L_2 \cap L_\infty$, $f \notin L_1$ แต่ $f \in L_{1e}$ เพราะว่าสำหรับค่าจำกัด $t \ge 0$ ใดๆจะได้ว่า

$$\int_0^t \frac{1}{1+t} d\tau = \ln(1+t) < \infty \qquad \nabla$$

ตัวอย่างที่ ข.1.2 พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(t) = 1 + t, \qquad g(t) = \frac{1}{1+t}, \qquad \text{สำหรับ } t \ge 0$$

จะเห็นได้ชัดว่า $f \notin L_p$ สำหรับ $p \in [1, \infty]$ ใดๆ และ $g \notin L_1$ แต่อย่างไรก็ตามทั้งสองฟังก์ชันอยู่ใน L_{pe} และเป็นไปตามอสมการของ Schwartz $\| (fg)_t \|_1 \le \|f_t\|_2 \|g_t\|_2$

นั่นคือ

$$\int_0^t 1 d\tau \le \left(\int_0^t (1+\tau)^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_0^t \frac{1}{(1+\tau)^2} d\tau\right)^{1/2}$$

สำหรับ $t \in [0, \infty)$ ใดๆ ∇

ในบทต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้ เราจะละตัวห้อย 2 จาก $\left| \cdot \right|_2$, เมื่อเราสนใจค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean norm) และ ค่าประจำ L_2 ถ้า $x: \Re^+ \mapsto \Re^n$ แล้ว

$|x(t)|$ แทนค่าประจำเวกเตอร์ใน $\Re^n$ ที่แต่ละเวลา t

$\|x_t\|_p$ แทนค่าประจำ L_{pe} ของฟังก์ชัน $|x(t)|$

$\|x\|_p$ แทนค่าประจำ L_p ของฟังก์ชัน $|x(t)|$

ข.1.2 คุณสมบัติของฟังก์ชัน (Properties of Functions)

นิยามที่ ข.1.2 ความต่อเนื่อง (Continuity) ฟังก์ชัน $f: [0, \infty) \mapsto \Re$ ต่อเนื่องบน $[0, \infty)$ ถ้าสำหรับ $\varepsilon_0 > 0$ ใดๆ จะมี $\delta(\varepsilon_0, t_0)$ หนึ่งซึ่ง $\forall t_0, t \in [0, \infty)$ สำหรับ $|t - t_0| < \delta(\varepsilon_0, t_0)$ เราจะได้ว่า $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon_0$

นิยามที่ ข.1.3 ความต่อเนื่องเอกรูป (Uniform Continuity) ฟังก์ชัน $f: [0, \infty) \mapsto \Re$ ต่อเนื่องแบบเอกรูป (Uniform) บน $[0, \infty)$ ถ้าสำหรับ $\varepsilon_0 > 0$ ใดๆ จะมี $\delta(\varepsilon_0)$ ซึ่ง $\forall t_0, t \in [0, \infty)$ สำหรับ $|t - t_0| < \delta(\varepsilon_0)$ เราจะได้ว่า $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon_0$

นิยามที่ ข.1.4 ความต่อเนื่องเป็นช่วง (Piecewise Continuity) ฟังก์ชัน $f: [0, \infty) \mapsto \Re$ ต่อเนื่องเป็นช่วง (Piecewise) บน $[0, \infty)$ ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงจำกัดใดๆ $[t_0, t_1] \subset [0, \infty)$ ยกเว้นสำหรับจุดจำนวนจำกัดหนึ่งๆ

นิยามที่ ข.1.5 ความต่อเนื่องสัมบูรณ์ (Absolute Continuity) ฟังก์ชัน $f: [a, b] \mapsto \Re$ ต่อเนื่องแบบสัมบูรณ์ (Absolute Continuity) บน [a, b] ถ้าและเพียงแต่ถ้า สำหรับ $\varepsilon_0 > 0$ ใดๆ จะมี $\delta > 0$ ค่าหนึ่ง ซึ่ง

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(\alpha_i) - f(\beta_i) \right| < \varepsilon_0$$

สำหรับช่วงจำกัดย่อยใดๆ (α_i, β_i) ของ [a, b] ที่ $\sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_i - \beta_i \right| < \delta$

- ฟังก์ชัน $f(t) = \sin(1/t)$ ต่อเนื่องบน $(0, \infty)$ แต่ไม่ต่อเนื่องแบบ Uniform
- ฟังก์ชันที่นิยามด้วยคลื่นสี่เหลี่ยมซึ่งมีความถี่จำกัดไม่ต่อเนื่องบน $[0, \infty)$ แต่ต่อเนื่องแบบ Piecewise
- ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแบบเอกรูปจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

- ฟังก์ชัน f ที่มี $df/dt \in L_\infty$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป ดังนั้นวิธีหนึ่งที่จะทดสอบความต่อเนื่องแบบเอกรูปของฟังก์ชัน $f(t)$ ทำได้โดยการทดสอบการมีขอบเขตของ df/dt

ความจริงเกี่ยวกับฟังก์ชันซึ่งมีความสำคัญต่อการวิเคราะห์และเข้าใจเสถียรภาพของระบบปรับตัวเอง

ความจริงข้อที่ 1 $\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0$ ไม่ได้หมายความว่า $f(t)$ มีลิมิตขณะที่ $t \to \infty$

ตัวอย่างเช่น

ฟังก์ชัน $f(t) = \sin(\sqrt{1+t})$ จะได้ว่า $\dot{f}(t) = \dfrac{\cos\sqrt{1+t}}{2\sqrt{1+t}} \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ แต่ $f(t)$ ไม่มีลิมิต ตัวอย่างอื่นได้แก่ $f(t) = \sqrt{1+t}\ \sin(\ln(1+t))$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันไม่มีลิมิตเมื่อ $t \to \infty$ เฉ้ว่า $\dot{f}(t) = \dfrac{\sin(\ln(1+t))}{2\sqrt{1+t}} + \dfrac{\cos(\ln(1+t))}{\sqrt{1+t}} \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$

ความจริงข้อที่ 2 $\lim_{t\to\infty} f(t) = c$ สำหรับบางค่าคงที่ $c \in \Re$ ไม่ได้หมายความว่า $df(t)/dt \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$

ตัวอย่างเช่น

ฟังก์ชัน $f(t) = \dfrac{\sin(1+t)^n}{1+t}$ จะลู่เข้าหาศูนย์ขณะที่ $t \to \infty$ สำหรับจำนวนเต็มจำกัด n ใดๆ แต่ $\dot{f}(t) = -\dfrac{\sin(1+t)^n}{(1+t)^2} + n(1+t)^{n-2}\cos(1+t)^n$ ซึ่งไม่มีขอบเขต ขณะที่ $t \to \infty$ สำหรับ $n > 2$

บทตั้งที่สำคัญซึ่งใช้บ่อยในการวิเคราะห์หลักการปรับตัวเองมีดังต่อไปนี้

บทตั้งที่ ข.1.3 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันสเกลาร์

1. ฟังก์ชัน $f(t)$ ที่มีขอบเขตล่าง (bounded from below) และไม่เพิ่มขึ้น จะมีลิมิตขณะที่ $t \to \infty$
2. พิจารณาฟังก์ชันสเกลาร์ที่ไม่เป็นลบ $f(t)$, $g(t)$ สำหรับทุกๆ $t \geq 0$ ถ้า $f(t) \leq g(t)$ $\forall t > 0$ และ $g \in L_p$ แล้วจะได้ว่า $f \in L_p$ ด้วยสำหรับทุกๆ $p \in [1, \infty]$

ข้อสังเกตในบทตั้งที่ ข.1.3 ในข้อที่หนึ่งไม่ได้หมายความว่า $f \in L_\infty$ ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $f(t) = 1/t$ โดย $t \in (0, \infty)$ ซึ่งมีขอบเขตล่าง (bounded from below) นั่นคือ $f(t) \geq 0$ และไม่เพิ่มขึ้น แต่มันจะไม่มีขอบเขตขณะที่ $t \to 0$

บทตั้งที่ ข.1.4 ถ้าให้ $f,\ V : [0, \infty) \mapsto \Re$ แล้ว $\dot{V} \leq -\alpha V + f$, $\forall t \geq t_0 \geq 0$ หมายความว่า

$$V(t) \le e^{-\alpha(t-t_0)}V(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)d\tau\,, \qquad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

สำหรับค่าคงที่จำกัด α ใดๆ

บทตั้งที่ ข.1.5 ถ้า $f, \dot{f} \in L_\infty$ และ $f \in L_p$ สำหรับบาง $p \in [1, \infty)$ แล้ว $f(t) \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$

บทตั้งที่ ข.1.6 (Barbălat's Lemma) ถ้า $\lim\limits_{t \to \infty} \int_0^t f(\tau)d\tau$ มีอยู่ (Exist) และมีค่าจำกัดและ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปแล้ว $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$

จะสังเกตได้ว่าบทตั้งที่ ข.1.5 เป็นกรณีพิเศษของบทตั้งที่ ข.1.6

ข.1.3 เมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive definite matrices)

เมทริกซ์จตุรัส $A \in \Re^{n \times n}$ ถูกเรียกว่า *สมมาตร* (Symmetric) ถ้า $A = A^T$ เมทริกซ์สมมาตร A ถูกเรียกว่า *บวกกึ่งแน่นอน* (Positive semidefinite) ถ้าสำหรับทุกๆ $x \in \Re^n$, $x^T A x \ge 0$ และถูกเรียกว่า *บวกแน่นอน* (Positive definite) ถ้า $x^T A x > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in \Re^n$ เมื่อ $|x| \ne 0$ ในทางกลับกันจะถูกเรียกว่า *ลบกึ่งแน่นอน* (Negative semidefinite) และ*ลบแน่นอน* (Negative definite) ถ้า $-A$ เป็นบวกกึ่งแน่นอน และบวกแน่นอนตามลำดับ

เราเขียน $A \ge 0$ แทน A เป็นบวกกึ่งแน่นอน และ $A > 0$ ถ้า A เป็น บวกแน่นอน ยกเว้นจะระบุความหมายอื่นๆไว้ต่างหาก

เมทริกซ์จตุรัส $A \in \Re^{n \times n}$ เป็นบวกแน่นอนถ้าและเพียงแต่ถ้าข้อหนึ่งข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง :

1. $\lambda_i(A) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ โดยที่ $\lambda_i(A)$ แทน ค่าเจาะจง (Eigenvalue) ที่ i ของ A ซึ่งเป็นค่าจริงเพราะว่า $A = A^T$
2. มีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular) A_1 ซึ่ง $A = A_1 A_1^T$
3. ทุกๆไมเนอร์หลัก (Principal minor) ของ A เป็นบวก
4. $x^T A x \ge \alpha |x|^2$ สำหรับบาง $\alpha > 0$ และ $\forall x \in \Re^n$

การแยก $A = A_1 A_1^T$ ใน 2. จะแยกได้แบบเดียวเมื่อ A_1 นั้นสมมาตรด้วย ในกรณีนี้ A_1 เป็นบวกแน่นอนจะมีเวกเตอร์เจาะจงเหมือนกับ A และค่าเจาะจงเท่ากับรากที่สองของค่าเจาะจงของ A

จะเห็นว่าถ้า $A > 0$ และ $B \ge 0$ แล้ว $A + B > 0$ แต่ไม่สามารถสรุปได้ว่า $AB \ge 0$

ข.2 เสถียรภาพเลียปูนอฟ

ข.2.1 นิยามของเสถียรภาพ

เราพิจารณาระบบที่อธิบายด้วย สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equations) ที่อยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{ข.2.1}$$

โดยที่ $x \in \Re^n$, $f: \Im \times \beta(r) \mapsto \Re$, $\Im = [t_0, \infty)$ และ $\beta(r) = \{x \in \Re^n \| x\| < r\}$ เราสมมุติว่า สำหรับทุกๆ $x_0 \in \beta(r)$ และทุกๆ $t_0 \in \Re^+$ สมการ (ข.2.1) จะมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวคือ $x(t; t_0, x_0)$

นิยามที่ ข.2.1 สถานะ x_e ถูกเรียกว่า *สถานะสมดุล* (Equilibrium state) ของระบบที่บรรยายได้ด้วย (ข.2.1) ถ้า $f(t, x_e) = 0$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$

นิยามที่ ข.2.2 สถานะสมดุล x_e ถูกเรียกว่า *สถานะสมดุลเอกเทศ* (Isolated equilibrium state) ถ้ามีค่าคงที่ $r > 0$ ค่าหนึ่งซึ่งภายใน $\beta(x_e, r) = \{x \mid |x - x_e| < r\} \subset \Re^n$ ไม่มีสถานะสมดุลของ (ข.2.1) นอกจาก x_e

นิยามที่ ข.2.3 สถานะสมดุล x_e ถูกเรียกว่า *เสถียร* (Stable) (ในความหมายของเลียปูนอฟ) ถ้าสำหรับค่า t_0 และ $\varepsilon > 0$ ใดๆแล้วจะมี $\delta(\varepsilon, t_0)$ หนึ่งซึ่งเมื่อ $|x_0 - x_e| < \delta(\varepsilon, t_0)$ เราจะได้ว่า $|x(t; t_0, x_0) - x_e| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$

นิยามที่ ข.2.4 สถานะสมดุล x_e ถูกเรียกว่า *เสถียรแบบเอกรูป* (Uniformly stable, u.s.) ถ้า

1. สถานะนั้นเสถียรและ
2. ถ้า $\delta(\varepsilon, t_0)$ ในนิยามที่ ข.2.3 ไม่ขึ้นกับ t_0

นิยามที่ ข.2.5 สถานะสมดุล x_e ถูกเรียกว่า *เสถียรแบบเชิงเส้นกำกับ* (Asymptotically stable, a.s.) ถ้า

1. สถานะนั้นเสถียร และ
2. มี $\delta(t_0)$ หนึ่งซึ่งเมื่อ $|x_0 - x_e| < \delta(t_0)$ เราจะได้ว่า $\lim_{t \to \infty} |x(t; t_0, x_0) - x_e| = 0$

นิยามที่ ข.2.6 เซตของทุกๆ $x_0 \in \Re^n$ ซึ่ง $x(t; t_0, x_0) \to x_e$ ขณะที่ $t \to \infty$ สำหรับบาง $t_0 \geq 0$ ถูกเรียกว่า *บริเวณดึงดูด* (Region of attraction) ของสถานะสมดุล x_e ถ้าสภาวะที่ 2. ของนิยาม ข.2.5 เป็นจริงแล้วสถานะสมดุล x_e จะถูกเรียกว่าเป็นแบบดึงดูด (attractive)

นิยามที่ ข.2.7 สถานะสมดุล x_e ถูกเรียกว่า *เสถียรแบบเชิงเส้นกำกับเอกรูป* (Uniformly asymptotically stable, u.a.s.) ถ้า

1. สถานะนั้นเป็น u.s.
2. สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ และ $t_0 \in \Re^+$ ใดๆ จะมี $\delta_0 > 0$ หนึ่งซึ่งอิสระจาก t_0 และ ε และมี $T(\varepsilon) > 0$ หนึ่งซึ่งอิสระจาก t_0 เพื่อที่ $|x(t;t_0,x_0) - x_e| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ เมื่อใดก็ตามที่ $|x_0 - x_e| < \delta_0$

นิยามที่ ข.2.8 สถานะสมดุล x_e *เสถียรแบบเลขชี้กำลัง* (Exponentially stable, e.s.) ถ้ามี $\alpha > 0$ หนึ่ง และสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta(\varepsilon) > 0$ เพื่อที่

$$|x(t;t_0,x_0) - x_e| \leq \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \text{สำหรับทุกๆ } t \geq t_0 \quad \text{เมื่อใดก็ตามที่ } |x_0 - x_e| < \delta(\varepsilon)$$

นิยามที่ ข.2.9 สถานะสมดุล x_e ถูกเรียกว่าไม่เสถียร (Unstable) ถ้าสถานะนั้นไม่เสถียร (It is not stable)

เมื่อสมการ (ข.2.1) มีผลเฉลยสำหรับแต่ละ $x_0 \in \Re^n$ และ $t_0 \in \Re^+$ เพียงหนึ่งเดียว เราต้องการนิยามต่อไปนี้สำหรับบอกลักษณะวงกว้าง (Global) ของผลเฉลย

นิยามที่ ข.2.10 ผลเฉลย $x(t\,;t_0\,,x_0)$ ของสมการ (ข.2.1) *มีขอบเขต* (Bounded) ถ้ามี $\beta > 0$ หนึ่งซึ่งทำให้ $|x(t\,;t_0\,,x_0)| < \beta$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$ โดยที่ β อาจจะขึ้นกับแต่ละผลเฉลย

นิยามที่ ข.2.11 ผลเฉลยของสมการ (ข.2.1) *มีขอบเขตแบบเอกรูป* (Unifromly bounded, u.b.) ถ้าสำหรับ $\alpha > 0$ ใดๆและ $t_0 \in \Re^+$ จะมี $\beta = \beta(\alpha)$ หนึ่งซึ่งอิสระจาก t_0 เพื่อที่ ถ้า $|x_0| < \alpha$ แล้วเราจะได้ว่า $|x(t\,;t_0\,,x_0)| < \beta$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$

นิยามที่ ข.2.12 ผลเฉลยของสมการ (ข.2.1) *มีขอบเขตแบบเอกรูปที่สุด* (Unifromly ultimately bounded, u.u.b.) ด้วยขอบเขต B ถ้ามี $B > 0$ หนึ่งและถ้าสัมพันธ์กับ $\alpha > 0$ ใดๆ และ $t_0 \in \Re^+$ จะมี $T = T(\alpha) > 0$ หนึ่งซึ่งอิสระจาก t_0 ซึ่งเมื่อ $|x_0| < \alpha$ เราจะได้ว่า $|x(t\,;t_0\,,x_0)| < B$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0 + T$

นิยามที่ ข.2.13 สถานะสมดุล x_e ของสมการ (ข.2.1) *เสถียรแบบเชิงเส้นกำกับในวงกว้าง* (Asymptotically stable in the large, a.s. in the large) ถ้าสถานะนั้นเสถียรและทุกๆผลเฉลยของ (ข.2.1) จะลู่เข้าหา x_e เมื่อ $t \to \infty$ หรือกล่าวได้ว่าบริเวณดึงดูดของ x_e คือทุกๆจุดใน $\Re^n$

นิยามที่ ข.2.14 สถานะสมดุล x_e ของสมการ (ข.2.1) *เสถียรเชิงเส้นกำกับในวงกว้างแบบเอกรูป* (Uniformly asymptotically stable in the large, u.a.s. in the large) ถ้า

1. สถานะนั้นเสถียรแบบเอกรูป
2. ผลเฉลยของ (ข.2.1) มีขอบเขตแบบเอกรูปและ
3. สำหรับ $\alpha > 0$ ใดๆ $\varepsilon > 0$ ใดๆ และ $t_0 \in \Re^+$ จะมี $T = T(\varepsilon,\alpha) > 0$ ซึ่งอิสระจาก t_0 เพื่อที่ถ้า $|x_0 - x_e| < \alpha$ แล้ว $|x(t;t_0,x_0) - x_e| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0 + T(\varepsilon, \alpha)$

นิยามที่ ข.2.15 สถานะสมดุล x_e ของสมการ (ข.2.1) *เสถียรแบบเลขชี้กำลังในวงกว้าง* (Exponentially stable in the large, e.s. in the large) ถ้ามี $\alpha > 0$ และ สำหรับ $\beta > 0$ ใดๆ จะมี $k(\beta)$ เพื่อที่ $\left|x(t;t_0,x_0)\right| \leq k(\beta)\, e^{-\alpha(t-t_0)}$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$ เมื่อใดก็ตามที่ $|x_0| < \beta$

นิยามที่ ข.2.16 ถ้า $x(t;t_0,x_0)$ เป็นผลเฉลยของ $\dot{x} = f(t,x)$ แล้ววิถี (Trajectory) $x(t;t_0,x_0)$ ถูกเรียกว่า เสถียร (u.s., a.s., u.a.s., e.s., ไม่เสถียร) ถ้าสถานะสมดุล $z_e = 0$ ของสมการอนุพันธ์

$\dot{z} = f(t, z + x(t;t_0,x_0)) - f(t, x(t;t_0,x_0))$ เสถียร (u.s., a.s., u.a.s., e.s., ไม่เสถียร)

ตัวอย่างต่อไปนี้จะช่วยให้เข้าใจนิยามต่างๆที่ได้กล่าวมาแล้วได้ดียิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ ข.2.1

1. $\dot{x} = 0$ มีสถานะสมดุล $x_e = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใดๆ ซึ่งไม่เป็นสถานะสมดุลเอกเทศและสามารถพิสูจน์ได้ว่า $x_e = c$ นั้นเสถียร, u.s. แต่ไม่ a.s.
2. $\dot{x} = -x^3$ มีสถานะสมดุลเอกเทศ $x_e = 0$ ผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$x(t) = x(t;t_0,x_0) = \sqrt{\frac{x_0^2}{1+2x_0^2(t-t_0)}} \qquad (ข.2.2)$$

สมมุติให้ $\varepsilon > 0$, $|x_0| < \delta = \varepsilon$ หมายความว่า

$$|x(t)| = \sqrt{\frac{x_0^2}{1+2x_0^2(t-t_0)}} \leq |x_0| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

ดังนั้นจากนิยามที่ ข.2.3 $x_e = 0$ เสถียร เพราะว่า $\delta = \varepsilon$ อิสระจาก t_0 ดังนั้น $x_e = 0$ เป็น u.s. ด้วย ยิ่งกว่านั้น $x_e = 0$ เสถียร $x(t) \to x_e = 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ สำหรับทุกๆ $x_0 \in \Re$ จะได้ว่าเป็น a.s. in the large ต่อไปเราจะทดสอบว่าเมื่อไรที่ $x_e = 0$ เป็น u.a.s. in the large โดยใช้นิยาม ข.2.14 เราได้แสดง u.s. แล้วจากสมการ (ข.2.2) จะเห็นว่า $x(t)$ เป็น u.b. เพื่อให้ตรงตามสภาวะ 3. ของนิยาม ข.2.14 เราต้องหา $T > 0$ ซึ่งอิสระจาก t_0 เพื่อที่สำหรับ $\alpha > 0$ ใดๆและ $\varepsilon > 0$, $|x_0| < \alpha$ จะหมายความว่า $|x(t)| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0 + T$ จากสมการ (ข.2.2) จะได้ว่า

$$|x(t)| \leq |x(t_0+T)| = \sqrt{\frac{x_0^2}{1+2x_0^2T}} < \sqrt{\frac{1}{2T}}, \qquad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

การเลือก $T = \frac{1}{2\varepsilon^2}$, จะเห็นว่าเป็นไปตาม $|x(t)| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0 + T$ ดังนั้น $x_e = 0$ เป็น u.a.s. in the large โดยใช้นิยาม ข.2.15 เราสามารถสรุปได้ว่า $x_e = 0$ ไม่เป็น e.s.

3. $\dot{x} = (x-2)x$ มีสถานะสมดุลเอกเทศสองจุด คือ $x_e = 0$ และ $x_e = 2$ เราสามารถแสดงได้ว่า $x_e = 0$ เป็น e.s. ที่มีพื้นผิวดึงดูด $R_a = \{x \mid x < 2\}$ และ $x_e = 2$ ไม่เสถียร
4. $\dot{x} = -\frac{1}{1+t}x$ มีสถานะสมดุลหนึ่งจุดที่ $x_e = 0$ ซึ่งเสถียร, u.s., a.s. in the large แต่ไม่เป็น u.a.s.
5. $\dot{x} = (t\sin t - \cos t - 2)x$ มีสถานะสมดุลหนึ่งจุดที่ $x_e = 0$ ซึ่งเสถียร, a.s. in the large แต่ไม่เป็น u.s.

ข.3 วิธีตรงของเลียปูนอฟ

เสถียรภาพของสถานะสมดุลหรือผลเฉลยของของสมการ (ข.2.1) สามารถพิจารณาได้ด้วยวิธีตรงของเลียปูนอฟ Lyapunov's direct method) หรือบางทีก็เรียกว่าวิธีที่สองของเลียปูนอฟ (Lyapunov's second method) จุดประสงค์ของวิธีนี้คือ เพื่อให้สามารถบอกถึงเสถียรภาพของระบบจาก $f(t, x)$ ในสมการ (ข.2.1) มากกว่าการที่จะต้องแก้สมการหาผลเฉลยโดยตรง เราจะเริ่มจากนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ ข.3.1 ฟังก์ชันต่อเนื่อง $\phi: [0, r] \mapsto \Re^+$ (หรือ ฟังก์ชันต่อเนื่อง $\phi: [0, \infty) \mapsto \Re^+$) ถูกเรียกว่าอยู่ในคลาส (class) $\aleph$ นั่นคือ $\phi \in \aleph$ ถ้า

1. $\phi(0) = 0$
2. ϕ เพิ่มขึ้นอย่างแน่นอน (Strictly increasing) บน $[0, r]$ (หรือ บน $[0, \infty)$)

นิยามที่ ข.3.2 ฟังก์ชันต่อเนื่อง $\phi: [0, \infty) \mapsto \Re^+$ ถูกเรียกว่าอยู่ในคลาส (class) $\aleph\Re$ นั่นคือ $\phi \in \aleph\Re$ ถ้า

1. $\phi(0) = 0$
2. ϕ เพิ่มขึ้นอย่างแน่นอนบน $[0, \infty)$
3. $\lim_{t \to \infty} \phi(r) = \infty$

ฟังก์ชัน $\phi(|x|) = \frac{x^2}{1+x^2}$ อยู่ในคลาส $\aleph$ ที่นิยามบน $[0, \infty)$ แต่ไม่อยู่ในคลาส $\aleph\Re$ ฟังก์ชัน $\phi(|x|) = |x|$ อยู่ในคลาส $\aleph$ และ $\aleph\Re$ จะเห็นได้ชัดว่า $\phi \in \aleph\Re$ หมายความว่า $\phi \in \aleph$ แต่กลับกันไม่จริง

นิยามที่ ข.3.3 ฟังก์ชัน $\phi_1, \phi_2 \in \aleph$ นิยามบน $[0, r]$ (หรือบน $[0, \infty)$) จะถูกเรียกว่ามีขนาดของอันดับเหมือนกัน (of the same order of magnitude) ถ้ามีค่าคงที่บวก k_1, k_2 เพื่อที่

$$k_1\phi_1(r_1) \;\le\; \phi_2(r_1) \;\le\; k_2\phi_1(r_1), \qquad \forall r_1 \in [0, r] \text{ (หรือ } \forall r_1 \in [0, \infty))$$

ฟังก์ชัน $\phi_1(|x|) = \dfrac{x^2}{1+2x^2}$ และ $\phi_2(|x|) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ มีขนาดของอันดับเหมือนกัน

นิยามที่ ข.3.4 ฟังก์ชัน $V(t,x) : \Re^+ \times \beta(r) \mapsto \Re$ ซึ่ง $V(t,0) = 0,\ \forall t \in \Re^+$ ถูกเรียกว่าเป็น บวกแน่นอน ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $\phi \in \aleph$ เพื่อที่ $V(t,x) \ge \phi(|x|),\ \forall t \in \Re^+,\ x \in \beta$ และ $r > 0$ $V(t,x)$ จะถูกเรียกว่าเป็นลบแน่นอน ถ้า $-V(t,x)$ เป็นบวกแน่นอน

ฟังก์ชัน $V(t,x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ ซึ่ง $x \in \beta(1)$ เป็นบวกแน่นอนแต่ $V(t,x) = \dfrac{1}{1+t}x^2$ ไม่เป็น ส่วนฟังก์ชัน $V(t,x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ เป็นบวกแน่นอนสำหรับทุกๆ $x \in \Re$

นิยามที่ ข.3.5 ฟังก์ชัน $V(t,x) : \Re^+ \times \beta(r) \mapsto \Re$ ซึ่ง $V(t,0) = 0,\ \forall t \in \Re^+$ ถูกเรียกว่าเป็น บวก (ลบ) กึ่งแน่นอน ถ้า $V(t,x) \ge 0$ ($V(t,x) \le 0$) สำหรับทุกๆ $t \in \Re^+$ และ $x \in \beta(r)$ สำหรับบาง $r > 0$

นิยามที่ ข.3.6 ฟังก์ชัน $V(t,x) : \Re^+ \times \beta(r) \mapsto \Re$ ซึ่ง $V(t,0) = 0,\ \forall t \in \Re^+$ ถูกเรียกว่าเป็น ดีคลีสเซนต์ (decrescent) ถ้ามี $\phi \in \aleph$ เพื่อที่ $|V(t,x)| \le \phi(|x|),\ \forall t \ge 0$ และ $\forall x \in \beta(r)$ สำหรับบาง $r > 0$

ฟังก์ชัน $V(t,x) = \dfrac{1}{1+t}x^2$ เป็นดีครีสเซนต์เพราะว่า $V(t,x) = \dfrac{1}{1+t}x^2 \le x^2,\ \forall t \in \Re^+$ แต่ $V(t,x) = t\,x^2$ ไม่เป็น

นิยามที่ ข.3.7 ฟังก์ชัน $V(t,x) : \Re^+ \times \Re^n \mapsto \Re$ ซึ่ง $V(t,0) = 0,\ \forall t \in \Re^+$ ถูกเรียกว่า ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี (radially unbounded) ถ้ามี $\phi \in \aleph\Re$ เพื่อที่ $V(t,x) \ge \phi(|x|)$ สำหรับทุกๆ $x \in \Re^n$ และ $t \in \Re^+$

ฟังก์ชัน $V(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ เป็นไปตามสภาวะที่ 1. และ 2. ของนิยามที่ ข.3.1 โดยการเลือก $\phi(|x|) = \dfrac{|x|^2}{1+|x|^2}$ อย่างไรก็ตามเพราะว่า $V(x) \le 1$ จึงไม่สามารถหาฟังก์ชัน $\phi(|x|) \in \aleph\Re$ เพื่อที่ $V(x) \ge \phi(|x|)$ สำหรับทุกๆ $x \in \Re^n$ ดังนั้น V ไม่ใช่ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี

จะเห็นได้ชัดว่าจากนิยามที่ ข.3.7 ซึ่งถ้า $V(t,x)$ ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมีมันก็จะเป็นบวกแน่นอนสำหรับทุกๆ $x \in \Re^n$ ด้วยแต่ว่ากลับกันไม่เป็นความจริง

เราจะสมมุติ (โดยไม่เสียความเป็นสากล) ให้ $x_e = 0$ เป็นจุดสมดุลของระบบในสมการ (ข.2.1) และนิยามให้ $\dot{V}$ เป็นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $V(t,x)$ ตลอดผลเฉลยของ (ข.2.1)

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T f(t,x) \qquad (\text{ข}.3.1)$$

โดยที่ $\nabla V = [\,\partial V/\partial x_1, \partial V/\partial x_2, \ldots, \partial V/\partial x_n\,]^T$ เป็นเกรเดียนท์ของ V เทียบกับ x วิธีที่สองของเลียปูนอฟถูกรวบรวมด้วยทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ ข.3.1 สมมุติว่ามีฟังก์ชันบวกแน่นอน $V(t,x)\ :\ \Re^+ \times \beta(r) \mapsto \Re$ สำหรับบาง $r > 0$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเทียบกับ x, t ต่อเนื่องและ $V(t,0) = 0, \forall t \in \Re^+$ ดังนั้นสภาวะต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $\dot{V} \le 0$ แล้ว $x_e = 0$ จะเสถียร
2. ถ้า V เป็นดีครีสเซนต์ และ $\dot{V} \le 0$ แล้ว $x_e = 0$ เป็น u.s.
3. ถ้า V เป็นดีครีสเซนต์ และ $\dot{V} < 0$ แล้ว $x_e = 0$ เป็น u.a.s.
4. ถ้า V เป็นดีครีสเซนต์ และมี $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \aleph$ ซึ่งมีขนาดของอันดับเหมือนกัน เพื่อที่

$$\phi_1(|x|) \le V(t,x) \le \phi_2(|x|), \qquad \dot{V}(t,x) \le -\phi_3(|x|)$$

สำหรับทุกๆ $x \in \beta(r)$ และ $t \in \Re^+$ แล้ว $x_e = 0$ เป็น e.s.

ทฤษฎีข้างบนนี้สถานะ x_e ถูกจำกัดอยู่ในบอล $\beta(r)$ สำหรับบาง $r > 0$ ดังนั้นผลใน 1 ถึง 4 ของทฤษฎีที่ ข.3.1 เป็นผลวงแคบ (Local)

ทฤษฎีที่ ข.3.2 สมมุติว่าสมการ (ข.2.1) ให้คำตอบเพียงหนึ่งเดียวสำหรับทุกๆ $x_0 \in \Re^n$ สมมุติว่ามีฟังก์ชันบวกแน่นอน ดีครีสเซนต์ และ ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี $V(t,x)\ :\ \Re^+ \times \Re^n \mapsto \Re^+$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเทียบกับ x, t ต่อเนื่องและ $V(t,0) = 0, \quad \forall t \in \Re^+$ ดังนั้นสภาวะต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $\dot{V} < 0$ แล้ว $x_e = 0$ จะเป็น u.a.s. ในวงกว้าง
2. ถ้ามี $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \aleph\Re$ มีขนาดของอันดับเหมือนกัน เพื่อที่

$$\phi_1(|x|) \le V(t,x) \le \phi_2(|x|), \qquad \dot{V}(t,x) \le -\phi_3(|x|)$$

แล้ว $x_e = 0$ เป็น e.s. ในวงกว้าง

ทฤษฎีที่ ข.3.3 สมมุติว่าสมการ (ข.2.1) ให้คำตอบเพียงหนึ่งเดียวสำหรับทุกๆ $x_0 \in \Re^n$ ถ้ามีฟังก์ชัน $V(t,x)$ หนึ่งที่นิยามบน $|x| \ge R$ และ $t \in [0,\infty)$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเทียบกับ x, t ต่อเนื่อง และถ้ามี $\phi_1, \phi_2 \in \aleph\Re$ เพื่อที่

1. $\phi_1(|x|) \le V(t,x) \le \phi_2(|x|)$
2. $\dot{V}(t,x) \le 0$

สำหรับทุกๆ $|x| \ge R$ และ $t \in [0,\infty)$ แล้วผลเฉลยของสมการ (ข.2.1) จะเป็น u.b. ถ้ามี $\phi_3 \in \aleph$ นิยามบน $[0,\infty)$ และ

3. $\dot{V}(t,x) \le -\phi_3(|x|)$ สำหรับทุกๆ $|x| \ge R$ และ $t \in [0,\infty)$ ดังนั้นผลเฉลยของ (ข.2.1) จะเป็น u.u.b.

ระบบในสมการ (ข.2.1) เรียกว่า ไม่อิสระ (Nonautonomous) แต่ถ้า f ใน (ข.2.1) ไม่ขึ้นกับเวลา t อย่างเด่นชัดเราจะเรียกว่า อิสระ (Autonomous) ในกรณีนี้จะได้ว่า

$$\dot{x} = f(x) \tag{ข.3.2}$$

ทฤษฎีที่ ข.3.1 ถึง ข.3.3 ยังคงใช้ได้สำหรับ (ข.3.2) เพราะว่าเป็นกรณีพิเศษของ (ข.2.1) อย่างไรก็ตามเนื่องจากไม่ขึ้นกับ t อย่างเด่นชัด ดังนั้นคำว่า " ดีครีสเซนต์ " และ " เอกรูป " จะถูกตัด

ออก ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า $V(x)$ เป็นดีครีสเซนต์เสมอและเสถียรภาพ (a.s. ตามลำดับ) ของจุดสมดุลย์ $x_e = 0$ ของ (ข.3.2) หมายถึง u.s. (u.a.s. ตามลำดับ)

สำหรับระบบ (ข.3.2) เราอาจสรุปผลจากทฤษฎีที่ ข.3.2 ให้รัดกุมขึ้นได้ดังต่อไปนี้

นิยามที่ ข.3.8 เซต Ω หนึ่งใน $\Re^n$ ไม่แปรผัน (Invariant) เทียบกับสมการ (ข.3.2) ถ้าทุกๆผลเฉลยของ (ข.3.2) ที่เริ่มจาก Ω แล้วยังคงอยู่ใน Ω สำหรับทุกๆ t

ทฤษฎีที่ ข.3.4 สมมุติว่าสมการ (ข.3.2) ให้คำตอบเพียงหนึ่งเดียวสำหรับทุกๆ $x_0 \in \Re^n$ ถ้ามีฟังก์ชัน $V(t, x) : \Re^n \mapsto \Re^+$ เป็นบวกแน่นอนและไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเทียบกับ x, t ต่อเนื่องและ $V(0) = 0$ ถ้า

1. ถ้า $\dot{V} \le 0, \quad \forall x \in \Re^n$
2. จุดเริ่มต้น เป็นสับเซตไม่แปรผันเดียวของเซต $\Omega = \{ x \in \Re^n \mid \dot{V} = 0\}$

ดังนั้นจุดสมดุล $x_e = 0$ ของสมการ (ข.3.2) เป็น a.s. ในวงกว้าง

ทฤษฎีที่ ข.3.1 ถึง ข.3.4 เรียกว่า ทฤษฎี Lyapunov-type ฟังก์ชัน $V(t, x)$ หรือ $V(x)$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎี Lyapunov-type จะเรียกว่า ฟังก์ชันเลียปูนอฟ ฟังก์ชันเลียปูนอฟสามารถใช้คาดเดาการขาดเสถียรภาพของสถานะสมดุล x_e ทฤษฎีไม่มีเสถียรภาพ (instability) ส่วนใหญ่ยังคงอาศัยวิธีที่สองของเลียปูนอฟ

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการใช้วิธีตรงของเลียปูนอฟวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบไม่เชิงเส้น

ตัวอย่างที่ ข.3.1 พิจารณาระบบ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + c x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + c x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \qquad (ข.3.3)$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ จะเห็นว่า $x_e = 0$ เป็นสถานะสมดุลเดียว เลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟดังต่อไปนี้ $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ $V(x)$ เป็นบวกแน่นอน ดีครีสเซนต์ และ ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี อนุพันธ์เทียบกับเวลาตลอดผลเฉลยของ (ข.3.3) คือ

$$\dot{V} = 2c (x_1^2 + x_2^2) \qquad (ข.3.4)$$

ถ้า $c = 0$ แล้ว $\dot{V} = 0$ ดังนั้น $x_e = 0$ เป็น u.s. ถ้า $c < 0$ แล้ว $\dot{V}$ เป็นลบแน่นอน ดังนั้น $x_e = 0$ เป็น u.a.s. ในวงกว้าง ถ้า $c > 0$, $x_e = 0$ จะไม่เสถียรดังนั้นผลเฉลยของ (ข.3.3) ไม่มีขอบเขต ∇

ตัวอย่างที่ ข.3.2 พิจารณาระบบต่อไปนี้ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมธรรมดา (Simple pendulum)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \sin x_1 \end{aligned} \qquad (ข.3.5)$$

โดยที่ $k > 0$ เป็นค่าคงที่ x_1 เป็นมุม และ x_2 แทนความเร่งเชิงมุม เราพิจารณาตัวเลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟ $V(x)$ จากผลรวมของพลังงานจลน์ (Kinetic energy) และ พลังงานศักย์ (Potential energy) นั่นคือ

$$(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + k\int_0^{x_1} \sin\eta \; d\eta = \frac{1}{2}x_2^2 + k\left(1-\cos x_1\right)$$

$V(x)$ เป็นบวกแน่นอนและดีครีสเซนต์ $\forall x \in \beta(\pi)$ ไม่ใช่ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี ตลอดผลเฉลยของ (ข.3.5) จะได้ว่า $\dot{V} = 0$ ดังนั้นสถานะสมดุล $x_e = 0$ เป็น u.s. ∇

ตัวอย่างที่ ข.3.3 พิจารณาระบบ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - e^{-t} x_1 \end{aligned} \qquad (ข.3.6)$$

เลือกฟังก์ชันซึ่งเป็นบวกแน่นอน ดีครีสเซนต์ และไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี ต่อไปนี้ $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ เป็นฟังก์ชันเลียปูนอฟจะได้ว่า $\dot{V} = -2x_2^2 + 2x_1x_2(1-e^{-t})$ โดยใช้ทฤษฎีเลียปูนอฟที่กล่าวมาแล้วไม่สามารถบอกอะไรได้ ดังนั้นเราจะเลือกฟังก์ชัน V ใหม่ดังนี้

$$V(t,x) = x_1^2 + e^{t} x_2^2$$

ในกรณีนี้จะได้ว่า $\dot{V}(t,x) = -e^{t} x_2^2$

ฟังก์ชัน V นี้เป็นบวกแน่นอน และ $\dot{V}$ เป็นลบกึ่งแน่นอน ดังนั้นเมื่อใช้ทฤษฎีที่ ข.3.1 เราสามารถสรุปได้ว่าสถานะสมดุล $x_e = 0$ เสถียร อย่างไรก็ตามเพราะว่า V ไม่เป็นดีครีสเซนต์เราจึงไม่สามารถสรุปได้ว่าสถานะสมดุล $x_e = 0$ เป็น u.s. ∇

ตัวอย่างที่ ข.3.4 พิจารณาระบบสมการอนุพันธ์ต่อไปนี้ซึ่งมักจะพบในการวิเคราะห์ระบบปรับตัวเอง

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \phi x \\ \dot{\phi} &= -x^2 \end{aligned} \qquad (ข.3.7)$$

สถานะสมดุล $x_e = 0$, $\phi_e = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใดๆ ดังนั้นสถานะสมดุลไม่เป็นเอกเทศ

นิยามให้ $\tilde{\phi} = \phi - c$ ดังนั้น (ข.3.7) กลายเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1-c)x + \tilde{\phi}x \\ \dot{\tilde{\phi}} &= -x_2^2 \end{aligned} \qquad (ข.3.8)$$

เราสนใจเสถียรภาพของสถานะสมดุล $x_e = 0$, $\phi_e = c$ ของ (ข.3.7) ซึ่งเทียบเท่ากับเสถียรภาพของจุด $x_e = 0$, $\tilde{\phi}_e = 0$ ของ (ข.3.8) เราเลือกฟังก์ชันบวกแน่นอน ดีครีสเซนต์ และ ไม่มีขอบเขตเชิงรัศมี

$$V(x,\tilde{\phi}) = \frac{x^2}{2} + \frac{\tilde{\phi}^2}{2} \qquad (ข.3.9)$$

ดังนั้น $\dot{V}(x,\tilde{\phi}) = -(1-c)x^2$

ถ้า $c > 1$ แล้ว $\dot{V} > 0$ สำหรับ $x \neq 0$ ดังนั้น จุด $x_e = 0,\ \tilde{\phi}_e = 0$ ไม่เสถียร อย่างไรก็ตามถ้า $c \leq 1$ แล้วจุด $x_e = 0,\ \tilde{\phi}_e = 0$ เป็น u.s. สำหรับ $c < 1$ จะได้ว่า

$$\dot{V}(x, \tilde{\phi}) = -c_0 x^2 \leq 0 \quad \text{โดย} \quad c_0 = 1 - c > 0 \qquad (\text{ข}.3.10)$$

จากทฤษฎีที่ ข.3.3 บอกได้ว่า $x_e,\ \tilde{\phi}_e$ เป็น u.b. เราสามารถวิเคราะห์ต่อไปได้อีกโดยใช้คุณสมบัติของ V และ $\dot{V}$ ดังต่อไปนี้ จะเห็นได้ว่า $V(t) = V(x(t), \tilde{\phi}(t))$ มีขอบเขตนั่นคือ $\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty$ จาก (ข.3.10) จะได้

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t x^2 d\tau = \int_0^\infty x^2 d\tau = \frac{V(0) - V_\infty}{c_0} < \infty$$

ดังนั้นเราสรุปได้ว่า $x \in L_2$ เพราะว่า $x_e(t),\ \tilde{\phi}_e(t)$ เป็น u.b. และจาก (ข.3.8) จะได้ว่า $\dot{x} \in L_\infty$ เมื่อรวมกับ $x \in L_2$ จึงสรุปได้ (จากบทตั้ง ข.1.5) ว่า $x(t) \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ ∇

ตัวอย่างที่ ข.3.5 พิจารณาระบบสมการอนุพันธ์

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_1 x_2 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_1$$

พิจารณา $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ เราจะได้ว่า $\dot{V} = -2x_1^2 \leq 0$ และจุดสมดุล $x_{1e} = 0;\ x_{2e} = 0$ เป็น u.s. เซตที่นิยามในทฤษฎีที่ ข.3.4 สำหรับตัวอย่างนี้คือ $\Omega = \{x_1, x_2 \mid x_1 = 0\}$ เพราะว่า $\dot{x}_1 = x_2$ บน Ω ผลเฉลยใดๆที่เริ่มจาก Ω ที่ $x_2 \neq 0$ จะออกจาก Ω ดังนั้น $x_{1e} = 0,\ x_{2e} = 0$ จึงเป็นสับเซตไม่แปรเปลี่ยน (invariant subset) เดียวของ Ω เพราะฉะนั้นจุดสมดุล $x_{1e} = 0, x_{2e} = 0$ เป็น a.s. ในวงกว้าง ∇

ในตัวอย่างก่อนหน้านี้เราสมมุติว่าผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ทั่วๆไป (ข.2.1) นั้นมีหนึ่งเดียว ในตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งจะแสดงว่าถ้าเรามองข้ามคุณสมบัติการมีอยู่ของผลเฉลย ความผิดพลาดเกี่ยวกับเสถียรภาพอาจเกิดขึ้นได้เมื่อใช้ทฤษฎีเลียปูนอฟ

ตัวอย่างที่ ข.3.6 พิจารณาระบบสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 \operatorname{sgn}(x_1), \qquad x_1(0) = 1$$
$$\dot{x}_2 = |x_1|, \qquad x_2(0) = 0$$

โดยที่
$$\operatorname{sgn}(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า} \quad x_1 \geq 0 \\ -1 & \text{ถ้า} \quad x_1 < 0 \end{cases}$$

เลือกฟังก์ชัน

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

มีอนุพันธ์เทียบกับเวลาตลอดผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ดังนี้

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^2 \leq 0$$

จากทฤษฎีที่ ข.3.1 บอกได้ว่า $x_1,\ x_2\ \in L_\infty$ และจุดสมดุล $x_{1e} = 0,\ \ x_{2e} = 0$ เป็น u.s. ยิ่งกว่านั้นเราสามารถแสดงได้ว่า $x_1(t) \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$

ผลสรุปข้างบนนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันผลเฉลยต่อเนื่อง $x_1(t), x_2(t)$ ของสมการอนุพันธ์ที่มี $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$ ตรงตามสมการอนุพันธ์นั้นสำหรับทุกๆ $t \in [0, \infty)$ มีอยู่ อย่างไรก็ตามผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ข้างบนมีเฉพาะในช่วง $t \in [0,\ 1]$ โดย $x_1(t) = (1 - t)e^{-t},\ \ x_2(t) = t\,e^{-t}$ ความยุ่งยากนั้นเกิดขึ้นเมื่อ $t \geq 1$ จากความจริงที่ว่าในบริเวณเล็กๆรอบจุด $(x_1(1),\ x_2(1)) = (0,\ e^{-1})$ $\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2\,\mathrm{sgn}(x_1) < 0$ ถ้า $x_1 > 0$ และ $\dot{x}_1 > 0$ ถ้า $x_1 < 0$ ด้วยเหตุนี้ $\dot{x}_1$ จะเปลี่ยนเครื่องหมายไปมารอบๆจุด $(0,\ e^{-1})$ ซึ่งหมายความว่าไม่มีฟังก์ชันต่อเนื่อง $x_1(t),\ x_2(t)$ ใดที่เป็นไปตามสมการอนุพันธ์เมื่อผ่านจุด $t = 1$ ∇

อุปสรรคสำคัญสำหรับวิธีตรงของเลียปูนอฟ คือ โดยทั่วๆไปแล้วไม่มีขั้นตอนที่แน่นอนในการหาฟังก์ชันเลียปูนอฟยกเว้นในกรณีที่สมการ (ข.2.1) เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา

ข.4 ฟังก์ชันคล้ายเลียปูนอฟ (Lyapunov-Like Functions)

ฟังก์ชันเลียปูนอฟที่เหมาะสมจะสามารถบอกถึงเสถียรภาพของระบบได้จากทฤษฎีที่ ข.3.1 ถึง ข.3.4 แต่ในบางกรณีก็ไม่สามารถหาฟังก์ชันเลียปูนอฟที่เหมาะสมได้นั่นคือไม่สามารถบอกเสถียรภาพของระบบได้จากฟังก์ชันนั้น อย่างไรก็ตามฟังก์ชันที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับฟังก์ชันเลียปูนอฟซึ่งมีคุณสมบัติไม่พอที่จะใช้กับทฤษฎีที่ ข.3.1 ถึง ข.3.4 อาจใช้บอกถึงเสถียรภาพของระบบได้ เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า *ฟังก์ชันคล้ายเลียปูนอฟ* (Lyapunov-like functions) ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงการใช้ฟังก์ชันคล้ายเลียปูนอฟ

ตัวอย่างที่ ข.4.1 พิจารณาระบบสมการอนุพันธ์ลำดับสาม

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 x_3, & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_3, & x_2(0) &= x_{20} \\ \dot{x}_3 &= x_1^{\,2}, & x_3(0) &= x_{30} \end{aligned} \qquad (ข.4.1)$$

ซึ่งมีจุดสมดุลไม่เอกเทศใน $\Re^3$ คือ $x_1 = 0,\ \ x_2 =$ ค่าคงที่, $x_3 = 0$ หรือ $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,$ $x_3 =$ ค่าคงที่ ปกติแล้วการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ (ข.4.1) โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟที่เหมาะสม $V(x_1,\ x_2,\ x_3)$ ซึ่งเป็นบวกแน่นอนใน $\Re^3$ และทฤษฎีที่ ข.3.1 ถึง ข.3.4 แทนที่จะทำเช่นนั้นเราลองพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$V(x_1,\ x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

ซึ่งเป็นบวกกึ่งแน่นอนใน $\Re^3$ ดังนั้นจึงใช้ทฤษฎีที่ ข.3.1 ถึง ข.3.4 ไม่ได้ อนุพันธ์เทียบกับเวลาตลอดผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ (ข.4.1) คือ

$$\dot{V} = -x_1^{\,2} \le 0 \qquad (ข.4.2)$$

ดังนั้น $V,\ x_1,\ x_2 \in L_\infty$ จาก (ข.4.2) สามารถแสดงได้ว่า $x_1 \in L_2$ จาก (ข.4.1) $x_3 \in L_\infty$ และจาก $x_1,\ x_2,\ x_3 \in L_\infty$ เพราะฉะนั้น $\dot{x}_1 \in L_\infty$ โดยใช้ $\dot{x}_1 \in L_\infty$, $x_1 \in L_2$ และใช้บทตั้ง ข.1.5 เราจะได้ว่า $x_1(t) \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ เราเรียก $V(x_1,\ x_2)$ ว่าฟังก์ชันคล้ายเลียปูนอฟ ในการวิเคราะห์ข้างบนยังคงได้มาจากการสมมุติว่าสมการ (ข.4.1) มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว ∇

ข.5 เสถียรภาพของระบบเชิงเส้น

ระบบไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่องโดยมากสามารถประมาณได้ด้วยระบบเชิงเส้นที่ใกล้ๆกับจุดสมดุล หรือ มักจะเรียกว่า *จุดทำงาน* (Operating point) ด้วยเหตุนี้จึงมีความสนใจที่จะศึกษาถึงเสถียรภาพของระบบเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$$

โดยที่สมาชิกของ $A(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง สำหรับทุกๆ t แต่ในที่นี้สนใจเฉพาะกรณีที่ $A(t) = A$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์คงที่ ดังนั้นเสถียรภาพของจุดสมดุล $x_e = 0$ ของระบบ

$$\dot{x} = A\,x \qquad (ข.5.1)$$

พิจารณาได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ ข.5.1 สถานะสมดุล $x_e = 0$ ของระบบ (ข.5.1) จะเสถียร ถ้าและเพียงแต่ถ้า

1. ค่าเจาะจงทั้งหมดของ A มีส่วนจริง (Real parts) ไม่เป็นบวก (Nonpositive)
2. สำหรับแต่ละค่าเจาะจง λ_i ที่มี $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0$ โดย λ_i เป็นศูนย์ธรรมดา (Simple zero) ของพหุนามต่ำสุด (Minimal polynomial) ของ A

ทฤษฎีที่ ข.5.2 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับ $x_e = 0$ ที่จะเป็น a.s. ในวงกว้างก็ต่อเมื่อเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. ทุกๆค่าเจาะจงของ A มีส่วนจริงเป็นลบ
2. สำหรับทุกๆ $Q > 0$ แล้วสมการ $A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$ มีผลเฉลย $P > 0$ เพียงค่าเดียว
3. สำหรับเมทริกซ์ C ใดๆซึ่ง (C, A) สังเกตได้ (Observable) แล้วสมการ $A^{\mathrm{T}}P + PA = -C^{\mathrm{T}}C$ มีผลเฉลย $P > 0$ เพียงค่าเดียว

สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาใน (ข.5.1) จะสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $x_e = 0$ เสถียรมันก็จะเป็น u.s. ด้วย ถ้า $x_e = 0$ เป็น a.s. มันจะเป็น u.a.s. และ e.s. ในวงกว้างด้วย

บางกรณีจะเรียก A ใน (ข.5.1) ว่าเสถียร เมื่อจุดสมดุล $x_e = 0$ เป็น a.s. นั่นคือเป็นไปตามทฤษฎีที่ ข.5.2 และจะเรียกว่าเสถียรแบบเชิงขอบ (marginally) เมื่อจุดสมดุล $x_e = 0$ เสถียร นั่นคือเป็นไปตามเงื่อนไข (1.) และ (2.) ในทฤษฎีที่ ข.5.1

เราลองกลับไปพิจารณาที่แต่ละค่าคงที่ t และสมมุติว่าค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A(t)$ ของระบบแปรตามเวลาระบบหนึ่งมีส่วนจริงเป็นลบ และถามว่าในกรณีนี้จะสามารถบอกถึงเสถียรภาพของจุดสมดุล $x_e = 0$ ของระบบนั้นได้หรือไม่ คำตอบก็คือไม่ได้สำหรับกรณีทั่วๆ ไปซึ่งได้แสดงไว้ใน [14]

ประวัติผู้วิจัย

นาย ธนา เติมกลิ่นจันทน์ เกิดวันที่ 31 กรกฎาคม พ.ศ. 2515 ที่ จังหวัดอุบลราชธานี เป็นบุตรของ น.พ. ถนอม และนางละม้าย เติมกลิ่นจันทน์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปี พ.ศ. 2537 และได้เข้าทำงานในตำแหน่งวิศวกรไฟฟ้า บริษัทสยามอ็อกซิเดนทอลอิเลคโตรเคมิคอล จำกัด เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สาขาระบบควบคุม ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2538 และในระหว่างปี พ.ศ. 2538 ได้รับหน้าที่เป็นผู้ช่วยสอนของห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า