บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

2.1 การทดสอบแบบไคสแควร์ (CHI-SQUARE TEST)

การทดสอบแบบไคสแควร์ (CHI-SQUARE TEST) นี้ใช้ได้กับข้อมูลแทบทุกชนิด ทั้งข้อมูลเชิงคุณภาพ (QUALITATIVE DATA) และเชิงปริมาณ (QUANLITATIVE DATA) แต่ส่วนมากใช้กับข้อมูลที่อยู่ในรูปของความถี่หรือข้อมูลที่จัดเป็นความถี่ได้ ทั้งนี้รวมทั้งสัดส่วน และความน่าจะเป็นด้วย ประโยชน์ที่สำคัญของการทดสอบแบบไคสแควร์ คือ

ก. ทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (GOODNESS OF FIT TEST)

ข. ทดสอบความเป็นอิสระ (TEST FOR INDEPENDENCE)

ค. ทดสอบสัดส่วนของข้อมูล (TEST FOR PROPORTION)

สูตรทั่วไปของการทดสอบแบบไคสแควร์ คือ

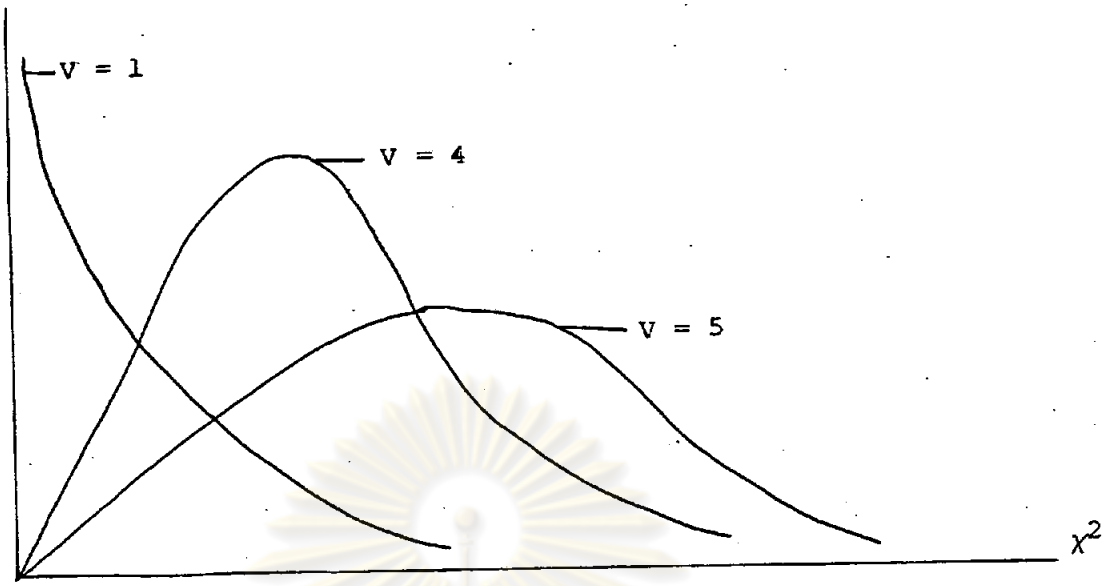
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad \text{.....} \quad (2.1)$$

เมื่อ O_i แทนความถี่ที่ได้จากการทดลองปฏิบัติ หรือจากการสังเกตของช่องที่ i

E_i แทนความถี่ที่คิดว่าควรจะเป็นหรือตามทฤษฎีของช่วงที่ i

K แทนจำนวนช่วงของข้อมูล

เมื่อพิจารณาจากสูตร จะเห็นได้ว่า χ^2 มีค่าเป็นบวกเสมอ เนื่องจากตัวเศษนั้นยกกำลังสองตัวส่วนมีค่าเป็นบวก ถ้าความถี่ที่ได้จากการทดลองปฏิบัติกับความถี่ที่คิดว่าควรจะเป็นมีค่าใกล้เคียงกันมาก ค่า χ^2 จะมีค่าน้อย ฉะนั้น จึงกำหนดเพียงอย่างเดียวเท่านั้นว่า ความแตกต่างมีมากเพียงใดจึงจะปฏิเสธสมมติฐาน และ χ^2 นั้น มีการแจกแจงไปทางขวาของ 0 ดังแสดงในรูปที่ 2.1 รูปร่างของการแจกแจงนี้ขึ้นอยู่กับค่าองศาของความอิสระ ν ถึงค่าของ ν น้อย การแจกแจงจะเบ้ไปทางขวามือ ถ้าจำนวนค่าสังเกตเพิ่มมากขึ้น หรือกรณีที่ ν มีค่ามากการแจกแจงแบบ χ^2 จะประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติในการหาขอบเขตของการยอมรับสมมติฐาน เพื่อ



รูปที่ 2.1 แสดงการแจกแจงแบบ χ^2 เมื่อมีองศาของความอิสระต่าง ๆ กัน

เพื่อดูว่าผลต่างระหว่างความถี่ทั้งสองจะมีนัยสำคัญหรือไม่ ต้องอาศัยตารางของการแจกแจงแบบไคสแควร์ และในการอ่านตารางนี้ต้องทราบองศาของความอิสระ (DEGREE OF FREEDOM) ซึ่งมีหลักการคิดโดยทั่วไปดังนี้

1. สำหรับข้อมูลที่ต้องการทดสอบมีลักษณะแบบแจงทางเดียว (SINGLE VARIABLE OF CLASSIFICATION) และมี K ประเภท องศาของความอิสระ = K-1

2. สำหรับข้อมูลที่ต้องการทดสอบมีลักษณะแบบแจง 2 ทาง (TWO-VARIABLE OF CLASSIFICATION) ลักษณะหนึ่งมี c ประเภท และอีกลักษณะหนึ่งมี r ประเภทองศาของความอิสระ = (R-1)(C-1)

3. ถ้ามีการคำนวณใด ๆ จากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้จากตัวอย่างเพิ่มขึ้นจากการคำนวณค่าไคสแควร์แล้ว จำนวนองศาของความอิสระจะลดลงอีกตามจำนวนค่าที่ต้องประมาณมาใช้จากข้อมูลของตัวอย่าง เช่น คำนวณ λ^2 จากตารางแจกแจงความถี่ที่มี K ประเภทตามปกติองศาของความอิสระตามข้อ 1 จะเท่ากับ K-1 แต่ถ้าในการคำนวณ λ^2 เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้จะต้องคำนวณค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากข้อมูลตัวอย่างแล้ว องศาของความอิสระก็จะลดลงอีก 2 คงจะเหลือเท่ากับ (K-1) - 2 = K-3 เป็นต้น

สำหรับการวิจัยครั้งนี้สนใจการทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับการทดสอบภาวะสารูปสนิทดี โดยทดสอบว่าข้อมูลชุดนั้นจะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงมาตราฐานหรือไม่ ซึ่งตาม

สูตร ค่า O_i นั้นเราทราบค่าจากข้อมูลส่วนค่า E_i เราต้องคำนวณโดยมีวิธีการคำนวณดังนี้คือ

$$E_i = NX\left[F(t_{i+1}) - F(t_i)\right]$$ เมื่อ N = จำนวนข้อมูลทั้งหมด (TOTAL OBSERVATION)

$$F_{(t_{i+1})} = \int_{o}^{t_{i+1}} f(X)\,dx$$ เมื่อ $F_{(t_{i+1})}$ เป็นฟังค์ชั่นการแจกแจง มาตราฐานที่นำมาทดสอบและเป็นฟังค์ชั่นแบบต่อเนื่อง (CONTINUOUS FUNCTION) และ f(X) เป็นฟังค์ชั่นความหนาแน่น

$$= \sum_{x=t_1}^{t_{i+1}} p(X)$$ เมื่อ $p(x)$ เป็นฟังค์ชั่นความน่าจะเป็น

$$F_{(t)} = \int_{o}^{ti} f(x)\,dx$$ เมื่อ $F_{(t_i)}$ เป็นฟังค์ชั่นต่อเนื่อง

$$= \sum_{X=t_1}^{t_i} P(x)$$ เมื่อ $F_{(t_i)}$ เป็นฟังค์ชั่นไม่ต่อเนื่อง

ในกรณีที่ $F_{(t_i)}$ ต่อเนื่องค่า E_i อาจหาได้โดยที่

$$E_i = NX \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X)\,dx$$

จะเห็นว่าค่า χ^2 ขึ้นอยู่กับค่า E_i และค่า E_i ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ในฟังค์ชั่นการแจกแจงที่นำมาทดสอบ และการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ในฟังค์ชั่นการแจกแจงมาตราฐานก็จะมีผลทำให้ χ^2 เปลี่ยนไปด้วย ซึ่งการยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานนั้น เราจะเทียบค่าไคสแควร์ที่คำนวณได้ (λ^2cal) กับ χ^2 ที่ได้จากตารางไคสแควร์ (χ^2table) ถ้า χ^2 ที่คำนวณได้มากกว่า χ^2 ที่ได้จากตารางเราจะปฏิเสธสมมติฐานแสดงว่าข้อมูลชุดนั้นมีการแจกแจงไม่เหมือนกับการแจกแจงมาตราฐานตามที่เรากำหนด ถ้า χ^2 ที่คำนวณได้น้อยกว่า χ^2 จากตารางเราจะยอมรับสมมติฐาน (H_o) แสดงว่าข้อมูลชุดนั้นมีการแจกแจงคล้ายคลึงกับการแจกแจงมาตราฐานตามที่เรากำหนด ในระดับนัยสำคัญและองศาแห่งความอิสระตามต้องการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2 การแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล (THE EXPONENTIAL DISTRIBUTION)

การแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล นี้ใช้ได้อย่างเหมาะสมกับปัญหาการรอคอยและการบริการในคิว โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าการเกิดของเหตุการณ์ใด ๆ เป็นการแจกแจงแบบ POISSON ที่มีพารามิเตอร์ λ ในช่วงเวลา t แล้วหน่วยเวลาของการเกิดเหตุการณ์ครั้งแรกและเวลาที่เกิดเหตุการณ์ต่อ ๆ ไปจะมีการแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล

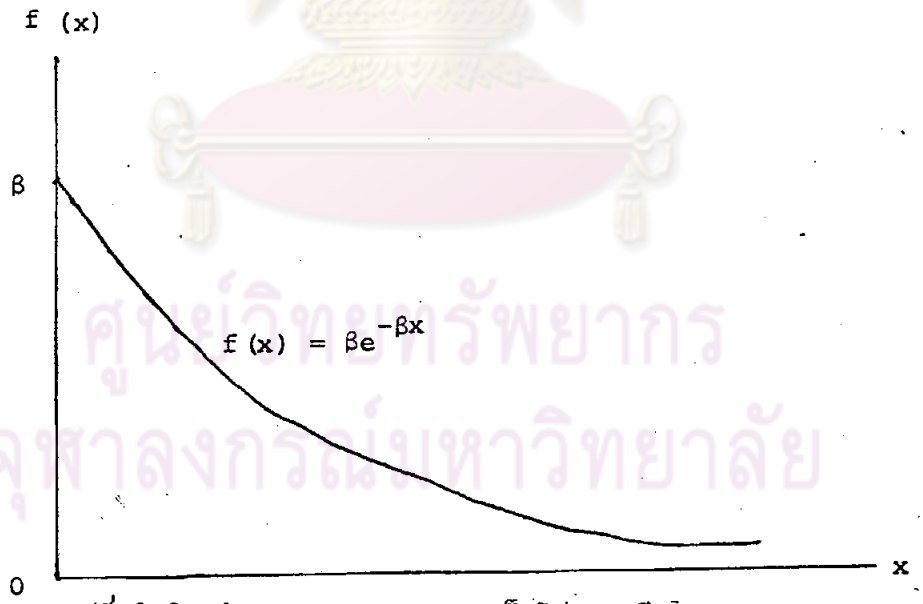
นิยาม

ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล ก็ต่อเมื่อฟังค์ชั่นความหนาแน่นของ X คือ

$$f(X) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \text{ โดยที่ } \beta > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

หรือ

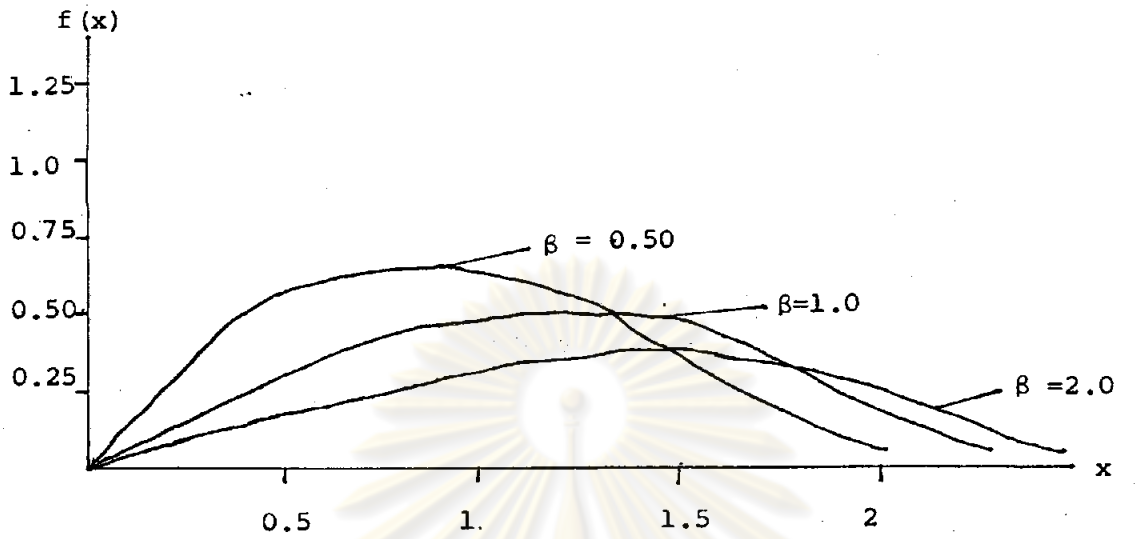
$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \text{ โดยที่ } \beta > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$



รูปที่ 2.2 แสดงการแจกแจง แบบเอ็กโปเนนเชียล

นอกจากนี้จะเห็นว่ารูปร่างการแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล จะเปลี่ยนแปลงไปตามค่าพารามิเตอร์ (β) ในระดับต่าง ๆ กัน ดังรูป

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.3การแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล เมื่อ β มีค่าต่าง ๆ กัน

สำหรับค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียล คือ

$$E(X) = \frac{1}{\beta}$$

$$V(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

เมื่อ $f(X) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$, $\beta > 0$ และ

$$E(X) = \beta$$

$$V(X) = \beta^2$$

เมื่อ $f(X) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$, $x \geq 0$, $\beta > 0$

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ (β) จากข้อมูลโดยตรงนั้น จะใช้ค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง ($\bar{X}$) เป็นตัวประมาณค่าฉะนั้นค่าประมาณของพารามิเตอร์ (β) คือ

$\hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X}}$ เมื่อ $f(X) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$, $\beta > 0$

$\hat{\beta} = \bar{X}$ เมื่อ $f(X) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{x}{\beta}}$ $x \geq 0$, $\beta > 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.3 การแจกแจงแบบทวินาม (THE BINOMIAL DISTRIBUTION)

ลักษณะของการทดลองแบบทวินาม คือ

1. การทดลองกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง

2. ในการทดลองแต่ละครั้ง ผลที่เกิดขึ้นมี 2 อย่างเท่านั้นคือความสำเร็จ (SUCCESS) และความล้มเหลว (FAILURE)

3. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จที่เกิดจากการทดลองแต่ละครั้งมีค่าคงที่เท่ากับ p และความน่าจะเป็นของความล้มเหลวเท่ากับ 1-p

4. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระจากกัน

นิยาม

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีการแจกแจงแบบทวินาม ก็ต่อเมื่อการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X คือ $b(X ; n,p) = \binom{n}{X} P^X (1-P)^{n-X}$ เมื่อ $X = 0,1,2,.....n$

x คือจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดจากการทดลอง

n คือจำนวนครั้งทั้งหมดของการทดลอง

p คือความน่าจะเป็นของความสำเร็จที่เกิดจากทดลองแต่ละครั้ง

การแจกแจงแบบทวินามนี้จะมีค่า n และ P เป็นค่าพารามิเตอร์ ฉะนั้นการแจกแจงนี้จะมีลักษณะอย่างไรจึงขึ้นอยู่กับค่าทั้งสอง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ n และ p จากข้อมูลโดยตรงนั้นจะใช้ค่าที่สุ่มได้จากตัวอย่างโดยที่

$\bar{x} = np$ ($\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง)

$\hat{P} = \frac{\bar{x}}{n}$

2.4 การแจกแจงแบบปัวซอง (THE POISSON DISTRIBUTION)

ผู้ที่คิดการแจกแจงแบบปัวซอง คือ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ SIMEON DENIS POISSON (1781-1840) ในปี ค.ศ. 1837 ซึ่งเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นที่นำเอาเวลาหรือขอบเขตของพื้นที่ (TIME OR SPACE) เข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น จำนวนคนที่

โทรศัพท์เข้ามาในสำนักงานธุรกิจแห่งหนึ่งในแต่ละชั่วโมง จำนวนเครื่องบินที่ลงสู่สนามบินใน 1 ชั่วโมง จำนวนอักษรที่พิมพ์ผิดใน 1 หน้า จำนวนสินค้าที่ชำรุดต่อการผลิต 1 ครั้ง เป็นต้น

ลักษณะของการทดลองแบบปัวซ่องคือ

1. จำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง หรือในขอบเขตพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่งเป็นอิสระกับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาอื่นหรือในขอบเขตพื้นที่อื่น

2. ความน่าจะเป็นของการได้ความสำเร็จหนึ่งในช่วงเวลาหนึ่ง หรือขอบเขตพื้นที่หนึ่งจะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับช่วงเวลาหรือขนาดของพื้นที่นั้น และไม่มีความสัมพันธ์กับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นนอกช่วงเวลาหรือนอกขอบเขตพื้นที่ดังกล่าว

3. ความน่าจะเป็นของการได้ความสำเร็จที่เกิดขึ้นมากกว่า 1 ครั้งในเวลาสั้นหรือในเขตสั้นเราจะไม่คำนึงถึง

นิยาม

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีการแจกแจงแบบปัวซ่องก็ต่อเมื่อการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X คือ

$$P(X;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \text{เมื่อ} \qquad X = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

x คือจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง หรือในขอบเขตพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง

λ คือค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งหรือพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซ่องคือ

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

การหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ (λ) จากข้อมูลโดยตรงนั้นจะใช้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็นค่าประมาณโดยที่

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2.5 THE HOOKE-JEEVES PATTERN SEARCH

วิธีการค้นหาค่าอุตมะ (OPTIMIZATION TECHNIQUE) ในงานโปรแกรมเชิงเส้น (LINEAR PROGRAMMING) หรือในงานโปรแกรมไม่ใช่เชิงเส้น (NONLINEAR PROGRAMMING) มีเทคนิคการค้นหามากมายหลายวิธี แต่ละวิธีก็มีเงื่อนไขในการนำไปใช้แตกต่างกันไป การที่จะเลือกเอาวิธีการอันไหนมาใช้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของปัญหาวิธีการที่ใช้กันอย่างแพร่หลายพอจะสรุปออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ได้ดังนี้

1. ประเภทที่ต้องอาศัยอนุพันธ์ (DERIVATIVE) ได้แก่

   1.1 วิธีของนิวตัน-รอฟสัน (NEWTON-ROPHSON SEARCH)

   1.2 วิธีของเดวิดอน (DAVIDON'S UNIVARIATE SEARCH)

   1.3 วิธี STEEPEST DESCENT

   1.4 วิธี PARTAN

   1.5 วิธี AISCRETE GRADIENT

   1.6 วิธีของเฟลทเชอร์และรีฟ (CONJUGATE GRADIENT METHOD (FLETCHER AND REEVES)

2. ประเภทที่ไม่ต้องอาศัยอนุพันธ์ (WITHOUT DERIVATIVE)

   2.1 วิธีของฟิโนแนคซี (FIBONACCI SEARCH)

   2.2 วิธีของโกลเดน (GOLDEN SECTION SEARCH)

   2.3 วิธีของพาวเวลล์ (POWELL'S UNIVARIATE SEARCH)

   2.4 วิธี HOOKE-JEEVES PATTERN SEARCH

สำหรับวิธี THE HOOKE-JEEVES PATTERN SEARCH นั้นเป็นวิธีการค้นหาค่าพารามิเตอร์หรือค่าของตัวแปรอีกวิธีหนึ่งในบรรดาวิธีการค้นหาค่าอุตมะ (OPTIMIZATION TECHNIQUE) ซึ่งนาย ROBERT HOOKE และนาย T.A.JEEVES แห่ง WESTING HOUSE RESEARCH LABARATORIES, PITTSBURGM, PENNSYLAVANIA เป็นผู้คิดใน ปี ค.ศ. 1961

เป็นวิธีที่คิดขึ้นในการแก้ปัญหาการหาคำตอบของฟังค์ชั่นหรือส่วนการที่หาคำตอบไม่ได้โดยตรงจากการหาอนุพันธ์ (DERIVATIVE) เพราะฟังค์ชั่นหรือส่วนการบางอย่างมีรูปแบบที่ซับซ้อนและยุ่งยาก เช่น ฟังค์ชั่นไคส์แควร์ และฟังค์ชั่นความหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติ เป็นต้น

นิยามการค้นหาโดยตรง (DEFINITION OF DIRECT SEARCH)

ให้ Σ แทนปริภูมิของจุด (SPACE OF POINTS) และ P, Q, R เป็นจุดใด ๆ ใน $\Sigma(\in\Sigma)$ ถ้าจุด P "ดีกว่า" จุด Q ใช้สัญลักษณ์ว่า "PCQ" ซึ่งการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ $\subset$ บนปริภูมิของจุด Σ นั้นจะต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์แบบถ่ายทอด (TRANSITIVE RELATION) กล่าวคือ $PCQ,\ QCR \Longrightarrow PCR$, มีจุด P* เป็นจุดที่ใกล้ที่สุด (EXTREMAL POINT) ของปริภูมิของจุด Σ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $P^*\subset P$ จุด P* นี้แสดงคำตอบของปัญหา ส่วนจุดอื่น ๆ ของปริภูมิของจุด Σ จะแสดงคำตอบที่เป็นไปได้ (POSSIBLE SOLUTIONS)

วิธีการค้นหาโดยตรงจะทำการเปรียบเทียบแบบอันดับ (SEQUENTIAL COMPARISIONS) โดยใช้ความสัมพันธ์ $\subset$ ซึ่งกำหนดดังนี้

1. กำหนดจุดทดลอง (TRIAL POINTS) P_r (r=1, 2... N, N = จำนวนรอบทั้งหมด)

2. ให้ B_o เป็นจุดพื้นฐานเริ่มต้นและ B_r จุดพื้นฐานใด ๆ ที่ $B_r=P_s$ สำหรับบางค่า $s < r$

3. มีเซตของจำนวนเต็มที่เรียกว่า สภาวะการณ์ (STATES) ของยบวนการรวมทั้งสภาวะการณ์เริ่มต้น S_o สภาวะการณ์ S_r จะสอดคล้องกับจุดพื้นฐาน B_r

4. กฎของการหยุด (STOP RULE) สำหรับการสิ้นสุดลงของยบวนการกำหนดให้เป็น N

5. การประมาณคำตอบ (APPROXIMATE SOLUTION) หรือประมาณ P* คือจุดพื้นฐาน B_N

จุดสำคัญสำหรับการกำหนดยบวนการนี้ถูกนิยามโดยกฎต่อไปนี้

a. จุดพื้นฐานเริ่มต้น B_o และสภาวะการณ์เริ่มต้น $S_o(\neq o)$ เป็นจุดพื้นฐานและสภาวะการณ์ใด ๆ

b. จุดทดลองที่เหลือคือ $P_r = h(B_{r-1}, S_{r-1})$ เมื่อ h เป็นฟังค์ชั่นบน Σ และ $S_{r-1} \neq 0$)

c. ถ้า $P_r \subset B_{r-1}$ แล้ว $B_r = P_r$ และ $S_r = f(S_{r-1})$ นอกเหนือจากนั้น $B_r = B_{r-1}$ และ $S_r = g(S_{r-1})$

d. เมื่อครั้งแรกสำหรับ $S_i = o$, ขบวนการจะหยุด เช่น $i = N$

จากนิยามดังกล่าววิธีการ HOOKE-JEEVES PATTERN SEARCH จะอาศัยนิยามนี้เป็นพื้นฐานในการสร้างขบวนการ การค้นหาค่าของตัวแปร วิธีการนี้มี 2 ขั้นตอนด้วยกันคือ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> เรียกว่า EXPLORATORY MOVE ขั้นตอนนี้เราจะกำหนดจุดเริ่มต้น (B_o) หรือการเดาจุดเริ่มต้น (INITIAL GUESSES) และกำหนดขนาดขั้นเริ่มต้น (INITIAL STEP SIZE) คือ a_o ของตัวแปรทุก ๆ ตัวในสมการหรือฟังค์ชั่นคำนวณค่าฟังค์ชั่นที่จุดเริ่มต้น (S_o) และที่จุดเริ่มต้นบวกกับขนาดขั้นเริ่มต้น (S_i) การคำนวณค่าฟังค์ชั่นที่จุดทั้ง 2 นี้ จะเป็นลักษณะการเคลื่อนย้ายจุดใด ๆ ในปริภูมิของจุด (Σ) ไปยังอีกจุดหนึ่งเรียกว่า MOVE (จากจุด $B_o \longrightarrow B_o + a_o$) การเคลื่อนย้ายนั้นจะเคลื่อนย้ายทีละค่าของตัวแปร. ถ้าฟังค์ชั่นหรือสมการนั้นมีตัวแปรหลาย ๆ ตัว ถ้าค่า S_1 "น้อยกว่า" S_o เรียกจุด B_1 ($B_o + a_o$) ว่าจุดที่สำเร็จ (SUCCESS) ถ้าค่า S_1 "มากกว่า" ค่า S_o เรียกจุด B_1 ว่าจุดที่ล้มเหลว (FAILURE) เมื่อสำเร็จ (SUCCESS) แล้วก็จะคูณค่าขนาดขั้นเริ่มต้นด้วยค่าปัจจัยที่เพิ่มขึ้น (STEP ACCELATION FACTOR) คำนวณค่าฟังค์ชั่นที่จุดเริ่มต้นบวกกับขนาดขั้นเริ่มต้นใหม่ (S_2) ทำการเปรียบเทียบกับค่าฟังชั่น S_1 ใหม่ ถ้าเกิดล้มเหลว (FAILURE) ก็จะคูณค่าขนาดขั้นเริ่มต้นด้วยค่าปัจจัยที่ลดลง (STEP DECELATION FACTOR) แล้วคำนวณค่าฟังค์ชั่นที่จุดเริ่มต้นบวกกับขนาดขั้นเริ่มต้นอีก (S_3) เปรียบเทียบค่า S_3 กับ S_1 อีก ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนครบทุก ๆ ค่าของตัวแปร (กรณีที่ตัวแปรมีหลายตัว)

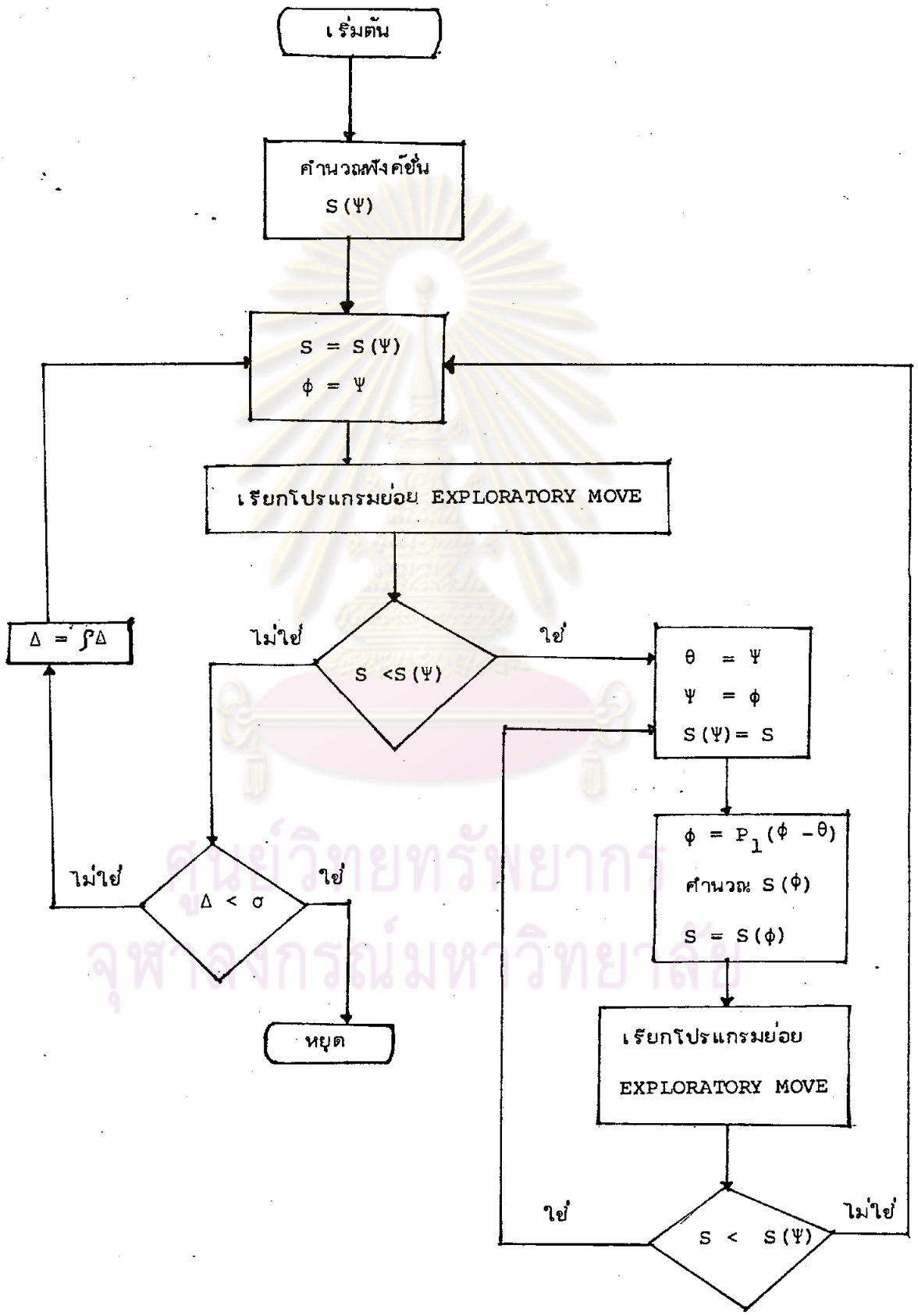
<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เรียกว่า PATTERN MOVE เป็นขั้นตอนที่ต่อจาก EXPLORATORY MOVE คือมีการกำหนดจุดเริ่มต้นใหม่โดยใช้จุดสุดท้ายในขั้นตอนของ EXPLORATORY MORE ที่สำเร็จ (SUCCESS) แล้วมีการเคลื่อนย้ายจุดที่เริ่มต้นนั้นไปยังจุด ๆ หนึ่ง (B_r) โดยที่จุด $B_r = P1 X(B_{r-1} - B_{r-2})$ เมื่อ P1 เรียกว่า PATTERN STEP FACTOR B_{r-1} และ B_{r-2} เป็นจุดเริ่มต้นในรอบที่ r-1 และ r-2 ที่สำเร็จ (SUCCESS) จากนั้นจะใช้จุด B_r นี้เป็นจุดเริ่มต้นในการค้นหาต่อไปโดยใช้ขั้นตอนที่ 1

013544

ตามวิธีการ HOOKE-JEEVES PATTERN SEARCH จะหยุดค้นหาค่าของตัวแปรก็ต่อเมื่อค่าขนาดขั้นเริ่มต้น (INITIAL STEP SIZE) ที่คำนวณได้ในขณะนั้นน้อยกว่าค่าที่เราจะยอมรับได้ (CONVERGENCE TOLERANCE VALUE) ดังแผนภูมิ (FLOW CHART) ต่อไปนี้

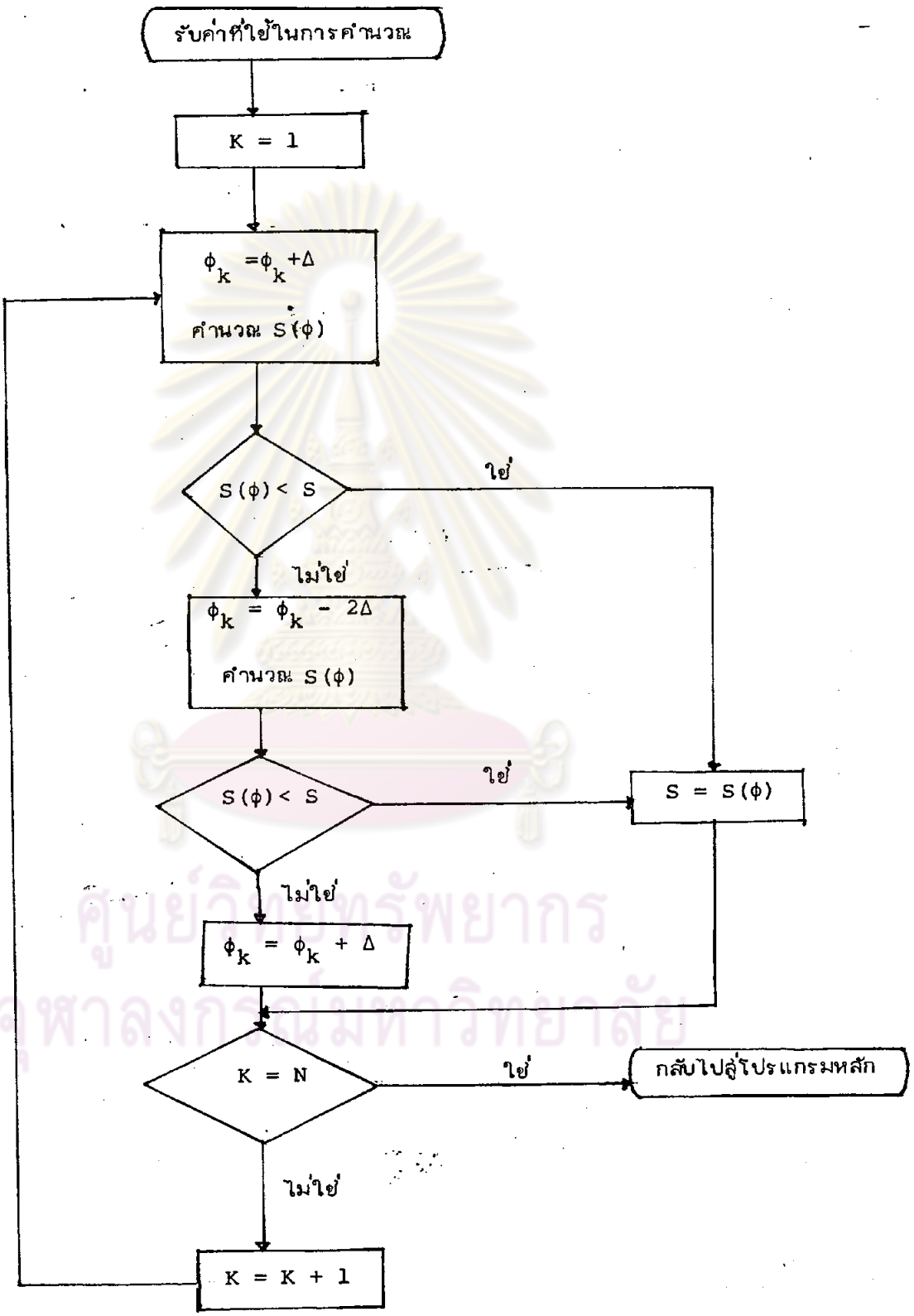
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แผนภูมิแสดงการหาจุดที่ต่ำสุดของฟังค์ชั่น โดยวิธี HOOKE-JEEVES PATTERN SEARCH



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แผนภูมิแสดงโปรแกรมย่อยของ EXPLORATORY MOVE



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หมายเหตุ

θ = จุดพื้นฐานก่อนการเปลี่ยนแปลง

ψ = จุดพื้นฐานในขณะนั้น

ϕ = จุดพื้นฐานที่เป็นผลมาจากการ MOVE

$S(\psi)$ = ค่าฟังค์ชั่นที่จุดพื้นฐาน ψ

$S(\phi)$ = ค่าฟังค์ชั่นที่ได้จากการ MOVE

S = ค่าฟังค์ชั่นก่อนการ MOVE

Δ = ขนาดขั้นเริ่มต้น (INITIAL STEP SIZE)

δ = ค่าที่เราจะยอมรับได้ (CONVERGENCE TOLERANCE VALUE)

ρ = ปัจจัยที่ลดลง (STEP DECELATION FACTOR), $\rho < 1$

ψ_K = ค่า COORDINATE สำหรับ ψ, k = 1, 2, 3,... N

N = จำนวน COORDINATES สำหรับจุดนั้น ๆ

P_1 = PATTERN STEP FACTOR

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.6 <u>วิธีค้นหาตัวแปรเดียวของพาวเวลล์โดยไม่ใช้อนุพันธ์</u> (POWELL'S UNIVARIATE SEARCH WITHOUT DERIVATIVE)

พาวเวลล์ (POWELL) ได้ใช้สมการ QUADRATIC[1] หรือโพลิโนเมียลลำดับที่ 2 ของตัวแปรเดียวในการหาค่าต่ำสุดของฟังค์ชั่นที่ต้องการจะหาค่าต่ำที่สุด โดยการกำหนดค่าของตัวแปรของสมการ QUADRATIC 3 ค่าที่เรียงลำดับ แล้วหาค่าของตัวแปรที่ทำให้ค่าของสมการ QUADRATIC (ค่าของสมการ QUADRATIC เท่ากับค่าของฟังค์ชั่นที่ต้องการจะหาค่าต่ำสุด) มีค่าต่ำสุดตามวิธีการหาค่าต่ำสุดของฟังค์ชั่น QUADRATIC โดยมีเงื่อนไขว่าค่าของตัวแปรที่ทำให้ค่าของสมการ QUADRATIC มีค่าต่ำสุดนั้นจะอยู่ห่างจากค่าของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งใน 3 ค่าที่กำหนดไว้แล้วด้วยค่าที่น้อยเพียงพอ ซึ่งถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขนี้ก็จะได้ค่าของตัวแปรที่ทำให้ฟังค์ชั่นที่ต้องการมีค่าต่ำสุด แต่ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขก็จะตัดตัวแปรที่อยู่ห่างจากตัวแปรที่หาได้ตามวิธีการหาค่าต่ำสุดของฟังค์ชั่น QUADRATIC มากที่สุด ก็จะเหลือตัวแปรเพียง 3 ตัว แล้วจึงนำตัวแปรทั้ง 3 ตัวมาเรียงลำดับใหม่เพื่อจะนำไปหาค่าตัวแปรที่ทำให้ค่าของสมการ QUADRATIC มีค่าต่ำสุดต่อไป ดังวิธีการข้างล่างนี้

ให้สมการ QUADRATIC เป็น

$$Y(\alpha) = a\alpha^2+b\alpha+c \qquad \text{.....1}$$

ต้องการ α ที่ทำให้ $Y(\alpha)$ มีค่าต่ำสุด โดยการใช้การทดสอบโดยอนุพันธ์ครั้งที่ 1 (FIRST DERIVATIVE TEST) ดังนั้น

$$\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} = 2a\alpha + b = 0$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad (a > 0)$$

---

[1] ความสำคัญเกี่ยวกับกำลังสอง (QUARDRATIC) ไม่มากมายอะไร แต่หลาย ๆ ฟังค์ชั่นจะประมาณจุดที่น้อยที่สุดได้ใกล้เคียงความจริงด้วยสมการกำลังสอง (กล่าวไว้ใน FOX, "OPTIMIZATION METHOD FOR ENGINEERING DESIGN" MASSACHUSETTS, ADDISON-WESLEY PUBLISHING CO., INC. NOV. 1970, PP 64)

α จะเป็นค่าที่ทำให้ $Y(\alpha)$ มีค่าต่ำสุด จากวิธีการนี้ POWELL ได้นำมาใช้ในการหาค่าต่ำสุดของฟังค์ชั่นดังนี้

ให้ $f(X)$ เป็นฟังค์ชั่นที่ต้องการหาค่าต่ำสุด

กำหนดให้ X_o เป็นค่าเริ่มต้นของตัวแปร X

ΔX เป็นช่วงที่จะเพิ่มขึ้นหรือลดลง

ΔX_{min} ช่วงความยาวของการก้าวที่น้อยที่สุดที่ยอมให้

ΔX_{max} ช่วงความยาวของการก้าวที่ยาวที่สุดที่ยอมให้

$d_1 = \Delta X$, $d_2 = 2\Delta X$

$$Y(d_1) = f(X_o+d_1)$$

$$Y(d_2) = f(X_o+d_2)$$

ถ้า $Y(d_1) > Y(d_2)$ ให้ $d_3 = 3\Delta X$ แล้วคำนวณ $Y(d_3) = f(X_o+d_3)$

ถ้า $Y(d_1) < Y(d_2)$ ให้ $d_3 = 2\Delta X$, $d_2 = \Delta X$, $d_1 = o$ แล้วคำนวณ $Y(d_3) = f(X_o+d_3)$ ดังนั้น $d_1 < d_2 < d_3$ ซึ่ง

$$Y(d_1) = ad_1^2 + bd_1 + c \qquad \text{.....3}$$

$$Y(d_2) = ad_2^2 + bd_2 + c \qquad \text{.....4}$$

$$Y(d_3) = ad_3^2 + ad_3 + c \qquad \text{.....5}$$

ให้ ds เป็นจุดที่ทำให้ $Y(\alpha)$ มีค่าต่ำที่สุด จากสมการ 1 จะได้ว่า

$$ds = \frac{-b}{2a} \qquad (a > o) \text{ .....6}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ค่า a และ b ของสมการ 6 หาได้จากสมการ 3 , 4 , 5 ดังนี้

$$3 - 4 \; ; \quad Y(d_1)-Y(d_2) = a(d_1^2-d_2^2)+b(d_1-d_2) \quad \ldots\ldots\ldots 7$$

$$4 - 5 \; ; \quad Y(d_2)-Y(d_3) = a(d_2^2-d_3^2)+b(d_2-d_3) \quad \ldots\ldots\ldots 8$$

ให้ $d_{12}^s = d_1^2 - d_2^2$; $d_{23}^s = d_2^2 - d_3^2$

$d_{12} = d_1 - d_2$, $d_{23} = d_2 - d_3$

7 x d_{23} - 8 x d_{12} จะได้ว่า

$$a = \frac{\{Y(d_1)-Y(d_2)\}d_{23}-\{Y(d_2)-Y(d_3)\}d_{12}}{d_{12}^s d_{23} - d_{23}^s d_{12}} \quad \ldots\ldots\ldots 9$$

7 x d_{23}^s - 8 x d_{12}^s จะได้ว่า

$$b = \frac{\{Y(d_1)-Y(d_2)\}d_{23}^s-\{Y(d_2)-Y(d_3)\}d_{12}^s}{d_{23}^s d_{12} - d_{12}^s d_{23}} \quad \ldots\ldots\ldots 10$$

$$\therefore \quad ds = \frac{1}{2}\,\frac{\{Y(d_1)-Y(d_2)\}d_{23}^s-\{Y(d_2)-Y(d_3)\}d_{12}^s}{\{Y(d_1)-Y(d_2)\}d_{23}-\{Y(d_2)-Y(d_3)\}d_{12}}$$

เนื่องจาก $d_{23}^s+d_{12}^s = d_2^2-d_3^2+d_1^2-d_2^2 = d_1^2-d_3^2 = -d_{31}^s$

$d_{23}+d_{12} = d_2-d_3+d_1-d_2 = d_1-d_3 = -d_{31}$

ดังนั้น $$d_s = \frac{1}{2}\,\frac{d_{23}^s Y(d_1)+d_{31}^s Y(d_2) + d_{12}^s Y(d_3)}{d_{23}Y(d_1 +d_{31}Y(d_2)+d_{12}Y(d_3)} \quad \ldots\ldots\ldots 11$$

และ a > o หรือ

$$\frac{d_{23}\{Y(d_1)-Y(d_2)\} - d_{12}\{Y(d_2) - Y(d_3)\}}{d_{12}^s d_{23} - d_{23}^s d_{12}} > o$$

พิจารณา $d_{12}^{s}d_{23} - d_{23}^{s}d_{12} = (d_1^2-d_2^2)(d_2-d_3)-(d_2^2-d_3^2)(d_1-d_2)$

$= (d_1-d_2)(d_2-d_3)\{-d_1+d_2-d_2-d_3\}$

$= -(d_1-d_2)(d_2-d_3)(d_3-d_1)$

$= -d_{12}d_{23}d_{31}$

ดังนั้น ds จะเป็นจุดที่ทำให้ Y(ds) มีค่าต่ำสุดเมื่อ

$$-\frac{d_{23}Y(d_1)+d_{31}Y(d_2)+d_{12}Y(d_3)}{d_{12}d_{23}d_{31}} > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

อสมการ (INEQUALITY) 12 เกิดขึ้นได้ 2 กรณี

ก. ไม่เป็นจริง เกิดขึ้นได้ 2 กรณี

ก.1 เกิดจาก $Y(d_3) > Y(d_1)$ แก้โดยให้

$d_3 = d_2$

$d_2 = d_1$

$d_1 = d_1$ (เดิม) $- \Delta X_{max}$

ก.2 เกิดจาก $Y(d_3) < Y(d_1)$ แก้โดยให้

$d_1 = d_2$

$d_2 = d_3$

$d_3 = d_3$ (เดิม) $+ \Delta X_{max}$

ข. เป็นจริง ตรวจสอบต่อไปว่า ds เป็นจุดต่ำสุดหรือยังโดย

ข.1 ถ้า $\min\{|d_1-ds|, |d_3-ds|\} > \Delta X_{max}$ แสดงว่า ds ยังไม่เป็นจุดต่ำสุด เพราะds อยู่ห่างจาก d_1 หรือ d_3 เกิดจาก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข.1.1 $d_s < d_1 - \Delta X_{max}$ แก้โดยให้

$$d_s = d_2$$

$$d_2 = d_1$$

$$d_1 = d_s$$

ข.1.2 $d_s > d_3 + \Delta X_{max}$ แก้โดยให้

$$d_1 = d_2$$

$$d_2 = d_3$$

$$d_3 = d_s$$

ข.2 ถ้า $\min\{|d_1-d_3| , |d_3-d_s|\} < \Delta X_{max}$ ตรวจสอบต่อไปว่า

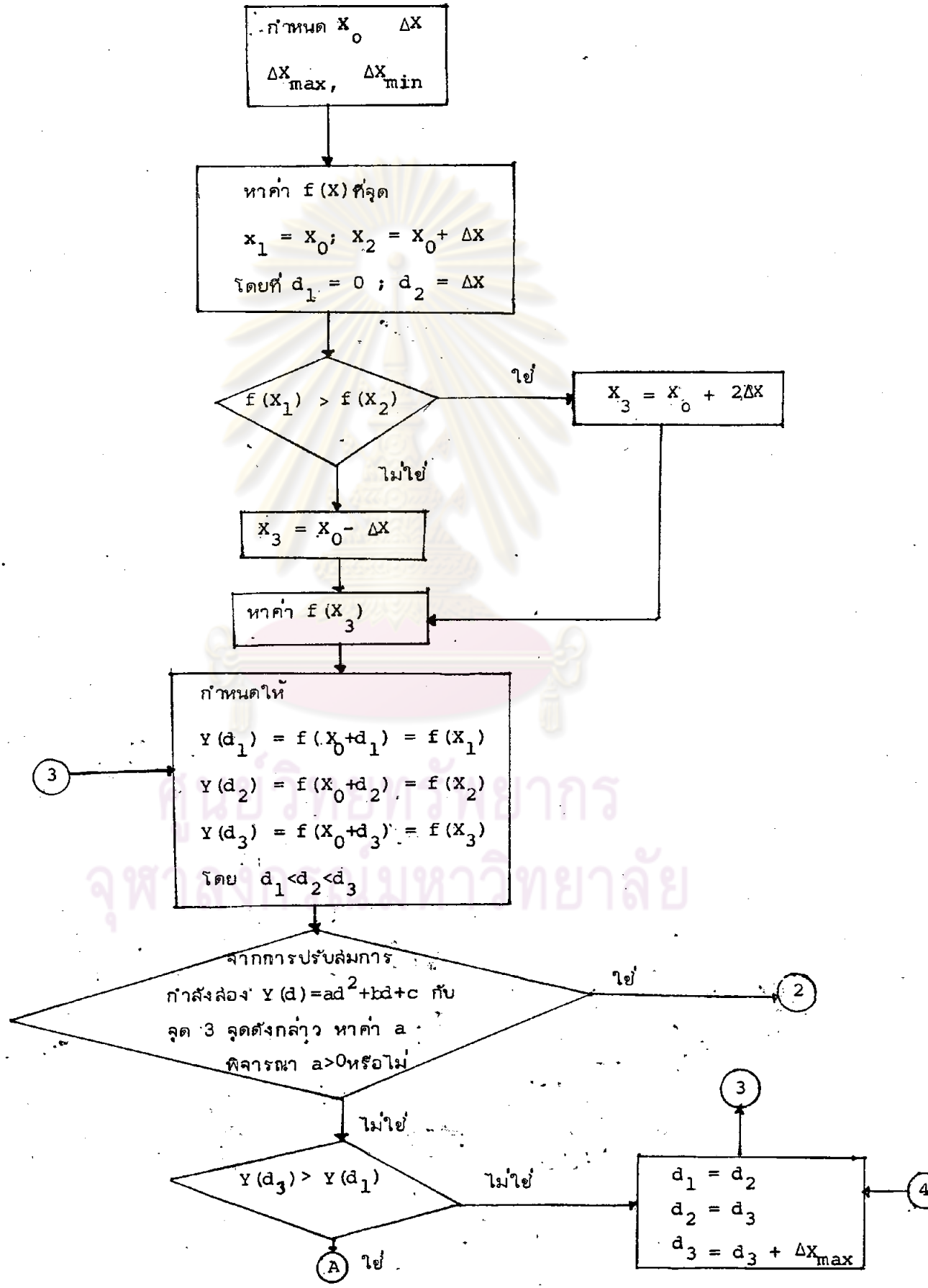
$$\min\{|d_1-d_s| , |d_2-d_s| , |d_3-d_s|\} < \Delta X_{min}$$

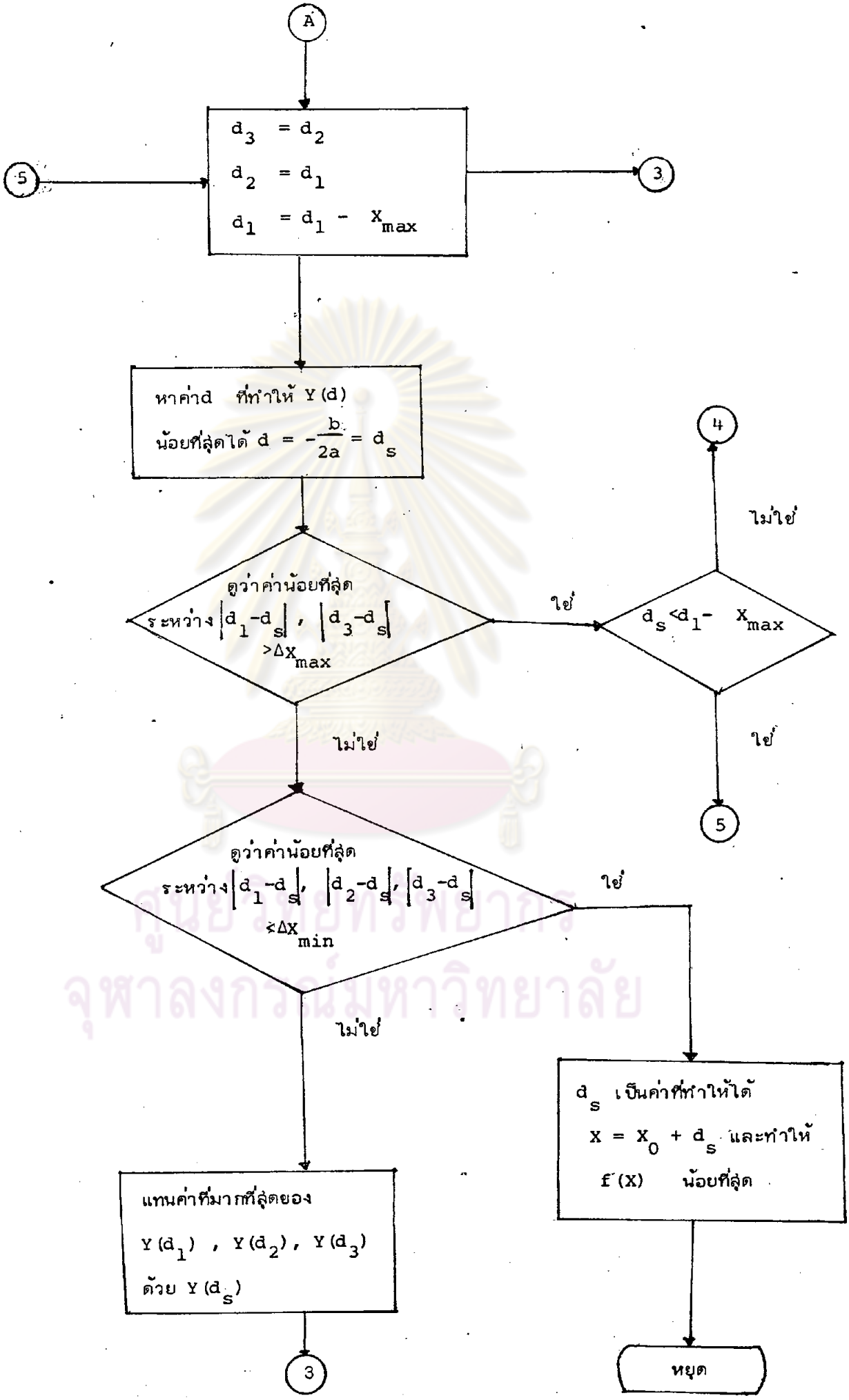
ข.2.1 ถ้าเป็นจริง d_s จะเป็นจุดที่ทำให้ค่าของฟังค์ชั่นเป็นค่าที่น้อยที่สุด

ข.2.2 ถ้าไม่เป็นจริง แก้โดยให้ d_1 หรือ d_2 หรือ d_3 ที่อยู่ใกล้ d_s มากที่สุดเท่ากับ d_s

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แผนภูมิแสดงการหาจุดต่ำสุดโดยวิธีพาวเวลล์





ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย