บรรณานุกรม

ภาษาไทย

หนังสือ

กมล เอกไทยเจริญ. คณิตศาสตร์ 4 ค 014. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์กราฟิคอาร์ต, 2527.

คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย, สมาคม. เสริมประสบการณ์คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เล่มสี่. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์, 2527.

ชูศรี วงศ์รัตนะ. เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์เจริญผล, 2527.

ไชยยศ เรืองสุวรรณ. หลักการทฤษฎีเทคโนโลยีและนวกรรมทางการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์เรือนแก้วการพิมพ์, 2522.

นิพนธ์ ศุขปรีดี. นวกรรมเทคโนโลยีทางการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์พิฆเนศ, 2519.

ประคอง กรรณสูต. สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู. พระนคร: สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2515.

บุญชุ่น พิพิธกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บริษัทบพิธการพิมพ์จำกัด, 2523.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. การพิจารณานำนวกรรมและเทคโนโลยีมาปรับปรุงคุณภาพการประถมศึกษาในโรงเรียนที่มีครูไม่ครบชั้น. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2516.

____. คู่มือการประเมินผลการเรียนการสอนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์การศาสนา, 2523.

____. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524. กรุงเทพมหานคร: อมรินทร์การพิมพ์, 2523.

สุเทพ ทองอยู่. คู่มือคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 4 ค 014. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต, 2526.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 014. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2525.

บทความ

ชัยยงค์ พรหมวงศ์. "ศูนย์การเรียนชุมชน." วารสารครุศาสตร์ (ตุลาคม 2518): 5 – 7.

ยุสดี กุฎอินทร์. "การให้นักเรียนสอนกันเอง." จุลสารการประถมศึกษา (มิถุนายน 2522): 12 – 14.

เลขา ปิยะอัจฉริยะ. "การสอนตามเอกัตภาพ." วารสารครุศาสตร์ 4 (กุมภาพันธ์ – พฤษภาคม 2517): 18 – 29.

สุกัน เทียนทอง. "การซ่อมเสริมเพื่อให้ผ่านเกณฑ์." ประชาศึกษา 35(7) (เมษายน 2528): 22 – 24.

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์. "การสอนซ่อมเสริม." มิตรครู 22(8) (30 เมษายน 2523): 24 – 25.

สายใจ ทองเนียม. "การสอนซ่อมเสริม เป้าหมายที่ไม่ควรมองข้าม." สารพัฒนาหลักสูตร 33 (ธันวาคม 2527): 38 – 40.

เสนีย์ มีทรัพย์. "เด็กเรียนช้า จะช่วยอย่างไร." วิทยาสาร 29 (พฤษภาคม 2521): 20 – 23.

อรสา คิสสระ. "การสอนเป็นรายบุคคล." ศรีนครินทรสาร 1 (มิถุนายน – กันยายน 2517): 5 – 10.

เอกสารอื่น ๆ

ทัศนีญา ศิริพจนกุล. "การสร้างชุดการสอนตามเอกัตภาพวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

พนิดา พิสิฐอมรชัย. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มอ่อนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างกลุ่มที่เรียนเสริมจากครู กับ กลุ่มที่เรียนเสริมจากเพื่อนนักเรียน." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

เพ็ญสุข ภู่ตระกูล. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการอ่านเพื่อความเข้าใจภาษาอังกฤษของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยให้เพื่อนช่วยสอน กับ ที่เรียนด้วยตนเอง." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

ภานุมาศ พานารถ. "การทดลองใช้ชุดการสอนตามเอกัตภาพกับนักเรียนที่มีระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2524.

บุพิน พิพิธกุล. "ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล." เอกสารประกอบการสอนวิชาสื่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์, 2530. (อัดสำเนา)

รุจิร์ ภู่สาระ. "การศึกษาเปรียบเทียบวิธีสอนคณิตศาสตร์ ระดับ ม. 1 6วิธีที่จะให้ผลสัมฤทธิ์สูงและใช้เวลาในการเรียนการสอนน้อยที่สุด." ปริญญานิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2523.

รวีวรรณ ชุมชัย. "การสอนซ่อมเสริม." เอกสารการประชุมปฏิบัติการภาคคณิตศาสตร์ครั้งที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 2 ณ โรงเรียนมัธยมสาธิต ประสานมิตร, 2523. (อัดสำเนา)

วนิดา วิศวรบุตร. "การจัดระบบชุดการสอนรายบุคคลสำหรับวิชาการจัดการศึกษานอกสถานที่." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2517.

เศรษฐศักดิ์ หนูทอง. "การศึกษาผลสัมฤทธิ์และความคงทนในการเรียนซ่อมเสริม เรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมและแบบฝึกหัด." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527.

สุกัน เทียนทอง. "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซ่อมเสริมคณิตศาสตร์ เรื่อง ทศนิยม ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่สอนโดยครู กลุ่มเพื่อน และศึกษาด้วยตนเอง." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527.

สมคิด วงศ์นาถ. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ โดยใช้ชุดการสอนตามเอกัตภาพกับการสอนแบบบรรยาย ระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

สาธร แก่นมณี. "การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทัศนคติและความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ที่เรียนจากการสอนซ่อมเสริม 3 วิธี ในทฤษฎีการเรียนเพื่อรอบรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลิโนเมียล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2525.

ภาษาต่างประเทศ

หนังสือ

Beggs, Donald L. and Lewis, Ernest L. Measurement and Evaluation in the School. Boston: Houghton Mifflin Co., 1974.

Duane, James E. Individualized Instruction-program and Materials. Englewood Cliffs, N.J.: Educational Technology Publication, 1973.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. 5th ed. Auckland: McGraw-Hill Book Co., 1981.

Kochevar, Deloise E. Individualized Remedial Reading Techniques for the Classroom Teacher. West Nyack, N.Y.: Parker, 1975.

Kohout, Frank J. Statistics for Social Scientists: a Co-ordinated Learning System. New York: John Wiley Inc., 1974.

Mehrens, William A. and Lehmann, Irvin J. Standardized Tests in Education. 2d ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975.

Ostle, Bernard. Statistics in Research: Basic Concepts and Techniques for Research Workers. 2d ed. Ames: IOWA State University Press, 1974.

Runyon, Richard P. and Audrey Haber. Fundamentals of Behavioral Statistics. 3d ed. Addison Wesley Publishing Co., 1976.

Staff of Research and Education Association. The Statistics Problem Solver. New York: Research and Education Association, 1985.

บทความ

Brown, William Henry, Jr. "Elementary School Peer Tutoring in Mathematics Verbal Problem Solving." Dissertation Abstracts International 42 (October 1981): 1457-A.

Geer, Charles Paul. "The Effects of Cross-Age Tutoring on the Achievement and Self-Concept of Low-Achievement." Dissertation Abstracts International 38 (April 1978): 5909-A.

Hurley, Elizabeth Ann. "Peer Teaching in a Calculus Classroom: The Influence of Ability." Dissertation Abstracts International 44 (September 1983): 694-A.

Jones, Coy Aa Rom. "Peer Teaching in Permanent Project Teams." Dissertation Abstracts International 43 (August 1982): 352-A.

Larry, Hailey Willy. "The Effects of Cross-Age Tutoring on Self Concept and Mathematics Achievement." Dissertation Abstracts International 42 (May 1982): 4753-A.

McKethan, Lillian Doleres. "An Attitudinal and Achievement Comparison of Mathematics Deficient Lincoln University Freshmen Resulting from Structured Peer Tutoring Versus No Peer Tutoring in Mathematics." Dissertation Abstracts International 43 (September 1982): 4753-A.

Stone, James Lenious, Jr. "The Effect of Individualized Learning Activity Packages in Mathematics on the Academic Achievement of Seventh-and Eighth-Grade Students in the Demopolis City Schools." Dissertation Abstracts International 36 (August 1975): 690-A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" กับ "ลำดับและอนุกรม"

1. รองศาสตราจารย์ สมัย เหล่าวานิชย์
   รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตประสานมิตร

2. อาจารย์ เถลิง เกื้อกูลวงศ์
   อาจารย์ประจำคณะวิชาวิทยาศาสตร์ สหวิทยาลัยรัตนโกสินทร์ ธนบุรี

3. อาจารย์ ณัฐ อิ่มปิติวงศ์
   อาจารย์ประจำหมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนพุทธจักรวิทยา

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบชุดการเรียนการสอนรายบุคคล

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรพรรณ พันบรรจง
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2. รองศาสตราจารย์ พรรณทิพย์ ม้าณี
รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
วิทยาเขตปทุมวัน

3. อาจารย์ เถลิง เกื้อกูลวงศ์
อาจารย์ประจำคณะวิชาวิทยาศาสตร์ สหวิทยาลัยรัตนโกสินทร์ ธนบุรี

ภาคผนวก ข.

ตาราง และรายละเอียดการคำนวณ

ตารางที่ 4 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 013) ประจำภาคเรียนที่ 1 ของกลุ่มทดลอง และ กลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง

คะแนน (x_1)	f	fx_1	fx_1^2
59	1	59	3481
58	1	58	3364
57	1	57	3249
56	3	168	9408
55	3	165	9075
54	1	54	2916
53	4	212	11236
52	1	52	2704
51	1	51	2601
50	1	50	2500
49	4	196	9604
47	2	94	4418
46	1	46	2116
45	1	45	2025
44	3	132	5808
41	1	41	1681
37	1	37	1369
รวม	30	1517	77555

กลุ่มควบคุม

คะแนน (x_2)	f	fx_2	fx_2^2
59	1	59	3481
58	1	58	3364
57	1	57	3249
56	2	112	6272
55	3	165	9075
54	1	54	2916
53	5	265	14045
51	1	51	2601
50	1	50	2500
49	4	196	9604
48	1	48	2304
47	1	47	2209
46	2	92	4232
45	1	45	2025
44	2	88	3872
43	1	43	1849
41	1	41	1681
37	1	37	1369
รวม	30	1508	76648

กลุ่มทดลอง

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum fx_1}{n_1}$$

$$= \frac{1517}{30}$$

$$= 50.5667$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{n_1\sum fx_1^2 - (\sum fx_1)^2}{n_1(n_1 - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{30(77555) - (1517)^2}{30(29)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2326650 - 2301289}{870}}$$

$$= \sqrt{\frac{25361}{870}}$$

$$= \sqrt{29.1506}$$

$$= 5.3991$$

กลุ่มควบคุม

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum fx_2}{n_2}$$

$$= \frac{1508}{30}$$

$$= 50.2667$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{n_2\sum fx_2^2 - (\sum fx_2)^2}{n_2(n_2 - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{30(76648) - (1508)^2}{30(29)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2299440 - 2274064}{870}}$$

$$= \sqrt{\frac{25376}{870}}$$

$$= \sqrt{29.1678}$$

$$= 5.4007$$

ทดสอบความแปรปรวน

สูตร $$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad ; \quad S_2^2 > S_1^2$$

$S_1^2 = 29.1506$ $\qquad$ $S_2^2 = 29.1678$

$df_1 = n_1 - 1 = 29$ $\qquad$ $df_2 = n_2 - 1 = 29$

ตั้งสมมติฐาน $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F = \frac{29.1678}{29.1506} = 1.0006$$

หาค่า F จากตาราง ที่ $\alpha = 0.05$ ได้ค่า F = 1.8583

เปรียบเทียบค่า F ที่คำนวณได้กับค่า F จากตาราง พบว่า

F คำนวณได้ < F ตาราง

∴ ยอมรับ H_0 แสดงว่า ความแปรปรวนของคะแนนก่อนเรียนซ่อมเสริมของประชากรทั้งสองกลุ่มเท่ากัน นั่นคือ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

เปรียบเทียบมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ (ค 013)

ตั้งสมมติฐาน $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$\overline{X}_1$	=	50.5667	$\overline{X}_2$	=	50.2667
S_1	=	5.3991	S_2	=	5.4007
S_1^2	=	29.1506	S_2^2	=	29.1678

สูตร เนื่องจาก $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ดังนั้นใช้สูตร

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} ;df = n_1 + n_2 - 2$$

$$= \frac{50.5667 - 50.2667}{\sqrt{\frac{(29)(29.1506)+(29)(29.1678)}{30+30-2}\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)}}$$

$$= \frac{0.3}{\sqrt{1.94394}}$$

$$= 0.2152$$

<u>หาค่า t จากตาราง</u> ที่ $\alpha = 0.05$ $df = n_1 + n_2 - 2 = 58$; $t = 2.0021$

$\therefore$ t คำนวณได้ $<$ t จากตาราง

ยอมรับ H_0 แสดงว่า ค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนก่อนเรียนซ่อมเสริม ทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

ตารางที่ 5 คะแนนจากการทำแบบฝึกหัด และ แบบทดสอบหลังจากการใช้ชุดการเรียนการสอนรายบุคคลขั้นภาคสนาม เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

คนที่	คะแนนแบบฝึกหัด				คะแนนแบบทดสอบ			
	ชุด 1	ชุด 2	ชุด 3	รวม	ชุด 1	ชุด 2	ชุด 3	รวม
	5	5	6	16	4	6	3	13
1	4	5	6	15	4	6	2	12
2	5	4	6	15	2	6	3	11
3	5	5	5	15	4	4	3	11
4	4	5	5	14	4	6	2	12
5	5	5	6	16	3	5	1	9
6	5	5	6	16	4	6	2	12
7	4	5	6	15	3	5	3	11
8	5	2	6	13	3	6	2	11
9	4	5	4	13	4	6	3	13
10	5	4	3	12	3	6	3	12
11	5	4	6	15	4	4	3	11
12	5	5	5	15	4	4	3	11
13	4	5	2	11	4	6	3	13
14	5	5	4	14	2	6	2	10
15	4	5	4	13	3	6	3	12
16	5	5	5	15	2	6	3	11
17	5	5	6	16	2	6	3	11
18	5	4	6	15	1	5	2	8
19	5	5	3	13	3	6	3	12
20	5	5	4	14	2	6	2	10
รวม	94	93	98	285	61	111	51	223

<u>ตารางที่ 6</u> คะแนนจากการทำแบบฝึกหัด และ แบบทดสอบหลังจากการใช้ชุดการเรียนการสอนรายบุคคลชั้นภาคสนาม เรื่อง "ลำดับและอนุกรม"

คนที่	คะแนนแบบฝึกหัด						คะแนนแบบทดสอบ					
	ชุด 4	ชุด 5	ชุด 6	ชุด 7	ชุด 8	รวม	ชุด 4	ชุด 5	ชุด 6	ชุด 7	ชุด 8	รวม
	8	4	5	6	6	29	8	4	5	6	8	31
1	8	4	2	5	4	23	7	4	5	4	8	28
2	8	4	3	5	5	25	8	4	5	6	8	31
3	7	4	4	6	6	27	7	4	5	6	8	30
4	7	4	4	6	6	27	6	4	4	6	6	26
5	8	3	3	6	5	25	8	4	4	5	8	29
6	8	4	4	6	4	26	8	4	3	5	8	28
7	8	4	2	6	4	24	7	4	4	6	8	29
8	8	4	3	6	3	24	8	4	3	6	7	28
9	8	4	4	6	4	26	8	4	4	5	8	29
10	8	4	4	6	4	26	8	4	4	6	7	29
11	8	3	3	6	6	26	7	4	4	6	8	29
12	8	4	4	6	3	25	6	4	5	6	7	28
13	7	4	3	6	4	24	4	4	5	4	8	25
14	8	4	3	6	3	24	7	4	5	6	7	29
15	8	4	4	6	6	28	7	4	4	6	8	29
16	6	4	4	6	5	25	8	4	3	5	7	27
17	8	4	3	6	5	26	8	4	4	4	7	27
18	4	4	4	6	6	24	5	4	4	6	7	26
19	8	4	4	6	6	28	4	4	3	6	8	25
20	7	4	3	6	4	24	7	4	2	6	7	26
รวม	150	78	68	118	93	507	138	80	80	110	150	558

การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนรายบุคคลตามเกณฑ์มาตรฐาน 80 / 80

ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" จากตารางที่ 5

1. มาตรฐาน 80 ตัวแรก คำนวณจากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดถูก คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ $= \frac{C}{N} \times \frac{100}{A}$

เมื่อ $C = 285$

$N = 20$

$A = 16$

ดังนั้น คะแนนที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดรวมได้คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ

$$= \frac{285}{20} \times \frac{100}{16} = \frac{28500}{320} = 89.0625$$

2. มาตรฐาน 80 ตัวหลัง คำนวณจากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบถูก คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ $= \frac{S}{N} \times \frac{100}{T}$

เมื่อ $S = 223$

$N = 20$

$T = 13$

ดังนั้น คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบรวมได้คิดเฉลี่ยร้อยละ

$$= \frac{223}{20} \times \frac{100}{13} = \frac{22300}{260} = 85.7692$$

นั่นคือ ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ที่สร้างขึ้นมี

ประสิทธิภาพ 89.06 / 85.77

ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" จากตารางที่ 6

1. มาตรฐาน 80 ตัวแรก คำนวณจากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดถูก คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ $= \frac{C}{N} \times \frac{100}{A}$

เมื่อ $C = 507$

$N = 20$

$A \quad = \quad 29$

ดังนั้น คะแนนที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดรวมได้คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ

$$= \frac{507}{20} \times \frac{100}{29} = \frac{50700}{580} = 87.4138$$

2. มาตรฐาน 80 ตัวหลัง คำนวณจากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ $= \frac{S}{N} \times \frac{100}{T}$

เมื่อ $S = 558$

$N = 20$

$T = 31$

ดังนั้น คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบรวมได้คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ

$$= \frac{558}{20} \times \frac{100}{31} = \frac{55800}{620} = 90.00$$

นั่นคือ ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เรื่อง ลำดับและอนุกรม ที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ 87.41 / 90.00

ตารางที่ 7 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

ข้อที่	R_u	R_l	p	r
1	29	15	0.72	0.45
2	28	16	0.71	0.39
3	18	9	0.44	0.29
4	14	6	0.32	0.25
5	19	11	0.48	0.26
6	15	8	0.38	0.23
7	20	12	0.52	0.26
8	19	10	0.46	0.29
9	20	5	0.40	0.48
10	11	2	0.21	0.29
11	25	10	0.56	0.48
12	16	8	0.39	0.26
13	16	8	0.39	0.26
14	21	8	0.47	0.42
15	12	5	0.27	0.22
16	11	4	0.24	0.22
17	16	9	0.40	0.22
18	11	4	0.24	0.22
19	13	6	0.31	0.23
20	19	3	0.35	0.52
21	19	4	0.38	0.48
22	18	8	0.42	0.32
23	18	5	0.29	0.26
24	14	7	0.33	0.22
25	11	4	0.24	0.22
26	12	5	0.27	0.22
27	10	3	0.20	0.22
28	16	7	0.37	0.29
29	10	3	0.21	0.23
30	13	5	0.29	0.25

ตารางที่ 8 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม"

ข้อที่	R_u	R_l	p	r	ข้อที่	R_u	R_l	p	r
1	26	12	0.70	0.52	21	27	11	0.70	0.59
2	20	24	0.43	0.63	22	27	13	0.74	0.52
3	26	17	0.80	0.34	23	25	7	0.59	0.67
4	24	15	0.72	0.34	24	24	8	0.59	0.59
5	25	7	0.59	0.67	25	22	11	0.61	0.41
6	26	7	0.61	0.70	26	22	12	0.63	0.37
7	24	15	0.72	0.34	27	22	16	0.70	0.22
8	27	12	0.72	0.56	28	23	7	0.56	0.59
9	27	14	0.76	0.48	29	25	14	0.72	0.41
10	18	8	0.48	0.37	30	25	13	0.70	0.44
11	21	10	0.57	0.40	31	24	4	0.52	0.37
12	24	10	0.63	0.52	32	26	9	0.65	0.63
13	25	7	0.59	0.67	33	27	4	0.57	0.85
14	26	11	0.69	0.56	34	23	7	0.56	0.59
15	27	9	0.67	0.67	35	23	15	0.70	0.30
16	27	13	0.74	0.52	36	22	6	0.52	0.59
17	20	8	0.52	0.44	37	26	12	0.70	0.52
18	21	10	0.57	0.41	38	16	2	0.33	0.52
19	26	14	0.74	0.44	39	24	9	0.61	0.56
20	24	11	0.65	0.48	40	15	5	0.37	0.37

ตารางที่ 9 การหาค่า p, q และ $\sum pq$ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

ข้อที่	p	q = 1 − p	pq	ข้อที่	p	q = 1 − p	pq
1	0.71	0.29	0.2059	16	0.24	0.76	0.1824
2	0.71	0.29	0.2059	17	0.40	0.60	0.2400
3	0.44	0.56	0.2464	18	0.24	0.76	0.1824
4	0.32	0.68	0.2176	19	0.31	0.69	0.2139
5	0.48	0.52	0.2496	20	0.35	0.65	0.2275
6	0.37	0.63	0.2331	21	0.37	0.63	0.2331
7	0.52	0.48	0.2496	22	0.42	0.58	0.2436
8	0.47	0.53	0.2491	23	0.29	0.71	0.2059
9	0.40	0.60	0.2400	24	0.34	0.66	0.2244
10	0.21	0.79	0.1659	25	0.24	0.76	0.1824
11	0.56	0.44	0.2464	26	0.27	0.73	0.1971
12	0.39	0.61	0.2379	27	0.20	0.80	0.1600
13	0.39	0.61	0.2379	28	0.37	0.63	0.2331
14	0.47	0.53	0.2491	29	0.21	0.79	0.1659
15	0.27	0.73	0.1971	30	0.29	0.71	0.2059
							$\sum pq$ = 6.5291

<u>ตารางที่ 10</u> คะแนนและความถี่ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" จากการทดสอบนักเรียนจำนวน 100 คน

x	f	fx	fx^2	x	f	fx	fx^2
41	8	328	13448	25	3	75	1875
40	6	240	9600	24	1	24	576
39	4	156	6084	23	2	46	1058
38	3	114	4332	22	4	88	1936
37	5	185	6845	21	3	63	1323
36	6	216	7776	20	2	40	800
35	1	35	1225	19	5	95	1805
34	1	34	1156	18	2	36	648
33	1	33	1089	17	3	51	867
32	1	32	1024	16	13	208	3328
31	2	62	1922	15	6	90	1350
27	4	108	2916	14	8	112	1568
26	2	52	1352	13	4	52	676
				รวม	100	2575	76579

การคำนวณหาค่าความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

จากสูตร $$S_x^2 = \frac{n\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{100(76579) - (2575)^2}{100(99)}$$

$$= \frac{1027275}{9900}$$

$$= 103.765$$

การคำนวณหาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"

จากสูตร $$r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum pq}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{30}{29}\left[1 - \frac{6.5291}{103.765}\right]$$

$$= \frac{28.113}{29}$$

$$= 0.9694$$

ตารางที่ 11 การหาค่า p , q และ $\sum pq$ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม"

ข้อที่	p	q = 1 − p	pq	ข้อที่	p	q = 1 − p	pq
1	0.61	0.39	0.2379	21	0.61	0.39	0.2379
2	0.71	0.29	0.2059	22	0.65	0.35	0.2275
3	0.69	0.31	0.2139	23	0.52	0.48	0.2496
4	0.63	0.37	0.2331	24	0.52	0.48	0.2496
5	0.52	0.48	0.2496	25	0.53	0.47	0.2491
6	0.53	0.47	0.2491	26	0.55	0.45	0.2475
7	0.63	0.37	0.2331	27	0.61	0.39	0.2379
8	0.63	0.37	0.2331	28	0.48	0.52	0.2496
9	0.66	0.34	0.2244	29	0.63	0.37	0.2331
10	0.42	0.58	0.2436	30	0.61	0.39	0.2379
11	0.50	0.50	0.2500	31	0.45	0.55	0.2475
12	0.55	0.45	0.2475	32	0.56	0.44	0.2464
13	0.52	0.48	0.2496	33	0.50	0.50	0.2500
14	0.60	0.40	0.2400	34	0.48	0.52	0.2496
15	0.58	0.42	0.2436	35	0.61	0.39	0.2379
16	0.65	0.35	0.2275	36	0.45	0.55	0.2475
17	0.45	0.55	0.2475	37	0.61	0.39	0.2379
18	0.50	0.50	0.2500	38	0.29	0.71	0.2059
19	0.65	0.35	0.2275	39	0.53	0.47	0.2491
20	0.56	0.44	0.2464	40	0.32	0.68	0.2176
							$\sum pq =$ 9.5624

ตารางที่ 12 คะแนนและความถี่ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" จากการทดสอบนักเรียนจำนวน 114 คน

x	f	fx	fx^2	x	f	fx	fx^2
68	1	68	4624	45	5	225	10125
66	2	132	8712	44	1	44	1936
65	3	195	12675	43	4	172	7396
64	4	256	16384	42	1	42	1764
63	3	189	11907	41	5	205	8405
62	3	186	11532	40	2	80	3200
61	5	305	18605	39	3	117	4563
60	6	360	21600	38	5	190	7220
58	1	58	3364	37	3	111	4107
57	3	171	9747	36	2	72	2592
56	1	56	3136	35	1	35	1225
55	6	330	18150	34	2	68	2312
54	2	108	5832	33	2	66	2178
53	3	159	8427	32	1	32	1024
50	7	350	17500	31	1	31	961
49	1	49	2401	30	4	120	3600
48	2	96	4608	28	5	140	3920
47	4	188	8836	26	4	104	2704
46	6	276	12696	รวม	114	5386	269968

การคำนวณหาค่าความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม"

จากสูตร $$S_x^2 = \frac{n\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{114(269968) - (5386)^2}{114(113)}$$

$$= \frac{1767356}{12882}$$

$$= 137.1958$$

การคำนวณหาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม"

จากสูตร $$r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum pq}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{40}{39}\left[1 - \frac{9.5624}{137.1958}\right]$$

$$= \frac{37.2120}{39}$$

$$= 0.9542$$

<u>ตารางที่ 13</u> คะแนนผลสัมฤทธิ์การเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" กับ "ลำดับและอนุกรม"

กลุ่มทดลอง

คะแนน x_1	f	fx_1	fx_1^2
61	1	61	3721
57	3	171	9747
56	1	56	3136
55	1	55	3025
54	2	108	5832
53	5	265	14045
52	6	312	16224
51	2	102	5202
50	1	50	2500
49	1	49	2401
47	1	47	2209
46	2	92	4232
45	2	90	4050
41	2	82	3362
รวม	30	1540	79686

กลุ่มควบคุม

คะแนน x_2	f	fx_2	fx_2^2
62	2	124	7688
58	1	58	3364
57	1	57	3249
56	3	168	9408
55	2	110	6050
54	2	108	5832
53	2	106	5618
52	2	104	5408
49	2	98	4802
47	1	47	2209
46	1	46	2116
45	2	90	4050
43	1	43	1849
42	1	42	1764
39	2	78	3042
37	1	37	1369
34	1	34	1156
33	2	66	2178
30	1	30	900
รวม	30	1446	72052

กลุ่มทดลอง

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum fx_1}{n_1}$$

$$= \frac{1540}{30}$$

$$= 51.3334$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{n_1 \sum fx_1^2 - (\sum fx_1)^2}{n_1(n_1 - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{30(79686) - (1540)^2}{30(29)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2390580 - 2371600}{870}}$$

$$= \sqrt{\frac{18980}{870}}$$

$$= \sqrt{21.8161}$$

$$= 4.6708$$

กลุ่มควบคุม

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum fx_2}{n_2}$$

$$= \frac{1446}{30}$$

$$= 48.2$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{n_2 \sum fx_2^2 - (\sum fx_2)^2}{n_2(n_2 - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{30(72052) - (1446)^2}{30(29)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2161560 - 2090916}{870}}$$

$$= \sqrt{\frac{70644}{870}}$$

$$= \sqrt{81.2}$$

$$= 9.0111$$

<u>เปรียบเทียบมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์การเรียนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" กับ "ลำดับและอนุกรม"</u>

ตั้งสมมติฐาน $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$\bar{X}_1 = 51.3334$ $\bar{X}_2 = 48.2$

$S_1 = 4.6708$ $S_2 = 9.0111$

$S_1^2 = 21.8164$ $S_2^2 = 81.1999$

<u>ทดสอบค่าที</u> (t - test)

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \; ; df = n_1 + n_2 - 2$$

$$= \frac{51.3334 - 48.2}{\sqrt{\frac{29(4.6708)^2 + 29(9.0111)^2}{30 + 30 - 2}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right)}}$$

$$= \frac{3.1334}{\sqrt{3.4338}}$$

$$= \frac{3.1334}{1.8531}$$

$$= 1.69092$$

หาค่า t ในตาราง ที่ $\alpha = 0.05$, df $= 30 + 30 - 2 = 58$

ซึ่ง $t = 1.6723$

$\therefore$ t คำนวณได้ $>$ t ในตาราง

$\therefore$ ปฏิเสธ H_0 แสดงว่า ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนซ่อมเสริมจากเพื่อน สูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

ภาคผนวก ค.

แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง

จำนวนเชิงซ้อน

<u>คำชี้แจง</u> ...

1. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบมีทั้งหมด 4 หน้า จำนวน 30 ข้อ ใช้เวลา 90 นาที
2. กรุณาอย่าขีดเขียนหรือทำเครื่องหมายใด ๆ ลงในแบบทดสอบ
3. วิธีการตอบ ให้นักเรียนพิจารณาว่าคำตอบข้อใดถูกต้องที่สุด แล้วกากบาท (X) ทับตัวอักษรให้ตรงกับคำตอบในข้อนั้น

<u>ตัวอย่าง</u> การตอบข้อ ค.

ก	ข	ค	ง
		X	

ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบให้ทำเครื่องหมาย = ทับลงบนคำตอบเดิมเสียก่อน แล้วจึงตอบใหม่ตามต้องการ

<u>ตัวอย่าง</u> การเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ก. เป็นข้อ ง.

ก	ข	ค	ง
~~X~~			X

1. ข้อใดเป็นสัญลักษณ์แทน $\sqrt{-49}$

ก. $7i$ ข. $49i$ ค. $-7i$ ง. $-49i$

2. จงเขียน $\sqrt{3}\,i$ ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

ก. $0 - \sqrt{3}\,i$ ข. $\sqrt{3} + 0i$ ค. $0 + \sqrt{3}\,i$ ง. $\sqrt{3} - 0i$

3. $(2 - \sqrt{-9}) - \left[(3 - \sqrt{-25}) + (5 + \sqrt{-36})\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใด ?

ก. $10 - 4i$ ข. $-6 + 2i$ ค. $-4i - 6$ ง. $-6 + 4i$

4. ผลลัพธ์ในข้อใดมีค่าเท่ากับ $(-4i + 2i)^3$

ก. $-8i$ ข. $8i$ ค. 8 ง. -8

5. $i^{236} + i^{233} + i^{237} + i^{235} + i^{234}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $1 - 2i$ ข. 1 ค. i ง. $-i$

6. $\dfrac{5i^{66} + i^{77} + 7i^{88} + i^{99}}{i^{22} \times i^{33} \times 2i^{44} \times i^{55}}$ มีค่าเท่าใด

ก. $-i$ ข. -1 ค. 0 ง. 1

7. $\dfrac{(2 + i)(-2 + i)}{1 + 2i}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $1 + 2i$ ข. $5 + 10i$ ค. $-1 + 2i$ ง. $-5 + 10i$

8. ข้อใดมีค่าเท่ากับ $\dfrac{2 - i}{1 + i}$

ก. $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2})i$ ข. $\frac{1}{2} + (-\frac{3}{2})i$ ค. $2 - \frac{1}{i}$ ง. $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}) - i$

9. ถ้า $Z_1 = (0,2)$ และ $Z_2 = (1,-3)$ แล้ว $3Z_1 + Z_2^2$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $(0,8)$ ข. $(-8,0)$ ค. $10 + 0i$ ง. $8 - 12i$

10. ค่าของ Z จากสมการ $Z(2,-3) = (3,4)$ ตรงกับข้อใด

ก. $(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3})$ ข. $(-\frac{6}{25}, -\frac{12}{25})$ ค. $(-\frac{6}{25}, -\frac{1}{25})$ ง. $(-\frac{18}{13}, -\frac{1}{13})$

11. รากของสมการ $(x - yi)(2 + 3i) = 4 + 6i$ ตรงกับข้อใด

ก. $x = -2, \quad y = 0$ ข. $x = 0, \quad y = -2$

ค. $x = 2, \quad y = 0$ ง. $x = 1, \quad y = 0$

12. ข้อสรุปใดเป็นจริงเมื่อ $(x-4, 2)(y+z, x-z) = (-2,2)$

ก. $x + y = -z - 2$ ข. $x + y = 6 - z$

ค. $2 - z = x$ ง. $x = z$

13. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน (a, b) หารด้วยจำนวนเชิงซ้อน $2 + 3i$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็น $\frac{1}{3-2i}$ จะได้ว่า (a, b) ตรงกับข้อใด

ก. $(-1,0)$ ข. $(1,0)$ ค. $(0,1)$ ง. $(0,-1)$

14. กำหนดให้ $Z = 6 + 2i$ และ $W = \frac{3}{20} + (-\frac{1}{20})i$ แล้ว Z กับ W มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ก. Z เป็นอินเวอร์สการบวกของ W ข. Z เป็นอินเวอร์สการคูณของ W

ค. Z เป็นคอนจุเกตของ W ง. Z เป็นค่าสัมบูรณ์ของ W

15. อินเวอร์สการบวกของ $\left[(3,-4) - 2(1-i)\right]$ ตรงกับข้อใด

ก. $(1,2)$ ข. $(1,-2)$

ค. $(3,-4) + 2(1,-1)$ ง. $(-3,4) + 2(1,-1)$

16. ถ้า $(2x, -y) = \frac{(-8,0)}{1-2i}$ แล้วข้อใดเป็นอินเวอร์สการคูณของ $(\frac{5x}{2}, -\frac{5y}{4})$

ก. $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$ ข. $(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5})$ ค. $(-\frac{10}{20}, -\frac{1}{10})$ ง. $(\frac{1}{20}, \frac{1}{10})$

17. ข้อใดเป็นคอนจุเกตของ $\frac{2-3i}{1+3i}$

ก. $-\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i$ ข. $-\frac{7}{10} + \frac{9}{10}i$

ค. $\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i$ ง. $-\frac{9}{10} - \frac{7}{10}i$

18. กำหนดให้ $Z + \bar{Z} = 8$

$Z - \bar{Z} = 10i$, $\bar{Z}$ ตรงกับข้อใด

ก. $4 + 5i$ ข. $-8 - 10i$ ค. $4 - 5i$ ง. $8 + 10i$

19. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $(3,-5)$ หารด้วยจำนวนเชิงซ้อน $(2a, b)$ ได้ผลลัพธ์เป็น $-1 - 4i$ แล้ว $(2a, b)$ ตรงกับข้อใด

ก. $-i$ ข. i ค. $1 + i$ ง. $1 - i$

20. ค่าสัมบูรณ์ของ $\left[(3+i)+(1+2i)\right]$ ตรงกับข้อใด

ก. $5\sqrt{2}$ ข. 5 ค. $\sqrt{17}$ ง. $\sqrt{5}$

21. ถ้า $z_1 = 2-3i$ และ $z_2 = 4+5i$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. $|z_1+z_2| = \sqrt{40}$ ข. $|z_1-z_2| = \sqrt{68}$

ค. $|z_1\cdot z_2| = \sqrt{433}$ ง. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{13}{41}}$

22. สมการใดต่อไปนี้มีคำตอบในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1. $x^2-1 = 0$
2. $x^2-2 = 0$
3. $x^2+2 = 0$

ก. 1 และ 2 เท่านั้น ข. 2 และ 3 เท่านั้น

ค. 1 และ 3 เท่านั้น ง. 1,2 และ 3

23. รากที่ 2 ของ $-6-8i$ ตรงกับข้อใด

ก. $\pm(1+2i)$ ข. $\pm\sqrt{2}(1+2i)$ ค. $\pm\sqrt{2}(1-2i)$ ง. $\pm(\sqrt{2}-2i)$

24. เซตคำตอบของสมการ $z^4+5z^2 = 36$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อนตรงกับข้อใด

ก. $\{2,-2\}$ ข. $\{1, 2,-3, 3\}$

ค. $\{2,-2, 3i,-3i\}$ ง. $\{2,-2i,-3i, i\}$

25. ผลคูณของรากของสมการ $z^4-1 = 0$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อนมีค่าตรงกับข้อใด

ก. 1 ข. -1 ค. i ง. $-i$

26. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นรากของสมการ $x^2+2x+4 = 0$ แล้ว $|z_1|+|z_2|$ ตรงกับข้อใด

ก. $2\sqrt{10}$ ข. 8 ค. 4 ง. 2

27. ผลบวกของรากสมการ $z^3+2z^2+9z+18 = 0$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ตรงกับข้อใด

ก. -2 ข. i ค. $-2-6i$ ง. $2-6i$

28. ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ $z^4-3z^2+4 = 0$ ตรงกับข้อใด

ก. 4 ข. $4\sqrt{2}$ ค. $8\sqrt{2}$ ง. 16

29. เซตคำตอบของสมการ $x^3 = 8$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือข้อใด

ก. $\{2, 1+\sqrt{3}\,i, 1-\sqrt{3}\,i\}$

ข. $\{2, -1+\sqrt{3}\,i, 1-\sqrt{3}\,i\}$

ค. $\{2, -1-\sqrt{3}\,i, -1+\sqrt{3}\,i\}$

ง. $\{2, 1-\sqrt{3}\,i, -1-\sqrt{3}\,i\}$

30. $\{1, 8+\sqrt{3}\,i, 8-\sqrt{3}\,i\}$ เป็นเซตคำตอบของสมการใด

ก. $x^3 - 17x^2 + 83x - 67 = 0$

ข. $x^3 - 17x^2 + 83x + 67 = 0$

ค. $x^3 - 17x^2 - 83x - 67 = 0$

ง. $x^3 + 17x^2 + 83x + 67 = 0$

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง

ลำดับและอนุกรม

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบมีทั้งหมด 6 หน้า จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลา 120 นาที
2. กรุณาอย่าขีดเขียนหรือทำเครื่องหมายใด ๆ ลงในแบบทดสอบ
3. วิธีการตอบ ให้นักเรียนพิจารณาว่าคำตอบข้อใดถูกต้องที่สุด แล้วกากบาท(X) ทับตัวอักษรให้ตรงกับคำตอบในข้อนั้น

ตัวอย่าง การตอบข้อ ข.

ก	ข	ค	ง
	X		

ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบให้ทำเครื่องหมาย ═ ทับลงบนคำตอบเดิมเสียก่อน แล้วจึงตอบใหม่ตามต้องการ

ตัวอย่าง การเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ค. เป็นข้อ ง.

ก	ข	ค	ง
		~~X~~	X

1. ข้อใดจัดว่าเป็นลำดับ

ก. $f = \left\{(x,y) \in R^{+} \times R \ / \ y = x^{2} - 3\right\}$

ข. $g = \left\{(x,y) \in I \times I^{+} / \ y = 2x - 3\right\}$

ค. $h = \left\{(x,y) \in I^{+} \times I \ / \ y = 2^{x} - 1\right\}$

ง. $k = \left\{(x,y) \in I \times I \ / \ 2y = x - 2\right\}$

2. ห้าพจน์แรกของลำดับ $a_n = n(-1)^n + 1$ คือข้อใด

ก. $0, 3, -2, 5, -4, \ldots, (-1)^n + n$

ข. $0, 3, -2, 5, -4, \ldots, 1 + (-1)^n \cdot n$

ค. $0, 3, -2, 5, 6, \ldots, 1 + (-1)^n \cdot n$

ง. $0, 3, -2, 5, -4, \ldots, n(-1)^n - 1$

3. พจน์ที่ 7 ของลำดับ $\frac{2}{2}, \frac{5}{2}, \frac{10}{2}, \frac{17}{2}, \ldots$ คือข้อใด

ก. $\frac{25}{2}$ ข. $\frac{49}{2}$ ค. $\frac{50}{2}$ ง. $\frac{53}{2}$

4. พจน์ที่ n ของลำดับ 0, 4, 0, 8, 12, 0, ... คือข้อใด

ก. $(-1)^n + 1$ ข. $n(-1)^n + 1$

ค. $2\left[(-1)^n + 1\right]$ ง. $n\left[1 + (-1)^n\right]$

5. พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต $3b+2a, 2b+4a, b+6a, \ldots$ คือข้อใด

ก. $-b+8a$ ข. $-b+4a$ ค. $8a$ ง. $4a$

6. กำหนดให้พจน์ที่ 5 ของลำดับเลขคณิตคือ $\frac{27}{3}$ และผลต่างร่วมคือ -3 พจน์แรกของลำดับนี้คือข้อใด

ก. $\frac{63}{3}$ ข. $\frac{21}{3}$ ค. 9 ง. 3

7. กำหนดลำดับเลขคณิตมี $a_1 = 3$, $d = -3$ และ $a_n = -15$ ค่า n เท่ากับเท่าใด

ก. -5 ข. -7 ค. 5 ง. 7

8. ถ้าพจน์ที่ 3 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 21 และพจน์ที่ 6 เท่ากับ 9 พจน์แรกของลำดับเป็นเท่าใด

ก. 13 ข. 21 ค. 25 ง. 29

9. พจน์ที่อยู่ระหว่าง 5 และ -25 หนึ่งพจน์ซึ่งทำให้พจน์ทั้งสามเรียงกันเป็นลำเลขคณิต คือข้อใด

ก. -15 ข. -10 ค. 10 ง. 15

10. ถ้า $a, b, c, d, \ldots$ เรียงเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเท่ากับ x แล้ว ข้อใดเป็นข้อสรุปที่ถูกต้องของลำดับ $ka, kb, kc, kd, \ldots$

ก. เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วมเท่ากับ x

ข. เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วมเท่ากับ $x + k$

ค. เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วมเท่ากับ xk

ง. ไม่เป็นลำดับเลขคณิต

11. ถ้า x, $5x$, และ $6x + 9$ เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตแล้ว x เป็นเท่าใด

ก. 3 ข. -12 ค. 15 ง. 27

12. จากลำดับ $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \ldots$ อัตราส่วนร่วมของลำดับคืออะไร

ก. $\sqrt{2}$ ข. $\sqrt{3}$ ค. 2 ง. 3

13. พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต $-24, 12, -6, \ldots$ คือข้อใด

ก. $(-1)^{n} \cdot \frac{24}{2^{n}}$ ข. $(-1)^{n-1} \cdot \frac{24}{2^{n}}$

ค. $(-1)^{n+1} \cdot \frac{24}{2^{n+1}}$ ง. $(-1)^{n} \cdot \frac{24}{2^{n-1}}$

14. พจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิต $\frac{2a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a}{2b}, \ldots$ คือข้อใด

ก. $\frac{a^2}{2b}$ ข. $\frac{a}{4b}$ ค. $\frac{a^2}{4b}$ ง. $\frac{2b}{a}$

15. กำหนดให้พจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 3 ของลำดับเรขาคณิต คือ 9 และ 4 ตามลำดับ พจน์ที่ n เป็นเท่าใด

ก. $2^{n+1} \cdot 3^{3-n}$ ข. $2^{n-1} \cdot \frac{27}{3n}$

ค. $2^{n+1} \cdot \frac{27}{3n}$ ง. $2^{n-1} \cdot 3^{3-n}$

16. ค่า x ที่ทำให้ลำดับ $x-1,\ x+1,\ 2x+5$ เป็นลำดับเรขาคณิต เป็นเท่าใด

ก. 2 , 3 ข. −2 , 3 ค. 2 , −3 ง. −2 , −3

17. ถ้าผลบวกของ 3 พจน์แรกในลำดับเรขาคณิตคือ −3 และผลคูณคือ 8 ลำดับเรขาคณิตคือข้อใด

ก. $-4, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$ ข. $-4, 2, -1, 2, \ldots$

ค. $-1, 2, -4, 6, \ldots$ ง. $-1, 2, -4, -8, \ldots$

18. แดง ดำ และเขียว มีอายุ 10, 18, 30 ปีตามลำดับ อีกกี่ปีอายุของคนทั้งสามจะเรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

ก. 6 ข. 8 ค. 10 ง. 12

19. ถ้า $a, b, c, d, \ldots$ เรียงเป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ y แล้ว ข้อใดเป็นข้อสรุปที่ถูกต้องของลำดับ $ma, mb, mc, md, \ldots$

ก. เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วม = y

ข. เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วม = $y+m$

ค. เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วม = ym

ง. ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

20.

จากรูป สรุปได้ดังข้อใด

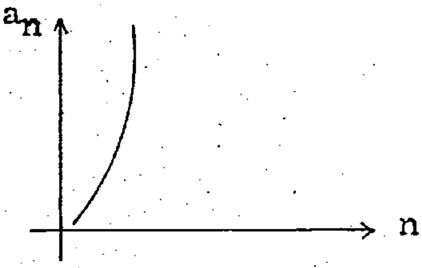
ก. เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของ a_n ลดลงโดยไม่มีขอบเขต

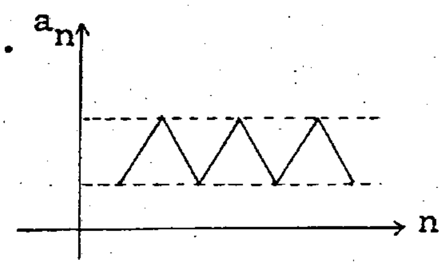
ข. เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของ a_n เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต

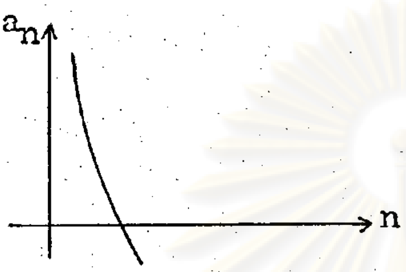
ค. เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของ a_n ลดลงเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง

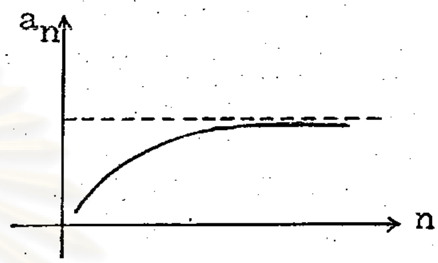
ง. เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของ a_n เพิ่มขึ้นเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง

21. ลำดับที่มีลิมิต คือ ลำดับที่เขียนรูปกราฟได้ดังข้อใด

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

22. ลำดับใดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ก. $1, -1, 1, -1, \ldots$ ข. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

ค. $1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, \ldots$ ง. $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{3}, \frac{17}{7}, \ldots$

23. ลำดับใดเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ก. $0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ ข. $5, 5, 5, 5, \ldots$

ค. $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$ ง. $6, 4, 2, 0, -2, \ldots$

24. $a_n = \frac{3-2n^2}{n}$ เป็นลำดับอะไร

ก. ลำดับเลขคณิต ข. ลำดับเรขาคณิต

ค. ลำดับคอนเวอร์เจนต์ ง. ลำดับไดเวอร์เจนต์

25. ถ้า $a_n = \frac{n+1}{n}$ มีลิมิตเท่ากับ 1 จะเขียนแทนข้อความเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ใด

ก. $\lim\limits_{n\to 0}\left[\frac{n+1}{n}\right] = 1$ ข. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+n\right] = 1$

ค. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\right] = 1$ ง. $\lim\limits_{n\to 0} a_n = 1$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}-\frac{2}{n-1}\right]$ เท่ากับเท่าใด

ก. 0 ข. 1 ค. -1 ง. หาค่าไม่ได้

27. ข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นจริง

ก. $\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$ ข. $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

ค. $\sum_{i=1}^{n} 6x_i = 6\sum_{i=1}^{n} x_i$ ง. $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$

28. $\sum_{i=1}^{4} (10 - 2i)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 16 ข. 20 ค. 32 ง. 40

29. ผลบวก n พจน์ของอนุกรมเลขคณิต $3 + 6 + 9 + \ldots$ คือข้อใด

ก. $\frac{n}{2}\left[3 + (n-1)3\right]$ ข. $\frac{n}{2}(3 + 3n)$

ค. $\frac{n}{2}(6 + 3n)$ ง. $\frac{n}{2}\left[6 + (n-1)(-3)\right]$

30. ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 6 ผลต่างร่วมเป็น 4 และพจน์สุดท้ายเท่ากับ 26 คือข้อใด

ก. 128 ข. 96 ค. 86 ง. 64

31. ไม้กองหนึ่งวางซ้อนกันในแนวระดับเป็นชั้น ๆ แต่ละชั้นมีจำนวนไม้มากกว่าชั้นถัดขึ้นไปอยู่ 3 ท่อน ถ้าชั้นติดพื้นดินมี 217 ท่อน และชั้นบนสุดมีไม้ 70 ท่อน กองไม้นี้มีไม้ทั้งหมดเท่าใด

ก. 7175 ข. 8000 ค. 8712 ง. 8912

32. ผลบวกของเจ็ดพจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $9 - (-6) - 4 - \ldots$ เป็นเท่าใด

ก. $\frac{64}{81}$ ข. $\frac{128}{81}$ ค. $\frac{463}{81}$ ง. $\frac{663}{81}$

33. พจน์สามพจน์ที่เรียงต่อกันในอนุกรมเรขาคณิต โดยมีผลบวกเท่ากับ 42 และมีผลคูณเท่ากับ 512 คือข้อใด

ก. 2, 8, 32 ข. 2, 10, 30 ค. 4, 8, 30 ง. 6, 12, 24

34. ผลบวกของพจน์แรกและพจน์ที่สองของอนุกรมเรขาคณิตมีค่าเท่ากับ -3 และผลบวกของพจน์ที่ห้ากับพจน์ที่หกเท่ากับ $-\frac{3}{16}$ ผลบวกของหกพจน์แรกของอนุกรมนี้เป็นเท่าใด

ก. $-\frac{15}{16}$ ข. $-\frac{60}{16}$ ค. $-\frac{51}{16}$ ง. $-\frac{63}{16}$

35. ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $4+4+4+4+\ldots$ คือข้อใด

ก. $4, 4, 4, 4, \ldots$ ข. $4, 8, 12, 16, \ldots$

ค. $4+4+4+4+\ldots$ ง. $4+8+12+16+\ldots$

36. ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมใด เท่ากับ $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \frac{1111}{10000}, \ldots$

ก. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}-\ldots$

ข. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ldots$

ค. $0.1+0.01-0.001+0.0001-\ldots$

ง. $0.01+0.001+0.0001+\ldots$

37. ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots$ เป็นเท่าใด

ก. 0 ข. 1 ค. $\frac{2}{3}$ ง. หาค่าไม่ได้

38. อนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$ เป็นอนุกรมแบบใด

ก. อนุกรมเลขคณิต ข. อนุกรมเรขาคณิต

ค. อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ง. อนุกรมไดเวอร์เจนต์

39. ถ้า $1+2a+2a^2+2a^3+\ldots = \frac{3}{2}$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{2}{3}$ ข. $\frac{1}{5}$ ค. $\frac{2}{5}$ ง. $\frac{3}{5}$

40. เขียน $0.3\dot{8}7\dot{2}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้เท่าไร

ก. $\frac{3872}{9990}$ ข. $\frac{3872}{9900}$ ค. $\frac{1253}{3330}$ ง. $\frac{3869}{9990}$

ภาคผนวก ง.

ชุดการเรียนการสอนรายบุคคลที่ใช้ในการวิจัย

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 1

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง จำนวนจินตภาพ

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาผลบวกของจำนวนจินตภาพสองจำนวนได้อย่างถูกต้อง
2. หาผลลบของจำนวนจินตภาพสองจำนวนได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลคูณของจำนวนจินตภาพตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

นักเรียนศึกษาเรื่อง ผลบวก ผลลบ และผลคูณของจำนวนจินตภาพจากบทเรียนแบบโปรแกรมต่อไปนี้

บทเรียนแบบโปรแกรม

เรื่อง

ผลบวก ผลลบ และ ผลคูณของจำนวนจินตภาพ

ข้อแนะนำในการเรียน

1. บทเรียนนี้นักเรียนสามารถเรียนได้ตามสบาย อ่านบทเรียนช้าๆและทำความเข้าใจไปเรื่อยๆ

2. ลักษณะบทเรียน จะมีคำอธิบายสลับคำถามให้นักเรียนตอบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาออกเป็นกรอบย่อยๆ เรียงตามลำดับจากง่ายไปหายาก นักเรียนทำตามทีละกรอบ

3. แบบเรียนนี้เป็นแบบเติมคำตอบ เลือกเติมคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

4. คำเฉลยจะอยู่ด้านข้างของกรอบถัดไป ขณะนักเรียนทำไม่ควรดูคำเฉลย เพราะจะทำให้นักเรียนไม่มีโอกาสได้คิด ควรใช้กระดาษปิดคำเฉลยไว้ก่อน

5. การตอบคำถาม นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง การตอบผิดไม่เสียหายอะไร นักเรียนอาจจะย้อนไปศึกษาบทเรียนกรอบก่อนๆหรือทำความเข้าใจคำตอบใหม่ จะทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนมากยิ่งขึ้น เมื่อตอบเสร็จแล้วจึงค่อยเปิดกระดาษตรวจดูคำเฉลยเพื่อทำความเข้าใจต่อไป

ก.1

ระบบจำนวนจริง เป็นระบบที่ประกอบไปด้วยจำนวนต่างๆ มากมาย ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้

ระบบจำนวนจริง

จำนวนอตรรกยะ | จำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม | จำนวนเต็ม

จำนวนเต็มลบ | ศูนย์ | จำนวนเต็มบวก หรือ จำนวนนับ

ก.2

$2, -3, \frac{4}{5}, -\frac{5}{9}, 2\frac{3}{4}, \sqrt{4}, -\sqrt{9}, \sqrt{16}$

จำนวนเหล่านี้เป็นจำนวนจริง เพราะเขียนอยู่ในรูปของจำนวน ______ หรือ ______ ได้

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{13}, \sqrt{19}, -\sqrt{23}$

จำนวนเหล่านี้เป็นจำนวนจริง เพราะเขียนอยู่ในรูปของจำนวน ______ ได้

เต็ม หรือเศษส่วน

อตรรกยะ

ก.3

พิจารณาสมการต่อไปนี้

	สมการ	จัดรูปสมการ	คำตอบของสมการ
1.	$x^2 - 1 = 0$	$x^2 = 1$	$x = \pm\sqrt{1}$
2.	$x^2 - 4 = 0$	$x^2 = 4$	$x = \pm$ ______
3.	$x^2 - 13 = 0$	$x^2 = 13$	$x = \pm$ ______
4.	$x^2 + 1 = 0$	$x^2 = -1$	$x = \pm\sqrt{-1}$
5.	$x^2 + 4 = 0$	$x^2 = -4$	$x = \pm$ ______
6.	$x^2 + 13 = 0$	$x^2 = -13$	$x = \pm$ ______

$\sqrt{4}$ หรือ 2

$\sqrt{13}$

$\sqrt{-4}$

$\sqrt{-13}$

ก.4

จากสมการ 1 , 2 , 3 ค่า ที่หาได้จากสมการคือ _____ , _____ , _____ เป็นจำนวนจริง เพราะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ ______ หรือ ______ ได้

แต่จากสมการ 4 , 5 , 6 ค่า ที่หาได้จากสมการคือ _____ , _____ , _____ ไม่เป็นจำนวนจริง เพราะไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ ______ หรือ ______ ได้

เรียกจำนวนเหล่านี้ว่า จำนวนจินตภาพ

$\pm\sqrt{1}$, $\pm\sqrt{4}$, $\pm\sqrt{13}$

จำนวนตรรกยะ หรือ จำนวนอตรรกยะ

$\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-4}$, $\pm\sqrt{-13}$

จำนวนตรรกยะ หรือ จำนวนอตรรกยะ

ก.5

แยกจำนวนเหล่านี้ว่าจำนวนใดเป็นจำนวนจริง และจำนวนใดเป็นจำนวนจินตภาพ

จำนวน	จำนวนจริง	จำนวนจินตภาพ
1. $\sqrt{8}$	✓	
2. $-\sqrt{7}$	______	______
3. $\sqrt{-9}$	______	______
4. $-\sqrt{-25}$	______	______
5. $\sqrt{2.5}$	______	______
6. $-\sqrt{-7.5}$	______	______

---

2. จริง
3. จินตภาพ
4. จินตภาพ
5. จริง
6. จินตภาพ

ก.6

พิจารณาจำนวนจินตภาพต่อไปนี้

จำนวนจินตภาพ ($\sqrt{-a}$)	เขียนในรูป ($\sqrt{a(-1)}$)	เขียนในรูป ($\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$)
$\sqrt{-4}$	$\sqrt{4\cdot(-1)}$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$
$\sqrt{-5}$	$\sqrt{5\cdot(-1)}$	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}$
$\sqrt{-9}$	______	______
$\sqrt{-16}$	______	______

<table>
<tr>
<td>

$\sqrt{9\cdot(-1)}$ $\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$

$\sqrt{16\cdot(-1)}$ $\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}$

</td>
<td>

ก.7

จำนวนจินตภาพทุกจำนวนจะมี $\sqrt{-1}$ เป็นตัวประกอบเสมอ ซึ่งต่อไปจะใช้<u>สัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$</u>

ดังนั้น

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$

$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{5}i$

$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} =$ _____

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} =$ _____

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3i

4i

</td>
<td>

ก.8

นำ i มายกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

<table>
<tr>
<td>

$i^1 = (\sqrt{-1}) = i$
$i^3 = i^2\cdot i = (-1)\cdot i = -i$
$i^5 = i^4\cdot i = 1\cdot i = i$
$i^7 = i^6\cdot i = (-1)\cdot i = -i$
$i^9 = i^8\cdot i = 1\cdot i = i$
.
.
.

<u>สรุป</u> i ที่อยู่ในเลขยกกำลังเป็นจำนวนคี่ จะมีค่าเป็นจำนวน _____(จริง/จินตภาพ)

</td>
<td>

$i^2 = (-1)^2 = -1$
$i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^6 = i^4\cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$
$i^8 = i^4\cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$
$i^{10} = i^8\cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$
.
.
.

<u>สรุป</u> i ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังเป็นจำนวนคู่ จะมีค่าเป็นจำนวน _____ (จริง/จินตภาพ)

</td>
</tr>
</table>

</td>
</tr>
</table>

จินตภาพ จริง	ก.9 จัดรูปของ i ที่ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเสียใหม่ โดยเริ่มตั้งแต่ i^4 จะได้ว่า

i^k	จัดในรูป $i^{(4n)+\text{เศษ}}$ เมื่อ	ผลลัพธ์
i^4	$i^{4\times1}$	1
i^5	$i^{(4\times1)+1}$	i
i^6	$i^{(4\times1)+2}$	−1
i^7	$i^{(4\times1)+3}$	−i
i^8	$i^{(4\times2)}$	1
i^9	________________	i
i^{10}	________________	− 1
i^{11}	________________	− i

<u>สรุปได้ว่า</u>

การหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก อาจทำได้โดยการนำ 4 ไปหาร k แล้วพิจารณาเศษที่ได้จากการหาร นั่นคือ

1. ถ้า 4 หาร k ได้ลงตัว จะได้ $i^k = i^{4n} = 1$
2. ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 1 จะได้ $i^k = i^{4n+1} = i$
3. ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 2 จะได้ $i^k = i^{4n+2} = -1$
4. ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 3 จะได้ $i^k = i^{4n+3} = -i$

$i^{(4\cdot 2)+1}$ $i^{(4\cdot 2)+2}$ $i^{(4\cdot 2)+3}$	ก.10 ดังนั้น $i^{12} = i^{(4\times 3)} = 1$ i^{21} = ______ = ______ $-i^{35}$ = ______ = ______ $-i^{44}$ = ______ = ______ i^{159} = ______ = ______
$i^{21} = i^{(4\times 5)+1} = i$ $-i^{35} = -i^{(4\times 8)+3} = i$ $-i^{44} = -i^{(4\times 22)} = -1$ $i^{159} = i^{(4\times 39)+3} = -i$	ก.11 เติมค่าตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้ 1. i^{57} = ______ 2. $-i^{159}$ = ______ 3. $(i^{246})^{2}$ = ______ 4. $\frac{6}{i^{120}}$ = ______
1. $i^{(4\times 14)+1} = i$ 2. $-i^{(4\times 39)+3} = i$ 3. $(i^{246})^{2} = i^{492}$ $= i^{(4\times 123)}$ 1 4. $\frac{6}{i^{(4\times 30)}} = \frac{6}{1} = 6$	ก.12 i^{13} = ________ = i i^{25} = ________ = i $\therefore\ i^{13} + i^{25} = i + i$ $= 2i$
$i^{13} = i^{(4\times 3)+1}$ $i^{25} = i^{(4\times 6)+1}$	ก.13 $\therefore\ i^{78} + i^{80}$ = ______ + ______ = ________

$-1+1$ 0	ก.14 $i^1+i^2+i^3+i^4 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$ $= \_\_\_\_\_\_$ $i^7+i^8+i^9+i^{10} = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$ $= \_\_\_\_\_\_$ $i^{16}+i^{15}+i^{14}+i^{13} = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$ $= \_\_\_\_\_\_$ $i^{28}+i^{26}+i^{29}+i^{27} = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$ $= \_\_\_\_\_\_$
$i+(-1)+(-i)+1$ 0 $(-i)+1+i+(-1)$ 0 $1+(-i)+(-1)+i$ 0 $1+(-1)+i+(-i)$ 0	ก.15 $i^1+i^2+i^3+i^4 = 0$ $i^7+i^8+i^9+i^{10} = 0$ $i^{16}+i^{15}+i^{14}+i^{13} = 0$ $i^{28}+i^{26}+i^{29}+i^{27} = 0$ <u>สรุป</u> ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆแล้วจะได้ว่า $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3} = \_\_\_\_\_\_$
0	ก.16 เติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้ 1. $i^{13}+i^{11}+i^{10}+i^{12} = \_\_\_\_\_\_$ 2. $-i^{154}+i^{152} = \_\_\_\_\_\_$ 3. $i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9 = \_\_\_\_\_\_$ 4. $-i^9+i^8+i^7+i^6 = \_\_\_\_\_\_$

1. 0 2. 2 3. $1 + i$ 4. $-2i$	ก.17 $i^{7} - i^{13} = i^{(4\times1)+3} - i^{(4\times3)+1}$ $= -i - i$ $= -2i$ $i^{12} - i^{14} =$ ____________ $=$ ____________ $i^{30} - i^{45} =$ ____________ $=$ ____________
$i^{(4\times3)} - i^{(4\times3)+2}$ 2 $i^{(4\times7)+2} - i^{(4\times11)+1}$ $-1 - i$	ก.18 $i^{9} = i^{(4\times2)+1}$ $= i$ $i^{17} = i^{(4\times4)+1}$ $= i$ $\therefore i^{9} \times i^{17} = i \times i$ $= i^{2}$ $= -1$
	ก.19 $i^{9} \times i^{8} \times i^{7} \times i^{6} =$ ____________ $=$ ____________ $i^{14} \times i^{15} \times i^{16} \times i^{17} =$ ____________ $=$ ____________ สรุป ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆแล้ว จะได้ว่า $i^{k} \times i^{k+1} \times i^{k+2} \times i^{k+3} =$ ____________

$i\times 1\times(-i)\times(-1) = -1$ $(-1)\times(-i \times 1\times i = -1$ -1	ก.20 เติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้ 1. $i^{12}\times i^{13}\times i^{14}\times i^{15}\times i^{16} =$ ________ 2. $-i^{22}\times i^{23}\times(-i^{24})\times i^{25} =$ ________ 3. $(-i^{30})\times(-i^{31})\times(-i^{32})\times i^{33} =$ ________
1. -1 2. 1 3. 1	ก.21 พิจารณา $\sqrt{-4}\times\sqrt{9} = 2i\times 3 = 6i$ $\sqrt{(-4)\times 9} = \sqrt{-36} = 6i$ $\therefore\ \sqrt{4}\times\sqrt{-9} =$ ________ $=$ ________ $\sqrt{4\times(-9)} =$ ________ $=$ ________ $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9} =$ ________ $=$ ________ $\sqrt{(-4)\times(-9)} =$ ________ $=$ ________
$2\times 3i = 6i$ $\sqrt{-36} = 6i$ $2i\times 3i = -6$ $\sqrt{36} = 6$	ก.22 $\sqrt{4}\cdot\sqrt{-9}$ $\square$ $\sqrt{4\times(-9)}$ $\square$ $\sqrt{-4}\times\sqrt{9}$ $(=,\neq)$ $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ $\square$ $\sqrt{(-4)\times(-9)}$ $(=,\neq)$ ดังนั้น ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\sqrt{a}\times\sqrt{-b} = \sqrt{-a}\times\sqrt{b} = \sqrt{-ab}$ $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)\times(-b)}$

<table>
<tr>
<td>= , =
≠</td>
<td>ก.23 จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้
$\sqrt{-16} \times \sqrt{9}$ = ________
$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$ = ________
$\sqrt{-4} \times \sqrt{-16}$ = ________
$\sqrt{-8} \times \sqrt{-36}$ = ________
$\sqrt{9} \times \sqrt{-16}$ = ________
$\sqrt{5} \times \sqrt{-25}$ = ________
$\sqrt{(-4) \times (-16)}$ = ________
$\sqrt{(-8) \times (-36)}$ = ________
$\sqrt{(-16) \times 9}$ = ________
$\sqrt{(-25) \times 5}$ = ________</td>
</tr>
<tr>
<td>12 i
$5\sqrt{5}$ i
− 8
− $12\sqrt{2}$
12i
$5\sqrt{5}$ i
8
$12\sqrt{2}$
12 i
$5\sqrt{5}$ i</td>
<td>ก.24 <u>สรุป</u>
(1) จำนวนจินตภาพ หมายถึง จำนวนซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง และใช้สัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$
(2) ในการหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก ทำได้โดยนำ 4 ไปหาร k แล้วพิจารณาเศษที่ได้จากการหาร คือ
– ถ้า 4 หาร k ลงตัวจะได้ $i^k = i^{4n} = 1$
– ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 1 จะได้ $i^k = i^{4n+1} = i$
– ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 2 จะได้ $i^k = i^{4n+2} = -1$
– ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 3 จะได้ $i^k = i^{4n+3} = -i$
(3) ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า
$i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$
$i^k \times i^{k+1} \times i^{k+2} \times i^{k+3} = -1$
(4) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า
$\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a}\ \sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$
(5) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า
$\sqrt{a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-a} \times \sqrt{b} = \sqrt{-ab}$
$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a) \times (-b)}$</td>
</tr>
</table>

ก.25

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. $i^{495} =$ ____________

2. $i^{1235} + i^{347} =$ ____________

3. $i^{720} \cdot (-i^{345}) =$ ____________

4. $i^{200} + i^{201} + i^{202} + i^{203} + i^{204} =$ ____________

5. $i^{2} \cdot i^{4} \cdot i^{8} \cdot i^{10} =$ ____________

6. $i^{6} \cdot i^{7} \cdot i^{8} \cdot i^{9} \ldots\ldots i^{25} =$ ____________

7. $\sqrt{-49} \cdot \sqrt{25}$ $\square$ $\sqrt{-25} \cdot \sqrt{49}$

8. $\sqrt{-49} \cdot \sqrt{-25} =$ ____________

9. $\sqrt{(-49) \cdot (-25)} =$ ____________

$-i$

$-2i$

$-i$

1

1

$-i$

$=$

-35

35

บัตรเนื้อหา

เรื่อง จำนวนจินตภาพ

> **นิยาม** จำนวนจินตภาพ หมายถึง จำนวนซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง และต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$

การยกกำลังของ i

เมื่อนำ i มายกกำลังจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \times i = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$
$$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$$
$$i^7 = i^6 \times i = (-1) \times i = -i$$
$$i^8 = i^7 \times i = (-i) \times i = -i^2 = 1$$
$$i^9 = i^8 \times i = i$$

.
.
.

จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้หลังจากนำเอา i มายกกำลังแล้ว คือ i , -1 , $-i$, และ 1 เท่านั้น

โดยทั่วไป ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จะพบว่า

$i^{4n} = 1$ เพราะ $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$

$i^{4n+1} = i$ เพราะ $i^{4n+1} = i^{4n} \times i = 1 \times i = i$

$i^{4n+2} = -1$ เพราะ $i^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

$i^{4n+3} = -i$ เพราะ $i^{4n+3} = i^{4n} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$

ดังนั้นในการหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก อาจทำได้โดยนำเอา 4 ไปหาร k แล้วพิจารณาเศษที่ได้จากการหาร นั่นคือ

1. ถ้า 4 หาร k ลงตัวจะได้ $i^k = i^{4n} = 1$
2. ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 1 จะได้ $i^k = i^{4n+1} = i$
3. ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 2 จะได้ $i^k = i^{4n+2} = -1$
4. ถ้า 4 หาร k เหลือเศษ 3 จะได้ $i^k = i^{4n+3} = -i$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าของ i^{2529} และ i^{1986}

$$\therefore i^{2529} = i^{(4\times 632)+1} = i \quad \_\_\_\_\_\_ \square$$

$$\therefore i^{1986} = i^{(4\times 496)+2} = -1 \quad \_\_\_\_\_\_ \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่าของ $\dfrac{-6}{i^{1250}}$ และ $\dfrac{3}{i^{964}}$

$$\therefore \frac{-6}{i^{1250}} = \frac{-6}{i^{(4\times 312)+2}} = \frac{-6}{-1} = 6 \quad \_\_\_\_\_\_ \square$$

$$\therefore \frac{3}{i^{964}} = \frac{3}{i^{(4\times 241)}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \_\_\_\_\_\_ \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่าของ $i^{42} \times i^{180} \times i^{25} \times i^{112} \times i^{36}$

$$\begin{aligned}
\therefore i^{42} \times i^{180} \times i^{25} \times i^{112} \times i^{36} &= i^{42+180+25+112+36} \\
&= i^{395} \\
&= i^{(4\times 98)+3} \\
&= -i \quad ______ \square
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาค่าของ $i^{15} + i^{16} + i^{17} + i^{18}$

$$\begin{aligned}
\therefore i^{15} + i^{16} + i^{17} + i^{18} &= i^{(4\times 3)+3} + i^{(4\times 4)} + i^{(4\times 4)+1} \\
&\quad + i^{(4\times 4)+2} \\
&= -i + 1 + i - 1 \\
&= 0 \quad ______ \square
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาค่าของ $i^{15} \times i^{16} \times i^{17} \times i^{18}$

$\therefore i^{15} \times i^{16} \times i^{17} \times i^{18} = (-i) \times 1 \times i \times (-1)$

$= -1$ ☐

จากตัวอย่างที่ 4 และ 5 จะสังเกตได้ว่า

ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆแล้ว

$i^{k} + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$

$i^{k} \times i^{k+1} \times i^{k+2} \times i^{k+3} = -1$

<u>นิยาม 2</u> ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหาค่าของ $\sqrt{-25} \times \sqrt{-49}$

$\therefore \sqrt{-25} \times \sqrt{-49} = \sqrt{25(-1)} \times \sqrt{49(-1)}$

$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1}$

$= 5i \times 7i$

$= 35i^2$

$= 35 \times (-1)$

$= -35$ ☐

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{-a} \times \sqrt{b} = \sqrt{-a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a) \times (-b)}$

บัตรแบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ $-i^{123}$
2. จงหาค่าของ $(1-i)^{2}$
3. จงหาผลลัพธ์ของ $2i^{9} - i^{8} - 3i^{7} + i^{6} - 5i^{5} + 4i^{4} + 2i^{2}$
4. จงหาผลบวกของ $i^{5} + i^{4} + i^{3} + i^{2}$
5. จงหาผลคูณของ $i^{13} \times i^{15} \times i^{16} \times i^{14}$

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. i
2. $-2i$
3. 0
4. 0
5. -1

บัตรทดสอบ

1. จงหาค่าของ $(2 + 3i) - (2 - 3i)^{2}$
2. จงหาค่าของ $3i(5i^{3} + i^{2} - 7) + 4$
3. จงหาค่าของ $i + i^{2} + i^{3} + i^{4} + \dots\dots + i^{102}$
4. จงหาค่าของ $i^{7} \times i^{8} \times i^{9} \times i^{10} \times i^{11} \times i^{12}$

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. $7 + 15i$
2. $19 - 24i$
3. $i - 1$
4. i

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 2

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา พร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง การบวก ลบ คูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนได้อย่างถูกต้อง
2. หาผลลบของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง
4. หาค่าสมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

1. พิจารณาสมการ $x^2 + 1 = 0$

$$\therefore x^2 = -1$$

จะพบว่า ไม่มีจำนวนจริงใดที่เป็นคำตอบของสมการ เพราะว่าจำนวนจริงใดๆเมื่อยกกำลังสองแล้วจะไม่เป็นจำนวนลบ

ดังนั้นจึงต้องสร้างระบบจำนวนขึ้นใหม่ เพื่อให้หาคำตอบของสมการได้ พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

คู่อันดับ	การเท่ากันของคู่อันดับ	พิจารณาการเท่ากัน
$(x, -4)$ กับ $(3, y)$	$(x, -4) = (3, y)$	$x = 3 \quad y = -4$
$(x, 2)$ กับ $(-1, y)$	$(x, 2) = (-1, y)$	$x = -1 \quad y = 2$
(y, x) กับ $(-3, -1)$	______ = ______	______________
(a, b) กับ (c, d)	______ = ______	______________

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่ามีระบบจำนวนขึ้นใหม่ คือ $(x, -4)$ กับ $(3, y)$, $(x, 2)$ กับ $(-1, y)$ และ (y, x) กับ $(-3, -1)$ ซึ่งเรียกจำนวนที่เขียนในรูปของคู่อันดับแต่ละจำนวนว่า " จำนวนเชิงซ้อน "

ตัวอย่างที่ 2

คู่อันดับ	การบวกกันของคู่อันดับ	ผลลัพธ์
(2 , 3) กับ (4 , 1)	(2 , 3) + (4 , 1)	(2+4 , 3 + 1)
(–2 , 1) กับ (6 ,–4)	(–2 ,1) + (6 ,– 4)	(– 2+ 6, 1 + (– 4))
(7 , 2) กับ (–5 ,–2)	______	______
(a , b) กับ (c , d)	______	______

ตัวอย่างที่ 3

คู่อันดับ	การคูณกันของคู่อันดับ	ผลลัพธ์
(2 , 3) กับ (4 , 5)	(2 , 3) × (4 , 5)	((2×4)-(3×5),(5×2)+(4×3))
(–1 , 2) กับ (3 , 4)	(– 1, 2) × (3 , 4)	((-1×3)-(2×4),(-1×4)+(2×3))
(5 ,–1) กับ (2 ,–3)	______	______
(a , b) กับ (c ,d)	______	______

จากตัวอย่าง 1 , 2 , 3 สรุปได้ว่า

นิยาม จำนวนเชิงซ้อนคือ จำนวนซึ่งเขียนในรูปของคู่อันดับ (a , b) เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ มีการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ เมื่อ (a , b) และ (c ,d) เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน

1. การเท่ากัน

   (a, b) = (c , d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

2. การบวก

   (a , b) + (c, d) = (a+c ,b+d)

3. การคูณ

   (a , b) (c, d) = (ac – bd , ad+bc)

1.1

จำนวนเชิงซ้อน2จำนวน	จากนิยามการเท่ากัน	จากนิยามการบวก	จากนิยามการคูณ
$(x, -4)$ กับ $(3, y)$	$(x, -4) = (3, y)$ $\therefore x = 3$ $y = -4$	$(x, -4)+(3, y)$ $=(x+3, y-4)$	$(x, -4)\times(3, y)$ $=(3x+4y, xy-12)$
$(2x, -y)$ กับ $(3, -4)$	$(2x, -y) = (3, -4)$ $\therefore$ ______ = ______ ______ = ______	______ = ______ ______	______ = ______ ______
$(3, -x)$ กับ $(\frac{y}{2}, 7)$	______ $\therefore$ ______ = ______ ______ = ______	______ = ______ ______	______ = ______ ______

1.2 ถ้า $(2x - y, 5) = (1, x + y)$

จากนิยามการเท่ากันจะได้ว่า

______ = ______ (1)

______ = ______ (2)

เมื่อหาค่า x, y จากสมการ(1)และ(2)

จะได้ว่า $x =$ ______ $y =$ ______

ถ้า $(x, -3y) + (-4y, 2x) = (-2, 1)$

จากนิยามการบวกจะได้ว่า

______ $= (-2, 1)$

จากนิยามการเท่ากันจะได้ว่า

______ = ______ (1)

______ = ______ (2)

แก้สมการ (1) , (2) จะได้

$x =$ ______ $y =$ ______

ถ้า $(x, y)\cdot(3, -4) = (15, 0)$

จากนิยามการคูณจะได้

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = (15,0)$

จากนิยามการเท่ากันจะได้

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ (1)

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ (2)

แก้สมการ (1) , (2) จะได้ $x = \_\_\_\_\_\_$ $y = \_\_\_\_\_\_$

2. พิจารณาการจับคู่ของจำนวนเชิงซ้อนกับจำนวนจริง

<u>การบวก</u> 1. $(2, 0) + (4, 0) = (6, 0)$

$$\boxed{2} + \boxed{4} = \boxed{6}$$

2. $(-4, 0) + (5, 0) = (1, 0)$

$$\boxed{-4} + \boxed{5} = \boxed{1}$$

3. $(-4,0) + (-2,0) = (-6,0)$

$$\boxed{-4} + \boxed{-2} = \boxed{-6}$$

4. $(-5,0) + (2,0) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

5. $(3,0) + (-4,0) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

จะพบว่าผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน ตามนิยามจะมีค่า ________ ผลรวมของจำนวนจริงที่จับคู่กับจำนวนเชิงซ้อนนั้น ๆ

<u>การคูณ</u>

1. $(2,0)\ (4,0) = (8,0)$

$$2 \times 4 = 8$$

2. $(-4,0)\ (5,0) = (-20,0)$

$$\bigcirc \times \bigcirc = \bigcirc$$

3. $(-4,0)\ (-2,0) = (8,0)$

$$\bigcirc \times \bigcirc = \bigcirc$$

4. $(-5,0)\ (2,0) = (-10,0)$

$$\bigcirc \times \bigcirc = \bigcirc$$

จะพบว่า ____

____

ดังนั้น $(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$ ตามนิยาม

ถ้าแทนค่า $(a,0)$ ด้วย a ; $(b,0)$ ด้วย b

และ $(a+b,0)$ ด้วย $a+b$

จะได้ว่า $(a,0) + (b,0) = a + b = (a+b,0)$

$(a,0) \times (b,0) = a \times b = (ab,0)$

ดังนั้น สามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน $(x, 0)$ ด้วยจำนวนจริง x ได้

พิจารณา $(0,b)\ (0,d) = (-bd,0)$ ตามนิยาม

ถ้าให้ $b = d = 1$ จะได้ว่า

$$(0,1)\times(0,1) = (-1,0)$$

ถ้าแทน $(0,1)$ ด้วย i จะได้ว่า

$$(0,1)\times(0,1) = i \times i = i^2 = -1 = (-1,0)$$

ถ้า b เป็นจำนวนจริงใดๆ $bi = (b,0)\times(0,1)$

$$(0,b)$$

$\therefore$ จำนวนเชิงซ้อน $(0,b)$ สามารถเขียนในรูปของ bi ได้

เนื่องจาก $(a,b) = (a,0) + (0,b)$

$\therefore (a,b) = \boxed{a} + \boxed{b\,i}$

สรุป จำนวนเชิงซ้อน (a,b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a + b\,i$ ได้ โดยเรียก a ว่า**ส่วนจริง**
b ว่า**ส่วนจินตภาพ**

2.1 เขียนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ในรูป $a + b\,i$ ได้ดังนี้

1. $(4,3) = 4 + 3i$
2. $(0,-2) = \boxed{}$
3. $(5,0) = \boxed{}$
4. $(-\sqrt{3},1) = \boxed{}$
5. $(-2,-1) = \boxed{}$

2.2 เขียนจำนวนเชิงซ้อน $a+b\,i$ ในรูป (a, b) ได้ดังนี้

1. $3 + 4i$ = ________
2. $7\,i$ = ________
3. $-\sqrt{5}i$ = ________
4. $-1-i$ = ________

2.3

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ
$3 + 4i$	______	______
$-4 + 5i$	______	______
$a^2+b^2-4c^2\,i$	______	______
$(2-5x)i$	______	______
$(2-\sqrt{3}i)^2$	______	______

2.4

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ
$5 + 0i$	5	0
______	-7	0
______	$4a + b$	0
$0 + 3i$	0	3
______	0	4
______	0	a^2+b^2

จากตาราง จะพบว่าจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ในกรณีที่ $b = 0$ จะได้ว่า $a + bi$ ก็คือ จำนวนจริง a นั่นเอง

และในกรณีที่ $a = 0$ จะได้ว่า $a + bi = bi$ เรียก bi ว่า จำนวนจินตภาพแท้

3. พิจารณาการบวก และคูณต่อไปนี้

ผลบวก	ถอดวงเล็บ	จัดหมู่ใหม่	ผลลัพธ์
$(4+2i) + (3+i)$	$4 + 2i + 3 + i$	$(4+3) + (2+1)i$	$7 + 3i$
$(5-2i)+(-3+2i)$	$5 - 2i - 3+2i$	$(5-3)+(-2+2)i$	$2 + 0i$
$(-3-2i)+(-3-5i)$	$-3-2i-3-5i$	$(-3-3)+(-2-5)i$	$-6-7i$
$(6+i) + (4-3i)$	______	______	______
$(-3+2i)+(7+2i)$	______	______	______
$(a+bi)+(c+di)$	______	______	______

<u>สรุป</u> $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

ผลลบ	ถอดวงเล็บ	จัดหมู่ใหม่	ผลลัพธ์
$(3+6i)-(4+4i)$	$3+6i-4-4i$	$(3-4)+(6-4)i$	$-1+2i$
$(-3+6i)-(4-4i)$	$-3+6i-4+4i$	$(-3-4)+(6+4)i$	$-7+10i$
$(2+3i)-(4-3i)$	________	________	________
$(7-2i)-(3+5i)$	________	________	________
$(-7-2i)-(-3-5i)$	________	________	________
$(a+bi)-(c+di)$	________	________	________

<u>สรุป</u> $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

ผลคูณ	กระจาย	จัดหมู่	ผลลัพธ์
$(4+2i)\times(3+i)$	$12+4i+6i+2i^2$	$(12-2)+(4+6)i$	$10+10i$
$(5-2i)\times(-3+2i)$	$-15+10i+6i-4i^2$	$(-15+4)+(10+6)i$	$-11+16i$
$(-3-2i)\times(-3-5i)$	________	________	________
$(6+i)\times(4-3i)$	________	________	________
$(-3+2i)\times(7+2i)$	________	________	________
$(a+bi)\times(c+di)$	________	________	________

<u>สรุป</u> $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

ดังนั้น

<u>นิยาม</u> เมื่อ $a+bi$ และ $c+di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด

1. $a+bi = c+di$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
2. $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
3. $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$
4. $(a+bi)\times(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

3.1 $x - 2yi = 4 + i$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้

_______ = _______ (1)

_______ = _______ (2)

แก้สมการ (1) , (2) จะได้

$x =$ _______ $y =$ _______

3.2 $(x - 2i) + (-4+yi) = 2 + 4i$

จากนิยามการบวก จะได้

_______ = $2 + 4i$

จากนิยามการเท่ากันจะได้

_______ = _______ (1)

_______ = _______ (2)

แก้สมการ (1),(2)จะได้

$x =$ _______ $y =$ _______

3.3 $(x+2i)\cdot(4-3i) = y + 22i$

จากนิยามการคูณ จะได้

_______ = $y + 22i$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้

_______ = _______ (1)

_______ = _______ (2)

แก้สมการ (1),(2) จะได้

$x =$ _______ $y =$ _______

4. ในระบบจำนวนเชิงซ้อน จะพบว่า

4.1 $(2,3)+(0,0) = (2,3)$

$(-4,3) + (0,0) = \boxed{}$

$(7,-5) + (0,0) = \boxed{}$

$(-3,-4) + (0,0) = \boxed{}$

เมื่อนำ (0,0) ไปบวกกับ (a, b)จะได้ผลลัพธ์ เป็น (a,b)

สรุป ในระบบจำนวนเชิงซ้อนนี้ (0,0) เป็น _______

4.2 $(2,3)+(-2,-3) = (0,0)$

$(-4,3) + \boxed{\quad\quad} = (0,0)$

$(7,-5) + \boxed{\quad\quad} = (0,0)$

$(-3-4) + \boxed{\quad\quad} = (0,0)$

$(a , b) + \boxed{\quad\quad} = (0,0)$

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

$a + bi$ มี ______________ เป็นอินเวอร์สการบวก

4.3 $(2,3)\ (1,0) = (2-0, 0+3) = (2,3)$

$(-4,3)\ (1,0) =$ ______________ $=$ ______________

$(7,-5)\ (1,0) =$ ______________ $=$ ______________

$(-3,4)\ (1,0) =$ ______________ $=$ ______________

$(a , b)(1,0) =$ ______________ $=$ ______________

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อนมี $(1,0)$ เป็น ________________

4.4 กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $2+3i$ ถ้าให้ $a + bi$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $2 + 3i$ จะได้ว่า

$(2+3i)\ (a+ bi) = 1+0i$

จากนิยามการคูณจะได้

$(2a-3b) + (2b+3a)i = 1+0i$

จากนิยามการเท่ากันจะได้

$2a-3b = 1$ (1)

$2b+3a = 0$ (2)

แก้สมการ (1),(2) จะได้

$a = \boxed{\quad\quad}$ $b = \boxed{\quad\quad}$

ถ้ากำหนดจำนวนเชิงซ้อน $a+ bi$ โดยให้ $x+yi$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $a + bi$ จะได้ว่า

$(a + b i)\ (x + y i) = 1 + 0i$

จากนิยามการคูณ จะได้

______________________ $= 1 + 0i$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้

__________ = __________ (1)

__________ = __________ (2)

แก้สมการ (1),(2) จะได้

x = __________ y = __________

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

$a + bi$ มี __________ เป็นอินเวอร์สการคูณ

ดังนั้น ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1. เอกลักษณ์การบวก คือ $0 + 0i$
2. อินเวอร์สการบวกของ $a + bi$ คือ $-a - bi$
3. เอกลักษณ์การคูณ คือ $1 + 0i$
4. อินเวอร์สการคูณของ $a + bi$ คือ $\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2} i$

ใช้สัญลักษณ์ $(a + bi)^{-1}$ แทน

ดังนั้น อินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ คือ

จำนวนเชิงซ้อน	อินเวอร์สการคูณ
$2 + i$	__________
$-2 + 3i$	__________
$1 + 4i$	__________
$-1 + 2i$	__________

5. พิจารณาการหารของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $\frac{3+2i}{5-4i} = (3 + 2i) \times \frac{1}{(5 - 4i)}$

$= (3 + 2i) \times (5 - 4i)^{-1}$

$= (3 + 2i) \times \left(\frac{5}{41} + \frac{4}{41} i\right)$

$= \frac{15 - 8}{41} + \frac{12 + 10}{41} i$

$= \frac{7}{41} + \frac{22}{41} i$

2) $\dfrac{3+4i}{2-7i}$ = ______
= ______
= ______
= ______

3) $\dfrac{-2+5i}{5+3i}$ = ______
= ______
= ______
= ______

ดังนั้น การหารจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

ถ้าให้ $z_1 = a+bi$

$z_2 = a+bi$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

6. พิจารณาการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$(1+2i)\times(1-2i) = 1+4 = 5$

$(3+4i)\times(3-4i) = 9+16 = 25$

$(-2+i)\times(-2-i)$ = ______ = ______

$(-4+5i)\times(-4-5i)$ = ______ = ______

$(-7-3i)\times(-7+3i)$ = ______ = ______

$(-8+9i)\times(-8-9i)$ = ______ = ______

ดังนั้น $(a+bi)\times(a-bi)$ = ______

และเรียก $a-bi$ ว่า คอนจุเกตของ $a+bi$

$\therefore$ คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ คือ

จำนวนเชิงซ้อน	คอนจุเกต
$2+i$	______
$4+3i$	______
$1-2i$	______
$5-4i$	______
$-3-7i$	______
$9-8i$	______

จากตาราง จะพบว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อนที่ส่วนจินตภาพไม่เท่ากับศูนย์ จำนวนเชิงซ้อนและคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นจะต่างกันเฉพาะส่วนจินตภาพ กล่าวคือ ส่วนจินตภาพเป็นจำนวนตรงข้ามกัน

7. พิจารณาการหารของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $$\frac{3+2i}{5-4i} = \frac{3+2i}{5-4i} \times \frac{(5+4i)}{(5+4i)}$$
$$= \frac{(15-8)+(12+10)i}{25+16}$$
$$= \frac{7}{41} + \frac{22}{41}i$$

2) $$\frac{3+4i}{2-7i} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$= \underline{\qquad\qquad}$$
$$= \underline{\qquad\qquad}$$

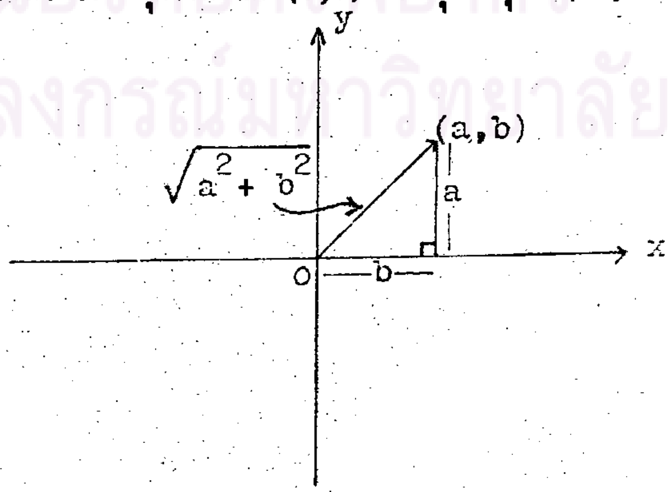
3) $$\frac{-2+5i}{5+3i} = \underline{\qquad\qquad}$$
$$= \underline{\qquad\qquad}$$
$$= \underline{\qquad\qquad}$$

จะเห็นว่า ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้อินเวอร์สการคูณของตัวหาร กับ ใช้คอนจุเกตของตัวหาร มีผลลัพธ์ ________

สรุป

การหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน ทำได้ 2 วิธีคือ
วิธีที่ 1 ใช้อินเวอร์สการคูณของตัวหาร
วิธีที่ 2 ใช้คอนจุเกตของตัวหาร

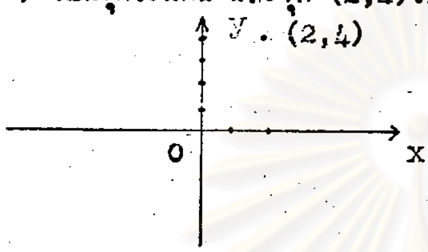
8. พิจารณาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (0,0) และจุดสิ้นสุดที่ (a,b)

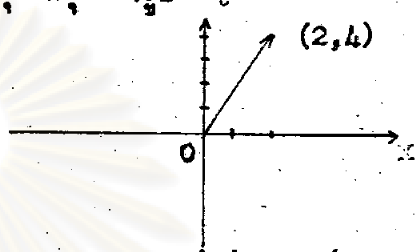


จะพบว่าระยะทางจากจุด (0,0) ถึงจุด (a , b) เท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2}$

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนในรูปของคู่อันดับ (a , b) หรือ a + bi โดยที่ a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ดังนั้นอาจเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน (a , b) ใดๆ ด้วยจุดบนระนาบแกนมุมฉากได้ โดยให้แกน x เป็นแกนจริง และแกน y เป็นแกนจินตภาพ เรียกระนาบที่เกิดขึ้นว่า ระนาบเชิงซ้อน

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน 2 + 4i แทนได้ด้วยจุด (2,4) หรือแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด (0,0) เป็นจุดเริ่มต้น และจุด (2,4) เป็นจุดสิ้นสุด ดังรูป





จะเรียกระยะทางจากจุด(0,0)ถึงจุด(a , b) ว่าค่าสัมบูรณ์ของ a + bi

สรุป

> นิยาม ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน a + bi เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a+bi|$ โดยที่ $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

8.1 เขียนเวกเตอร์ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อนเดียวกัน โดยใช้กระดาษกราฟแทนระนาบเชิงซ้อน

(2,3), (−3,1), (−2,−3), (4,2), (0,−1), (−2,0)

8.2 หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ข้อ8.1 ได้ดังนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ค่า $\sqrt{a^2+b^2}$	ผลลัพธ์
(2,3)	$\sqrt{2^2+3^2}$	$\sqrt{13}$
(−3, 1)	________	________
(−2,−3)	________	________
(4,2)	________	________
(0,−1)	________	________
(−2,0)	________	________
1 − i	$\sqrt{1+1}$	$\sqrt{2}$
− 2 − 3i	________	________
− 4 −2i	________	________
3 − 4i	________	________
3i	________	________

บัตรเฉลยบัตรกิจกรรม

เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเชิงซ้อน

เฉลยกิจกรรม

ตัวอย่างที่ 1

คู่อันดับ	การเท่ากันของคู่อันดับ	พิจารณาการเท่ากัน
(y, x) กับ $(-3, -1)$	$(y, x) = (-3, -1)$	$x = -1$, $y = -3$
(a, b) กับ (c, d)	$(a, b) = (c, d)$	$a = c$, $b = d$

ตัวอย่างที่ 2

คู่อันดับ	การบวกกันของคู่อันดับ	ผลลัพธ์
$(7, 2)$ กับ $(-5, -2)$	$(7, 2) + (-5, -2)$	$(7-5, 2-2)$
(a, b) กับ (c, d)	$(a, b) + (c, d)$	$(a+c, b+d)$

ตัวอย่างที่ 3

คู่อันดับ	การคูณกันของคู่อันดับ	ผลลัพธ์
$(5, -1)$ กับ $(2, -3)$	$(5, -1) \times (2, -3)$	$(10-3, -15-2)$
(a, b) กับ (c, d)	$(a, b) \times (c, d)$	$(ac - bd, ad + bc)$

1.1

จำนวนเชิงซ้อน2จำนวน	จากนิยามการเท่ากัน	นิยามการบวก	นิยามการคูณ
$(2x, -y)$ กับ $(3, -4)$	$(2x, -y) = (3, -4)$ $\therefore 2x = 3$ $y = 4$	$(2x, -y) + (3, -4)$ $= (2x+3, -y-4)$	$(2x, -y)(3, -4)$ $= (6x+4y, -8x-3y)$
$(3, -x)$ กับ $(\frac{y}{2}, 7)$	$(3, -x) = (\frac{y}{2}, 7)$ $\therefore 6 = y$ $x = 7$	$(3, -x) + (\frac{y}{2}, 7)$ $= (3 + \frac{y}{2}, -x+7)$	$(3, -x)(\frac{y}{2}, 7)$ $= (\frac{3y}{2} + 7x, 21 - \frac{xy}{2})$

1.2 ถ้า $(2x-y,5) = (1,x+y)$

จากนิยามการเท่ากันจะได้ว่า

$$2x-y = 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$x+y = 5 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

จาก(1) และ (2)

$$x = 2 \quad , \quad y = 3$$

ถ้า $(x,-3y) + (-4y,2x) = (-2,1)$

จากนิยามการบวก จะได้ว่า

$$(x-4y, -3y+2x) = (-2,1)$$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้ว่า

$$x-4y = -2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$2x-3y = 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

แก้สมการ(1),(2)

$$x = 2 \quad , \quad y = 1$$

ถ้า $(x,y)(3,-4) = (15,0)$

จากนิยามการคูณ จะได้ว่า

$$(3x+4y,-4x+3y) = (15,0)$$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้ว่า

$$3x+4y = 15 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$-4x+3y = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

แก้สมการ(1),(2)จะได้

$$x = \frac{9}{5} \quad , \quad y = \frac{12}{5}$$

2. <u>การบวก</u>

4. $(-5,0) + (2,0) = (-3,0)$

$$\boxed{-5} + \boxed{2} = \boxed{-3}$$

5. $(3,0) + (-4,0) = (-1,0)$

$$\boxed{3} + \boxed{-4} = \boxed{-1}$$

จะพบว่า ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนตามนิยามจะมีค่า <u>เท่ากับ</u> ผลรวมของจำนวนจริงที่จับคู่กับจำนวนเชิงซ้อนนั้นๆ

<u>การคูณ</u>

2. $(-4,0)\ (5,0) = (-20,0)$

$-4 \times 5 = -20$

3. $(-4,0)\ (-2,0) = (8,0)$

$-4 \times -2 = 8$

4. $(-5,0)\ (2,0) = (-10,0)$

$-5 \times 2 = -10$

จะพบว่า <u>ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนตามนิยามจะมีค่า เท่ากับ ผลคูณของจำนวนจริงที่จับคู่กับจำนวนเชิงซ้อนนั้นๆ</u>

ดังนั้น สามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน$(x,0)$ด้วยจำนวนจริง $\boxed{x}$ ได้

จำนวนเชิงซ้อน$(0, b)$สามารถเขียนในรูป $\boxed{bi}$ ได้

<u>สรุป</u> จำนวนเชิงซ้อน(a, b)สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $a + bi$ ได้

2.1 2) $(0,-2) = 0-2i$

3) $(5,0) = 5+0i$

4) $(-\sqrt{3},1) = -\sqrt{3}+i$

5) $(-2,-1) = -2-i$

2.2 1) $3 + 4i = (3,4)$

2) $7i = (0,7)$

3) $-\sqrt{5}i = (0,-\sqrt{5})$

4) $-1-i = (-1,-1)$

2.3

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ
$3 + 4i$	3	4
$-4 + 5i$	-4	5
$a^2 + b^2 - 4c^2 i$	a^2+b^2	$-4c^2$
$(2 - 5x)i$	0	$2 - 5x$
$(2 - \sqrt{3}i)^2$	1	$-4\sqrt{3}$

2.4

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ
$-7+0i$	-7	0
$(4a+b)+0i$	$4a+b$	0
$0+4i$	0	4
$0+(a^2+b^2)i$	0	a^2+b^2

3.

ผลบวก	ถอดวงเล็บ	จัดหมู่	ผลลัพธ์
$(6+i)+(4-3i)$	$6+i+4-3i$	$(6+4)+(1-3i)$	$10-2i$
$(-3+2i)+(7+2i)$	$-3+2i+7+2i$	$(-3+7)+(2+2)i$	$4+4i$
$(a+bi)+(c+di)$	$a+bi+c+di$	$(a+c)+(b+d)i$	

ผลลบ	ถอดวงเล็บ	จัดหมู่ใหม่	ผลลัพธ์
$(2+3i)-(4-3i)$	$2+3i-4+3i$	$(2-4)+(3+3)i$	$-2+6i$
$(7-2i)-(3+5i)$	$7-2i-3-5i$	$(7-3)+(-2-5)i$	$4-7i$
$(-7-2i)-(-3-5i)$	$-7-2i+3+5i$	$(-7+3)+(-2+5)i$	$-4+3i$
$(a+bi)-(c+di)$	$a+bi-c-di$	$(a-c)+(b-d)i$	

ผลคูณ	กระจาย	จัดหมู่	ผลลัพธ์
$(-3-2i)(-3-5i)$	$9+15i+6i+10i^2$	$(9-10)+(15+6)i$	$-1+21i$
$(6+i)(4-3i)$	$24-18i+4i-3i^2$	$(24+3)+(-18+4)i$	$27-14i$
$(-3+2i)(7+2i)$	$-21-6i+14i+4i^2$	$(-21-4)+(-6+14)i$	$-25+8i$
$(a+bi)(c+di)$	$ac+adi+bci+bdi^2$	$(ac-bd)+(ad+bc)i$	

<u>สรุป</u> $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

3.1 $x-2yi = 4+i$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้

$x = 4$ ________(1)

$-2y = 1$ ________(2)

แก้สมการ (1),(2) ได้

$x = 4, \quad y = -\frac{1}{2}$

3.2 $(x-2i)+(-4+yi) = 2+4i$

จากนิยามการบวกจะได้

$(x-4)+(-2+y)i = 2+4i$

จากนิยามการเท่ากัน จะได้

$x-4 = 2$ ________(1)

$y-2 = 4$ ________(2)

แก้สมการ (1),(2) ได้

$x = 6, \quad y = 6$

3.3 $(x+2i)(4-3i) = y+22i$

จากนิยามการคูณจะได้

$(4x+6)+(-3x+8)i = y+22i$

จากนิยามการเท่ากันจะได้

$4x+6 = y$ ________(1)

$-3x+8 = 22$ ________(2)

แก้สมการ (1),(2) ได้

$x = -\frac{14}{3} \quad y = -\frac{38}{3}$

4. 4.1 $(-4,3)+(0,0) = \boxed{(-4,3)}$

$(7,-5)+(0,0) = \boxed{(7,-5)}$

$(-3,-4)+(0,0) = \boxed{(-3,-4)}$

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อนมี (0,0) เป็น<u>เอกลักษณ์ของการบวก</u>

4.2) $(-4,3)+\boxed{(4,-3)} = (0,0)$

$(7,-5)+\boxed{(-7,5)} = (0,0)$

$(-3,-4)+\boxed{(3,4)} = (0,0)$

$(a,b)+\boxed{(-a,-b)} = (0,0)$

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

$a+bi$ มี <u>$-a-b\,i$</u> เป็นอินเวอร์สของการบวก

4.3) $(-4,3)(1,0) = (-4-0,0+3) = (-4,3)$

$(7,-5)(1,0) = (7-0,0-5) = (7,-5)$

$(-3,-4)(1,0) = (-3-0,0-4) = (-3,-4)$

$(a,b)(1,0) = (a-0,0+b) = (a,b)$

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อนมี (1,0) เป็น<u>เอกลักษณ์ของการคูณ</u>

4.4) $a = \frac{2}{13}$ $b = -\frac{3}{13}$

จาก $(a+bi)(x+yi) = 1+0i$

นิยามการคูณจะได้

$(ax-by)+(ay+bx)i = 1+0i$

นิยามการเท่ากันจะได้

$ax - by = 1$ (1)

$ay + bx = 0$ (2)

แก้สมการ (1),(2) จะได้

$x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$

<u>สรุป</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

$a+bi$ มี $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ เป็นอินเวอร์สของการคูณ

จำนวนเชิงซ้อน	อินเวอร์สของการคูณ
$2+i$	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$
$-2+3i$	$-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$
$1+4i$	$\frac{1}{17}-\frac{4}{17}i$
$-1+2i$	$-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

5. 2) $\frac{3+4i}{2-7i} = (3+4i)\times(2-7i)^{-1}$

$= (3+4i)\left(\frac{2}{53}+\frac{7}{53}i\right)$

$= \left(\frac{6}{53}-\frac{28}{53}\right)+\left(\frac{21}{53}+\frac{8}{53}i\right)$

$= -\frac{22}{53}+\frac{29}{53}i$

3) $\frac{-2+5i}{5+3i} = (-2+5i)\times(5+3i)^{-1}$

$= (-2+5i)\left(\frac{5}{34}-\frac{3}{34}i\right)$

$= \left(\frac{-10}{34}+\frac{15}{34}\right)+\left(\frac{6}{34}+\frac{25}{34}i\right)$

$= \frac{5}{34}+\frac{31}{34}i$

6. $(-2+i)(-2-i) = 4+1 = 5$

$(-4+5i)(-4-5i) = 16+25 = 41$

$(-7-3i)(-7+3i) = 49+9 = 58$

$(-8+9i)(-8-9i) = 64+81 = 145$

ดังนั้น $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

จำนวนเชิงซ้อน	คอนจุเกต
$2+i$	$2-i$
$4+3i$	$4-3i$
$1-2i$	$1+2i$
$5-4i$	$5+4i$
$-3-7i$	$-3+7i$
$9-8i$	$9+8i$

2) $\frac{3+4i}{2-7i} = \frac{3+4i}{2-7i}\times\frac{2+7i}{2+7i}$

$= \frac{(6-28)+(21+8)i}{4+49} = -\frac{22}{53}+\frac{29}{53}i$

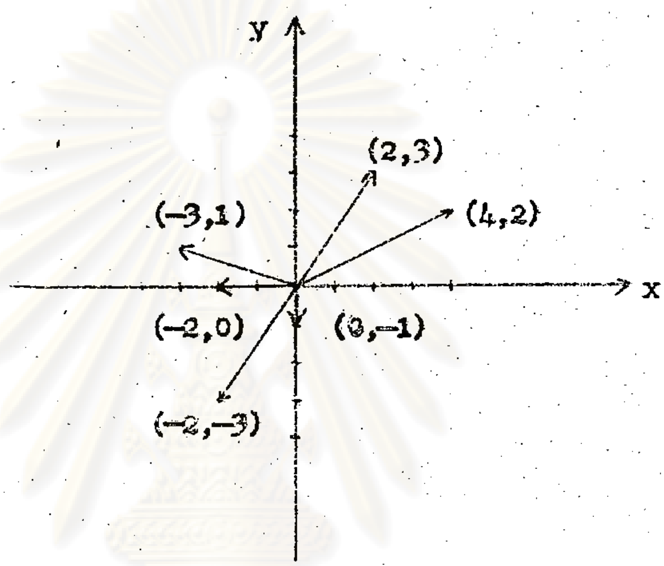
3) $\frac{-2+5i}{5+3i} = \frac{-2+5i}{5+3i} \times \frac{5-3i}{5-3i}$

$$= \frac{(-10+15)+(6+25)\,i}{25+9}$$

$$= \frac{5}{34} + \frac{31}{34}\,i$$

จะเห็นว่า _ _ _ _ _ _ มีผลลัพธ์ เท่ากัน

8.1



จำนวนเชิงซ้อน	ค่า $\sqrt{a^2+b^2}$	ผลลัพธ์
(−3,1)	$\sqrt{3^2+1^2}$	$\sqrt{10}$
(−2,−3)	$\sqrt{2^2+3^2}$	$\sqrt{13}$
(4,2)	$\sqrt{4^2+2^2}$	$\sqrt{20}$
(0,−1)	$\sqrt{0^2+(-1)^2}$	1
(−2,0)	$\sqrt{(-2)^2+0^2}$	2
$-2-3i$	$\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}$	$\sqrt{13}$
$-4-2i$	$\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}$	$\sqrt{20}$
$3-4i$	$\sqrt{3^2+(-4)^2}$	5
$3i$	$\sqrt{3^2}$	3

บัตรเนื้อหา

<u>เรื่อง</u> การบวก ลบ คูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

<u>นิยาม</u> จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป (a, b) หรือ $a+bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

เรียก a เป็นส่วนจำนวนจริง (Real part)

b เป็นส่วนจินตภาพ (Imaginary part)

<u>ตัวอย่างที่1</u> จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ
1) 8	8	0
2) $-7i$	0	-7
3) $2+3i$	2	3
4) $-5-2i$	-5	-2
5) $-i^{18}$	1	0

<u>นิยาม</u> การเท่ากัน การบวก การลบและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

1. $a+bi = c+di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
3. $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$
4. $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

<u>ตัวอย่างที่2</u> จงหาจำนวนจริง x และ y ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$(x+2y)+(4x-3y)i = (2x-1)+(y-6)i$$

จะได้ว่า $x+2y = 2x-1$ ______ (1)

$4x-3y = y-6$ ______ (2)

จาก (1) $2y = x-1$ ______ (3)

จาก (2) $4y = 4x+6$

$2y = 2x+3$ ______ (4)

(3) = (4) $x-1 = 2x+3$

$x = -4$ ______ $\square$

แทนค่า $x = -4$ ใน (3)

$\therefore\ y = \frac{-4-1}{2} = -\frac{5}{2}$ ______ $\square$

<u>ตัวอย่างที่3</u> จงหาค่าของ

1. $(6-2i)+(-4+6i) = (6-4)+(-2+6)i$

   $= 2+4i$ ______ $\square$

2. $(-4-5i)+(7+2i) = (-4+7)+(-5+2)i$

   $= 3-3i$ ______ $\square$

3. $(9-7i)-(-5-3i) = \big(9-(-5)\big)+\big(-7-(-3)\big)i$

   $= 14-4i$ ______ $\square$

4. $(-4-5i)-(-7-3i) = \big(-4-(-7)\big)+\big(-5-(-3)\big)i$

   $= 3-2i$ ______ $\square$

<u>เอกลักษณ์ กับ อินเวอร์สการบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน</u>

ถ้า $a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆแล้ว

$$(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i$$

$$= a+bi$$

$$(a+bi)+(-a-bi) = \big(a+(-a)\big)+\big(b+(-b)\big)i$$

$$= 0+0i$$

เอกลักษณ์การบวกของ $a+bi$ คือ $0+0i$

อินเวอร์สการบวกของ $a+bi$ คือ $-a-bi$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

เอกลักษณ์การคูณของ $a+bi$ คือ $1+0i$

อินเวอร์สการคูณของ $a+bi$ คือ $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

<u>นิยาม</u> คอนจุเกตของ $a+bi$ คือ $a-bi$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาอินเวอร์สการคูณของ $3-4i$

$$\therefore (3+4i)^{-1} = \frac{3}{9+16} - \frac{4}{9+16}i$$

$$= \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \qquad \square$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาคอนจุเกตของ $z = -5+3i$

$$\therefore \bar{z} = -5-3i \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่4</u> จงหาค่าของ

1) $(2+3i)(4+5i) = (8-15)+(10+12)i$

$= -7+22i \qquad \square$

2) $(-5+2i)(4-2i) = (-20+4)+(10+8)i$

$= -16+18i \qquad \square$

3) $\frac{-3+2i}{5-4i} = \frac{(-3+2i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)}$

$= \frac{-15-12i+10i-8}{25+16}$

$= \frac{-23-2i}{41}$

$= \frac{-23}{41} - \frac{2}{41}i \qquad \square$

ในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน ทำได้ 2 วิธีคือ

1. ใช้คอนจุเกตของตัวหาร
2. คูณด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหาร

บัตรแบบฝึกหัด

คำสั่ง: จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1) $(1-i)^2$: ส่วนจริงคือ ______ ส่วนจินตภาพคือ ______

2) $(2+\sqrt{-36})+(-3-2\sqrt{-16})$ เขียนในรูปของ $a+bi$ คือ ______

3) $(3+2i)-(1-3i)$ เขียนในรูป $a+bi$ คือ ______

4) $\dfrac{11+2i}{(4-3i)(2+i)}$ เขียนในรูป $a+bi$ คือ ______

5) ค่าสัมบูรณ์ของ $(4-3i)\times(2+i)$ คือ ______

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1) $0\ ,\ -2$

2) $-1-2i$

3) $2+5i$

4) $\dfrac{117}{125}+\dfrac{44i}{125}$

5) $5\sqrt{5}$

บัตรทดสอบ

คำสั่ง : จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

1) $(2+i)^2$: ส่วนจริงคือ ______ ส่วนจินตภาพคือ ______

2) $(5-2\sqrt{-49})-(8+3\sqrt{-25})$ เขียนในรูป $a+bi$ คือ ______

3) $(-2+3i)+5(1-i)$ เขียนในรูป $a+bi$ คือ ______

4) กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z_1=3-2i,\quad z_2=2-3i$

$z_1^2-z_2^2=$ ______

5) สมการ $(1-i)x+(1+i)y=1-3i$ มีค่า $x=$ ______ $y=$ ______

6) ค่าสัมบูรณ์ของ $\dfrac{3+2i}{4+3i}$ คือ ______

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1) $3 , 4$

2) $-3 \quad -29i$

3) $3 - 2i$

4) $10 + 0i$

5) $x = 2 , y = -1$

6) $\sqrt{\frac{13}{5}}$

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 3

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรม
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงาน พร้อมทั้งบัตรเฉลยผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบ หรือ บัตรปัญหา พร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง การหารากสมการของจำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หารากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการที่กำหนดให้อย่างถูกต้อง

2. หาสมการ เมื่อกำหนดคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนให้ได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ศึกษาเรื่องการหารากของสมการ และ การหาสมการ เมื่อกำหนดรากของสมการที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนให้ จากเอกสารแนะแนวทาง ต่อไปนี้

เอกสารแนะแนวทาง

เรื่อง

การหารากของสมการและการสร้างสมการ

<u>ข้อแนะนำในการเรียน</u>

1. เอกสารนี้นักเรียนสามารถเรียนได้ตามสบาย อ่านไปช้าๆและทำความเข้าใจไปเรื่อยๆ
2. ลักษณะของเอกสาร จะมีตัวอย่างอธิบายให้เพื่อเป็นการแนะแนวทางและมีแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำตาม เรียงลำดับจากง่ายไปหายาก
3. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารแนะแนวทางเสร็จแล้ว ตรวจดูคำตอบเฉลยจากเอกสารคำตอบ
4. หากนักเรียนอ่านแล้วไม่เข้าใจข้อความใด ให้นักเรียนสอบถามจากครูผู้คุมได้

1. พิจารณาการแยกตัวประกอบของ $a^2 - b^2$ จะพบว่า

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ดังนั้น $x^2 - 4 = (x^2 - 2^2)$

$$= (x-2)(x+2)$$

แยกตัวประกอบต่อไปนี้ ได้เป็น

$x^2 - 1 =$ ____________

$x^2 - 16 =$ ____________

$x^2 - 25 =$ ____________

2. กำหนดสมการ $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$\therefore$ ค่า x ที่เป็นรากสมการหรือคำตอบ เมื่อกำหนด

$x^2 - 1 = 0$ คือ $x =$ ____________

$x^2 - 16 = 0$ คือ $x =$ ____________

$x^2 - 25 = 0$ คือ $x =$ ____________

3. พิจารณาการหาค่า x เมื่อกำหนดให้ $x^2 + 4 = 0$

ดังนั้น $x^2 = -4$

$$\therefore x = \pm\sqrt{-4}$$

จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นรากสมการของจำนวนจริงได้ แต่ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ทำได้ดังนี้

เนื่องจาก $i^2 = -1$

$$-i^2 = 1 \Rightarrow -4i^2 = 4\cdot 1$$

$$\therefore x^2 + 4 = x^2 - 4i^2$$

$$= x^2 - (2i)^2$$

$$= (x-2i)(x+2i)$$

ดังนั้น $x^2 + 4 = 0$

$$x = \pm 2i$$

แยกตัวประกอบต่อไปนี้ ในเทอมของ i ได้เป็น

$x^2 + 9 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$4p^2 + 16q^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$4a + 5b^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

4. พิจารณาการแยกตัวประกอบของ $z^4 + 16$ ในเทอมของ i

$$\therefore \quad z^4 + 16 = z^4 - 16i^2$$
$$= (z^2)^2 - (4i)^2$$
$$= (z^2 - 4i)(z^2 + 4i)$$

แยกตัวประกอบในเทอมของ i ของ

$z^8 + 4 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$z^4 - 64 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

5. พิจารณาการแยกตัวประกอบในเทอมของ i ของ

$$z^2 - 6z + 8 = (z - 4)(z - 2)$$
$$z^4 - 2z^2 - 3 = (z^2 - 3)(z^2 + 1)$$
$$= (z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z^2 - i^2)$$
$$= (z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z - i)(z + i)$$

แยกตัวประกอบในเทอมของ i ของ

$z^4 + 25z^2 + 144 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$z^4 + 5z^2 + 4 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$

6. พิจารณาการแก้สมการต่อไปนี้

$$z^6 + 2z^3 + 1 = 0$$

$$(z^3 + 1)^2 = 0$$

$$\left[(z + 1)(z^2 - z + 1)\right]^2 = 0$$

$$\therefore \; z + 1 = 0$$

$$z = -1$$

$$\therefore \; z^2 - z + 1 = 0$$

แยกตัวประกอบไม่ได้ ต้องใช้สูตร $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\therefore \; z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \; z = -1 \text{ หรือ } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \text{ หรือ } \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$ □

แก้สมการต่อไปนี้ ได้เป็น

$$z^2 + 2z + 3 = 0$$

____

____

____

____

____

$$z^2 + 3z + \frac{29}{4} = 0$$

____

____

____

____

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0$$

____

____

____

____

____

$$5z^2 - 2z + 6 = 0$$

____

____

____

____

____

7. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเรียก z ว่าเป็นรากที่ n ของ w ก็ต่อเมื่อ $z^n = w$

ดังนั้น ในการหารากที่ 2 ของ − 4 ทำได้ดังนี้

ให้ z เป็นรากที่ 2 ของ − 4 จะได้ว่า

$$z^2 = -4$$

$$z^2 + 4 = 0$$

$$z^2 - 4i^2 = 0$$

$$z^2 - (2i)^2 = 0$$

$$(z - 2i)(z + 2i) = 0$$

$z = 2i$ หรือ $-2i$

∴ รากที่ 2 ของ − 4 คือ $2i$ หรือ $-2i$ ______ □

ให้ z_1 แทนรากที่ 2 ของ − 9

$z_1^2 =$ ______

______

______

______

$z_1 =$ ______

∴ รากที่ 2 ของ − 9 คือ ______

ให้ z_2 แทนรากที่ 2 ของ −12

$z_2^2 =$ ______

______

______

______

$z_2 =$ ______

∴ รากที่ 2 ของ − 12 คือ ______

ให้ z_3 แทนรากที่ 3 ของ −1

$z_3^2 =$ ______

______

______

______

z_3 = ______________

$\therefore$ รากที่ 3ของ −1 คือ ______________

8. พิจารณาการหารากที่ 2 ของ $5 + 12i$

ให้ $z = a + bi$ เป็นรากที่ 2 ของ $5 + 12i$

$$\therefore z^2 = 5 + 12i$$

$$(a + bi)^2 = 5 + 12i$$

$$a^2 + 2ab\,i - b^2 = 5 + 12i$$

$$(a^2 - b^2) + 2ab\,i = 5 + 12i$$

<u>เทียบสัมประสิทธิ์จะได้</u>

$$a^2 - b^2 = 5 \qquad \text{______ (1)}$$

$$2ab = 12 \qquad \text{______ (2)}$$

จาก(2) $b = \frac{6}{a}$

แทนค่า b ใน (1)

$$\therefore a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$$

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

$$(a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0$$

เนื่องจาก a เป็นจำนวนจริง $\therefore a^2 > 0$

$$\therefore a = 3 \text{ หรือ } -3$$

$$\therefore b = 2 \text{ หรือ } -2$$

$\therefore$ <u>รากที่ 2ของ $5 + 12i$ คือ $3 + 2i$ หรือ $-3 - 2i$</u> ______ □

$\therefore$ รากที่2ของ $3 - 4i$ หาได้ดังนี้

____

____

____

____

รากที่ 2 ของ $-15 + 8i$ หาได้ดังนี้

รากที่ 2 ของ $-8i$ หาได้ดังนี้

9. การสร้างสมการเมื่อกำหนดคำตอบของสมการให้

ตัวอย่าง จงหาสมการที่มี $5 - 3i$ และ $5 + 3i$ เป็นรากของสมการ

$\because$ รากของสมการเป็น $5 - 3i,\ 5 + 3i$

$\therefore$ สมการที่ต้องการ คือ $[z - (5-3i)][z - (5+3i)] = 0$

$$[(z-5)-3i][(z-5)+3i] = 0$$

$$(z-5)^2 - (3i)^2 = 0$$

$$z^2 - 10z + 25 + 9 = 0$$

$$z^2 - 10z + 34 = 0$$

สมการที่มี $3 + i$ และ $3 - i$ เป็นรากสมการคือ

สมการที่มี $1, 2 + i$ และ $2 - i$ เป็นรากสมการคือ

สมการที่มี $-3, -3+2i$ และ $-3 - 2i$ เป็นรากสมการคือ

<u>เอกสารคำเฉลย</u>

<u>เรื่อง</u> การหารากสมการของจำนวนเชิงซ้อน

1. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

2. $x^2 - 1 = 0$ คือ $x = \pm 1$

$x^2 - 16 = 0$ คือ $x = \pm 4$

$x^2 - 25 = 0$ คือ $x = \pm 5$

3. $x^2 + 9 = (x-3i)(x+3i)$

$4p^2 - 16q^2 = (2p - 4qi)(2p + 4qi)$

$4a + 5b^2 = (2\sqrt{a} - \sqrt{5}\,b\,i)(2\sqrt{a} + \sqrt{5}\,b\,i)$

4. $z^8 + 4 = z^8 - 4i^2$

$= (z^4)^2 - (2i)^2$

$= (z^4 - 2i)(z^4 + 2i)$

$z^4 - 64 = (z^2)^2 - (8)^2$

$= (z^2 - 8)(z^2 + 8)$

$= (z - \sqrt{8})(z + \sqrt{8})(z^2 - 8i^2)$

$= (z - \sqrt{8})(z + \sqrt{8})(z - \sqrt{8}i)(z + \sqrt{8}i)$

5. $z^4 + 25z^2 + 144 = (z^2 + 16)(z^2 + 9)$

$= (z^2 - 16i^2)(z^2 - 9i^2)$

$= (z - 4i)(z + 4i)(z - 3i)(z + 3i)$

$z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 4)(z^2 + 1)$

$= (z^2 - 4i^2)(z^2 - i^2)$

$= (z - 2i)(z + 2i)(z - i)(z + i)$

6. $$z^2 + 2z + 3 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}i}{2}$$

$$= -\frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}i$$

$\therefore$ $z = -1 + \sqrt{2}i$ หรือ $-1 - \sqrt{2}i$

$$z^2 + 3z + \frac{29}{4} = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 29}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{20}i}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{2\sqrt{5}i}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$$

$\therefore$ $z = -\frac{3}{2} + 5i$ หรือ $-\frac{3}{2} - \sqrt{5}i$

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0$$

$$(z^3 - 8)(z^3 - 1) = 0$$

$$(z^3 - 2^3)(z^3 - 1^3) = 0$$

$$(z - 2)(z^2 + 2z + 4)(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$\therefore$ $z - 2 = 0$ หรือ $z^2 + 2z + 4 = 0$ หรือ $z - 1 = 0$ หรือ $z^2 + z + 1 = 0$

$z = 2$ $\quad z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$ $\quad z = 1$ $\quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$

$\quad = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$ $\quad = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\quad = -1 \pm \sqrt{3}i$ $\quad = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ z = 1, 2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$5z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 120}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{116}\, i}{10}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{29}\, i}{10}$$

$$= \frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{29}}{5} i$$

$\therefore\ z = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{29}}{5} i$ หรือ $\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{29}}{5} i$

7. $$z_1^2 = -9$$

$$z_1^2 + 9 = 0$$

$$z_1^2 - 9i^2 = 0$$

$$(z_1 - 3i)(z_1 + 3i) = 0$$

รากที่ 2ของ $z_1 = 3i$ หรือ $-3i$

$$z_2^2 = -12$$

$$z_2^2 + 12 = 0$$

$$z_2^2 - 12i^2 = 0$$

$$(z_2 - \sqrt{12}i)(z_2 + \sqrt{12}i) = 0$$

$\therefore$ รากที่ 2ของ $z_2 = 2\sqrt{3}i$ หรือ $-2\sqrt{3}i$

$$z_3^2 = -1$$

$$z_3^2 + 1 = 0$$

$$z_3^2 - i^2 = 0$$

$$(z_3 - i)(z_3 + i) = 0$$

$\therefore$ รากที่ 2ของ $z_3 = i$ หรือ $-i$

8. $\therefore$ รากที่ 2ของ $3 - 4i$ หาได้ดังนี้

ให้ $z = a + bi$ เป็นรากที่ 2ของ $3 - 4i$

$$\therefore \quad z^2 = 3 - 4i$$

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 3 - 4i$$

<u>เทียบสัมประสิทธิ์จะได้</u>

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{———(1)}$$

$$2ab = -4 \quad \text{———(2)}$$

จาก(2) $\quad a = -\frac{2}{b}$ ———(3)

แทนค่า a ใน(1)

$$\left(-\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3$$

$$\frac{4}{b^2} - b^2 = 3$$

$$4 - b^4 = 3b^2$$

$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$(b^2 - 1)(b^2 + 4) = 0$$

$\therefore \quad b^2 - 1 = 0$ หรือ $b^2 + 4 = 0$

$(b - 1)(b + 1) = 0 \qquad b^2 = -4$

$b = \pm 1 \qquad$ เนื่องจาก $b \in R \therefore b^2 > 0$

แทนค่า b ใน(3)

$\therefore \quad b = 1$ จะได้ $\quad a = -2$

$b = -1$ จะได้ $\quad a = 2$

$\therefore$ <u>รากที่ 2ของ $3 - 4i$ คือ $-2 + i$ หรือ $2 - i$</u> ——— $\square$

รากที่ 2ของ $-15 + 8i$ หาได้ดังนี้

ให้ $z = a + bi$ เป็นรากที่ 2ของ $-15 + 8i$

$$\therefore \quad z^2 = -15 + 8i$$

$$(a+bi)^2 = -15 + 8i$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = -15 + 8i$$

$$\therefore \quad a^2 - b^2 = -15 \qquad (1)$$

$$2ab = 8 \qquad (2)$$

แก้สมการ (1), (2) ได้

$$a = \underline{1\ ,\ -1} \quad b = \underline{4\ ,\ -4}$$

$\therefore$ รากที่ 2 ของ $-15 + 8i$ คือ $1 + 4i\ ,\ -1 - 4i$

รากที่ 2 ของ $-8i$ หาได้ดังนี้

ให้ $z = a + bi$ เป็นรากที่ 2 ของ $-8i$

$$\therefore \quad z^2 = -8i$$

$$\therefore \quad (a^2 - b^2) + 2abi = -8i$$

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad (1)$$

$$2ab = -8 \qquad (2)$$

แก้สมการ (1), (2) จะได้

$$a = \underline{2,\ -2} \quad b = \underline{-2,\ 2}$$

$\therefore$ รากที่ 2 ของ $-8i$ คือ $2-2i\ ,\ -2+2i$

9. สมการที่มี $(3+i)$ และ $(3-i)$ เป็นรากสมการคือ

$$\left[x-(3+i)\right]\left[x-(3-i)\right] = 0$$

$$\left[(x-3)-i\right]\left[(x-3)+i\right] = 0$$

$$(x-3)^2 - i^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + 1 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 6x + 10 = 0}$$

สมการที่มี $1, 2+i$ และ $2 - i$ เป็นรากสมการคือ

$$(x-1)\left[x-(2+i)\right]\left[x-(2-i)\right] = 0$$

$$(x-1)\left[(x-2)-i\right]\left[(x-2)+i\right] = 0$$

$$(x-1)\left[(x-2)^2 - i^2\right] = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 4x + 4 + 1) = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 5x - x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\boxed{x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0}$$

สมการที่มี $-3, -3+2i$, และ $-3-2i$ เป็นรากสมการคือ

$$(x+3)\left[x-(-3+2i)\right]\left[x-(-3-2i)\right] = 0$$

$$(x+3)\left[(x+3)-2i\right]\left[(x+3)+2i\right] = 0$$

$$(x+3)\left[(x+3)^2 - (2i)^2\right] = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x + 9 + 4) = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 13x + 3x^2 + 18x + 39 = 0$$

$$\boxed{x^3 + 9x^2 + 31x + 39 = 0}$$

บัตรเนื้อหา

เรื่อง การหารากสมการกำลังสองที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเรียก z ว่าเป็นรากที่ n ของ w ก็ต่อเมื่อ $z^n = w$

ตัวอย่างที่1 จงหารากที่ 2 ของ $5 + 12i$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

สมมติให้ $x = a + bi$ คือรากที่2 ของ $5 + 12i$

ดังนั้น $x^2 = (a+bi)^2 = 5 + 12i$

$\therefore a^2 + 2abi - b^2 = 5 + 12i$

$(a^2 - b^2) + 2bi = 5 + 12i$

$\therefore a^2 - b^2 = 5$ และ $2ab = 12$

$\therefore b = \frac{6}{a}$

แทนค่า $b = \frac{6}{a}$ ใน $a^2 - b^2 = 5$

$\therefore a^2 - \left(\frac{6}{a}\right)^2 = 5$

$a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$

$a^4 - 36 = 5a^2$

$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$

$(a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0$

$\therefore$ a เป็นจำนวนจริง $\therefore a^2 > 0$

จะได้ $a^2 = 9$

$\therefore a = 3$ หรือ -3

ถ้า $a = 3$ แล้ว $b = \frac{6}{3} = 2$

ถ้า $a = -3$ แล้ว $b = \frac{6}{-3} = -2$

$\therefore$ รากที่2 ของ $5 + 12i$ คือ $3 + 2i$ หรือ $-3 - 2i$ ________ □

<u>ตัวอย่างที่2</u> จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$8z^4 + 31z^2 - 4 = 0$$

$$\therefore\ (8z^2 - 1)(z^2 + 4) = 0$$

$$8z^2 - 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad z^2 + 4 = 0$$

$$z^2 = \frac{1}{8} \qquad z^2 - 4i^2 = 0$$

$$z = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad (z - 2i)(z + 2i) = 0$$

$$z = \pm 2i$$

$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 2i, -2i,\right\}$ $\square$

<u>ตัวอย่างที่3</u> จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$5z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$\therefore\ z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 120}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-116}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{29}\,i}{10}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2\sqrt{29}}{10}i \quad \text{หรือ} \quad \frac{2}{10} - \frac{2\sqrt{29}}{10}i$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{29}}{5}i \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{29}}{10}i$$

$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{29}}{5}i \ \text{หรือ}\ \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{29}}{5}i\right\}$ $\square$

<u>การสร้างสมการเมื่อกำหนดรากของสมการให้</u>

<u>ตัวอย่างที่4</u> จงหาสมการที่มี 2,3+i,3-i เป็นรากสมการ

$\because$ รากของสมการ คือ 2,3+i,3-i

$\therefore$ สมการที่ต้องการ คือ $(z-2)\left[z-(3+i)\right]\left[z-(3-i)\right] = 0$

$$(z-2)\left[(z-3)-i\right]\left[(z-3)+i\right] = 0$$

$$(z-2)\left[(z-3)^2 - i^2\right] = 0$$

$$(z-2)(z^2 - 6z + 9 + 1) = 0$$

$$(z-2)(z^2-6z+10) = 0$$
$$z^3-6z^2+10z-2z^2+12z-20 = 0$$
$$z^3-8z^2+22z-20 = 0$$

<u>ตัวอย่างที่5</u> จงแสดงว่า $1, 2+i, 2-i$ เป็นรากของสมการ

$$x^3-5x^2+9x-5 = 0$$

$$\therefore \quad (x-1)\left[x-(2+i)\right]\left[x-(2-i)\right] = 0$$
$$(x-1)\left[(\ -2)-i\right]\left[(x-2)+i\right] = 0$$
$$(x-1)\left[(x-2)^2-i^2\right] = 0$$
$$(x-1)(x^2-4x+4+1) = 0$$
$$(x-1)(x^2-4x+5) = 0$$
$$x^3-4x^2+5x-x^2+4x-5 = 0$$
$$x^3-5x^2+9x-5 = 0$$

$\therefore$ แสดงว่า $1, 2+i, 2-i,$ เป็นรากของสมการ $x^3-5x^2+9x-5 = 0$ □

บัตรแบบฝึกหัด

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1. $x^4 - 81 = 0$
2. $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$
3. $z^2 - 6z + 18 = 0$

จงหาสมการ เมื่อกำหนดคำตอบของสมการให้ดังนี้

4. $4i, -4i$
5. $2, 1-3i, 1+3i$
6. $1, 2i, -2i$

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. $3, -3, 3i, -3i$
2. $i, -i, 2i, -2i$
3. $3+3i, 3-3i$
4. $z^2 + 16 = 0$
5. $z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = 0$
6. $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

บัตรทดสอบ

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1. $x^2 + 8x + 41 = 0$
2. $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$

จงหาสมการ เมื่อกำหนดคำตอบของสมการให้ดังนี้

3. $2+i, 2-i, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. $-4+5i, -4-5i$
2. $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$
3. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 2x - 6 = 0$

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 4

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน พร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา พร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง ลำดับ

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนลำดับนั้นๆถึงพจน์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับให้
2. หาพจน์ทั่วไปของลำดับนั้นได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจำนวนพจน์ให้

กิจกรรม

1. พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$f(x) =$ $\{(x,y) \in I \times R \; / \; f(x) = 2x - 1\}$	$g(x) =$ $\{(x,y) \in I \times R \; / \; g(x) = x^2 - 1\}$	$h(x) =$ $\{(x,y) \in I \times R \; / \; h(x) = \frac{4x-1}{2}\}$
$\therefore f(1) = 2(1)+1$ $= 3$ $f(2) = 2(2)+1$ $= 5$ $f(3) = \_\_\_\_$ $= \_\_\_\_$ $f(4) = \_\_\_\_$ $= \_\_\_\_$	$g(1) = 1^2+1$ $= 2$ $g(2) = 2^2+1$ $= 5$ $g(3) = \_\_\_\_$ $= \_\_\_\_$ $g(4) = \_\_\_\_$ $= \_\_\_\_$	$h(1) = \frac{4(1)+1}{2}$ $= \frac{5}{2}$ $h(2) = \frac{4(2)+1}{2}$ $= \frac{9}{2}$ $h(3) = \_\_\_\_$ $= \_\_\_\_$ $h(4) = \_\_\_\_$ $= \_\_\_\_$
นำ $f(1), f(2), f(3), f(4)$ เรียงต่อกันได้ $3, 5, \_\_\_, \_\_\_$	นำ $g(1), g(2), g(3), g(4)$ เรียงต่อกันได้ $2, 5, \_\_\_, \_\_\_$	นำ $h(1), h(2), h(3), h(4)$ เรียงต่อกันได้ $\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \_\_\_, \_\_\_$

จากการนำเอาค่า f(1), f(2), f(3),...และ g(1), g(2), g(3),.. มาเรียงต่อกัน จะพบว่าเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า " <u>ลำดับ</u> "

สรุป

<u>นิยาม</u> ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

1.1) ถ้า f เป็นลำดับแล้ว กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
f(1) &= a_1 \\
f(2) &= a_2 \\
f(3) &= a_3 \\
&\vdots \\
f(n) &= \_\_\_\_\_\_\_\_
\end{aligned}
$$

ดังนั้นเขียนลำดับ f เสียใหม่เป็น $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots,$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่1ของลำดับ

a_2 ว่า ________

a_3 ว่า ________

$\vdots$

a_n ว่า ________ หรือ พจน์ทั่วไปของลำดับ

1.2) จากตารางของ f(x) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
a_2 &= \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
a_3 &= \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
a_4 &= \_\_\_\_\_\_\_\_ \\
&\vdots \\
a_n &= \_\_\_\_\_\_\_\_
\end{aligned}
$$

$\therefore$ จะเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้ได้เป็น ________

จากตารางของ ( ) จะได้ว่า a_1 = ______________

a_2 = ______________

a_3 = ______________

a_4 = ______________

.
.
.

a_n = ______________

∴ จะเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้ได้เป็น ______________

จากตารางของ $h(x)$ จะได้ว่า a_1 = ______________

a_2 = ______________

a_3 = ______________

a_4 = ______________

.
.
.

a_n = ______________

∴ จะเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้ได้เป็น ______________

1.3) ถ้ากำหนดพจน์ทั่วไป หรือพจน์ที่ n ของลำดับ ดังนี้

	$a_n = \frac{3^n - 1}{2}$	$a_n = \begin{cases} 2n-3, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ n+5, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$	$a_n = \frac{n}{2n+1}$
a_1	$= \frac{3(1)-1}{2}$ 1	$= 2(1) - 3 = -1$	$= \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3}$
a_2	= ______	= ______	= ______
a_3	= ______	= ______	= ______
a_4	= ______	= ______	= ______
a_5	= ______	= ______	= ______
a_6	= ______	= ______	= ______
เขียน 6 พจน์แรกของลำดับได้เป็น	______	______	______

1.4) พิจารณาลำดับต่อไปนี้

50,100,150,.....,600

และ 2, 4, 8,....., 2^n,.....

อาจเขียนลำดับข้างต้นเสียใหม่เป็น

$a_n = 50n$ เมื่อ n=1,2,3,.....,

และ $a_n = 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>สรุป</u>

การเขียนลำดับ นอกจากเขียนโดยการแจงพจนแล้ว อาจจะเขียนเฉพาะพจน์ทั่วไป พร้อมทั้งระบุสมาชิกในโดเมน

1.5) พิจารณาลำดับต่อไปนี้

ลำดับ (I)	ลำดับ (II)
1. 1,2,3,4,......,15 2. −5,−4,−3,−2,−1 3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ 4. 1,4,7,10,13,.....,31 5. $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$, n=1,2,3,...,20 6. $a_n = 50n$, n=1,2,3,...,15	1. 3,6,9,12,... 2. 2,4,8,16,.........,2^n,.... 3. 1,5,9,13,......4n − 3,..... 4. $a_n = 2^{n+1} - 1$ 5. $a_n = 2^n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก 6. $a_n = (-1)^n (2n-1)$
<u>สรุป</u> ลำดับนี้เป็นลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ เรียกว่า " <u>ลำดับจำกัด</u> "	<u>สรุป</u> ลำดับนี้เป็นลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกเรียกว่า "<u>ลำดับอนันต์</u>" และในกรณีที่กำหนดพจน์ทั่วไปให้ โดยไม่ระบุสมาชิกในโดเมน ให้ถือเป็นลำดับอนันต์

1.6) พิจารณาลำดับต่อไปนี้

ลำดับ	ลำดับจำกัด	ลำดับอนันต์
1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	✓	
2. $0.3, 0.03, 0.003, \ldots, 3\times10^{-n}, \ldots$	______	______
3. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{n}$	______	______
4. $3, 7, 15, 31$	______	______
5. $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$	______	______
6. $a_n = \begin{cases} n+1 & ,n \text{ เป็นเลขคี่} \\ 2 & ,n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$	______	______

2. พิจารณาลำดับจำกัดต่อไปนี้ตามแนวดิ่ง

พจน์ที่	ลำดับ I $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$	ลำดับ II $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}$	ลำดับ III $3, 7, 15, 31$	ลำดับ IV $0.3, 0.03, 0.003, 0.0003$
a_1	$1 = \frac{1}{3^0} = \frac{1}{3^{1-1}}$	$\sqrt{3} = \sqrt{3\times2^0} = \sqrt{3\times2^{1-1}}$	$3 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$	$0.3 = 3\times10^{-1}$
a_2	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3^{2-1}}$	$\sqrt{6} = \sqrt{3\times2^1} =$ ______	$7 = 2^3 - 1 =$ ___	$0.03 =$ ______
a_3	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{3-1}}$	$2\sqrt{3} =$ ______	$15 =$ ______	$0.003 =$ ______
a_4	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{4-1}}$	$2\sqrt{6} =$ ______	$31 =$ ______	$0.0003 =$ ______
⋮				
a_n	$\frac{1}{3^{n-1}}$	$\sqrt{3\times2^{n-1}}$	______	______

<u>สรุป</u> การหาพจน์ทั่วไป หรือ พจน์ที่ n ของลำดับ มีวิธีการหาคือ พยายามจัดรูปพจน์ต่างๆ ของลำดับที่กำหนดให้ ให้อยู่ภายใต้กฎเกณฑ์หรือเงื่อนไขเดียวกัน และที่สำคัญก็คือ ค่า n ที่ปรากฏอยู่ในเงื่อนไขของพจน์ที่ n จะต้องเริ่มจาก 1 เสมอ

จากตารางหาพจน์ที่ n และพจน์ทั่วไปได้ดังนี้

ลำดับ	พจน์ที่	ลำดับ	พจน์ทั่วไป
$a_n = \frac{2n}{n+1}$	$a_1 =$ ____ $a_2 =$ ____ $a_3 =$ ____ $a_4 =$ ____	$1, 2, 4, 8, \ldots$	$a_n = 2^{n-1}$
		$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$	$a_n =$ ______
		$0.5, 0.05, 0.005, \ldots$	$a_n =$ ______
$a_n = (\frac{1}{2})^n$	$a_1 =$ ____ $a_2 =$ ____ $a_3 =$ ____ $a_4 =$ ____	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	$a_n =$ ______
$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \geqslant 3 \\ n, & n < 3 \end{cases}$	$a_1 =$ ____ $a_2 =$ ____ $a_3 =$ ____ $a_4 =$ ____		

บัตรเฉลยบัตรกิจกรรม

1.

$f(x) = 2x + 1$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = \frac{4x+1}{2}$
$f(3) = 2(3) + 1$ $= 7$ $f(4) = 2(4) + 1$ $= 9$	$g(3) = (3)^2 + 1$ $= 10$ $g(4) = (4)^2 + 1$ $= 17$	$h(3) = \frac{4(3)+1}{2}$ $= \frac{13}{2}$ $h(4) = \frac{4(4)+1}{2}$ $= \frac{17}{2}$
3 ,5,7,9	2,5,10,17	$\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}$

1.1) $f(n) = a_n$

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่2 ของลำดับ

a_3 ว่า พจน์ที่3 ของลำดับ

.
.
.

a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ

1.2) จากตารางของ $f(x)$

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = 7$

$a_4 = 9$

.
.
.

$a_n = 2n + 1$

$\therefore$ จะเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้ได้เป็น 3,5,7,9,...

จากตาราง $g(x)$

$a_1 = 2$

$a_2 = 5$

$$a_3 = 10$$

$$a_4 = 17$$

$$\vdots$$

$$a_n = n^2 + 1$$

$\therefore$ จะเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้ได้เป็น 2,5,10,17,...

จากตารางของ h (x)

$$a_1 = \frac{5}{2}$$

$$a_2 = \frac{9}{2}$$

$$a_3 = \frac{13}{2}$$

$$a_4 = \frac{17}{2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{4n+1}{2}$$

$\therefore$ จะเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้ได้เป็น $\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{13}{2},\frac{17}{2},\ldots$

1.3)

	$a_n = \frac{3n-1}{2}$	$a_n = \begin{cases} 2n-3, n \text{ เป็นเลขคี่} \\ n+5, n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$	$a_n = \frac{n}{2n+1}$
a_2	$= \frac{3(2)-1}{2} = \frac{5}{2}$	$= 2+5 = 7$	$= \frac{2}{2(2)-1} = \frac{2}{5}$
a_3	$= \frac{3(3)-1}{2} = 4$	$= 2(3)-3 = 3$	$= \frac{3}{2(3)-1} = \frac{3}{7}$
a_4	$= \frac{3(4)-1}{2} = \frac{11}{2}$	$= 4+5 = 9$	$= \frac{4}{2(4)-1} = \frac{4}{9}$
a_5	$= \frac{3(5)-1}{2} = 7$	$= 2(5)-3 = 7$	$= \frac{5}{2(5)-1} = \frac{5}{11}$
a_6	$= \frac{3(6)-1}{2} = \frac{17}{2}$	$= 6+5 = 11$	$= \frac{6}{2(6)-1} = \frac{6}{13}$
6 พจน์แรกของลำดับ	$1, \frac{5}{2}, 4, \frac{11}{2}, 7, \frac{17}{2}, \ldots$	$-1,7,3,9,7,11,\ldots$	$\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{5}{11},\frac{6}{13},\ldots$

1.6)

	ลำดับจำกัด	ลำดับอนันต์
2. $0.3, 0.03, 0.003, \ldots, 3\times10^{-n}, \ldots$		✓
3. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{n}$	✓	
4. $3, 7, 15, 31$	✓	
5. $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$		✓
6. $a_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ 2, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$		✓

2.

พจนที่	ลำดับ I $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}$	ลำดับ II $3, 7, 15, 31$	ลำดับ III $0.3, 0.03, 0.003, 0.0003$
a_2	$\sqrt{6} = \sqrt{3\times2^{1}} = \sqrt{3\times2^{2-1}}$	$7 = 2^{3} - 1 = 2^{2+1} - 1$	$0.03 = 3\times10^{-2}$
a_3	$2\sqrt{3} = \sqrt{3\times2^{2}} = \sqrt{3\times2^{3-1}}$	$15 = 2^{4} - 1 = 2^{3+1} - 1$	$0.003 = 3\times10^{-3}$
a_4	$2\sqrt{6} = \sqrt{3\times2^{3}} = \sqrt{3\times2^{4-1}}$	$31 = 2^{5} - 1 = 2^{4+1} - 1$	$0.0003 = 3\times10^{-4}$
a_n		$2^{n+1} - 1$	3×10^{-n}

ลำดับ	พจนที่
$a_n = \frac{2n}{n+1}$	$a_1 = 1$
	$a_2 = \frac{4}{3}$
	$a_3 = \frac{3}{2}$
	$a_4 = \frac{8}{5}$
$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$a_1 = \frac{1}{2}$
	$a_2 = \frac{1}{4}$
	$a_3 = \frac{1}{8}$
	$a_4 = \frac{1}{16}$
$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \geqslant 3 \\ n, & n < 3 \end{cases}$	$a_1 = 1$
	$a_2 = 2$
	$a_3 = \frac{1}{3}$
	$a_4 = \frac{1}{4}$

ลำดับ	พจนทั่วไป
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{2^n}$
$0.5, 0.05, 0.005, \ldots$	$a_n = 5 \times 10^{-n}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	$a_n = \frac{n}{n+1}$

บัตรเนื้อหา

เรื่อง ลำดับ

นิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ลำดับในเซต A คือ ลำดับซึ่งมีเรนจ์เป็นสับเซตของ A

ตัวอย่าง $f = \{(1,1),(2,4),(3,9),\ldots(n, n^2),\ldots\}$

$g = \{(x,y) / y = x + 1 , x \in I\}$

$h = \{(n, a_n) / a_n = \frac{1}{2}n, n \in I\}$

จะเห็นว่าฟังก์ชันทั้ง 3 มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น f , g , h , เป็นลำดับ □

ถ้า f เป็นลำดับเรียก f (n) ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ นิยมเขียนแทนลำดับf ดังนี้

$f(1), f(2), f(3),\ldots, f(n),\ldots$

หรือ $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$

เมื่อ $a_n = f(n)$

จะเรียก a_n ว่าเป็นพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

ตัวอย่าง กำหนดลำดับ

$f = \{(1,3),(2,4),(3,5),\ldots,(n, n+2),\ldots\}$

$g = \{(n, g(n)) / g(n) = n^2, n \in I^+\}$

$h = \{(n, a(n)) / a_n = 3^{n+1}, n \in I^+\}$

$\therefore$ อาจเขียนแทนf ด้วย $3,4,5,\ldots, n+2,\ldots$

ซึ่งพจน์ที่n คือ $a_n = n+2$

$\therefore$ อาจเขียนแทนg ด้วย $1^2, 2^2, 3^2,\ldots, n^2,\ldots$

ซึ่งพจน์ที่ nคือ $a_n = n^2$

$\therefore$ อาจเขียนแทนh ด้วย $3^2, 3^3, 3^4,\ldots, 3^{n+1},\ldots$

ซึ่งพจน์ที่n คือ $a_n = 3^{n+1}$

นิยาม ลำดับจำกัด คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1,2,3,\ldots, n\}$ เมื่อ $n \in I^+$ ลำดับอนันต์ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง

$1,5,9,13,\ldots$ เป็นลำดับอนันต์

$1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots$ เป็นลำดับอนันต์

$-2,-4,-6,-8,\ldots,-100$ เป็นลำดับจำกัด

$0,3,8,15,\ldots,99$ เป็นลำดับจำกัด

การหาลำดับและพจน์ต่างๆของลำดับ เมื่อกำหนด a_n ให้

ตัวอย่าง ถ้ากำหนดลำดับที่มีพจน์ทั่วไป a_n ดังนี้

$$a_n = \begin{cases} -4 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{2+n}{n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จงเขียนลำดับอนันต์ที่ได้โดยแสดง 6 พจน์แรก

$$a_1 = -4$$

$$a_2 = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$a_3 = -4$$

$$a_4 = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a_5 = -4$$

$$a_6 = \frac{2+6}{6} = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ ลำดับอนันต์ที่ได้คือ $-4,2,-4,\frac{3}{2},-4,\frac{4}{3},\ldots$

การหา a_n เมื่อกำหนดพจน์แรกๆของลำดับให้

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ n ของลำดับจำกัดต่อไปนี้

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27}$$

$$\therefore\ a_1 = 1 = \frac{1}{3^0} = \frac{1}{3^{1-1}}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3^{2-1}}$$

$$a_3 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{3-1}}$$

$$a_4 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{4-1}}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพจน์ที่ n ของลำดับจำกัดต่อไปนี้

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

บัตรแบบฝึกหัด

จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = \frac{n}{2n+1}$
2. $a_n = n(n-1)$
3. $a_n = \sin^n\theta$
4. $a_n = \begin{cases} 2n+1, & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ -3, & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

5. 1 , 3 , 9 , 27
6. 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$
7. 0.4,0.04,0.004,0.0004
8. 24 , 8 , $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{9}$

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$,.....
2. 0 , 2 , 6 , 12 ,...
3. $\sin\theta, \sin^2\theta, \sin^3\theta, \sin^4\theta, \dots$
4. 3 , −3 , 7 , −3 ,...
5. $a_n = 3^{n-1}$
6. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
7. $a_n = 4\times10^{-n}$
8. $a_n = 8\cdot3^{2-n}$

บัตรทดสอบ

จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = \sin n\pi$
2. $a_n = n\left[1+(-1)^n\right]$
3. $a_n = (-1)^n \frac{n}{(n-1)^2}$
4. $a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ 2, & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

5. $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9}$
6. 3,7,15,31
7. $2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},\frac{17}{4}$
8. $\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{24}$

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. 0,0,0,0,...
2. 0,4,0,8,...
3. $-\frac{1}{4},\frac{2}{9},-\frac{3}{16},\frac{4}{25},\dots$
4. $1,2,\frac{1}{2},2,\dots$
5. $\frac{n}{2n+1}$
6. $2^{n-1}-1$
7. $\frac{n^2+1}{n}$
8. $\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n}$

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 5

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัดพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบ
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง ลำดับเลขคณิต

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาพจน์แรกและผลต่างร่วมได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนพจน์ถัดไปและพจน์ที่ n ของลำดับได้อย่างถูกต้อง
3. หาพจน์ที่อยู่ระหว่างสองพจน์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

1. พิจารณาลำดับต่อไปนี้

ลำดับ	ผลต่างของ $a_2 - a_1$	ผลต่างของ $a_3 - a_2$	ผลต่างของ $a_4 - a_3$	ผลต่างของ $a_{n+1} - a_n$
$2,4,6,8,\dots,2n,\dots$	$4-2=2$	$6-4=2$	$8-6=2$	$(2n+2)-2n=2$
$3,1,-1,-3,\dots,5-2n,\dots$	$1-3=-2$	$-3-(-1)=-2$	______	$(3-2n)-(5-2n)$ $=-2$
$1,1\frac{1}{2},2,2\frac{1}{2},\dots,\frac{n+1}{2},\dots$	$1\frac{1}{2}-1$ $=\frac{1}{2}$	______ = ______	______ = ______	$\frac{(n+2)}{2}-\frac{(n+1)}{2}$ = ______
$8,5,2,-1,\dots,11-3n,\dots$	______	______	______	______
$-1,6,13,20,\dots,7n-8,$	______	______	______	______

จากตารางจะพบว่า ผลต่างของ a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, และ $a_{n+1}-a_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกของลำดับดังกล่าวแต่ละลำดับ มีค่าเท่ากัน

เรียก ผลต่างของพจน์ดังกล่าวในแต่ละลำดับว่า ผลต่างร่วม (Common Difference ใช้สัญลักษณ์ d แทนผลต่างร่วม

ดังนั้น จากตาราง

ลำดับ $2,4,6,8,\dots,2n,\dots$ มีผลต่างร่วม(d) = 2

ลำดับ $3,1,-1,-3,\dots,5-2n,\dots$ มีผลต่างร่วม(d) = −2

ลำดับ $1,1\frac{1}{2},2,2\frac{1}{2},\dots,\frac{n+1}{2},\dots$ มีผลต่างร่วม(d) = $\frac{1}{2}$

ลำดับ $8,5,2,-1,\dots,11-3n,\dots$ มีผลต่างร่วม(d) = −3

ลำดับ $-1,6,13,20,\dots,7n-8,\dots$ มีผลต่างร่วม(d) = 7

สรุป เรียกลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n หรือ $a_{n+1}-a_n$ มีค่าคงตัวหรือค่าคงที่ว่า ลำดับเลขคณิต

1.1 พิจารณาลำดับต่อไปนี้

ลำดับ	ผลต่างร่วม (d)	ลำดับเลขคณิต เป็น	ลำดับเลขคณิต ไม่เป็น
$-2,4,10,\ldots$	6	✓	
$-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\ldots$	______	______	______
$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$	ไม่มี		✓
$x,x+2,x+4,\ldots$	______	______	______
$11,13\frac{1}{2},16,\ldots$	______	______	______
$1,-1,1,\ldots$	______	______	______

2. ถ้ากำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรกและ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต (1)	ผลต่างร่วม (2)	เขียนพจน์ต่างๆในรูปผลบวกของพจน์แรกกับจำนวนที่เหลือ (3)	เขียนผลบวกของพจน์ต่างๆในรูปของพจน์แรกบวกจำนวนเท่าของผลต่างร่วม (4)
$2,4,6,8,\ldots$	2	$2,2+2,2+4,2+6,\ldots$	$2,2+2,2+2(2),2+2(3),\ldots$
$3,1,-1,-3,\ldots$	-2	$3,3+(-2),3+(-4),3+(-6),\ldots$	$3,3+(-2),3+2(-2),3+3(-2),\ldots$
$-1,6,13,20,\ldots$	______	______	______
$-2,4,10,16,\ldots$	______	______	______
$1,4,7,10,\ldots$	______	______	______
$-5,-4,-3,-2,\ldots$	______	______	______
$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\ldots$	______	______	______
a_1,a_2,a_3,a_4	d		$a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d,\ldots$

<u>ข้อสังเกต</u> จะเห็นว่าจำนวนเลขซึ่งคูณกับผลต่างร่วม(d)ในตารางช่องที่ (4)จะมีค่าน้อยกว่าอันดับของพจน์นั้นๆอยู่ 1 เสมอ เช่น

ลำดับ 2,4,6,8,...

พจน์ที่1 = 2

พจน์ที่2 = 2 + 2

พจน์ที่3 = 2 + 2(2) (2น้อยกว่า3อยู่1)

พจน์ที่ $\boxed{4}$ = 2 + $\boxed{3}$(2) (3น้อยกว่า4อยู่1)

⋮

ดังนั้น ลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

พจน์ที่1 = a_1

พจน์ที่2 = $a_1 + d$

พจน์ที่3 = $a_1 + 2d$

พจน์ที่ $\boxed{4}$ = $a_1 + \boxed{3}d$

⋮

พจน์ที่ n = $a_1 + (n - 1)d$

<u>สรุป</u> พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

2.1 พิจารณาพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

ลำดับเลขคณิต	d	a_1	แทนค่าใน $a_n = a_1 + (n-1)d$	ผลลัพธ์ของ a_n
2,4,6,8,...	2	2	$a_n = 2+(n-1)\times 2$	$= 2+2n-2 = 2n$
3,1,−1,−3,...	−2	3	$a_n = 3+(n-1)(-2)$	$= 3-2n+2 = 5-2n$
−1,6,13,20,...	7	___	$a_n =$ ________	= ______ = _____
−2,4,10,16,...	6	___	$a_n =$ ________	= ______ = _____
1,4,7,10,...	3	___	$a_n =$ ________	= ______ = _____
−5,−4,−3,−2,...	1	___	$a_n =$ ________	= ______ = _____
$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$	$\frac{1}{2}$	___	$a_n =$ ________	= ______ = _____

2.2 จากตารางในข้อ 2.1 พิจารณาพจน์ต่างๆของลำดับดังนี้

ลำดับเลขคณิต	พจน์ที่ n (a_n)	พจน์ที่ 7 (a_7)	พจน์ที่ 10 (a_{10})	พจน์ที่ 15 (a_{15})
2,4,6,8,...	2n	2(7) = 14	2(10) = 20	2(15) = 30
3,1,−1,−3,...	5 − 2n	5−2(7) = −9	5−2(10)=−15	5−2(15)=−25
−1,6,13,20,...	7n − 8	7(7)−8 = 41	7(10)−8=62	7(15)−8 = 97
−2,4,10,16,...	6n − 8	______ = ___	______ = ___	______ = ___
1,4,7,10,...	3n − 2	______ = ___	______ = ___	______ = ___
−5,−4,−3,−2,...	n − 6	______ = ___	______ = ___	______ = ___
$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},...$	$\frac{n+1}{2}$	______ = ___	______ = ___	______ = ___

2.3 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้พจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 18 และ 16 ตามลำดับ จงหาพจน์ที่ 1 และผลต่างร่วม

<u>วิธีทำ</u> จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_4 = a_1 + 3d$

$a_7 = a_1 + 6d$

นั่นคือ $a_1 + 3d = 18$ ________(1)

$a_1 + 6d = 16$ ________(2)

จาก(1),(2)จะได้ $a_1 = 20$ และ $d = -\frac{2}{3}$

∴ พจน์ที่ 1 คือ 20และผลต่างร่วมคือ $-\frac{2}{3}$ ____________ □

2.3.1) ถ้าพจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิตคือ 32 และพจน์ที่ 18 คือ 48 จงหา พจน์ที่ 15

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{18} = a_1 + 17d$

∴ $a_1 + 9d = 32$ ________(1)

∴ $a_1 + 17d = 48$ ________(2)

จาก(1)และ(2)จะได้ $a_1 =$ ________ , $d =$ ________

$\therefore \quad a_{15} = a_1 + 14d$

$= $ ________

$= $ ________

2.3.2) สามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 20,16,และ 12 พจน์ที่เท่าไรของลำดับนี้มีค่าเป็น −96

$\therefore \quad a_1 = 20, \quad a_2 = 16, \quad a_3 = 12$

$d = $ ________

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$-96 = 20 + (n-1)$ ___

$-96 = 20 +$ ________

$\therefore \quad n = $ ________

ดังนั้น พจน์ที่ _____ มีค่าเป็น −96 ________□

2.3.3) −176 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเลขคณิต −1,−6,−11,...

____

____

____

ดังนั้น พจน์ที่ _____ มีค่าเป็น −176 ________□

2.3.4) ถ้าพจน์ที่ 12และพจน์ที่ 25 ของลำดับเลขคณิตมีค่าเท่ากับ −21และ 18 ตามลำดับ จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

____

____

____

ดังนั้น $a_n = $ ________ ________□

3. พิจารณาการหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์สองพจน์ที่กำหนดให้ของลำดับเลขคณิตจากตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามนั้นเป็นพจน์สามพจน์เรียงกันในลำดับเลขคณิต

<u>วิธีทำ</u> ถ้า a เป็นจำนวนที่ต้องการ จะได้ 6,a ,10 เป็นลำดับเลขคณิต

จากนิยามของลำดับเลขคณิต จะได้ว่า

$$a - 6 = 10 - a$$

$$a = \frac{10 + 6}{2}$$

$$= 8$$

$\therefore$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 คือ 8 ________ □

3.1) จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามนั้นอยู่ในลำดับเลขคณิต

____

____

____

$\therefore$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51 คือ _____ ________ □

3.2) ถ้า 4, a , b , c , 16 เป็นพจน์ 5 พจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิต จงหาค่า a , b , c

จาก $a_{n+1} = a_n + d$

จะได้ $a = 4 + d$

$b = a + d = (4+d) + d = 4+2d$

$c =$ ______ = ________ = ______

$16 =$ ______ = ________ = ______

ดังนั้น $d =$ ____________

จะได้ว่า $a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______ ________ □

3.3) ถ้า 5 และ 29 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิต จงหาอีก 5 พจน์ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองที่กำหนดให้

____

____

____

$\therefore$ พจน์ 5 พจน์ที่เรียงอยู่ระหว่าง 5 และ 29 คือ ________ □

บัตรเฉลยกิจกรรม

เรื่อง ลำดับเลขคณิต

กิจกรรม 1.

ลำดับ	ผลต่างของ $a_2 - a_1$	ผลต่างของ $a_3 - a_2$	ผลต่างของ $a_4 - a_3$	ผลต่างของ $a_{n+1} - a_n$
$3,1,-1,-3,\ldots,5-2n,\ldots$			$-3+1 = -2$	
$1,1\frac{1}{2},2,2\frac{1}{2},\ldots,\frac{n+1}{2},\ldots$		$2-1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$	$\frac{(n+2)}{2}-\frac{(n+1)}{2}=\frac{1}{2}$
$8,5,2,-1,\ldots,11-3n,\ldots$	$5-8=-3$	$2-5=-3$	$-1-2=-3$	$(11-3n-3)-(11-3n) = -3$
$-1,6,13,20,\ldots 7n-8,\ldots$	$6+1=7$	$13-6=7$	$20-13=7$	$(7n+7-8)-(7n-8) = 7$

1.1

ลำดับ	ผลต่างร่วม(d)	ลำดับเลขคณิต เป็น	ลำดับเลขคณิต ไม่เป็น
$-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\ldots$	$\frac{1}{3}$	✓	
$x, x+2, x+4,\ldots$	2	✓	
$11,13\frac{1}{2},16,\ldots$	$2\frac{1}{2}$	✓	
$1,3,9,\ldots$	ไม่มี		✓
$1,-1,1,\ldots$	ไม่มี		✓

2.

(1)	(2)	(3)	(4)
$-1,6,13,20,\ldots$	7	$-1,-1+7,-1+14,-1+21,\ldots$	$-1,-1+7,-1+2(7),-1+3(7),\ldots$
$-2,4,10,16,\ldots$	6	$-2,-2+6,-2+12,-2+18,\ldots$	$-2,-2+6,-2+2(6),-2+3(6),\ldots$
$1,4,7,10,\ldots$	3	$1,1+3,1+6,1+9,\ldots$	$1,1+3,1+2(3),1+3(3),\ldots$
$-5,-4,-3,-2,\ldots$	1	$-5,-5+1,-5+2,-5+3,\ldots$	$-5,-5+1,-5+2(1),-5+3(1),\ldots$
$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\ldots$	$\frac{1}{2}$	$1,1+\frac{1}{2},1+1,1+\frac{3}{2},\ldots$	$1,1+\frac{1}{2},1+2(\frac{1}{2}),1+3(\frac{1}{2}),\ldots$

พจนที่ $a_n = a_1+(n-1)d$

2.1

ลำดับเลขคณิต	d	a_1	แทนค่าใน $a_n = a_1-(n-1)d$	ผลลัพธ์ของ a_n
$-1,6,13,20,\ldots$	7	-1	$a_n = -1+(n-1)7$	$= -1+7n-7 = 7n-8$
$-2,4,10,16,\ldots$	6	-2	$a_n = -2+(n-1)6$	$= -2+6n-6 = 6n-8$
$1,4,7,10,\ldots$	3	1	$a_n = 1+(n-1)3$	$= 1+3n-3 = 3n-2$
$-5,-4,-3,-2,\ldots$	1	-5	$a_n = -5+(n-1)1$	$= -5+n-1 = n-6$
$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\ldots$	$\frac{1}{2}$	1	$a_n = 1+(n-1)\frac{1}{2}$	$= 1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$

2.2

ลำดับเลขคณิต	พจนที่ n (a_n)	พจนที่ 7 (a_7)	พจนที่ 10 (a_{10})	พจนที่ 15 (a_{15})
$-2,4,10,16,\ldots$	$6n-8$	$6(7)-8 = 34$	$6(10)-8 = 52$	$6(15)-8 = 82$
$1,4,7,10,\ldots$	$3n-2$	$3(7)-2 = 19$	$3(10)-2 = 28$	$3(15)-2 = 43$
$-5,-4,-3,-2,\ldots$	$n-6$	$7-6 = 1$	$10-6 = 4$	$15-6 = 9$
$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\ldots$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{7+1}{2} = 4$	$\frac{10+1}{2} = 5\frac{1}{2}$	$\frac{15+1}{2} = 8$

2.3.1) $a_1 = 14 \quad , \quad d = 2$

$$\therefore \quad a_{15} = a_1 + 14d$$
$$= 14 + 14(2)$$
$$= 14 + 28$$
$$= 42$$

2.3.2) $d = -4$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$-96 = 20 + (n-1)(-4)$$
$$-96 = 20 - 4n + 4$$
$$n = \frac{120}{4} = 30$$

ดังนั้น พจน์ที่ 30 มีค่าเป็น -96

2.3.3) $\therefore \quad d = -6 + 1 = -5$

$$a_1 = -1$$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$-176 = -1 + (n-1)(-5)$$
$$-176 = -1 - 5n + 5$$
$$5n = 180$$
$$n = 36$$

ดังนั้น พจน์ที่ 36 มีค่าเป็น -176

2.3.4) $a_{12} = a_1 + 11d$

$$a_{25} = a_1 + 24d$$

$\therefore \quad a_1 + 11d = -21$ ______________ (1)

$a_1 + 24d = 18$ ______________ (2)

จาก(1)และ(2) จะได้ว่า $a_1 = -54 \quad , \quad d = 3$

$\therefore$ พจน์ทั่วไปหรือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$= -54 + (n-1)3$$
$$= -54 + 3n - 3$$
$$= 3n - 57$$

3.1) ถ้า a เป็นจำนวนที่ต้องการ จะได้ว่า 39, a , 51 เป็นลำดับเลขคณิต

จากนิยามของลำดับเลขคณิต จะได้ว่า

$$a - 39 = 51 - a$$

$$2a = 90$$

$$a = 45$$

$\therefore$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51 คือ 45

3.2) $c = b + d = (4+2d) + d = 4+3d$

$16 = c + d = (4+3d) + d = 4+4d$

$\therefore \quad d = 3$

จะได้ว่า $a = 7, \quad b = 10, \quad c = 13$

3.3) $\therefore$ ลำดับนี้มีทั้งหมด 7 พจน์

$$a_1 = 5$$

$$a_7 = 29$$

$$\therefore a_7 = a_1 + 6d$$

$$29 = 5 + 6d$$

$$\therefore d = 4$$

ดังนั้น $a_2 = a_1 + d = 5 + 4 = 9$

$a_3 = a_1 + 2d = 5 + 8 = 13$

$a_4 = a_1 + 3d = 5 + 12 = 17$

$a_5 = a_1 + 4d = 5 + 16 = 21$

$a_6 = a_1 + 5d = 5 + 20 = 25$

$\therefore$ 5 พจน์ที่เรียงอยู่ระหว่าง 5 และ 29 คือ 9,13,17,21,25

บัตรเนื้อหา

เรื่อง ลำดับเลขคณิต

นิยาม ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับซึ่งผลต่างของ $a_{n+1} - a_n$ มีค่าคงที่สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว เรียกค่าคงที่ว่า ผลต่างร่วม (Common Difference) ใช้สัญลักษณ์ d แทน ผลต่างร่วม

ตัวอย่าง กำหนดลำดับต่อไปนี้

1. $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, \ldots$
2. $5, 10, 15, \ldots, 5n, \ldots$
3. $10, 2, -6, \ldots, 18-8n, \ldots$

จะได้ว่าลำดับทั้งสามเป็นลำดับเลขคณิต แสดงได้ดังนี้

1)
$$a_n = 3n-2$$
$$a_{n+1} = 3(n+1)-2 = 3n+1$$
$$a_{n+1}-a_n = (3n+1)-(3n-2)$$
$$= 3$$

เนื่องจาก $a_{n+1} - a_n$ มีค่าคงที่สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวกn ดังนั้นลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตมีผลต่างร่วมเท่ากับ 3

2)
$$a_n = 5n$$
$$a_{n+1} = 5(n+1) = 5n+5$$
$$a_{n+1} - a_n = (5n+5) - 5n$$
$$= 5$$

$\therefore$ ผลต่างร่วมคือ 5

3)
$$a_n = 18-8n$$
$$a_{n+1} = 18-8(n+1) = 10-8n$$
$$a_{n+1} - a_n = (10-8n)-(18-8n)$$
$$= -8$$

$\therefore$ ผลต่างร่วมคือ -8

<u>การหาพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต</u>

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 1 เป็น 7 และผลต่างร่วมเป็น 5

จงหา a_8 และ a_{12}

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_8 = 7 + (8-1)5$$
$$= 7 + 35$$
$$= 42$$
$$a_{12} = 7 + (12-1)5$$
$$= 7 + 55$$
$$= 62$$

<u>การหาพจน์กลางของลำดับเลขคณิต</u>

1. <u>การหาพจน์กลางหนึ่งพจน์ ซึ่งอยู่ระหว่าง a และ b</u>

ให้ a , A , b เป็นลำดับเลขคณิต

$$A - a = b - A$$
$$2A = a + b$$
$$\boxed{A = \frac{a+b}{2}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> พจน์ 1 พจน์ระหว่าง 2 กับ 8 คือ $\frac{2+8}{2} = 5$

2. <u>การหาพจน์หลายพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ที่กำหนดให้</u>

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 พจน์ระหว่าง 19 และ $36\frac{1}{2}$

$\therefore a_1 = 19, \quad n = 8, \quad a_8 = 36\frac{1}{2}$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_8 = 19 + (8-1)d$$
$$\frac{73}{2} = 19 + 7d$$
$$\therefore d = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ พจน์ 6 พจน์ที่อยู่ระหว่าง 19 และ $36\frac{1}{2}$ คือ $21\frac{1}{2}, 24, 26\frac{1}{2}, 29, 31\frac{1}{2}, 34$ $\square$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ 71 และ 59 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิต จงหาพจน์ 3 พจน์ที่อยู่ระหว่าง 71 และ 59

สมมติให้ $a_1 = 71,\quad a_5 = 59$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_5 = 71 + (5-1)d$$

$$59 = 71 + 4d$$

$$d = -3$$

$$\therefore a_2 = a_1 + d = 71 - 3 = 68$$

$$a_3 = a_2 + d = 68 - 3 = 65$$

$$a_4 = a_3 + d = 65 - 3 = 62$$

$\therefore$ พจน์ 3 พจน์ที่อยู่ระหว่าง 71 และ 59 คือ 68, 65, 62 $\square$

บัตรแบบฝึกหัด

1. ข้อใดเป็นลำดับเลขคณิต

ก. $-8, -2, 4, 10, \ldots$

ข. $0, 2, 6, 12, \ldots$

ค. $1, 3, 6, 10, \ldots$

ง. $1, 3, 9, 27, \ldots$

2. ถ้าพจน์ที่ 4 และ พจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 18 และ 16 ตามลำดับ จงหาพจน์ที่ 1 และผลต่างร่วม

3. พจน์ที่เท่าใดของลำดับเลขคณิต $-1, -6, -11, \ldots$ เท่ากับ -176

4. จงหาพจน์ 3 พจน์ ซึ่งอยู่ระหว่างพจน์ 2 พจน์ของลำดับเลขคณิต คือ 5 และ 21

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. ก.

2. $20, -\frac{2}{3}$

3. 36

4. 9, 13, 17

บัตรทดสอบ

1. พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต $3a + 2b$, $2a + 4b$, $a + 6b, \ldots$ คืออะไร

2. ถ้า x , $5x$ และ $6x + 9$ เรียงเป็นลำดับเลขคณิตแล้ว x เป็นเท่าใด

3. กำหนดให้พจน์ที่ 5 ของลำดับเลขคณิต คือ 9 และผลต่างร่วมคือ -3 พจน์แรกของลำดับนี้คือข้อใด

4. ถ้า 71 และ 59 เป็นพจน์ 2 พจน์ของลำดับเลขคณิต อีก 3 พจน์ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองที่กำหนดให้ คืออะไรบ้าง

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. $8b$

2. 3

3. $\frac{63}{3}$

4. 68, 65, 62

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 6

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัดพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบ
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง ลำดับเรขาคณิต

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาพจน์แรกและอัตราส่วนร่วมได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนพจน์ที่ n และ n พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตได้อย่างถูกต้อง
3. หาพจน์ที่อยู่ระหว่างสองพจน์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

1. พิจารณาลำดับต่อไปนี้

ลำดับ	อัตราส่วนของ a_2/a_1	อัตราส่วนของ a_3/a_2	อัตราส่วนของ a_4/a_3	อัตราส่วนของ a_{n+1}/a_n
$1,3,9,27,\ldots,3^{n-1},\ldots$	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{9}{3}=3$	$\frac{27}{9}=3$	$\frac{3^n}{3^{n-1}}=3$
$1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n-1},\ldots$	$-\frac{1}{1}=-1$	______	______	______
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots,\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1},\ldots$	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$	______	______	______
$3,0.3,0.03,\ldots,3(0.1)^{n-1},\ldots$	$\frac{0.3}{3}=0.1$	______	______	______

จากตารางจะพบว่า อัตราส่วนของ $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, $\frac{a_4}{a_3}$, และ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ของลำดับดังกล่าวแต่ละลำดับ มีค่าเท่ากัน

เรียกอัตราส่วนของพจน์ดังกล่าวในแต่ละลำดับว่า อัตราส่วนร่วม(Common ratio)
ใช้สัญลักษณ์ r แทนอัตราส่วนร่วม

ดังนั้นจากตาราง

ลำดับ	อัตราส่วนร่วม(r)
$1,3,9,27,\ldots,3^{n-1},\ldots$	3
$1,-1,1,-1,\ldots(-1)^{n-1},\ldots$	-1
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots,\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1},\ldots$	$\sqrt{3}$
$3,0.3,0.03,0.003,\ldots,3(0.1)^{n-1},\ldots$	0.1

<u>สรุป</u> เรียกลำดับที่ อัตราส่วนระหว่างพจน์ที่ n+1 กับพจน์ที่ n หรือ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงตัวหรือค่าคงที่ว่า <u>ลำดับเรขาคณิต</u>

1.1 พิจารณาลำดับต่อไปนี้

ลำดับ	r	d	เป็นลำดับเรขาคณิต	เป็นลำดับเลขคณิต	ไม่เป็นทั้งสองลำดับ
7,9,11,13,...		2		✓	
6,−6,6,−6,...	____	____	____	____	____
4,2,0,−2,...	____	____	____	____	____
$3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\ldots$	____	____	____	____	____
ab^3,a^2b^2,a^3b,a^4	____	____	____	____	____
$-\frac{2}{9},\frac{1}{12},\frac{-1}{32},\frac{3}{256},\ldots$	____	____	____	____	____

2. กำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต (1)	อัตราส่วนร่วม (2)	เขียนพจน์ต่างๆในรูปผลคูณของพจน์แรกกับจำนวนที่เหลือ (3)	เขียนผลคูณของพจน์ต่างๆในรูปของพจน์แรกคูณกับเลขยกกำลังของอัตราส่วนร่วม (4)
1,3,9,27,...	3	1,1×3,1×9,1×27,..	$1,1\times3,1\times(3)^2,1\times(3)^3,\ldots$
1,−1,1,−1,...	−1	1,1×(−1),1×1,1×(−1),...	$1,1\times(-1),1\times(-1)^2,1\times(-1)^3,\ldots$
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots$	____	____	____
3,0.3,0.03,0.003,...	____	____	____
−3,−6,−12,−24,...	____	____	____
$10,-5,\frac{5}{2},-\frac{5}{4},\ldots$	____	____	____
$\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{25}{4},\frac{125}{4},\ldots$	____	____	____
a_1,a_2,a_3,a_4	r		$a_1,a_1r,a_1r^2,a_1r^3,\ldots$

<u>ข้อสังเกต</u> จะเห็นว่าจำนวนเลขชี้กำลังของอัตราส่วนร่วม(r)ในตารางช่องที่ (4) จะมีค่าน้อยกว่าอันดับของพจน์นั้นๆอยู่ 1 เสมอ เช่น

ลำดับ 1,3,9,27,...

พจน์ที่1 = 1

พจน์ที่2 = 1×3

พจน์ที่3 = 1×3^{2} (2 น้อยกว่า 3 อยู่ 1)

พจน์ที่$\boxed{4}$ = $1\times 3^{\boxed{3}}$ (3 น้อยกว่า 4 อยู่ 1)

ดังนั้น ลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

พจน์ที่1 = a_1

พจน์ที่2 = a_1r

พจน์ที่3 = a_1r^{2}

พจน์ที่$\boxed{4}$ = $a_1r^{\boxed{3}}$

.

.

.

พจน์ที่ n = a_1r^{n-1}

<u>สรุป</u>

พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1r^{n-1}$

2.1 พิจารณาพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

ลำดับเรขาคณิต	r	a_1	แทนค่าใน $a_n = a_1r^{n-1}$	ผลลัพธ์ของ a_n
1,3,9,27,...	3	1	$a_n = 1\times(3)^{n-1}$	$= 3^{n-1}$
1,−1,1,−1,...	−1	1	$a_n = 1\times(-1)^{n-1}$	$= (-1)^{n-1}$
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots$	$\sqrt{3}$	______	______	= ______
−3,−6,−12,−24,...	2	______	______	= ______
$10,-5,\frac{5}{2},-\frac{5}{4},\ldots$	$-\frac{1}{2}$	______	______	______
$\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{25}{4},\frac{125}{4},\ldots$	5	______	______	______

2.2 จากตารางในข้อ 2.1 พิจารณาพจน์ต่างๆของลำดับดังนี้

ลำดับเรขาคณิต	พจน์ที่ n (a_n)	พจน์ที่ 7 (a_7)	พจน์ที่ 10 (a_{10})	พจน์ที่ 15 (a_{15})
1,3,9,27,...	3^{n-1}	$3^{7-1} = 3^6$	$3^{10-1} = 3^9$	$3^{15-1} = 3^{14}$
1,−1,1,−1,...	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{7-1} = 1$	$(-1)^{10-1} = -1$	$(-1)^{15-1} = 1$
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},...$	$\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3})^{7-1} = \sqrt{2}(\sqrt{3})^6$	$\sqrt{2}(\sqrt{3})^{10-1} = \sqrt{2}(\sqrt{3})^9$	$\sqrt{2}(\sqrt{3})^{15-1} = \sqrt{2}(\sqrt{3})^{14}$
−3,−6,−12,−24,...	$-3(2)^{n-1}$	______	______	______
$10,-5,\frac{5}{2},-\frac{5}{4},...$	$10(-\frac{1}{2})^{n-1}$	______	______	______
$\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{25}{4},\frac{125}{4},...$	$\frac{1}{4}(5)^{n-1}$	______	______	______

2.3 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้พจน์ที่6 ของลำดับเรขาคณิต คือ 36 และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 2 จงหาพจน์แรก

<u>วิธีทำ</u> จาก

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_6 = a_1(2)^{6-1}$$
$$36 = a_1 \times 32$$
$$\therefore\ a_1 = \frac{36}{32} = \frac{9}{8}$$

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $\frac{9}{8}$ ______ □

2.3.1) จงหาพจน์ที่7 ของลำดับเรขาคณิต $6,2,\frac{2}{3},...$

$a_1 =$ ______ $r =$ ______

จาก $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$\therefore\ a_7 =$ ______

$=$ ______

ดังนั้น พจน์ที่7 ของลำดับเรขาคณิต คือ ______ ______ □

2.3.2) 162 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิต 2,−6,18,...

______

______

ดังนั้น พจน์ที่ ______ มีค่าเป็น 162 ______ □

2.3.3) ถ้าพจนที่5 และพจนที่8 ของลำดับเรขาคณิตมีค่าเท่ากับ -48 และ -384 ตามลำดับ จงหาพจนทั่วไปของลำดับนี้

____

____

____

ดังนั้น $a_n =$ ____________ ____________ □

3. พิจารณาการหาพจนกลางของลำดับเรขาคณิต จากตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามนั้นอยู่ในลำดับเรขาคณิต

<u>วิธีทำ</u> ถ้า a เป็นจำนวนที่ต้องการจะได้ 5, a,20 เป็นลำดับเรขาคณิต จากนิยามของลำดับเรขาคณิต จะได้ว่า

$$\frac{a}{5} = \frac{20}{a}$$

$$a^2 = 100$$

$$a = \pm 10$$

$\therefore$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 คือ 10 หรือ -10 __________ □

3.1) จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามอยู่ในลำดับเรขาคณิต

____

____

$\therefore$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12 คือ ________ __________ □

3.2) ถ้า $\frac{4}{3}$, x , y , z, $\frac{27}{64}$, เป็น 5พจนเรียงกันในลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ x , y , z

จาก $a_{n+1} = a_n r$

จะได้ $x = \frac{4}{3} \times r$

$y = xr = (\frac{4}{3} \times r)r = \frac{4}{3} r^2$

$z =$ ____________

$\frac{27}{64} =$ ____________

ดังนั้น r = ________ หรือ ________

เมื่อ r = ____ จะได้ x = ______ y = ______ z = ______

r = ____ จะได้ x = ______ y = ______ z = ______

3.3) ถ้า $\frac{4}{3}$ และ $\frac{27}{64}$ เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเรขาคณิต จงหาอีก 3พจน์ ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองที่กำหนดให้

____

____

$\therefore$ พจน์ 3 พจน์ที่เรียงอยู่ระหว่าง $\frac{4}{3}$ และ $\frac{27}{64}$ คือ__________ ____ □

บัตรเฉลยกิจกรรม

เรื่อง ลำดับเรขาคณิต

กิจกรรม 1.

ลำดับ	อัตราส่วนของ a_2/a_1	อัตราส่วนของ a_3/a_2	อัตราส่วนของ a_4/a_3	อัตราส่วนของ a_{n+1}/a_n
$1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n-1},$	-1	$\frac{1}{-1} = -1$	$\frac{-1}{1} = -1$	$\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}$ -1
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots,\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1},\ldots$	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3})^n}{\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1}} = \sqrt{3}$
$3,0.3,0.03,0.003,\ldots,3(0.1)^{n-1},\ldots$	0.1	$\frac{0.03}{0.3} = 0.1$	$\frac{0.003}{0.03} = 0.1$	$\frac{3(0.1)^n}{3(0.1)^{n-1}} = 0.1$

1.1

ลำดับ	r	d	เป็นลำดับเรขาคณิต	เป็นลำดับเลขคณิต	ไม่เป็นทั้งสองลำดับ
$6,-6,6,-6,\ldots$	-1		✓		
$4,2,0,-2,\ldots$		-2		✓	
$3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\ldots$	$\frac{1}{3}$		✓		
$ab^3,a^2b^2,a^3b,\ldots$	$\frac{a}{b}$		✓		
$-\frac{2}{9},\frac{1}{12},-\frac{1}{32},\frac{3}{256},\ldots$					✓

2.

ลำดับเรขาคณิต (1)	อัตราส่วนร่วม (2)	เขียนพจน์ต่างๆในรูปผลคูณของพจน์แรกกับจำนวนที่เหลือ (3)	เขียนผลคูณของพจน์ต่างๆในรูปของพจน์แรกคูณกับเลขยกกำลังของอัตราส่วนร่วม (4)
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2},\sqrt{2}\times\sqrt{3},\sqrt{2}\times\sqrt{9},\sqrt{2}\times\sqrt{27},\ldots$	$\sqrt{2},\sqrt{2}\times\sqrt{3},\sqrt{2}\times(\sqrt{3})^2,\sqrt{2}\times(\sqrt{3})^3,\ldots$
$3,0.3,0.03,0.003,\ldots$	0.1	$3,3\times0.1,3\times0.01,3\times0.001,\ldots$	$3,3\times0.1,3\times(0.1)^2,3\times(0.1)^3,\ldots$
$-3,-6,-12,-24,\ldots$	2	$-3,-3\times2,-3\times4,-3\times8,\ldots$	$-3,-3\times2,-3\times(2)^2,-3\times(2)^3,\ldots$
$10,-5,\frac{5}{2},-\frac{5}{4},\ldots$	$-\frac{1}{2}$	$10,10\times(-\frac{1}{2}),10\times(-\frac{1}{4}),10\times(-\frac{1}{8}),\ldots$	$10,10\times(-\frac{1}{2}),10\times(-\frac{1}{2})^2,10\times(-\frac{1}{2})^3,\ldots$
$\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{25}{4},\frac{125}{4},\ldots$	5	$\frac{1}{4},\frac{1}{4}\times5,\frac{1}{4}\times25,\frac{1}{4}\times125,\ldots$	$\frac{1}{4},\frac{1}{4}\times5,\frac{1}{4}\times(5)^2,\frac{1}{4}\times(5)^3,\ldots$

$\therefore$ พจน์ที่ $n = a_1r^{n-1}$

2.1

ลำดับเรขาคณิต	r	a_1	แทนค่าใน $a_n=a_1r^{n-1}$	ผลลัพธ์ของ a_n
$\sqrt{2},\sqrt{6},3\sqrt{2},3\sqrt{6},\ldots$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$a_n=\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1}$	$=\sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1}$
$-3,-6,-12,-24,\ldots$	2	-3	$a_n=-3(2)^{n-1}$	$=-\frac{3}{2}(2)^n$
$10,-5,\frac{5}{2},-\frac{5}{4},\ldots$	$-\frac{1}{2}$	10	$a_n=10(-\frac{1}{2})^{n-1}$	$=-20(-\frac{1}{2})^n$
$\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{25}{4},\frac{125}{4},\ldots$	5	$\frac{1}{4}$	$a_n=\frac{1}{4}(5)^{n-1}$	$=\frac{5^n}{20}$

2.2

ลำดับเรขาคณิต	พจนที่ n (a_n)	พจนที่ 7 (a_7)	พจนที่ 10 (a_{10})	พจนที่ 15 (a_{15})
$-3,-6,-12,-24,\ldots$	$-3(2)^{n-1}$	$-3(2)^{7-1}$ $= -3\times(2)^{6}$	$-3(2)^{10-1}$ $= -3(2)^{9}$	$-3(2)^{15-1}$ $= -3(2)^{14}$
$10,-5,\frac{5}{2},-\frac{5}{4},\ldots$	$10(-\frac{1}{2})^{n-1}$	$10(-\frac{1}{2})^{7-1}$ $= 10(-\frac{1}{2})^{6}$	$10(-\frac{1}{2})^{10-1}$ $= 10(-\frac{1}{2})^{9}$	$10(-\frac{1}{2})^{15-1}$ $= 10(-\frac{1}{2})^{14}$
$\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{25}{4},\frac{125}{4},\ldots$	$\frac{1}{4}(5)^{n-1}$	$\frac{1}{4}(5)^{7-1}$ $= \frac{5^6}{4}$	$\frac{1}{4}(5)^{10-1}$ $= \frac{5^9}{4}$	$\frac{1}{4}(5)^{15-1}$ $= \frac{5^{14}}{4}$

2.3.1) $a_1 = 6 \quad r = \frac{1}{3}$

$$a_7 = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$$
$$= 6\left(\frac{1}{3}\right)^{6}$$
$$= \frac{6}{729} = \frac{2}{243}$$

ดังนั้น พจนที่ 7 ของลำดับเรขาคณิต คือ $\frac{2}{243}$

2.3.2) $r = \frac{-6}{2} = -3 \;, a_1 = 2$

จาก $a_n = a_1(r)^{n-1}$

$$162 = 2(-3)^{n-1}$$
$$81 = (-3)^{n-1}$$
$$81 = \frac{(-3)^n}{-3}$$
$$-243 = (-3)^n$$
$$(-3)^5 = (-3)^n$$
$$\therefore\ n = 5$$

ดังนั้น พจนที่ 5 มีค่าเป็น 162

2.3.3) $a_5 = a_1(r)^4$

$a_8 = a_1(r)^7$

$\therefore\ a_1(r)^4 = -48$ ____________(1)

$a_1(r)^7 = -384$ ____________(2)

(2)หารด้วย(1) $r^3 = \frac{-384}{-48} = 8$

$\therefore\ r = 2,\ a_1 = -\frac{48}{16} = -3$

$\therefore\ a_n = -3(2)^{n-1}$

3.1) ถ้า a เป็นจำนวนที่ต้องการจะได้ 8,a ,12 เป็นลำดับเรขาคณิต

จากนิยามของลำดับเรขาคณิต จะได้ว่า

$$\frac{a}{8} = \frac{12}{a}$$

$$a^2 = 96$$

$$a = \pm 4\sqrt{6}$$

$\therefore$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12 คือ $4\sqrt{6}$, หรือ $-4\sqrt{6}$

3.2) $z = yr = (\frac{4}{3}\times r^2)r = \frac{4}{3}\times r^3$

$\frac{27}{64} = zr = (\frac{4}{3}r^3)r = \frac{4}{3}\times r^4$

ดังนั้น $\frac{4}{3}\times r^4 = \frac{27}{64}$

$r^4 = \frac{27}{64}\times\frac{3}{4} = \frac{3^4}{4^4}$

$\therefore\ r = \frac{3}{4}$ หรือ $-\frac{3}{4}$

เมื่อ $r = \frac{3}{4}$ จะได้ $x = 1,\ y = \frac{3}{4},\ z = \frac{9}{16}$

$r = -\frac{3}{4}$ จะได้ $x = -1,\ y = \frac{3}{4},\ z = \frac{-9}{16}$

3.3) $a_1 = \frac{4}{3}$ $a_5 = \frac{27}{64}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$a_5 = a_1 r^4$$

$$\frac{27}{64} = \frac{4}{3} r^4$$

$$r^4 = \frac{27}{64} \times \frac{3}{4} = \frac{3^4}{4^4}$$

$$r = \pm \frac{3}{4}$$

เมื่อ $r = \frac{3}{4}$ พจน์ 3 พจน์ที่เรียงอยู่ระหว่าง $\frac{4}{3}$ และ $\frac{27}{64}$ คือ $1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}$

เมื่อ $r = -\frac{3}{4}$ พจน์ 3 พจน์ที่เรียงอยู่ระหว่าง $\frac{4}{3}$ และ $\frac{27}{64}$ คือ $-1, \frac{3}{4}, -\frac{9}{16}$

บัตรเนื้อหา

เรื่อง ลำดับเรขาคณิต

> **นิยาม** ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งอัตราส่วนของ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงที่ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว
> เรียกค่าคงที่ว่า อัตราส่วนร่วม(Common ratio)ใช้สัญลักษณ์ r แทนอัตราส่วนร่วม

ตัวอย่าง กำหนดลำดับต่อไปนี้

1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,(\frac{1}{2})^{n-1},\ldots$

2) $3,6,12,\ldots,3(2^{n-1}),\ldots$

3) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{36},\ldots,\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{n-1}},\ldots$

จะได้ว่าลำดับทั้งสามเป็นลำดับเรขาคณิต แสดงได้ดังนี้

1.
$$a_n = (\tfrac{1}{2})^{n-1}$$
$$a_{n+1} = (\tfrac{1}{2})^{n+1-1} = (\tfrac{1}{2})^{n}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{1}{2})^{n}}{(\frac{1}{2})^{n-1}} = (\tfrac{1}{2})^{n-n+1} = \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงที่สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก n ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตมีอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{1}{2}$

2.
$$a_n = 3(2^{n-1})$$
$$a_{n+1} = 3(2^{n+1-1}) = 3\times2^{n}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3\times2^{n}}{3\times2^{n-1}} = 2$$

$\therefore$ อัตราส่วนร่วม คือ 2

3.
$$a_n = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{n-1}}$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{n+1-1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{n}}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{n}}\times\frac{2}{1}\times3^{n-1} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ อัตราส่วนร่วม คือ $\frac{1}{3}$

การหาพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ 3,4,10 และ 21 ของลำดับเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้ 2 พจน์แรก คือ 3 และ 6 ตามลำดับ

$$\therefore \quad r = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_3 = 3\times 2^{3-1} = 3\times 4 = 12$$

$$a_4 = 3\times 2^{4-1} = 3\times 8 = 24$$

$$a_{10} = 3\times 2^{10-1} = 3\times 2^9$$

$$a_{21} = 3\times 2^{21-1} = 3\times 2^{20}$$

□

การหาพจน์กลางของลำดับเรขาคณิต

1. **การหาพจน์กลางหนึ่งพจน์ ซึ่งอยู่ระหว่าง a กับ b**

ให้ a, G, b เป็นลำดับเรขาคณิต

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

$$\boxed{G^2 = ab}$$

ตัวอย่าง จงหาพจน์กลางหนึ่งพจน์ระหว่าง 8 และ 18

$$G^2 = 8\times 18 = 144$$

$$G = 12 \text{ หรือ } -12$$

2. **การหาพจน์กลางหลายพจน์**

ตัวอย่าง จงหาพจน์กลาง 3 พจน์ระหว่าง $\frac{1}{4}$ และ $\frac{4}{81}$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{4}{81}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_5 = \frac{1}{4}\times r^{5-1}$$

$$\frac{4}{81} = \frac{r^4}{4}$$

$$r^4 = \frac{16}{81}$$

$$r = \frac{2}{3} \text{ หรือ } -\frac{2}{3}$$

$\therefore$ พจน์กลาง 3 พจน์ระหว่าง $\frac{1}{4}$ และ $\frac{4}{81}$ มี 2 ชุดคือ

$$\frac{2}{12}, \frac{4}{36}, \frac{8}{108} \text{ หรือ } -\frac{2}{12}, \frac{4}{36}, -\frac{8}{108} \qquad \square$$

บัตรแบบฝึกหัด

1. จงหาพจน์ที่ 11 และพจน์ที่ 20 ของลำดับเรขาคณิต 5,10,20,...
2. จากลำดับเรขาคณิต $3, -2, \frac{4}{3}, \ldots$ จงหา a_8
3. จงหาจำนวนพจน์ของลำดับเรขาคณิต 2,4,8,...,512
4. จงหาพจน์ 3 พจน์ ซึ่งเรียงอยู่ระหว่าง 8 และ 2 และทำให้ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต
5. กำหนดให้ $a_1 = 8$, $a_2 = 12$ จงหา a_6

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. $a_{11} = 5\cdot2^{10}$, $a_{20} = 5\cdot2^{19}$
2. $a_8 = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{7}$
3. 9
4. $4\sqrt{2}$, 4 , $2\sqrt{2}$
5. $a_6 = \frac{243}{4}$

บัตรทดสอบ

1. จากลำดับเรขาคณิต $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{27}{32}, \ldots$ จงหา a_{12} และ a_n
2. จงหาจำนวนพจน์ของลำดับเรขาคณิต $\frac{8}{81}, \frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{27}{16}$
3. จงหาพจน์ 3 พจน์ที่เรียงต่อกันในลำดับเรขาคณิต โดยที่ผลบวกของพจน์ทั้งสามเท่ากับ 42 และผลคูณของพจน์ทั้งสามเท่ากับ 512
4. จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2, x, 3$ เป็นลำดับเรขาคณิต
5. จงหาค่าของ x และ y ที่ทำให้ $\frac{3}{4}, x, y, \frac{2}{9}$ เป็นลำดับเรขาคณิต

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. $a_{12} = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{8}\right)^{11}$, $a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}$
2. 8
3. 2, 8, 32 หรือ 32, 8, 2
4. $x = \pm\sqrt{6}$
5. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 7

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัดพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบ
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง อนุกรม

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาลิมิตของลำดับได้อย่างถูกต้อง

2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้อย่างถูกต้อง

3. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

1. ศึกษาเรื่องลิมิตของลำดับจากบทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรม

เรื่อง

ลิมิตของลำดับ

ข้อแนะนำในการเรียน

1. บทเรียนนี้นักเรียนสามารถเรียนได้ตามสบาย อ่านบทเรียนช้าๆและทำความเข้าใจไปเรื่อยๆ
2. ลักษณะบทเรียนจะมีคำอธิบายสลับคำถามให้นักเรียนตอบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาออกเป็นกรอบย่อยๆเรียงตามลำดับจากง่ายไปหายาก นักเรียนทำตามทีละกรอบ
3. แบบเรียนนี้เป็นแบบเติมคำตอบ เลือกเติมคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียว
4. คำเฉลยจะอยู่ด้านข้างของกรอบถัดไป ขณะนักเรียนทำไม่ควรดูคำเฉลย เพราะจะทำให้นักเรียนไม่มีโอกาสได้คิด ควรใช้กระดาษปิดคำเฉลยไว้ก่อน
5. การตอบคำถาม นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง การตอบผิดไม่เสียหายอะไร นักเรียนอาจจะย้อนไปศึกษาบทเรียนกรอบก่อนๆหรือทำความเข้าใจคำตอบใหม่ จะทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนมากยิ่งขึ้น เมื่อตอบเสร็จแล้วค่อยเปิดกระดาษตรวจดูคำเฉลยเพื่อทำความเข้าใจต่อไป.

ก.1

พิจารณาค่าของ a_n ของลำดับ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ ไม่สิ้นสุด

(1) ลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(2) ลำดับ $5, 5, 5, 5, \ldots$

(3) ลำดับ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

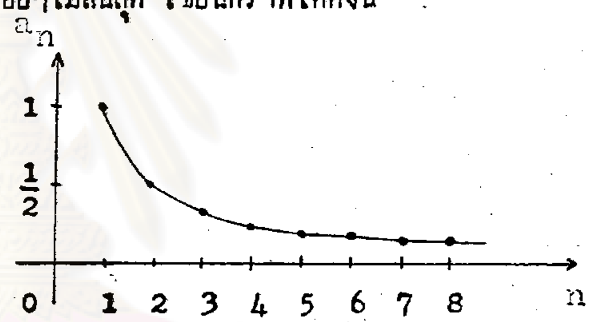
(4) ลำดับ $1, 2, 4, 8, \ldots$

(5) ลำดับ $6, 3, 0, -3, \ldots$

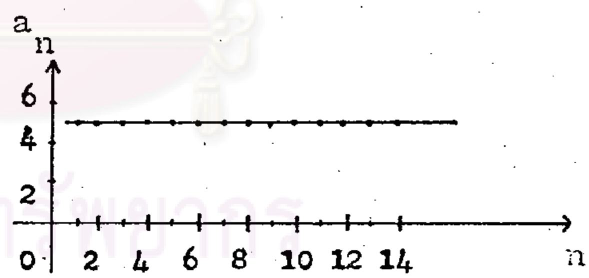
(6) ลำดับ $1, -1, 1, -1, \ldots$

จะเห็นว่าลักษณะของค่า a_n ของลำดับ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆไม่สิ้นสุด เขียนกราฟได้ดังนี้

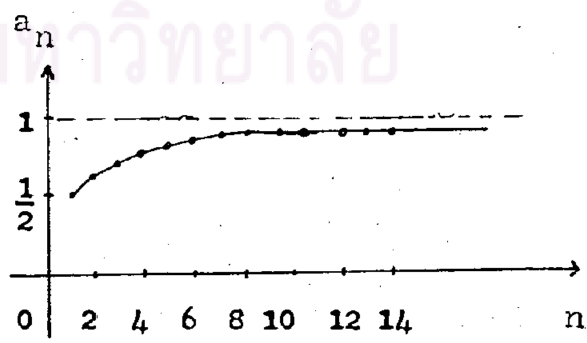
(1)



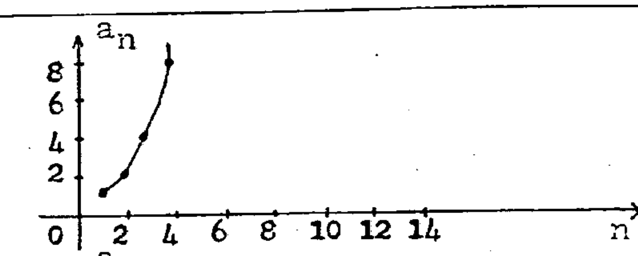
(2)



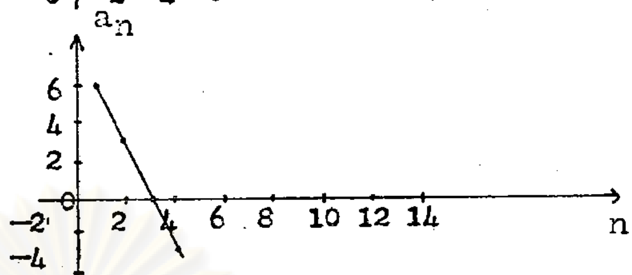
(3)



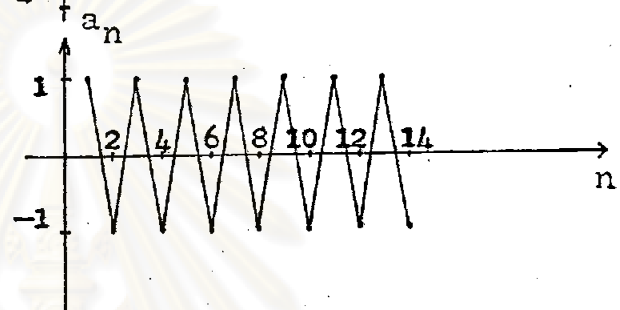
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
(4)



(5)



(6)



จากกราฟจะพบลักษณะของ a_n ต่างๆกัน นั่นคือ
<u>ลำดับที่1</u> a_n จะมีค่า ________________
<u>ลำดับที่2</u> a_n จะมีค่า ________________
<u>ลำดับที่3</u> a_n จะมีค่า ________________
<u>ลำดับที่4</u> a_n จะมีค่า ________________
<u>ลำดับที่5</u> a_n จะมีค่า ________________
<u>ลำดับที่6</u> a_n จะมีค่า ________________
</td>
</tr>
<tr>
<td>
1. เข้าใกล้ 0
2. เท่ากับ 5
3. เข้าใกล้ 1
4. เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต
5. ลดลงอย่างไม่มีขอบเขต
6. ไม่เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง
</td>
<td>
ก.2
จาก ก.1 สามารถแยกลักษณะ a_n ของลำดับทั้ง 6 ได้เป็น 2 ลักษณะ คือ
<u>ลักษณะที่1</u> เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่สิ้นสุด a_n จะมีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง ลำดับที่มีลักษณะดังกล่าว คือ ลำดับที่___,___,___
<u>ลักษณะที่2</u> เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่สิ้นสุด a_n จะมีค่ามากขึ้นหรือลดลงและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง
</td>
</tr>
</table>

ลำดับที่มีลักษณะดังกล่าวคือลำดับที่___,___,___

สรุป (1) เรียกลำดับที่เป็นไปตามลักษณะที่1 ว่า ลำดับที่มีลิมิต หรือ ลำดับคอนเวอร์เจนต์ เรียกจำนวนจริงที่ a_n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับว่า ลิมิตของลำดับ

(2) เรียกลำดับที่เป็นไปตามลักษณะที่2ว่า ลำดับที่ไม่มีลิมิต หรือ ลำดับไดเวอร์เจนต์

1, 2, 3

4, 5, 6

ก.3

ดังนั้นจากลำดับใน ก.1 จะพบว่า

ลำดับที่1 มีลิมิตเท่ากับ ________________

ลำดับที่2 มีลิมิตเท่ากับ ________________

ลำดับที่3 มีลิมิตเท่ากับ ________________

0

5

1

ก.4

พิจารณาลำดับอนันต์ต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ให้หาลิมิต

ลำดับ	เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์	เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์	ลิมิตของลำดับ
$a_n = \frac{8}{3n}$	✓		0
$a_n = \frac{n}{n+1}$	______	______	______
$a_n = (\frac{2}{3})^n$	______	______	______
$a_n = \frac{3n}{4n+5}$	______	______	______
$a_n = \frac{3n+5}{6}$	______	______	______
$a_n = \frac{n^2}{2n}$	______	______	______

	คอนฯ	ไดฯ	ลิมิต
$\frac{n}{n+1}$	✓		1
$(\frac{2}{3})^n$	✓		0
$\frac{3n}{4n+5}$	✓		$\frac{3}{4}$
$\frac{3n+5}{6}$		✓	
$\frac{n^2}{2n}$		✓	

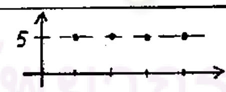
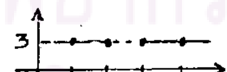
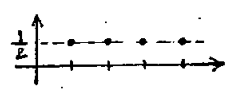
ก.5 เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด จะได้ว่า

ลำดับคอนเวอร์เจนต์	ลิมิตของลำดับ	เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์
$a_n = \frac{8}{3n}$	0	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{3n} = 0$
$a_n = \frac{n}{n+1}$	1	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
$a_n = (\frac{2}{3})^n$	0	$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$
$a_n = \frac{3n}{4n+5}$	$\frac{3}{4}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{4n+5} = \frac{3}{4}$
$a_n = a_n$	L	__________

สรุป ถ้า L เป็นค่าคงที่ใดๆและ L เป็นลิมิตของลำดับ a_n เราเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ก.6 ศึกษาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

ลำดับ	กราฟของ a_n	ลิมิตของลำดับ	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
5, 5, 5,...		5	$\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$
3, 3, 3,...		____	________
−1,−1,−1,...		____	________
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$		____	________
c, c, c		____	________

สรุป ถ้า c เป็นค่าคงที่แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

3 , $\lim\limits_{n \to \infty} 3 = 3$

-1 , $\lim\limits_{n \to \infty} (-1) = -1$

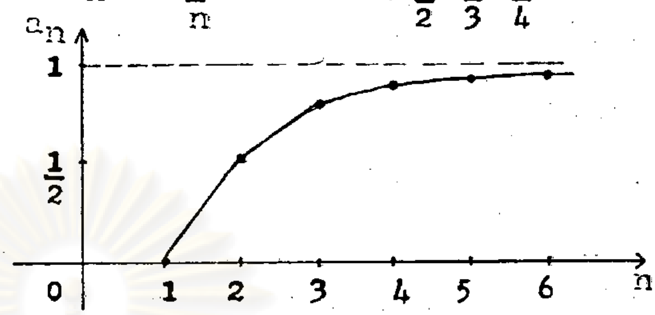
$\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c , $\lim\limits_{n \to \infty} c = c$

ก.7 พิจารณาลิมิตของ $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ และ

ลิมิตของ $b_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$

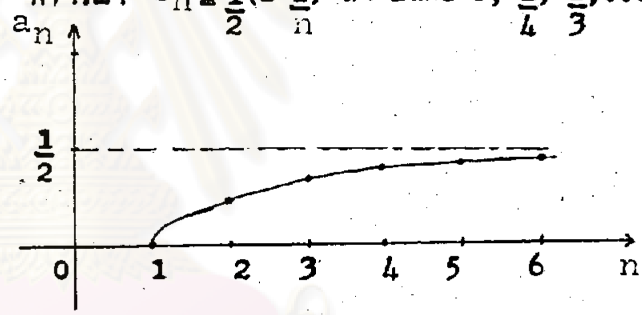
จาก $a_n = 1-\frac{1}{n}$ ลำดับนี้ คือ $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$



จากกราฟได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น ________

นั่นคือ $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n}) =$ ________

พิจารณา $b_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$ ลำดับนั้นคือ $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \ldots$



จากกราฟได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น ________

นั่นคือ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) =$ ________

จะเห็นว่า $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \lim\limits_{n \to \infty} (1-\frac{1}{n})$

<u>สรุป</u> ถ้า c เป็นค่าคงที่ และ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ จะได้ว่า

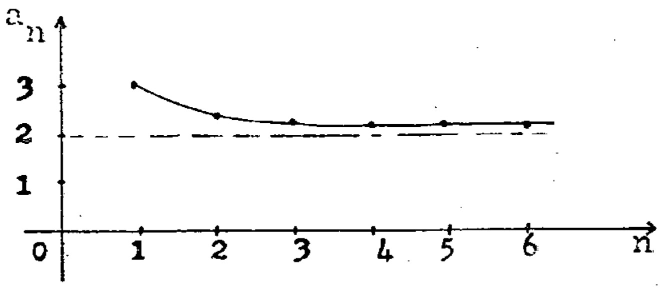
$$\lim_{n \to \infty} c\,a_n = c \lim_{n \to \infty} a_n = cA$$

1
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$

ก.8 พิจารณาลิมิตของ $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ และ

$b_n = 3 - \frac{1}{n}$

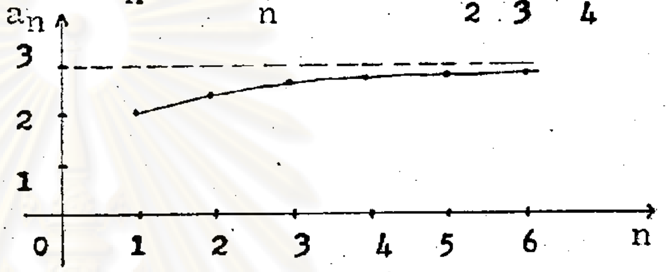
จาก $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ ลำดับนั้นคือ $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \ldots$



จากกราฟ ได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น 2

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n}$ = ________

จาก $b_n = 3 - \frac{1}{n}$ ลำดับนี้คือ $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \ldots$



จากกราฟ ได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น 3

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{1}{n}$ = ________

(1) พิจารณา $a_n + b_n = (2+\frac{1}{n}) + (3-\frac{1}{n}) = 5$

ดังนั้นลำดับนี้มีลิมิตเป็น 5

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty}\left[(2+\frac{1}{n}) + (3-\frac{1}{n})\right]$ = ________

จะเห็นว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[(2+\frac{1}{n})+(3-\frac{1}{n})\right] = \lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) + \lim_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})$$

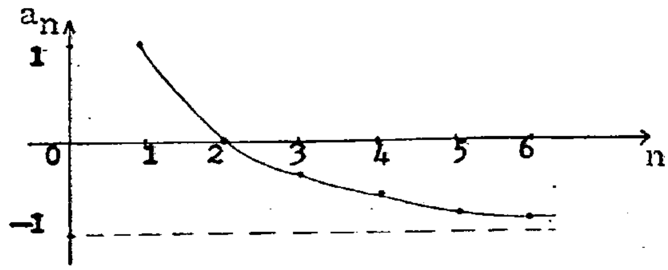
$$= 5$$

สรุป ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$= A+B$$

(2) พิจารณา $a_n - b_n = (2+\frac{1}{n})-(3-\frac{1}{n}) = -1+\frac{2}{n}$

$\therefore$ ลำดับนี้คือ $1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \ldots$



จากกราฟได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น -1

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(2+\frac{1}{n}) - (3-\frac{1}{n})\right] =$ ____________

จะเห็นว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[(2+\frac{1}{n})-(3-\frac{1}{n})\right] = \lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) - \lim_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})$$

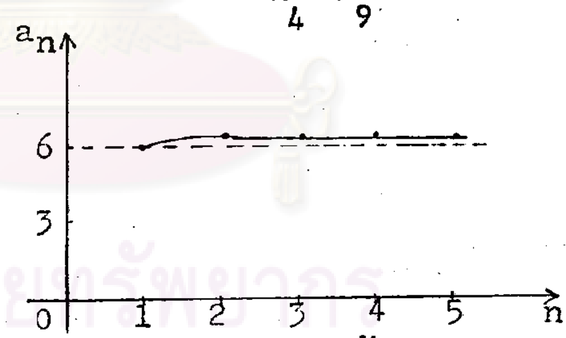
$$= -1$$

<u>สรุป</u> ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim b_n = B$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A-B$$

(3) พิจารณา $a_n \cdot b_n = (2+\frac{1}{n})\cdot(3-\frac{1}{n}) = 6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$

ลำดับนั้นคือ $6, \frac{25}{4}, \frac{56}{9}, \ldots$



จากกราฟจะได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น 6

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(2+\frac{1}{n})\ (3-\frac{1}{n})\right] =$ ____________

จะเห็นว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[(2-\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})\right] = \lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) \cdot \lim_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})$$

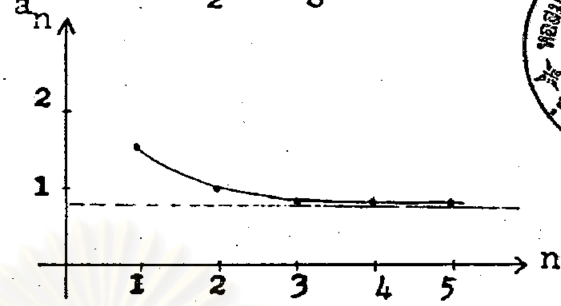
$$= 6$$

<u>สรุป</u> ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = AB$$

(4) พิจารณา $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \dfrac{2n+1}{3n-1}$

ลำดับนั้นคือ $\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{8}, \ldots$



จากกราฟจะได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น $\frac{2}{3}$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right] = $ ______________

จะเห็นว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right] = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})} = \frac{2}{3}$$

<u>สรุป</u> ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

<u>สรุปรวม</u>

การหาลิมิตของลำดับต่างๆ นอกจากจะหาโดยตรงจากการพิจารณากราฟของลำดับแล้ว อาจหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต นั่นคือ

ให้ c เป็นค่าคงที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$; $B \neq 0$

<table>
<tr><td></td><td>5. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = AB$</td></tr>
<tr><td>2
3
5
−1
6
$\frac{2}{3}$</td><td>ก.9

พิจารณาการหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = \frac{3+2n}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + 2$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} 2$

$= 0 + 2$

$= 2$ ____ □

$\therefore$ ลำดับนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

2. $a_n = \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^3 - n}{n^3}}{\frac{5n^3 - 17}{n^3}}$

(หารทั้งเศษและส่วนด้วย n^3)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{17}{n^3}}$

$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{17}{n^3}}$

$= \frac{3-0}{5+0}$

$= \frac{3}{5}$ ____ □

$\therefore$ ลำดับนี้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

<u>หมายเหตุ</u> ต้องหารด้วย n^3 ทั้งเศษและส่วนก่อน จึงจะหาลิมิตได้</td></tr>
</table>

3. $a_n = \frac{8}{3n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3n}$ = ______________

= ______________

$\therefore$ ลำดับนี้เป็นลำดับ ______________

4. $a_n = \frac{n}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}$ ______________

(หารทั้งเศษและส่วนด้วย n)

$= \lim_{n\to\infty}$ ______________

= ______________

$\therefore$ ลำดับนี้เป็นลำดับ ______________

5. $a_n = \frac{6n-4}{6n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{6n-4}{6n} = \lim_{n\to\infty}$ ______________

(หารทั้งเศษและส่วนด้วย n)

$= \lim_{n\to\infty}$ ______________

= ______________

$\therefore$ ลำดับนี้เป็นลำดับ ______________

6. $a_n = \frac{4+5n}{n^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{4+5n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}$ ______________

(หารทั้งเศษและส่วนด้วย n^2)

$= \lim_{n\to\infty}$ ______________

= ______________

$\therefore$ ลำดับนี้เป็นลำดับ ______________

7. $a_n = \frac{3n+5}{6}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{6} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{6}+\frac{5}{6}$$

(หารทั้งเศษและส่วนด้วย n) $= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2} + \lim_{n}\frac{5}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2}{n}} + \underline{\qquad}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}} + \underline{\qquad}$$

$$= \frac{1}{0} + \underline{\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad}$$

∴ ลำดับนี้เป็นลำดับ ________ ________ □

8. $a_n = \frac{4n^2-2n+3}{n^2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+3}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\underline{\qquad}$$

(เอา n^2 หารทั้งเศษและส่วน)

$$= \lim_{n\to\infty}\underline{\qquad}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underline{\qquad} + \lim_{n\to\infty}\underline{\qquad} + \lim_{n\to\infty}\underline{\qquad}$$

$$= \underline{\qquad}$$

∴ ลำดับนี้เป็นลำดับ ________ ________ □

---

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8}{n}}{3}$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3}$$

ก.10

การหาลิมิตของลำดับ อาจสังเกตได้จากเลขชี้กำลังของตัวแปรใน a_n โดยที่ a_n ต้องจัดอยู่ในรูปของเศษส่วน

$= \frac{0}{3}$

$= 0$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{1 + 0}$

$= 1$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n-4}{6n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{4}{n}}{6}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6}$

$= \frac{6-0}{6}$

$= 1$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

6. $\lim \frac{4+5n}{n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{1}$

$= \frac{0+0}{1} = 0$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

<u>วิธีสังเกต</u> 1. ถ้า a_n ของลำดับมีเลขชี้กำลังของตัวแปรของตัวเศษน้อยกว่าเลขชี้กำลังของตัวส่วน จะได้ว่าลิมิตของลำดับมีค่าเท่ากับ 0 เช่น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4+5n}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n+3}{n^3+2n} = 0$$

2. ถ้า a_n ของลำดับมีเลขชี้กำลังของตัวแปรของตัวเศษเท่ากับเลขชี้กำลังของตัวส่วน จะได้ว่าลิมิตของลำดับมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งเศษและส่วนนั้น เช่น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+3}{n^2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n-4}{6n} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$$

3. ถ้า a_n ของลำดับมีเลขชี้กำลังของตัวแปรของตัวเศษมากกว่าเลขชี้กำลังของตัวแปรของตัวส่วน จะได้ว่า ลิมิตของลำดับหาไม่ได้ เช่น

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3+1}{n}$ หาค่าไม่ได้

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+5}{6}$ หาค่าไม่ได้

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+5}{6}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{\frac{6}{n}}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n}}$

$= \frac{3+0}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+3}{n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1}$

$= \frac{4-0+0}{1}$

$= 4$

เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

2. ศึกษาตารางต่อไปนี้ตามแนวลูกศรชี้

		เขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของแต่ละพจน์	
ลำดับจำกัด	1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 2. $1, 3, 9, 27$ 3. $-2, -4, -6, -8,$ 4. $1, 5, 13, 29$ 5. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ 6. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$	1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ 2. $1 + 3 + 9 + 27$ 3. ________ 4. ________ 5. ________ 6. ________	เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัดว่า <u>อนุกรมจำกัด</u>
ลำดับอนันต์	1. $1, 2, 3, 4, \ldots$ 2. $3, 6, 9, 12, \ldots$ 3. $-5, -4, -3, -2, \ldots$ 4. $2, 6, 32, \ldots$ 5. $0.4, 0.04, 0.004, \ldots$ 6. $24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$ 7. $a_1, a_2, a_3, \ldots$	1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ 2. $3 + 6 + 9 + 12 + \ldots$ 3. ________ 4. ________ 5. ________ 6. ________ 7. ________	เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ว่า <u>อนุกรมอนันต์</u>
	เรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับ ในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ ว่า <u>อนุกรม</u>		

สรุป

นิยาม เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดและ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ เรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

ว่า อนุกรมและ อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด

อนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์

2.1 สำหรับอนุกรม $a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_n$ หรือ $a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_n+ \ldots$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

a_3 ว่า ______________

⋮

a_n ว่า ______________

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม จะใช้อักษร กรีก $\sum$ (ซิกมา) เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก

นั่นคือจะเขียน $\sum_{i=1}^{n} a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

และเขียน $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{5} i^2$ แทน $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$\sum_{i=1}^{15} (i-2)$ แทน $(1-2) + (2-2) + (3-2) + \ldots + (15-2)$

$\sum_{i=1}^{5} 5$ แทน ______________

$\sum_{i=1}^{\infty} n$ แทน $2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

$\sum_{k=1}^{5} (2k-1)$ แทน ______________

หมายเหตุ การใช้ $\sum$ แทนการบวก จำนวนซึ่งใช้เป็นจำนวนเริ่มต้นไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นที่ 1 เสมอไป

2.2 $\sum_{i=1}^{5} 4 = 4+4+4+4+4 = 5(4) = 20$

$\sum_{i=1}^{7} 2 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

$\sum_{i=1}^{4} 8 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

<u>สรุป</u> เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{n \text{ ตัว}}$

$= nc$

2.3

	กระจายให้อยู่ในรูปของผลบวก	ผลลัพธ์ของผลบวก	สรุปได้ว่า(=, ≠)
(1) $\sum_{k=1}^{5} 2k$	$2(1)+2(2)+2(3)+2(4)+2(5)$	$2+4+6+8+10 = 30$	$\sum_{k=1}^{5} 2k \_\_ 2\sum_{k=1}^{5} k$
$2\sum_{k=1}^{5} k$	$2\left[1+2+3+4+5\right]$	$2 \times 15 = 30$	
(2) $\sum_{i=1}^{4} 3i^2$	$3(1)^2+3(2)^2+3(3)^2+3(4)^2$	____ $= 90$	$\sum_{i=1}^{4} 3i^2 \_\_ 3\sum_{i=1}^{4} i^2$
$3\sum_{i=1}^{4} i^2$	$3\left[1^2+2^2+3^2+4^2\right]$	____ $= 90$	
(3) $\sum_{a=1}^{3} 7a$	______	______	$\sum_{a=1}^{3} 7a \_\_ 7\sum_{a=1}^{3} a$
$7\sum_{a=1}^{3} a$	______	______	

<u>สรุป</u> เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

	กระจายอยู่ในรูปผลบวก	ผลลัพธ์
1. $\sum_{i=1}^{3} n_i$	$n_1 + n_2 + n_3$	
$\sum_{i=1}^{3} m_i$	$m_1 + m_2 + m_3$	
$\sum_{i=1}^{3} (n_i + m_i)$	$(n_1+m_1)+(n_2+m_2)+(n_3+m_3)$	$(n_1+n_2+n_3)+(m_1+m_2+m_3)$
$\sum_{i=1}^{3} n_i + \sum_{i=1}^{3} m_i$	$n_1+n_2+n_3+m_1+m_2+m_3$	$(n_1+n_2+n_3)+(m_1+m_2+m_3)$
$\sum_{i=1}^{3} (n_i - m_i)$	______________	______________
$\sum_{i=1}^{3} n_i - \sum_{i=1}^{3} m_i$	______________	______________
2. $\sum_{i=1}^{4} a_k^2$	$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$	
$\sum_{k=1}^{4} b_k$	______________	
$\sum_{k=1}^{4} (a_k^2 + b_k)$	______________	______________
$\sum_{k=1}^{4} a_k^2 + \sum_{k=1}^{4} b_k$	______________	______________
$\sum_{k=1}^{4} (a_k^2 - b_k)$	______________	______________
$\sum_{k=1}^{4} a_k^2 - \sum_{k=1}^{4} b_k$	______________	______________

จะเห็นว่า จากข้อ 1. $\sum_{i=1}^{3}(n_i+m_i) = \sum_{i=1}^{3}n_i + \sum_{i=1}^{3}m_i$

$$\sum_{i=1}^{3}(n_i - m_i) = \sum_{i=1}^{3}n_i - \sum_{i=1}^{3}m_i$$

2. $\sum_{k=1}^{4}(a_k^2+b_k) = \sum_{k=1}^{4}a_k^2 + \sum_{k=1}^{4}b_k$

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k^2-b_k) = \sum_{k=1}^{4}a_k^2 - \sum_{k=1}^{4}b_k$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i \pm \sum_{i=1}^{n}b_i$$

<u>สรุป</u> คุณสมบัติของ $\sum$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} [a_i \pm b_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

พิจารณาค่าของ $\sum_{i=1}^{6}(3i-4) = \sum_{i=1}^{6}3i - \sum_{i=1}^{6}4$

$$= 3\sum_{i=1}^{6} i - 6(4)$$

$$= 3(1+2+3+4+5+6)-24$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$$\sum_{i=1}^{4}(2i^2+3) = \sum_{i=1}^{4}2i^2 + \sum_{i=1}^{4}3$$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$$\sum_{k=1}^{5}(k^2+3) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

2.4 พิจารณาอนุกรมที่ได้จากลำดับต่อไปนี้

ลำดับ		อนุกรม	
ลำดับเลขคณิต	1. 7,15,23,... 2. 2,4,6,... 3. -5,-4,-3,...	1. 7 + 15 + 23 + ... 2. 2 + 4 + 6 + ... 3. (-5)+(-4)+(-3) ...	เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิตว่า <u>อนุกรมเลขคณิต</u>
ลำดับเรขาคณิต	1. -3,-6,-12, -24, ... 2. $\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$ 3. $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \ldots$	1. (-3)+(-6)+(-12)+(-24) + ... 2. $\frac{5}{6}+(-\frac{5}{3})+(\frac{10}{3})+\ldots$ 3. $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+\frac{25}{4}+\ldots$	เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิตว่า <u>อนุกรมเรขาคณิต</u>

ลำดับ	อนุกรม	อนุกรมเลขคณิต	อนุกรมเรขาคณิต
1. $-2,-4,-8,-16$	1. $(-2)+(-4)+(-8)+(-16)$		✓
2. $\frac{5}{6},-\frac{5}{3},\frac{10}{3},-\frac{20}{3}$	2. $\frac{5}{6}+(-\frac{5}{3})+\frac{10}{3}+(-\frac{20}{3})$	______	______
3. $ab^3,a^2b^2,a^3b,\ldots$	3. $ab^3+a^2b^2+a^3b+\ldots$	______	______
4. $x,x+2,x+4,\ldots$	4. ______	______	______
5. $-2,4,10,\ldots$	5. ______	______	______
6. $11,13\frac{1}{2},16,\ldots$	6. ______	______	______
7. $3a+2b,2a+4b,a+6b,\ldots$	7. ______	______	______
8. $-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\ldots$	8. ______	______	______

2.5 พิจารณาการหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตต่อไปนี้

ให้ S_5 เป็นผลบวกของ 5 พจน์แรกของอนุกรม $6+9+12+15+18$

$\therefore\ a_1 = 6\ ,\ d = 3$

$$S_5 = 6+9+12+15+18$$

$$= 6+(6+3)+\left[6+2(3)\right]+\left[6+3(3)\right]+\left[6+4(3)\right] \quad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

หรือ $S_5 = \left[6+4(3)\right]+\left[6+3(3)\right]+\left[6+2(3)\right]+(6+3)+6$ ______(2)

(1) + (2) จะได้

$$2S_5 = \left[6+6+4(3)\right]+\left[(6+3)+6+3(3)\right]+\left[6+2(3)+6+2(3)\right]+\left[6+3(3)+(6+3)\right]+\left[6+4(3)+6\right]$$

$$= \left[2(6)+4(3)\right]+\left[2(6)+4(3)\right]+\left[2(6)+4(3)\right]+\left[2(6)+4(3)\right]+\left[2(6)+4(3)\right]$$

$$= 5\left[2(6)+4(3)\right]$$

$$S_5 = \frac{5}{2}\left[2(6)+(5-1)3\right]$$

ให้ S_4 เป็นผลบวกของ 4 พจน์แรกของอนุกรม $(-2)+4+10+16$

$$S_4 = (-2)+4+10+16$$
$$= (-2)+(-2+6)+(-2+12)+(-2+18)$$
$$= (-2)+\left[-2+6\right]+\left[-2+2(6)\right]+\left[-2+3(6)\right] \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

หรือ $$S_4 = \left[-2+3(6)\right]+\left[-2+2(6)\right]+\left[-2+6\right]+(-2) \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

(1) + (2) จะได้

$$2S_4 = \left[(-2)+(-2)+3(6)\right]+\left[(-2)+(-2)+6+2(6)\right]+\left[(-2)+(-2)+6+2(6)\right]+\left[(-2)+(-2)+3(6)\right]$$
$$= \left[2(-2)+3(6)\right]+ \text{\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_}$$
$$= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$
$$S_4 = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

ดังนั้น ถ้าให้ S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น a_1 และ d เป็นผลต่างร่วม จะได้ว่า

$$S_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\dots+\left[a_1+(n-1)d\right] \quad \text{\_\_\_}(1)$$

หรือ $$S_n = \left[a_1+(n-1)d\right]+ \text{\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_} +\dots+(a_1+d)+a_1 \text{\_}(2)$$

(1) + (2) จะได้

$$2S_n = \left[a_1+a_1+(n-1)d\right]+ \text{\_\_\_\_\_\_} +\dots+ \text{\_\_\_\_\_\_}$$
$$= \underbrace{\left[2a_1+(n-1)d\right]+ \text{\_\_\_\_\_\_} +\dots+ \text{\_\_\_\_\_\_}}_{n \text{ พจน์}}$$
$$= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$
$$S_n = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

<u>สรุป</u>

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$

หรือ $S_n = \frac{n}{2}\left[a_1+a_n\right]$

พิจารณาการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต						
อนุกรมเลขคณิต	a_1	d	S_n	a_n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$	$S_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]$
7+15+23+...	7	8	S_7	$a_7 = a_1+6d$ $= 7+6(8)$ $= 55$	$S_7 = \frac{7}{2}[2(7)+(7-1)8]$ $= \frac{7}{2}[14+6(8)]$ $= \frac{7}{2}[14+48]$ $= 217$	$S_7 = \frac{7}{2}[7+a_7]$ $= \frac{7}{2}[7+55]$ $= 217$
6+10+14+...	___	___	S_6	$a_6 = a_1+5d$ = ___ = ___	$S_6 = \frac{6}{2}$ [___] = ___ = ___ = ___	$S_6 = \frac{6}{2}$[___] = ___ = ___
(−4)+(−6)+(−8)+...	___	___	S_{10}	a_{10} = ___ = ___ = ___	S_{10} = ___ = ___ = ___	S_{10} = ___ = ___ = ___

2.6 พิจารณาการหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต

ให้ S_4 เป็นผลบวกของ 4 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต (−3)+(−6)+(−12)+(−24)

ดังนั้น $a_1 = -3$ $\quad r = 2$

$$\therefore S_4 = (-3)+(-6)+(-12)+(-24) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

คูณด้วย 2 ทั้ง 2 ข้างจะได้ว่า

$$2S_4 = (-6)+(-12)+(-24)+(-48) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

(1) − (2) จะได้

$$S_4 - 2S_4 = (-3) - (-48)$$

$$S_4(1-2) = -3(1-16)$$

$$S_4 = \frac{-3(1-16)}{1-2} = \frac{-3(-15)}{-1} = -45$$

นั่นคือ $(-3)+(-6)+(-12)+(-24) = -45$ ______□

ให้ S_7 เป็นผลบวกของ 7 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+\frac{25}{4}+\frac{125}{4}+\frac{625}{4}+\frac{3125}{4}+\frac{15625}{4}$$

ดังนั้น $a_1 =$ ______ $r =$ ______

$\therefore$ $S_7 =$ ____________________ ______(1)

คูณด้วย 5 ทั้ง 2 ข้างจะได้

$5S_7 =$ ____________________ ______(2)

(1)–(2) จะได้

$S_7 - 5S_7 =$ ____________________

$= \frac{1}{4} - \frac{78125}{4}$

$S_7(1-5) = \frac{1}{4}(1-78125)$

$S_7 =$ __________

$=$ __________

$= -\frac{19531}{4}$

ให้ S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\ldots+a_1r^{n-1}$$

$\therefore$ $S_n = a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\ldots+a_1r^{n-1}$ ______(1)

เอา r คูณทั้ง 2 ข้าง

$rS_n = a_1r+a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4-\ldots+a_1\cdot r^n$ ______(2)

(1)–(2) จะได้

$S_n - rS_n =$ ____________________

$S_n(1-r) =$ ____________________

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a_1-a_1r^n}{1-r}$$

$$= \frac{a_1-a_1\cdot r^n\cdot\frac{r}{r}}{1-r}$$

$$= \frac{a_1-a_1\cdot r^{n-1}\cdot r}{1-r}$$

แต่ $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

ดังนั้น $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$

<u>สรุป</u>

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$

หรือ $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$, $r \neq 1$

พิจารณาการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต	a_1	r	S_n	$a_n = a_1 r^{n-1}$	$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$	$S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$
27−18−12−...	27	$-\frac{2}{3}$	S_4	$a_4 = 27 \cdot (-\frac{2}{3})^3$ $= 27(-\frac{8}{27})$ $= -8$	$S_4 = \dfrac{27\left[1-(-\frac{2}{3})^4\right]}{1+\frac{2}{3}}$ $= \dfrac{27\left[1-\frac{16}{81}\right]}{\frac{5}{3}}$ $= 13$	$S_4 = \dfrac{27-(-8)(-\frac{2}{3})}{1+\frac{2}{3}}$ $= \dfrac{27-\frac{16}{3}}{\frac{5}{3}}$ $= 13$
7+15+23+...	7	___	S_6	$a_6 = 7(\_\_)^5$ = ___ = ___	$S_6 = \dfrac{7\left[1-(\_\_)^6\right]}{1-\_\_}$ = ___ = ___	$S_6 = 7$ ___ = ___ = ___
$\frac{5}{8}+\frac{5}{3}+\frac{10}{3}+\ldots$	___	___	S_{10}	$a_{10} =$ ___ = ___ = ___	$S_{10} =$ ___ = ___ = ___	$S_{10} =$ ___ = ___ = ___

บัตรเฉลยบัตรกิจกรรม

2.

		เขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของแต่ละพจน์
ลำดับจำกัด	3. $-2,-4,-6,-8$	3. $(-2)+(-4)+(-6)+(-8)$
	4. $1, 5, 13, 29$	4. $1+5+13+29$
	5. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$	5. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$
	6. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$	6. $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$
ลำดับอนันต์	3. $-5,-4,-3,-2,\ldots$	3. $(-5)-(-4)-(-3)-(-2)-\ldots$
	4. $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots$	4. $\sqrt{2}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}+\ldots$
	5. $0.4, 0.04, 0.004, \ldots$	5. $0.4+0.04+0.004+\ldots$
	6. $24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$	6. $24+8+\frac{8}{3}+\frac{8}{9}+\ldots$
	7. $a_1, a_2, a_3, \ldots$	7. $a_1+a_2+a_3+\ldots$

$\sum_{i=1}^{5} 3$ แทน $3+3+3+3+3$

$\sum_{k=3}^{5} (2k-1)$ แทน $\left[2(3)-1\right]+\left[2(4)-1\right]+\left[2(5)-1\right] = 5+7+9$

2.2

$$\sum_{i=1}^{7} 2 = 2+2+2+2+2+2+2 = 7(2) = 14$$

$$\sum_{i=1}^{4} 8 = 8+8+8+8 = 8(4) = 32$$

2.3

	กระจายให้อยู่ในรูปของผลบวก	ผลลัพธ์ของผลบวก	สรุปได้ว่า (= , ≠)
2. $\sum_{i=1}^{4} 3i^2$		$3+12+27+48 = 90$	$\sum_{i=1}^{4} 3i^2 = 3\cdot\sum_{i=1}^{4} i^2$
$3\cdot\sum_{i=1}^{4} i^2$		$3 \times 30 = 90$	
3. $\sum_{a=1}^{3} 7a$	$7(1)+7(2)+7(3)$	$7+14+21 = 42$	$\sum_{a=1}^{3} 7a = 7\cdot\sum_{a=1}^{3} a$
$7\cdot\sum_{a=1}^{3} a$	$7\left[1+2+3\right]$	$7 \times 6 = 42$	

	กระจายอยู่ในรูปผลบวก	ผลลัพธ์
1. $\sum_{i=1}^{3}(n_i-m_i)$	$(n_1-m_1)+(n_2-m_2)+(n_3-m_3)$	$(n_1+n_2+n_3)-(m_1+m_2+m_3)$
$\sum_{i=1}^{3}n_i-\sum_{i=1}^{3}m_i$	$n_1+n_2+n_3-(m_1+m_2+m_3)$	$(n_1+n_2+n_3)-(m_1+m_2+m_3)$
2. $\sum_{k=1}^{4}b_k$	$b_1+b_2+b_3+b_4$	
$\sum_{k=1}^{4}(a_k^2+b_k)$	$(a_1^2+b_1)+(a_2^2+b_2)+(a_3^2+b_3)+(a_4^2+b_4)$	$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+(b_1+b_2+b_3+b_4)$
$\sum_{k=1}^{4}a_k^2+\sum_{k=1}^{4}b_k$	$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+b_1+b_2+b_3+b_4$	$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+(b_1+b_2+b_3+b_4)$
$\sum_{k=1}^{4}(a_k^2-b_k)$	$(a_1^2-b_1)+(a_2^2-b_2)+(a_3^2-b_3)+(a_4^2-b_4)$	$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)-(b_1+b_2+b_3+b_4)$
$\sum_{k=1}^{4}a_k^2-\sum_{k=1}^{4}b_k$	$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-(b_1+b_2+b_3+b_4)$	$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)-(b_1+b_2+b_3+b_4)$

พิจารณาค่าของ $\sum_{i=1}^{6}(3i-4) = 3(21)-24$

$= 63-24$

$= 39$ □

$\sum_{i=1}^{4}(2i^2+3) = 2\sum_{i=1}^{4}i^2+4(3)$

$= 2(1+4+9+16)+12$

$= 2(30)+12$

$= 72$ □

$\sum_{k=1}^{5}(k^2+3) = \sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}3$

$= (1+4+9+16+25)+5(3)$

$= 55+15$

$= 70$ □

2.4

ลำดับ	อนุกรม	อนุกรมเรขาคณิต	อนุกรมเลขคณิต
2. $\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{20}{3}$		✓	
3. $ab^3, a^2b^2, a^3b, \ldots$		✓	
4. $x, x+2, x+4, \ldots$	4. $x+x+2+x+4+\ldots$		✓
5. $-2, 4, 10, \ldots$	5. $-2+4+10+\ldots$		✓
6. $11, 13\frac{1}{2}, 16, \ldots$	6. $11+13\frac{1}{2}+16+\ldots$		✓
7. $3a+2b, 2a+4b, a+6b, \ldots$	7. $3a+2b+2a+4b+a+6b+\ldots$		✓
8. $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \ldots$	8. $-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\ldots$		✓

2.5

$$2S_4 = [2(-2)+3(6)]+[2(-2)+3(6)]+[2(-2)+3(6)]+[2(-2)+3(6)]$$

$$= 4\,[2(-2)+3(6)]$$

$$S_4 = \frac{4}{2}\,[2(-2)+3(6)]$$

$$S_n = [a_1+(n-1)d]+[a_1+(n-2)d]+\ldots+(a_1+d)+a_1 \quad (2)$$

(1) + (2) จะได้

$$2S_n = [a_1+a_1+(n-1)d]+[a_1+d+a_1+(n-2)d]+\ldots+[a_1+(n-1)d+a_1]$$

$$= \underbrace{[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+\ldots+[2a_1+(n-1)d]}_{n\ \text{พจน์}}$$

$$= n\,[2a_1+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]$$

แต่ $a_n = a_1+(n-1)d$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

พิจารณาการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต	a_1	d	S_n	a_n	$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$	$S_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$
$6+10+14+\ldots$	6	4	S_6	$a_6=a_1+5d$ $=6+5(4)$ $=26$	$S_6=\frac{6}{2}[2(6)+5(4)]$ $=3[32]$ $=96$	$S_6=\frac{6}{2}[6+26]$ $=3[32]$ $=96$
$(-4)+(-6)+(-8)+\ldots$	-4	-2	S_{10}	$a_{10}=a_1+9d$ $=-4+9(-2)$ $=-22$	$S_{10}=\frac{10}{2}[2(-4)+9(-2)]$ $=5[-26]$ $=-130$	$S_{10}=\frac{10}{2}[-4-22]$ $=5[-26]$ $=-130$

2.6

$$a_1=\frac{1}{4} \qquad r=5$$

$$S_7 = \frac{1}{4}+\frac{5}{4}+\frac{25}{4}+\frac{125}{4}+\frac{625}{4}+\frac{3125}{4}+\frac{15625}{4} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$5S_7 = \frac{5}{4}+\frac{25}{4}+\frac{125}{4}+\frac{625}{4}+\frac{3125}{4}+\frac{15625}{4}+\frac{78125}{4} \quad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

(1) – (2) จะได้

$$S_7-5S_7 = \frac{1}{4}-\frac{78125}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-78125\right]$$

$$S_7 = \frac{\frac{1}{4}\left[1-78125\right]}{1-5}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left[-78124\right]}{4}$$

$$S_n-rS_n = a_1-a_1r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1-a_1r^n$$

อนุกรมเรขาคณิต	a_1	r	S_n	$a_n = a_1r^{n-1}$	$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $r\neq 1$	$S_n=\frac{a_1-a_nr}{1-r}$, $r\neq 1$
7+15+23+...	7	$\frac{15}{7}$	S_6	$a_6 = 7(\frac{15}{7})^5$ $= \frac{15^5}{7^4}$	$S_6 = \frac{7[1-(\frac{15}{7})^6]}{1-\frac{15}{7}}$ $= \frac{7-\frac{15^6}{7^5}}{-\frac{8}{7}}$	$S_6 = \frac{7-\frac{15^5}{7^4}\cdot\frac{15}{7}}{1-\frac{15}{7}}$ $= \frac{7-\frac{15^6}{7^5}}{-\frac{8}{7}}$
$\frac{5}{6}+\frac{5}{3}+\frac{10}{3}+\ldots$	$\frac{5}{6}$	-2	S_{10}	$a_{10} = \frac{5}{6}(-2)^9$ $= \frac{5}{6}(-512)$ $= \frac{-1280}{3}$	$S_{10} = \frac{\frac{5}{6}[1-(-2)^{10}]}{1+2}$ $= \frac{\frac{5}{6}[1-1024]}{3}$ $= \frac{\frac{5}{6}(-1023)}{3}$ $= \frac{-5115}{18}$	$S_{10} = \frac{\frac{5}{6}+\frac{1280}{3}(-2)}{1+2}$ $= \frac{\frac{5}{6}-\frac{2560}{3}}{3}$ $= \frac{-5115}{6}\times\frac{1}{3}$ $= \frac{-5115}{18}$

บัตรแบบฝึกหัด

จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = \frac{4+5n}{n^2}$

2. $a_n = \frac{3n+5}{6}$

3. $a_n = \frac{n^2+2n+3}{2n^2+3}$

4. ถ้า $1+2+3+\ldots+n = 153$ จงหาค่าของ n

5. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 6 ผลต่างร่วมเป็น 4 และพจน์สุดท้ายเท่ากับ 26

6. อนุกรมเรขาคณิตมีพจน์ที่หนึ่งเป็น 160 และอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{3}{2}$ ถ้าผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมนี้เป็น 2110 จงหา n

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2. หาค่าลิมิตไม่ได้

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

4. $1+2+3+\ldots+n$ เป็นอนุกรมเลขคณิตซึ่ง $d = 1$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

$$153 = \frac{n}{2}[1+n]$$

$$n = 17$$

5. $a_1 = 6 \quad d = 4 \quad a_n = 26$

$$\therefore a_n = a_1+(n-1)d$$

$$26 = 6+(n-1)4$$

$$n = 6$$

$$S_6 = \frac{6}{2}(6+26) = 96$$

6. $a_1 = 160 \qquad r = \frac{3}{2} \qquad S_n = 2110$

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$2110 = \frac{160\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$n = 5$$ ☐

<u>บัตรทดสอบ</u>

จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = 3 + \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17}$ 2. $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{2}{n-1}$

3. $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. จงหาผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรม $3 + 8 + 13 + \ldots$

5. จงหาว่าอนุกรม $12 + 9 + 6 + \ldots$ มีกี่พจน์จึงจะทำให้ผลบวกของอนุกรมนี้เป็น -600

6. ผลบวกของพจน์แรกและพจน์ที่สองของอนุกรมเรขาคณิตมีค่าเท่ากับ -3 และผลบวกของพจน์ที่ 5 กับ พจน์ที่ 6 เท่ากับ $-\frac{3}{16}$ จงหาผลบวกของ 6 พจน์แรกของอนุกรมนี้

<u>บัตรเฉลยแบบทดสอบ</u>

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 3+\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
4. $a_1 = 3 \qquad d = 5$

$$S_6 = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_6 = \frac{6}{2}\left[6 + (5)5\right]$$

$$= 3(6 + 25)$$

$$= 3 \times 31$$

$$= 93$$

5. $S_n = -600$, $a_1 = 12$, $d = -3$

จากสูตร $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

$$-600 = \frac{n}{2}\left[24 + (n-1)(-3)\right]$$

$$-1200 = n(24 - 3n + 3)$$

$$= 24n - 3n^2 + 3n$$

$$-1200 = 21n - 3n^2$$

$$0 = 3n^2 - 21n - 1200$$

$$0 = n^2 - 7n - 400$$

$$0 = (n - 16)(n - 25)$$

$$n = -16 , 25$$

$n > 0$ นั่นคือ $n = 25$

6. $-\frac{63}{16}$

ชุดการเรียนการสอน

ชุดที่ 8

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาเนื้อหาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัดพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบ
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง อนุกรมอนันต์

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนผลบวกย่อยของอนุกรมนั้นได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนั้นได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์โดยใช้ทฤษฎีของลิมิตได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ศึกษาเรื่อง อนุกรมอนันต์ และ ผลบวกของอนุกรมอนันต์จากบทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรม

เรื่อง

อนุกรมอนันต์

ข้อแนะนำในการเรียน

1. บทเรียนนี้นักเรียนสามารถเรียนได้ตามสบาย อ่านบทเรียนช้าๆและทำความเข้าใจไปเรื่อยๆ
2. ลักษณะบทเรียนจะมีคำอธิบายสลับคำถามให้นักเรียนตอบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาออกเป็นกรอบย่อยๆเรียงตามลำดับจากง่ายไปหายาก นักเรียนทำตามทีละกรอบ
3. แบบเรียนนี้เป็นแบบเติมคำตอบ เลือกเติมคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียว
4. คำเฉลยจะอยู่ด้านข้างของกรอบถัดไป ขณะนักเรียนทำไม่ควรดูคำเฉลย เพราะจะทำให้นักเรียนไม่มีโอกาสได้คิด ควรใช้กระดาษปิดคำเฉลยไว้ก่อน
5. การตอบคำถาม นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง การตอบผิดไม่เสียหายอะไร นักเรียนอาจจะย้อนไปศึกษาบทเรียนกรอบก่อนๆหรือทำความเข้าใจคำตอบใหม่ จะทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนมากยิ่งขึ้น เมื่อตอบเสร็จแล้วค่อยเปิดกระดาษตรวจดูคำเฉลยเพื่อทำความเข้าใจต่อไป.

ก.1

พิจารณาอนุกรม $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + 384$
ถ้าให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้ว่า

$S_1 = 3$

$S_2 = 3 + 6$

$S_3 = 3 + 6 + 12$

$S_4 = 3 + 6 + 12 + 24$

—

—

—

$S_8 = 3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + 384$

ดังนั้นอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

จะได้ว่า $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1+a_2$

$S_3 = a_1+a_2+a_3$

$S_4 = a_1+a_2+a_3+a_4$

—

—

—

$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

<u>สรุป</u> จะเรียก S_1, S_2, S_3 ฯลฯ แต่ละจำนวนว่า <u>ผลบวกย่อย หรือผลบวกพาร์เชียล</u>(partial sum) ของอนุกรมอนันต์ $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$

ดังนั้น จากอนุกรม $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots$

จะได้ว่า ผลบวกพาร์เชียลของอนุกรม คือ

$S_1 =$ __________

$S_2 =$ __________

$S_3 =$ __________

—

—

$S_n =$ __________

	จากอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ $\therefore\ S_1 = $ ________ $S_2 = $ ________ $S_3 = $ ________ — — — $S_n = $ ________
$S_1 = \frac{1}{10}$ $S_2 = \frac{1}{10}+\frac{1}{100} = \frac{11}{100}$ $S_3 = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ — — $= \frac{111}{1000}$ — $S_n = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ $+\ldots\frac{1}{10^n} = \frac{10^n-1}{9(10)^n}$	ก.2 จากผลบวกพาร์เชียลของอนุกรม $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ ถ้านำมาเขียนเรียงกันตามลำดับ จะได้ $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$ หรือ $(a_1), (a_1+a_2), (a_1+a_2+a_3), (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n), \ldots$ ดังนั้น ผลบวกพาร์เชียลของอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$ ถ้านำมาเขียนเรียงกันตามลำดับจะได้ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ หรือ ________
$S_1 = \frac{1}{2}$ $S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ — — $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ $+\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n}$	<u>สรุป</u> เมื่อนำผลบวกพาร์เชียลของอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ มาเขียน เรียงกันตามลำดับได้เป็น $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ ซึ่งเรียกว่า <u>ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมหรือลำดับผลบวกพาร์เชียลของอนุกรม</u>
$\frac{1}{10}+\frac{11}{100}+\frac{111}{1000}+\ldots+$ $\frac{10^n-1}{9(10)^n}, \ldots$	ก.3 พิจารณาลำดับพาร์เชียลของอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$ คือ $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}$ $, \frac{10^n-1}{9(10)^n}, \ldots$

	เมื่อนำลำดับพาร์เชียลนี้มาหาลิมิตของลำดับ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{9(10)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ $= \frac{1}{9}$ ดังนั้น ลำดับพาร์เชียลของอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ คือ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n} - 1, \dots$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = $ ______________ $=$ ______________
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - \lim_{n\to\infty} 1$ $= 0 - 1$ $= -1$	สรุป จะเรียก $\frac{1}{9}$ และ -1 ว่าเป็นผลบวกของอนุกรม อนันต์ $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$ และ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ผลบวกพาร์เชียลและลิมิตของลำดับผลบวกพาร์เชียลของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ คือ

อนุกรม I	อนุกรม II	อนุกรม III
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$	$2 + (-1) + (-4) + \dots + (5-3n) + \dots$	$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{25}{2} + \dots + \frac{1}{2}(5)^{n-1} + \dots$

	ผลบวกพาร์เชียล I	ผลบวกพาร์เชียล II	ผลบวกพาร์เชียล III
	$S_1 = \frac{1}{2}$ $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ $S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18} = \frac{13}{18}$ — — — $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}$ $= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ $= \frac{\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^n\right]}{1-\frac{1}{3}}$ $= \frac{3}{4}\frac{(3^n-1)}{3^n}$ $= \frac{3^n-1}{4(3^{n-1})}$	—— —— —— —— —— ——	—— —— —— —— —— ——
	ลำดับผลบวกพาร์เชียล I	ลำดับผลบวกพาร์เชียล II	ลำดับผลบวกพาร์เชียล III
	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{13}{18}, \ldots, \frac{3^n-1}{4(3^{n-1})}$	——	——

ลิมิตของลำดับผลบวกพาร์เชียล I	ลิมิตของลำดับผลบวกพาร์เชียล II	ลิมิตของลำดับผลบวกพาร์เชียล III
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-1}{4(3^{n-1})}$ $=\frac{1}{4}\lim\limits_{n}\left(3-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$ $=\frac{1}{4}\times 3$ $=\frac{3}{4}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2}(7-3n)$ = ________ = ________ = ________	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{8}(1-5^n)\right]$ = ________ = ________ = ________
ผลบวกของอนุกรม I	ผลบวกของอนุกรม II	ผลบวกของอนุกรม III
$\frac{3}{4}$	________	________

ก.4

จาก ก.3 จะพบว่า อนุกรมอนันต์บางอนุกรมจะหาผลบวกได้และบางอนุกรมจะหาผลบวกไม่ได้ ดังนั้น จึงอาจสรุปนิยามผลบวกอนุกรมอนันต์ได้ดังนี้

<u>นิยาม</u> ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือ ลิมิตของลำดับของผลบวกพาร์เชียลของอนุกรมนั้นเมื่อลำดับนั้นมีลิมิต

และ จะเรียกอนุกรมอนันต์ที่มีผลบวกว่า <u>อนุกรมคอนเวอร์เจนต์</u> เรียกอนุกรมอนันต์ที่ไม่มีผลบวกว่า <u>อนุกรมไดเวอร์เจนต์</u>

ดังนั้น จาก ก.3

อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ได้แก่ อนุกรม ________

อนุกรมไดเวอร์เจนต์ ได้แก่ อนุกรม ________

บัตรแบบฝึกหัด

จงหาลำดับผลบวกพาร์เชียลของแต่ละอนุกรมต่อไปนี้

1. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \ldots + 3(\frac{2}{3})^{n-1} + \ldots$

2. $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \ldots + (\frac{3}{4})^{n} + \ldots$

3. $0 + 3 + 8 + \ldots + (n^{2} - 1) + \ldots$

4. อนุกรม $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ หรือคอนเวอร์เจนต์

5. จงหาค่าของ a_1 และ r ถ้า $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots = \frac{3}{2}$

บัตรเฉลยแบบฝึกหัด

1. $3, 5, \frac{19}{3}, \ldots, 9\left[1 - (\frac{2}{3})^{n}\right], \ldots$

2. $\frac{3}{4}, \frac{21}{16}, \frac{63}{64}, \ldots, 3\left[1 - (\frac{3}{4})\right], \ldots$

3. $0, 3, 11, \ldots,$

4. $S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 2 = -1$

$S_3 = 1 - 2 + 3 = 2$

—

—

—

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

5. $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots = \frac{3}{2}$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มีพจน์แรก $= a_1$ และอัตราส่วนร่วม $= r$

อนุกรมนี้มีผลบวกอนันต์เท่ากับ $\frac{3}{2}$

นั่นคือ $S_\infty = \frac{3}{2}$

$$\frac{a_1}{1 - r} = \frac{3}{2}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}(1 - r)$$

เมื่อ a_1 , r เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $|r| < 1$

บัตรทดสอบ

1. จงหาผลบวกของอนุกรม

1.1 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots+\frac{1}{3^n}+\dots$

1.2 $4+10+16+\dots+(6n-2)+\dots$

1.3 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$

1.4 $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\dots+\frac{2}{3^{n-1}}+\dots$

2. จงตรวจสอบว่าอนุกรมใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

2.1 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots+\frac{n}{3^n}+\dots$

2.2 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

2.3 $S_n = \frac{3n}{4n+1}$

2.4 $S_n = \frac{n^2}{n+1}$

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. 1.1

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ผลบวก $= \frac{1}{2}$

1.2 ไม่มีผลบวกอนันต์

1.3 1

1.4 3

2. 2.1 อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

2.2 อนุกรมไดเวอร์เจนต์

2.3 อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

2.4 อนุกรมไดเวอร์เจนต์

ประวัติผู้เขียน

นางสาวพิจารณา พิเศษศิลป์ เกิดเมื่อวันที่ 22 มกราคม พ.ศ. 2505 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จปริญญาการศึกษาบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตประสานมิตร ในปีการศึกษา 2526 เข้าศึกษาต่อในสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2528 ปัจจุบัน เป็นครูโรงเรียนเซนต์โยเซฟคอนแวนต์