บทที่ 2

โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming)

โปรแกรมเชิงเส้นเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่สามารถจะนำมาช่วยในการตัดสินใจในปัญหาที่เกี่ยวกับการกำหนดปริมาณผลิตภัณฑ์ที่จะต้องผลิตหลายชนิดในขณะที่กำลังการผลิตมีอยู่อย่างจำกัด เพื่อให้ได้กำไรสูงสุดหรือเสียต้นทุนต่ำที่สุด ลักษณะสำคัญของรูปแบบโปรแกรมเชิงเส้นจะมีเป้าหมาย (Objective) ที่แสดงความสัมพันธ์ในรูปสมการเส้นตรง และข้อจำกัด (Constraints) ที่แสดงในรูปอสมการเส้นตรง ซึ่งมีรูปแบบทั่วไป[1] ดังนี้

ให้หาค่า $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ซึ่งทำให้ Z มีค่าสูงสุด

สมการเป้าหมาย : Maximize $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots + c_nX_n$

ภายใต้ข้อจำกัด (Subject to)

อสมการข้อจำกัด :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n \geq 0$$

ให้ X_j $(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ เป็นจำนวนหน่วยของการผลิตสินค้า j ในระยะเวลาที่กำหนด

n จำนวนประเภทของสินค้าที่ผลิต

---

[1] Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman, Introduction to Operation Research, (San Francisco : Holden - Day, Inc, 1970), pp.127-129.

b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) เป็นชั่วโมงทำงานของเครื่องจักร i

m จำนวนเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิตสินค้า

a_{ij} เป็นจำนวนการใช้เครื่องจักร i ในการผลิตสินค้า j

c_j เป็นกำไรที่เพิ่มขึ้นจากการผลิตสินค้า j เพิ่มขึ้น 1 หน่วย

Z เป็นกำไรที่ได้จากการผลิตสินค้าทั้งสิ้น

หรือ

ให้หาค่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ซึ่งทำให้ Z มีค่าต่ำสุด (Z ในกรณีนี้จะเป็นต้นทุนของการผลิตทั้งสิ้น)

สมการเป้าหมาย : Minimize $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$

ภายใต้ข้อจำกัด (Subject to)

อสมการข้อจำกัด :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \geq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \geq b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \geq b_m$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$$

อนึ่งในบางกรณีข้อจำกัดบางอันของรูปแบบโปรแกรมเชิงเส้นอาจมีความสัมพันธ์ในรูปของสมการ (Equation) และมีเครื่องหมายอสมการ (Inequation) ผสมกัน ไม่เป็นไปตามรูปแบบทั่วไปข้างต้นได้ ตัวอย่างเช่น

Maximize $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$

Subject to,

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \geq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

ในการแก้ปัญหาข้างต้นโดยใช้ Simplex Method จะต้องเปลี่ยนรูปแบบให้เป็น Standard Linear Programming Model โดยการเพิ่มค่า Slack Variable และ Artificial Variable ตามตัวอย่างข้างต้นจะได้รูปแบบมาตรฐานดังนี้ :-

Maximize $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$

Subject to,

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 - X_4 + X_5 = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + X_6 = b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + X_7 = b_3$$

โดยให้ X_4 เป็น Slack Variable

X_6 เป็น Slack Variable

X_5 เป็น Artificial Variable

X_7 เป็น Artificial Variable

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเปลี่ยนจำนวนหน่วยเป็นจำนวนเงิน[2]

สำหรับการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตามที่กล่าวมาข้างต้น ผลที่ได้จะทราบค่าของ X_j ซึ่งเป็นจำนวนหน่วยของการผลิตสินค้า j ที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดหรือเสียต้นทุนต่ำสุด ในการที่จะนำผลมาทำงบการเงินจำเป็นต้องเปลี่ยนค่าจำนวนหน่วยเป็นจำนวนเงินให้หมดก่อน อย่างไรก็ดีอาจทำได้อีกวิธีหนึ่งคือเปลี่ยนจากจำนวนหน่วยมาเป็นจำนวนเงินตั้งแต่เริ่มสร้างรูปแบบ แล้วค่อยแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นนี้ที่หลัง โดยผลที่ได้ก็จะเป็นจำนวนเงินสามารถนำไปใช้ในการทำงบการเงินได้เลย และเพื่อให้ค่าที่เป็นผลลัพธ์มีความหมายในทางการบัญชี กับสะดวกในการจัดเตรียมงบการเงินก็จะเปลี่ยนวิธีการเขียนผลที่ต้องการหาเป็น X_{ij} แทน ซึ่งจะหมายถึงจำนวนเงินที่เดบิทบัญชี i และเครดิทบัญชี j

ความสัมพันธ์ระหว่าง X_j และ X_{ij} อาจหาได้ดังนี้ :

เช่น :

$$\text{Maximize } Z = X_1 + 2X_2$$

Subject to,

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$3X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ให้ X_1 เป็นจำนวนหน่วยของการผลิตวิทยุ

X_2 เป็นจำนวนหน่วยของการผลิตโทรทัศน์

X^r_{IC} เป็นต้นทุนแปรได้ของการผลิตวิทยุ ซึ่งหมายถึงจำนวนที่เดบิทบัญชีสินค้า (วิทยุ) และเครดิทบัญชีเงินสด

---

[2] Jame C.T. Mao, Quantitative Analysis of Financial Decisions, (New York: The Macmillan Company, 1971), pp.149-152.

X_{IC}^{t} เป็นต้นทุนแปรได้ของการผลิตโทรทัศน์

ซึ่งหมายถึงจำนวนที่เดบิทบัญชีสินค้า (โทรทัศน์) และเครดิทบัญชีเงินสด

ถ้าสมมติว่าต้นทุนแปรได้ของการผลิตวิทยุ 1 หน่วย = 1 บาท

ต้นทุนแปรได้ของการผลิตโทรทัศน์ 1 หน่วย = 4 บาท

∴ ความสัมพันธ์ของจำนวนหน่วยของการผลิตสินค้าและต้นทุนแปรได้ของการผลิตสินค้า ซึ่งเป็นจำนวนเงินเป็นดังนี้

$$X_1 = X_{IC}^{r}$$

$$X_2 = \frac{1}{4} X_{IC}^{t}$$

แทนค่าความสัมพันธ์ลงใน Objective Function และ Constraints ได้ดังนี้

$$\text{Maximize } Z = X_{IC}^{r} + \frac{1}{2} X_{IC}^{t}$$

Subject to,

$$X_{IC}^{r} + \frac{1}{4} X_{IC}^{t} \leq 4$$

$$3X_{IC}^{r} + \frac{1}{4} X_{IC}^{t} \leq 10$$

$$X_{IC}^{r}, X_{IC}^{t} \geq 0$$

ผลที่ได้จากการแก้ปัญหานี้ ค่าของ X_{IC}^{r} , X_{IC}^{t} ที่ได้จะเป็นจำนวนเงิน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การทำ Spread Sheet[3]

เพื่อสะดวกในการนำผลของ X_{ij} มาทำงบการเงินและป้องกันข้อผิดพลาด ขั้นตอนต่อไปภายหลังได้ผลจากการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นแล้ว ควรนำผลมาคำนวณใน Spread Sheet ก่อน Spread Sheetเป็นกระดาษทำการ (Work Sheet) ซึ่งมีกลุ่มของบัญชีที่เกี่ยวข้องอยู่ในตารางทางด้านแนวตั้งเป็นเดบิทและทางด้านแนวนอนเป็นเครดิท (ตามตัวอย่างในตารางที่ 1) จำนวนซึ่งปรากฏระหว่าง 2 บัญชีนั้นจะเดบิทบัญชีตาม row heading และเครดิทบัญชีตาม column heading ดังนั้นการแสดงใน Spread Sheet จึงสามารถบันทึกรายการต่าง ๆ ได้ตามหลักการบัญชีคู่ ซึ่งต้องลงบัญชี 2 บัญชีสำหรับรายการใดรายการหนึ่ง สำหรับบัญชีต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ใน Spread Sheet นั้น จะมีเฉพาะบัญชีที่มีอยู่ในงบดุลเท่านั้น ส่วนบัญชีที่อยู่ในงบกำไรขาดทุนจะไม่ปรากฏใน Spread Sheet และเมื่อเกิดรายการที่มีผลต่อบัญชีในงบกำไรขาดทุนก็จะเดบิทหรือเครดิทจำนวนนั้นโดยตรงกับบัญชีทุน

จาก Kohler การเปลี่ยนแปลงในบัญชีหนึ่งบัญชีใด (S) ในระยะเวลาที่กำหนดนั้นอาจแสดงได้[4] ดังนี้

$$\triangle S = \sum_{j=1}^{n} m_{Sj} - \sum_{i=1}^{n} m_{iS}$$

ให้ n เป็นจำนวนบัญชีทั้งหมดที่มีอยู่ ซึ่งจะอยู่ทางด้านแนวตั้งเป็นเดบิท และทางด้านแนวนอนเป็นเครดิท

m_{ij} เป็นจำนวนซึ่งอยู่ระหว่าง row i และ column j หมายถึงเดบิทบัญชี i และเครดิทบัญชี j

$\sum_{j=1}^{n} m_{Sj}$ เป็นยอดรวมทางด้านเดบิทของบัญชี S

---

[3] Jame C.T. Mao, op. cit., pp. 148-155.

[4] Ibid., pp. 145-148.

$\sum_{i=1}^{n} m_{iS}$ เป็นยอดรวมทางด้านเครดิทของบัญชี S

$\triangle S$ เป็นการเปลี่ยนแปลงสุทธิของบัญชี S ในระยะเวลาที่กำหนด

ถ้า S เป็นบวก (เดบิท $>$ เครดิท) บัญชี S จะเพิ่มถ้า S เป็นบัญชีสินทรัพย์
บัญชี S จะลด ถ้า S เป็นบัญชีหนี้สินหรือทุน

ถ้า S เป็นลบ (เดบิท $<$ เครดิท) บัญชี S จะเพิ่มถ้า S เป็นบัญชีหนี้สินหรือทุน
บัญชี S จะลด ถ้า S เป็นบัญชีสินทรัพย์

การนำเอาผลลัพธ์ X_{ij} จากการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นมาคำนวณใน Spread Sheet จะทำให้ได้ข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการทำงบการเงินต่าง ๆ เช่น งบดุล งบกำไรขาดทุน และงบประมาณเงินสดได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

ตารางที่ 1 ตัวอย่างของ Spread Sheet

		CREDIT								
		BB	C	R	I	P	L	B	E	EB	Totals
DEBIT	BB						K_L	K_B	K_E		
	C	K_C		X_{CR}							T_C
	R	K_R			X_{RI}				X_{RE}		T_R
	I	K_I	X_{IC}								T_I
	P	K_P	X_{PC}								T_P
	L		X_{LC}							K'_L	T_L
	B									K'_B	T_B
	E		X_{EC}			X_{EP}				K'_E	T_E
	EB		K'_C	K'_R	K'_I	K'_P					
	Totals		T_C	T_R	T_I	T_P	T_L	T_B	T_E		

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

C = บัญชีเงินสด

R = บัญชีลูกหนี้

I = บัญชีสินค้าคงคลัง

P = บัญชีโรงงาน, เครื่องจักรและเครื่องอุปกรณ์

L = บัญชีหนี้สินระยะสั้น

B = บัญชีหนี้สินระยะยาว

E = บัญชีส่วนของผู้ถือหุ้น ซึ่งได้แก่หุ้นทุนและกำไรสะสม

BB เป็นยอดยกมาต้นงวด

EB เป็นยอดยกไปปลายงวด

ยอดยกมาต้นงวดของบัญชีสินทรัพย์จะปรากฏอยู่ใน column BB

ยอดยกมาต้นงวดของบัญชีหนี้สินและทุนจะปรากฏอยู่ใน row BB

ยอดยกไปปลายงวดของบัญชีสินทรัพย์อยู่ใน row EB

ยอดยกไปปลายงวดของบัญชีหนี้สินและทุนจะอยู่ใน column EB

K_i = ยอดยกมาต้นงวดของบัญชี i เช่น K_C เป็นเงินสดต้นงวด

X_{ij} จำนวนเงินที่เดบิทบัญชี i (row) และเครดิทบัญชี j (column) เช่น

X_{CR} เป็นจำนวนเงินที่ได้รับชำระจากลูกหนี้

X_{RI} เป็นต้นทุนสินค้าขาย

X_{RE} เป็นกำไรขั้นต้น

X_{IC} เป็นสินค้าที่ซื้อมาในระหว่างงวด

X_{EC} เป็นค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานและปันผลจ่าย

X_{EP} เป็นค่าเสื่อมราคาสินทรัพย์ประจำ

X_{PC} เป็นการซื้อสินทรัพย์ประจำเพิ่ม เช่น เครื่องจักร

X_{LC} เป็นการชำระหนี้สินระยะสั้น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

K'_i = ยอดยกไปปลายงวดของบัญชี i เช่น K'_R เป็นลูกหนี้คงเหลือปลายงวด

T_i = ยอดรวมของบัญชี i

รายการที่อยู่ในกรอบสี่เหลี่ยมของ Spread Sheet เป็นผลที่ได้จากการแก้ปัญหารูปแบบโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งเป็นรายการเปลี่ยนแปลงในระหว่างงวด และจาก Spread Sheet นี้สามารถนำไปทำงบการเงินต่าง ๆ ได้ดังนี้

ทำงบดุล โดยใช้ตัวเลขจาก column และ row EB

ทำงบกำไรขาดทุน โดยใช้ตัวเลขภายในกรอบสี่เหลี่ยม

ทำงบประมาณเงินสด โดยใช้ตัวเลขใน column และ row ของบัญชีเงินสด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย