บทที่ ๔

การวิเคราะห์หาแบบจำลองของอัตราตายของทารกในประเทศไทย

๔.๑ ลักษณะข้อมูล

จากหนังสือสถิติสาธารณสุข อัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปีต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐คน ซึ่งเป็นข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์นั้น แสดงค่าเป็นรายปี ค่าอัตราตายของทารกรายปีนี้ถือเป็นค่าสังเกตตัวแปรเชิงสุ่ม (random variable) ที่สุ่มในเวลาเท่าๆกันคือ ๑ ปี ดังนั้นค่าอัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปีต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คนรายปีตั้งแต่ พ.ศ. ๒๔๘๐-๒๕๑๔ จึงถือเป็น sequence ของตัวแปรเชิงสุ่มที่แต่ละค่าถูกสุ่มในเวลาเท่าๆกันอันเป็นลักษณะหนึ่งของ discrete time stochastic process และนำมาวิเคราะห์ด้วยอนุกรมเวลาได้ ค่าสังเกตในที่นี้จึงเป็นค่าสังเกตรายปีในช่วง ๓๕ ปี นับว่าเป็นจำนวนมากพอที่จะวิเคราะห์ด้วยอนุกรมเวลา

๔.๑.๑ ลักษณะทาง stochastic process ของข้อมูล

เนื่องจากแบบจำลอง stochastic สามารถใช้แก้ไขข้อบกพร่องเกี่ยวกับความไม่เป็นอิสระของค่าสังเกตในอนุกรมเวลา ซึ่งมักพบเสมอในข้อมูลที่เป็นอนุกรมเวลา ดังนั้นการวิเคราะห์ข้อมูลในเบื้องต้น จึงควรทดสอบความเป็นอิสระของค่าสังเกตในอนุกรมเวลาของอัตราตายของทารกก่อน

<u>การทดสอบความเป็นอิสระของค่าสังเกตในอนุกรมอัตราตายของทารกอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน</u>

การทดสอบวิธีหนึ่ง อาจทำได้โดยพิจารณาค่าสถิติ r_k^* ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์แบบ serial โดยที่ subscript k ในที่นี้จะแทนจำนวนช่วงเวลาที่ห่างกัน (lag) วิธีทดสอบจะทำได้โดยการนำ r_k^* ที่คำนวณได้ใน lag k ขนาดต่างๆไปเทียบกับค่าสหสัมพันธ์แบบ serial ในตารางค่า

สหสัมพันธ์แบบ serial ณ. ระดับนัยสำคัญ 5% ของ R.L. Anderson

ถ้าค่า r_k^* มากกว่าค่าในตารางแสดงว่าอนุกรมอัตราตายของทารกเป็นอนุกรมที่มีค่าสังเกตซึ่งไม่เป็นอิสระในทางตรงกันข้ามถ้า r_k^* ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าในตารางจะสรุปได้ว่า อนุกรมอัตราตายของทารกนั้นเป็นอนุกรมที่มีค่าสังเกตที่เป็นอิสระ[1]

การคำนวณค่า r_k^*

r_k^* นี้จะคำนวณจากสูตร

$$r_k^* = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} Z_t Z_{t+k} - \left(\sum_{t=1}^{N-k} Z_t\right)\left(\sum_{t=k+1}^{N} Z_t\right)/(N-k)}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{N-k} Z_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{N-k} Z_t\right)^2/(N-k)\right]\left[\sum_{t=k+1}^{N} Z_t^2 - \left(\sum_{t=k+1}^{N} Z_t\right)^2/(N-k)\right]}}$$

เมื่อ r_k^* เป็น สัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์แบบ serial ที่คำนวณเพื่อนำไปทดสอบ

Z_t เป็นอัตราตายของทารกในปีที่ t

k เป็นจำนวนช่วงเวลา(ปี)ที่ห่างไปหรือล้าหลัง (lag) ซึ่งในที่นี้ k=1,2,..,19

N เป็นจำนวนค่าสังเกตทั้งหมด =35

Z_{t+k} เป็นอัตราตายของทารกในปีที่ห่างจากปีที่ t ไป k ปี

เช่น ถ้า k=2

$$r_2^* = \frac{\sum_{t=1}^{33} Z_t Z_{t+2} - \left(\sum_{t=1}^{33} Z_t\right)\left(\sum_{t=3}^{35} Z_t\right)/(33)}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{33} Z_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{33} Z_t\right)^2/(33)\right]\left[\sum_{t=3}^{35} Z_t^2 - \left(\sum_{t=3}^{35} Z_t\right)^2/(33)\right]}}$$

1Yamane, Statistics; An Introductory Analysis (2nd ed. 1970) p867

ตารางที่ ๔.๑ แสดงค่าต่างๆที่นำมาคำนวณหา r_2^* จะเห็นว่าการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นสิ่งจำเป็น ในการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ NEAC ที่ศูนย์คอมพิวเตอร์ศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย เป็นเครื่องมือในการหาค่าสถิติต่างๆโดยตลอด

จากการคำนวณได้ค่า $r_2^* = .9398$

ตารางที่ ๔.๒ แสดงว่า สัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์แบบ serial ที่ lag k ตั้งแต่ ๑ ถึง ๑๙ เปรียบเทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์แบบ serial ณ.ระดับนัยสำคัญ 5% ของตาราง R.L. Anderson เพื่อทดสอบอย่างนี้มีนัยสำคัญของอนุกรมของอัตราตายของทารกอย่างละเอียดต่อไป โดยนำค่า r_k^* ที่คำนวณได้ไปเทียบกับค่าสหสัมพันธ์แบบ serial ในตาราง Anderson ณ.ระดับจำนวนค่าสังเกตต่างๆกัน จะเห็นว่า เมื่อk=1 จำนวนค่าสังเกตใน lag นี้ =34 ดังนั้น degree of freedom=34 ค่าcritical 5% level of significance ซึ่งได้จากการทำ interpolation คือ .245 เมื่อนำมาเทียบกับ r_1^* ค่าr_1^* ที่คำนวณได้มีค่าสูงกว่า .245 แสดงว่า อนุกรมอัตราตายของทารกมีสหสัมพันธ์แบบ serial อย่างมีนัยสำคัญมาก

สำหรับlag อื่นๆ ก็ใช้วิธีทดสอบเช่นเดียวกัน ปรากฏว่าอนุกรมอัตราตายของทารกต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน มีสหสัมพันธ์แบบ serial ที่ lag k อย่างมีนัยสำคัญ ตั้งแต่ lag ๑ ถึง ๑๙ แสดงว่าองศาของความไม่เป็นอิสระของเทอมต่างๆในอนุกรมอัตราตายของทารกสูงมากการทดสอบนี้สนับสนุนว่า มีความไม่เป็นอิสระระหว่างค่าสังเกตในอนุกรมเวลา ทำให้สามารถนำอัตราตายของทารกในปีที่ล่วงมาแล้วมาช่วยในการหาอัตราตายของทารกในปีปัจจุบันได้เป็นอย่างดี ทั้งนี้โดยการแปลงค่าสังเกตออกมาในรูปของ shock a_t ที่เป็นอิสระต่อกัน

จากความเหมาะสมของข้อมูลอัตราตายของทารกซึ่งเป็นอนุกรมเวลาชนิดหนึ่งและมีจำนวนค่าสังเกตเพียงพอสามารถนำค่าอัตราตายของทารกในปีที่แล้วมาเป็นตัวกำหนดค่าอัตราตายของทารกในปีปัจจุบันได้ เป็นการลดความลำบากในการหาค่าตัวแปรอิสระอื่นๆมาเป็นตัวกำหนดค่าของปีปัจจุบัน เนื่องจากปัจจัยหรือสาเหตุที่

ตาราง 4.1 แสดงการคำนวณค่า r_k^* เมื่อ $k=2$

t	Z_t	Z_{t+2}	$Z_t\ Z_{t+2}$	Z_t^2
1	104.2	101.4	(104.2)(101.4)	
2	91.1	109.8	(91.1)(109.8)	
3	101.4	99.8	(101.4)(99.8)	$(101.4)^2$
4	109.8	94.8	(109.8)(94.8)	$(109.8)^2$
5	99.8	97.4	(99.8)(97.4)	$(99.8)^2$
6	94.8	98.7	(94.8)(98.7)	$(94.8)^2$
7	97.4	105.6	(97.4)(105.6)	$(97.4)^2$
8	98.7	94.6	(98.7)(94.6)	$(98.7)^2$
9	105.6	79.8	(105.6)(79.8)	$(105.6)^2$
10	94.6	63.1	(94.6)(63.1)	$(94.6)^2$
11	79.8	65.9	(79.8)(65.9)	$(79.8)^2$
12	63.1	62.4	(63.1)(62.4)	$(63.1)^2$
13	65.9	65.3	(65.9)(65.3)	$(65.9)^2$
14	62.4	62.8	(62.4)(62.8)	$(62.4)^2$
15	65.3	64.9	(65.3)(64.9)	$(65.3)^2$
16	62.8	63.5	(62.8)(63.5)	$(62.8)^2$
17	64.9	56.1	(64.9)(56.1)	$(64.9)^2$
18	63.5	55.2	(63.5)(55.2)	$(63.5)^2$
19	56.1	61.7	(56.1)(61.7)	$(56.1)^2$
20	55.2	54.1	(55.2)(54.1)	$(55.2)^2$
21	61.7	47.1	(61.7)(47.1)	$(61.7)^2$
22	54.1	48.9	(54.1)(48.9)	$(54.1)^2$
23	47.1	51.0	(47.1)(51.0)	$(47.1)^2$
24	48.9	44.7	(48.9)(44.7)	$(48.9)^2$
25	51.0	37.9	(51.0)(37.9)	$(51.0)^2$
26	44.7	37.8	(44.7)(37.8)	$(44.7)^2$
27	37.9	31.2	(37.9)(31.2)	$(37.9)^2$
28	37.8	33.5	(37.8)(33.5)	$(37.8)^2$
29	31.2	27.9	(31.2)(27.9)	$(31.2)^2$
30	33.5	26.5	(33.5)(26.5)	$(33.5)^2$
31	27.9	26.2	(27.9)(26.2)	$(27.9)^2$
32	26.5	25.5	(26.5)(25.5)	$(26.5)^2$
33	26.2	22.5	(26.2)(22.5)	$(26.2)^2$
34	25.5			
35	22.5			

ตารางที่ 4.2

แสดงการคำนวนค่าสัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์แบบ serial เปรียบเทียบกับค่าสหสัมพันธ์แบบ serial ของ R.L. Anderson

จำนวนปีล้าหลัง lag k	ส.ป.ส. ของสหสัมพันธ์ serial r^*_k	N-k	ค่าสหสัมพันธ์ของ R.L. Anderson	lag k	r^*_k	N-k	ค่าสหสัมพันธ์ของ R.L. Anderson
1	.9707	34	.245				
2	.9398	33	.248	11	.9051	24	.2806
3	.9210	32	.251	12	.9180	23	.2852
4	.9134	31	.254	13	.9004	22	.2898
5	.8970	30	.257	14	.8951	21	.2844
6	.8796	29	.2608	15	.9009	20	.299
7	.8549	28	.2646	16	.8999	19	.3048
8	.8453	27	.2684	17	.9143	18	.3106
9	.8635	26	.2722	18	.8508	17	.3164
10	.8905	25	.276	19	.7695	16	.3222

reject ด้วยระดับนัยสำคัญทั้ง 5 % และ 1%

ทำให้ทารกตายหรืออัตราตายของทารกมีค่าเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละปีนั้นมีจำนวนมาก สาเหตุทางตรงเช่น ปัจจัยทางชีววิทยา ปัจจัยทางแพทย์ ซึ่งเป็นปัจจัยที่มีผลต่อการตายของทารกอย่างซับซ้อนยากที่จะนำมาเป็นตัวกำหนดได้และสาเหตุทางอ้อม เช่น สภาพสิ่งแวดล้อม สภาพทางเศรษฐกิจ และอื่นๆ ที่มีอิทธิพลทำให้สุขภาพของมารดาในขณะตั้งครรภ์และทารกในครรภ์ยากที่จะมีชีวิตรอดได้ ปัจจัยและสาเหตุต่างๆนี้บางครั้งไม่สามารถกำหนดได้อย่างครบถ้วน เนื่องจากไม่อาจรู้ได้หรือขาดข้อมูลที่จะนำมาวิเคราะห์และด้วยจุดมุ่งหมายที่จะสร้างสมการคณิตศาสตร์ที่มีรูปไม่ยุ่งยากนัก เพื่อใช้ประมาณค่าอัตราตายของทารกได้ทันเวลา ดังนั้นแบบจำลอง stochastic จึงควรนำมาพิจารณาเป็นแบบจำลองในการวิเคราะห์อนุกรมอัตราตายของทารก

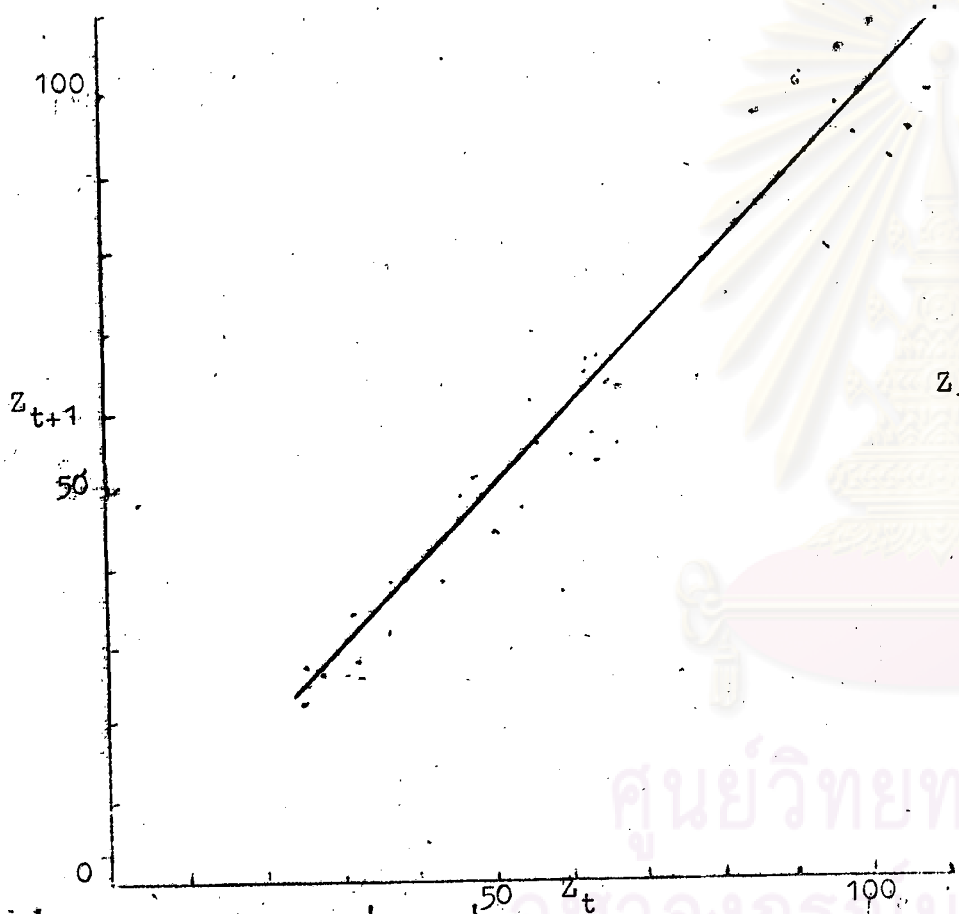
๔.๑.๒ ลักษณะความสัมพันธ์แบบเส้นตรงระหว่างค่าต่างๆในอนุกรม

(Linear Stochastic process)

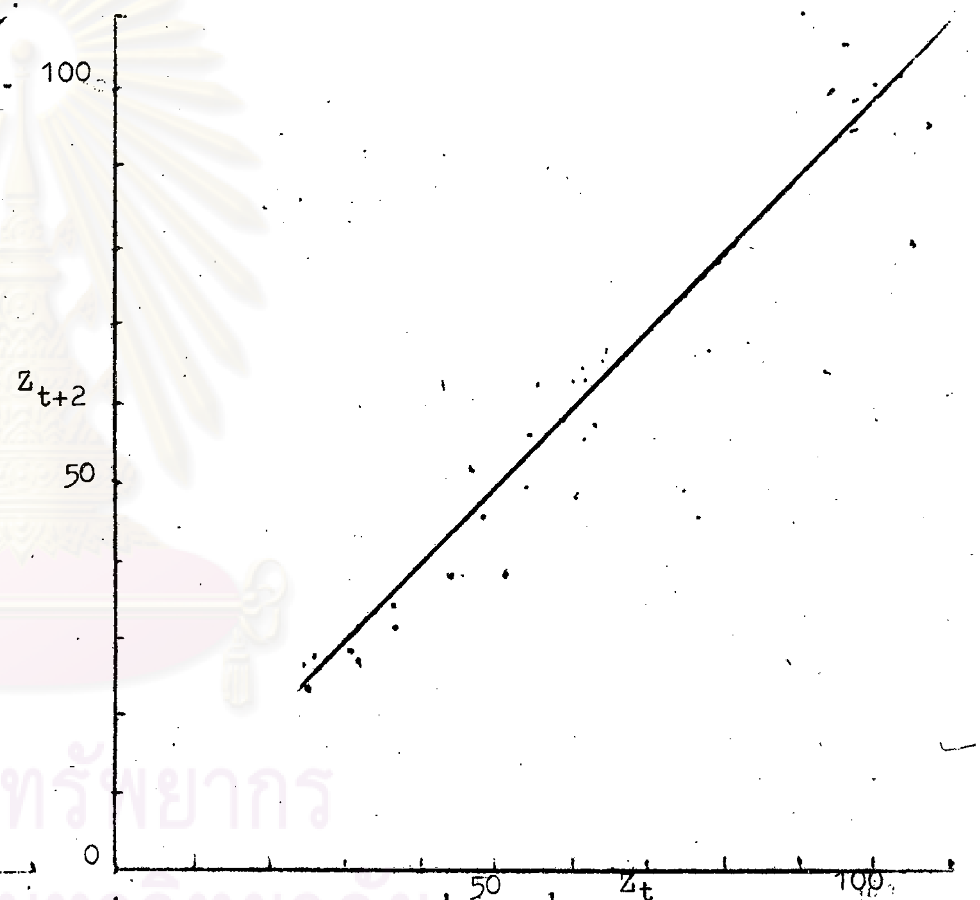
ความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าสังเกตในอนุกรมอัตราตายของทารกแต่ละค่ากับค่าข้างเคียง ว่ามีความสัมพันธ์ในแบบเส้นตรงหรือไม่และแปรผันในทางบวกหรือลบจะพิจารณาได้จากการทำ scatter diagram แสดงการแจกแจงร่วมของค่าสังเกตในอนุกรมอัตราตายของทารกในช่วงเวลาต่างๆกัน ซึ่งได้จากการจุด (plot) ค่าสังเกตในแต่ละปีกับค่าสังเกตข้างเคียงที่ห่างไป ๑ ปีหรือ ๒ ปี เพื่อดูความหนาแน่นของจุดโดยให้แกนนอนเป็นค่าสังเกตในปีต่างๆคือ Z_t และแกนตั้งเป็นค่าสังเกตในปีที่ห่างออกไป เช่น Z_{t+1} หรือ Z_{t+2} เป็นต้น ตารางที่ ๔.๓ แสดงค่าอัตราตายของทารกรายปีกับค่าอัตราตายของทารกในปีต่อมา ๑ ปีและ ๒ ปี เช่นเมื่อ $k=1$ จะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกในแต่ละปีกับปีต่อมา ๑ ปี ว่ามีจุดหนาแน่นพอที่จะสร้างด้วยเส้นตรงหรือแสดงความสัมพันธ์แบบเส้นตรงหรือไม่ จากภาพ ๔.๑.๑ จะเห็นว่า ความหนาแน่นของจุดอยู่ในลักษณะเส้นตรงซึ่งแสดงว่าความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกแต่ละปีกับค่าต่อมา ๑ ปี มีลักษณะเป็นเส้นตรงแปรในทางบวก

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $k=2$ นำค่า Z_t กับ Z_{t+2} มาเขียน scatter diagram ดังในแผนภาพที่ ๔.๑.๒ ความหนาแน่นของจุดยังคงแสดงความสัมพันธ์แบบเส้นตรงแปรทางบวก

ภาพที่4.1 ลักษณะความสัมพันธ์ทาง Linear stochastic



ภาพที่4.1.1แสดงการแจกแจงรวมระหว่างอัตราตายทารกรายปี
กับอัตราตายทารกในปีต่อมา 1 ปี



ภาพที่4.1.2แสดงการแจกแจงรวมระหว่างอัตราตายทารกรายปี
กับอัตราตายทารกในปีต่อมาอีก2ปี

ตาราง 4.3 อัตราตายทารกรายปีกับอัตราตายทารกในปีต่อมา

พ.ศ.	t	Z_t	Z_{t+1}	Z_{t+2}
2480	1	104.2	91.1	101.4
2481	2	91.1	101.4	109.8
2482	3	101.4	109.8	99.8
2483	4	109.8	99.8	94.8
2484	5	99.8	94.8	97.4
2485	6	94.8	97.4	98.7
2486	7	97.4	98.7	105.6
2487	8	98.7	105.6	94.6
2488	9	105.6	94.6	79.8
2489	10	94.6	79.8	68.1
2490	11	79.8	68.1	65.9
2491	12	68.1	65.9	62.4
2492	13	65.9	62.4	65.3
2493	14	62.4	65.3	62.8
2494	15	65.3	62.8	64.9
2495	16	62.8	64.9	63.5
2496	17	64.9	63.5	56.1
2497	18	63.5	56.1	55.2
2498	19	56.1	55.2	61.7
2499	20	55.2	61.7	54.1
2500	21	61.7	54.1	47.1
2501	22	54.1	47.1	48.9
2502	23	47.1	48.9	51.0
2503	24	48.9	51.0	44.7
2504	25	51.0	44.7	37.9
2505	26	44.7	37.9	37.8
2506	27	37.9	37.8	31.2
2507	28	37.8	31.2	33.5
2508	29	31.2	33.5	27.9
2509	30	33.5	27.9	26.5
2510	31	27.9	26.5	26.2
2511	32	26.5	26.2	25.5
2512	33	26.2	25.5	22.5
2513	34	25.5	22.5	
2514	35	22.5		

โดยสรุปแล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกแต่ละปีกับค่าอัตราตายของทารกในปีต่อมา 1 ปีและ 2 ปี มีลักษณะเป็นเส้นตรงและแปรตามกัน

4.1.3 ลักษณะแนวโน้ม

จากการสังเกตค่าอัตราตายของทารกในตารางที่ 4.3 จะเห็นว่าอัตราตายของทารกลดลงเรื่อยๆตามลำดับ ยิ่งเวลาผ่านไปเท่าใดอัตราตายของทารกมีแนวโน้มที่จะลดลงจากค่าอัตราตายของทารกในปี พ.ศ. 2480 มากขึ้นเท่านั้น

การลดลงของอัตราตายของทารกในระยะเวลาต่าง ๆ จะเห็นได้ชัดเจนขึ้นในตารางที่ 4.4 ซึ่งแสดงอัตราตายเฉลี่ยในระยะทุกๆ 5 ปี ปรากฏว่าระหว่าง พ.ศ. 2480 – 84 อัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า 1 ปี มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 100.9 ต่อเด็กเกิดมีชีพ 1,000 คนได้ลดลงเหลือ 98.1 ต่อเด็กเกิดมีชีพ 1,000 คน ซึ่งเป็นอัตราตายของทารกเฉลี่ยในช่วงระยะ พ.ศ. 2485–89 ส่วนในระหว่าง พ.ศ. 2490–94 อัตราตายของทารกลดลงมากกว่าเดิมอย่างชัดเจน เนื่องจากมีความก้าวหน้าทางด้านการแพทย์และสาธารณสุขมากขึ้น สรุปแล้วในระหว่าง 10 ปี คือตั้งแต่ พ.ศ. 2480–84 ถึง พ.ศ. 2490–94 อัตราตายของทารกอายุต่ำกว่า 1 ปีต่อเด็กเกิดมีชีพ 1,000 คนลดลงมาถึงร้อยละ 33[1] หลังจาก พ.ศ. 2494 อัตราตายของทารกเฉลี่ยยังคงลดลงอย่างช้าๆแล้วกลับมาลดลงอย่างรวดเร็ว ในระยะ พ.ศ.2505–09 เหลืออัตราตายทารกเฉลี่ยเพียง 36.8 ต่อเด็กเกิดมีชีพ 1,000 คน ในระยะต่อมาคือระยะ พ.ศ. 2509–2514 อัตราตายของทารกมีการลดลงอย่างช้าๆในจำนวนที่คงที่ในระยะหนึ่งอีก จะเห็นว่าอัตราตายของทารกเป็นการลดอย่างช้า ๆแล้วลดลงอย่างรวดเร็วหลังจากนั้นการลดลงของอัตราตายของทารกจะกลับซ้ำแบบเดิมอีกคือลดอย่างช้าๆเป็นจำนวนที่คงที่

การนำค่าอัตราตายของทารกรายปีทั้งหมดตั้งแต่พ.ศ.2480–2514 มาพล็อตค่าในแผนภาพเสกลเลขคณิตจะช่วยให้เห็นลักษณะแนวโน้มได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ดังในภาพที่ 4.2 จะเห็นแนวโน้มลดลงในจำนวนที่ค่อนข้างคงที่เป็นระยะๆดูได้จากค่าแตก

---

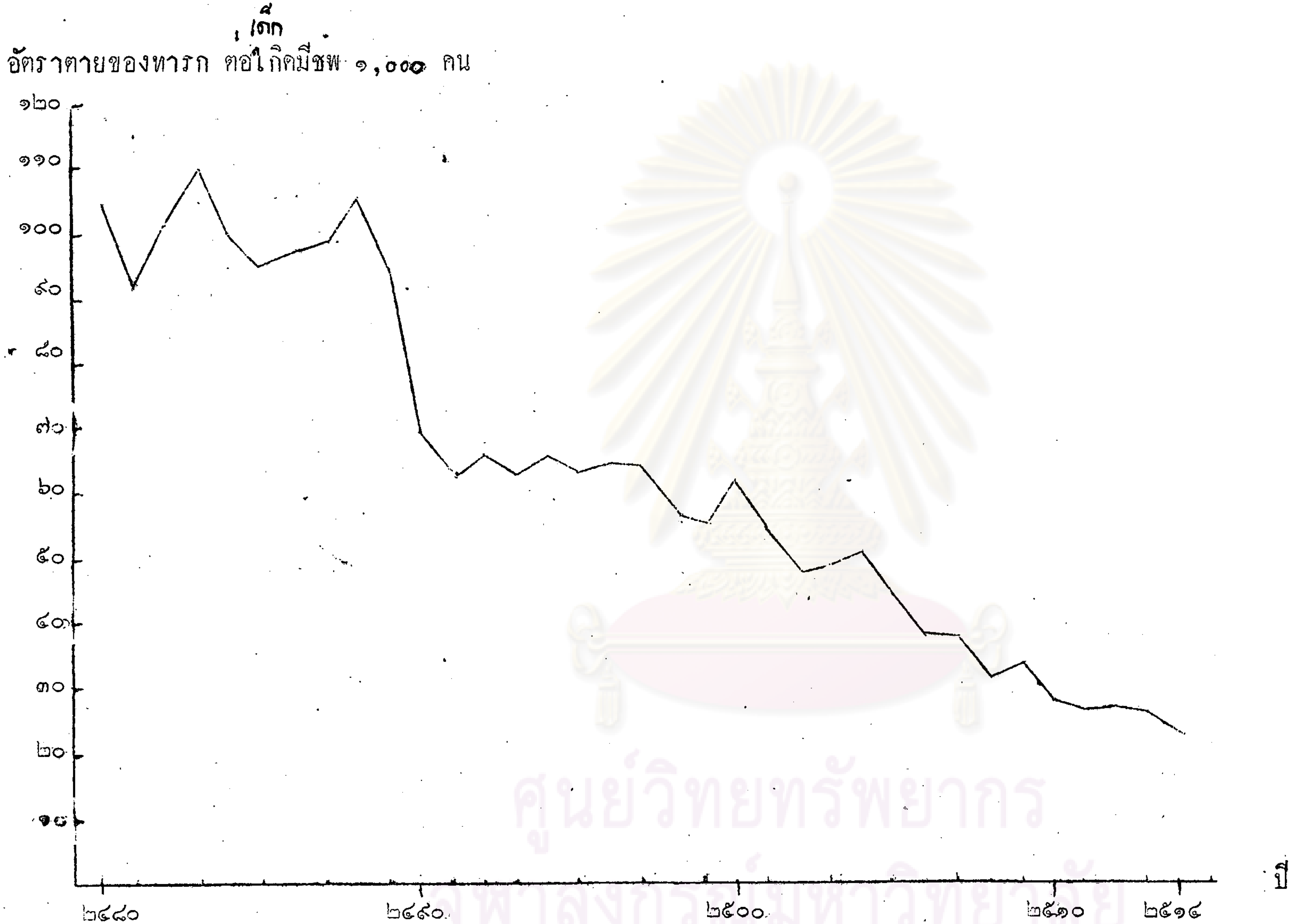
1 กองสถิติพยากรณ์ชีพ, สถิติสาธารณสุข (2514), 34

ตารางที่ ๔.๔

อัตราตายในอายุต่ำกว่า ๑ ปี พ. ศ. ๒๔๘๐-๒๕๑๔

พ.ศ.	อัตราตายในอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน
๒๔๘๐-๒๔๘๔	๑๐๐.๙
๒๔๘๕-๒๔๘๙	๙๘.๑
๒๔๙๐-๒๔๙๔	๖๗.๗
๒๔๙๕-๒๔๙๙	๖๐.๒
๒๕๐๐-๒๕๐๔	๕๒.๓
๒๕๐๕-๒๕๐๙	๓๖.๘
๒๕๑๐-๒๕๑๔	๒๕.๗

แหล่งที่มา : รายงานสถิติสาธารณสุขประจำปี ๒๕๑๔, กองสถิติพยากรณ์ชีพ, กระทรวงสาธารณสุข



ภาพที่4.2 อัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปีในประเทศไทยตั้งแต่ พ.ศ. ๒๔.. -๒๕๑๔

ต่างจากเดิม (first difference) ซึ่งเป็นค่าอัตราตายของทารกต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ในแต่ละปี ที่ต่างไปจากปีที่แล้ว ในตารางที่ ๔.๕ ค่าแตกต่างนี้จะแสดงค่าคงที่ในระยะหนึ่ง ด้วยค่าคงที่ค่าหนึ่ง เช่นในช่วงระยะ พ.ศ. ๒๔๙๒ - ๒๔๙๗ ค่าแตกต่างของค่าอัตราตายของทารกอยู่ในระหว่าง ๒.๑ ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ถึง ๓.๕ ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน แต่ในระยะระหว่าง พ.ศ. ๒๕๐๐ - ๒๕๐๒ ค่าแตกต่างของอัตราตายของทารกกลับสูงขึ้น คือ มีค่าอยู่ในระหว่าง ๖.๕ ถึง ๗.๖ ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน

ยิ่งกว่านั้น ถ้านำค่าอัตราตายของทารกในตารางที่ ๔.๕ มาพล็อตค่าในกระดาษ semi-log เพื่อดูลักษณะแนวโน้มของอัตราตายของทารกในรูป log ว่ามีลักษณะเป็นเส้นตรงหรือโค้งแบบใด เป็นการแสดงภาพเกี่ยวกับลักษณะการลดลง หรือเปลี่ยนแปลงของอัตราตายของทารกในกระดาษ semi-log โดยให้แกนนอนแทนเวลา และแกนตั้งแสดงค่าอัตราตายของทารก ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน จากภาพ ๔.3 จะเห็นว่า อัตราตายของทารกต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ยังคงมีลักษณะแนวโน้มที่ลดลงแบบเส้นตรงชัดเจนกว่าการพล็อตในกระดาษเลขคณิต แสดงว่า การเปลี่ยนแปลงของอัตราตายของทารกในเสกลlog แนวโน้มที่จะมีค่าคงที่ ซึ่งความคงที่ของการเปลี่ยนแปลงนี้ จะเห็นได้ชัดเจนขึ้นเมื่อหาค่า**แตกต่าง**ของ log ของอัตราตายของทารก ดังแสดงในตารางที่ ๔.๖ ปรากฏว่า ค่าแตกต่างของ log ของอัตราตายของทารก ยังคงแสดงความคงที่เป็นระยะ ๆ คล้ายกับค่าแตกต่างในเสกลเลขคณิต

ดังนั้น ลักษณะของแนวโน้มไม่ว่าจะเป็นเสกลเลขคณิต หรือเสกล log ยังคงแสดงลักษณะที่พอจะใช้สมการคณิตศาสตร์แบบเส้นตรง ที่มีเวลา t เป็นตัวแปรอิสระมาอธิบายแนวโน้มระยะยาวของข้อมูลได้ เพื่อแสดง ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกกับเวลา คือ ค่าอัตราตายของทารก Z_t ขึ้นกับเวลา t ในแบบเส้นตรง ที่มีรูปเป็น

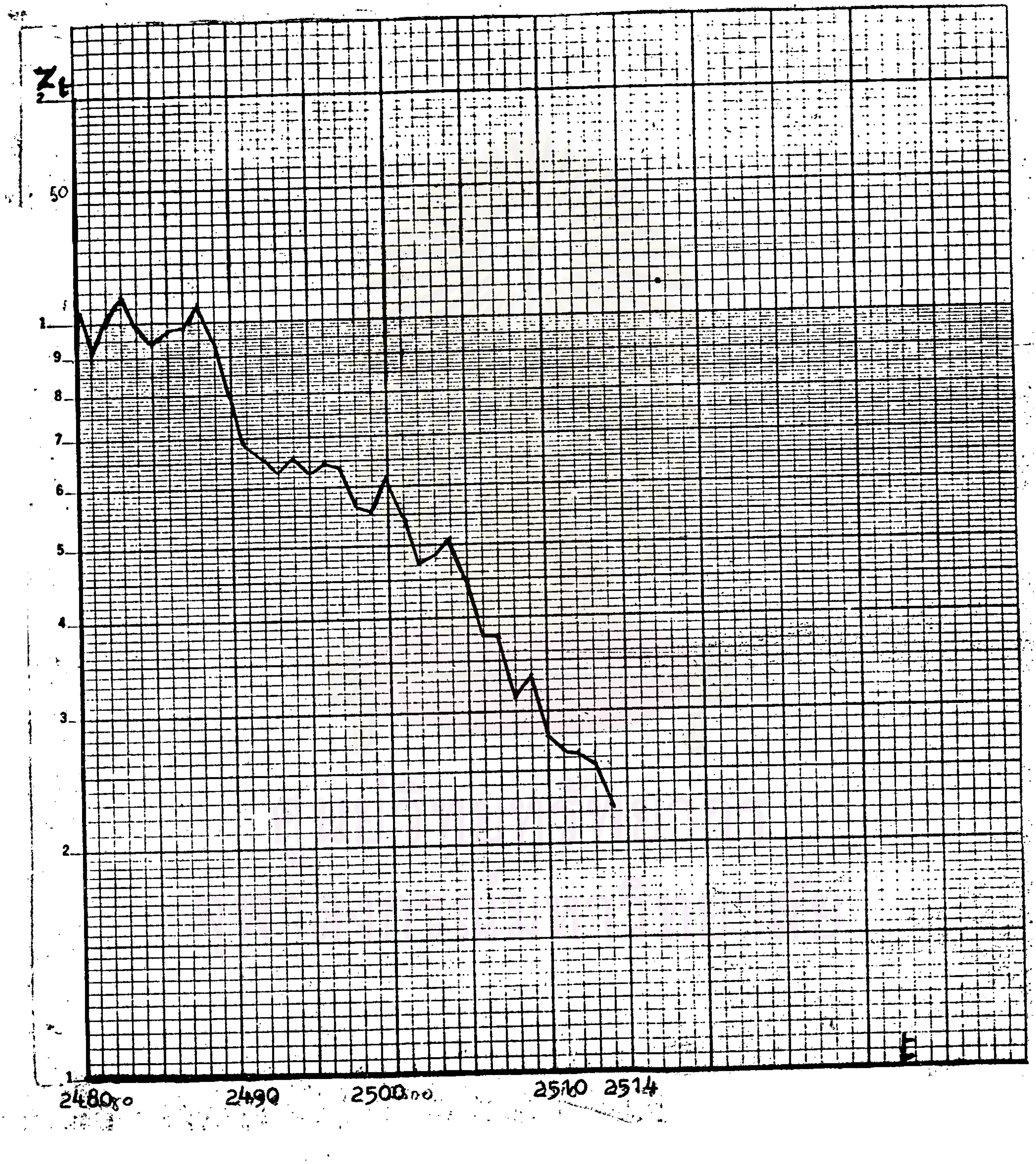
$$Z_t = a + bt \quad \text{ในเสกลเลขคณิต}$$

$$\text{และ } \log Z_t = \log a + (\log b)t \quad \text{ในเสกล log}$$

ตารางที่ ๔.๕ อัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน
รายปีตั้งแต่ พ.ศ. ๒๔๘๐ - ๒๕๑๔

ปี	t	อัตราตายทารก Z_t	ความต่างจากปีที่แล้ว $Z_t - Z_{t-1}$	ปี	t	อัตราตายทารก Z_t	ความต่างจากปีที่แล้ว $Z_t - Z_{t-1}$
๒๔๘๐	๐	๑๐๔.๒		๒๔๙๗	๑๗	๖๓.๕	-๑.๔
๒๔๘๑	๑	๙๑.๑	-๑๓.๑	๒๔๙๘	๑๘	๕๑.๑	-๗.๔
๒๔๘๒	๒	๑๐๑.๔	๑๐.๓	๒๔๙๙	๑๙	๕๕.๒	๔.๑
๒๔๘๓	๓	๑๐๙.๘	๘.๔	๒๕๐๐	๒๐	๖๑.๗	๖.๕
๒๔๘๔	๔	๙๙.๘	-๑๐.๐	๒๕๐๑	๒๑	๕๔.๑	-๗.๖
๒๔๘๕	๕	๙๔.๘	-๕.๐	๒๕๐๒	๒๒	๔๗.๑	-๗.๐
๒๔๘๖	๖	๙๗.๔	๒.๖	๒๕๐๓	๒๓	๔๘.๙	๑.๘
๒๔๘๗	๗	๙๘.๗	๑.๓	๒๕๐๔	๒๔	๕๑.๐	๒.๑
๒๔๘๘	๘	๑๐๕.๖	๖.๙	๒๕๐๕	๒๕	๔๔.๗	-๖.๓
๒๔๘๙	๙	๙๔.๖	๑.๐	๒๕๐๖	๒๖	๓๗.๙	-๖.๘
๒๔๙๐	๑๐	๗๙.๘	-๑๔.๘	๒๕๐๗	๒๗	๓๗.๘	-.๑
๒๔๙๑	๑๑	๖๓.๑	-๑๖.๗	๒๕๐๘	๒๘	๓๑.๒	-๖.๖
๒๔๙๒	๑๒	๖๕.๙	๒.๘	๒๕๐๙	๒๙	๓๓.๕	๒.๓
๒๔๙๓	๑๓	๖๒.๔	-๓.๕	๒๕๑๐	๓๐	๒๗.๙	-๕.๖
๒๔๙๔	๑๔	๖๕.๓	๒.๙	๒๕๑๑	๓๑	๒๖.๕	-๑.๔
๒๔๙๕	๑๕	๖๒.๘	-๒.๕	๒๕๑๒	๓๒	๒๖.๒	-๐.๓
๒๔๙๖	๑๖	๖๔.๙	๒.๑	๒๕๑๓	๓๓	๒๕.๕	-๐.๗
				๒๕๑๔	๓๔	๒๒.๕	-๓.๐

ภาพ 4.3 อัตราตายทารกรายปีในสเกล log



ตาราง 4.6 อัตราตายทารกพร้อมค่าแตกต่างจากปีที่แล้วในสเกล log

Z_t	$\log Z_t$	ค่าแตกต่าง $\Delta \log Z_t = \log Z_t - \log Z_{t-1}$
104.2	2.01786	
91.1	1.95951	-.05835
101.4	2.00603	.04652
109.8	2.04060	.03457
99.8	1.99913	-.04147
94.8	1.97680	-.02333
97.4	1.98855	.01175
98.7	1.99431	.00576
105.6	2.02366	.03229
94.6	1.97589	-.04777
79.8	1.90200	-.07358
68.1	1.80002	-.10198
65.9	1.81888	.01886
62.4	1.79518	-.02370
65.3	1.81491	.01973
62.8	1.79795	-.01696
64.9	1.81224	.01429
63.5	1.80277	-.00947
56.1	1.74896	-.05381
55.2	1.74193	-.00703
61.7	1.79028	.04835
54.1	1.73319	-.05709
47.1	1.67302	-.06017
48.9	1.68124	.01628
51.0	1.70757	.01827
44.7	1.65030	-.05727
37.9	1.57863	-.07167
37.8	1.57749	-.00114
31.2	1.49415	-.08334
33.5	1.52504	.03089
27.9	1.44560	-.07944
26.5	1.42324	-.02236
26.2	1.41830	-.00494
25.5	1.40653	-.01177
22.5	1.35218	-.05435

4.1.4 ลักษณะ Nonstationary time series

ถ้าพิจารณาจากตารางและภาพในหัวข้อ 4.1.3 จะเห็นได้ว่า อัตราตายของทารกมีแนวโน้มลดลง โดยมีการลดลงในลักษณะที่ซ้ำ ๆ กัน อันแสดงถึงลักษณะความเหมือนกันหรือซ้ำกันตามเวลา (Homogeneous) ของอนุกรมอัตราตายของทารก ลักษณะนี้เป็นลักษณะหนึ่งของ Nonstationary time series ดังนั้น จึงควรนำแบบจำลอง Nonstationary มาพิจารณาใช้กับอนุกรมอัตราตายของทารก

ด้วยจุดมุ่งหมายที่จะสร้างแบบจำลองอัตราตายของทารกในรูปง่ายพอควร และด้วยลักษณะข้อมูลดังกล่าว จะสร้างสมการเส้นตรงทั้งเสกลเลขคณิตและเสกล log เพื่อให้สมการเส้นตรงนี้ อธิบายลักษณะแนวโน้มของอัตราตายของทารกที่สัมพันธ์กับเวลาอย่างหยาบ ๆ แล้ววิเคราะห์แบบจำลองสำหรับอนุกรมส่วนเบี่ยงเบนจากแนวโน้มนั้น ซึ่งในที่นี้เรียกสั้น ๆ ว่า ส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารก เพื่ออธิบายอัตราตายของทารกที่กระเพื่อมขึ้นลงต่างไปจากแนวโน้มระยะยาว มีผลกระทบกระเทือนไปเป็นเวลานานเท่าใด ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ แบบจำลองสำหรับส่วนเบี่ยงเบนจากแนวโน้มนี้ จะใช้แบบจำลอง Stationary เนื่องจากสอดคล้องกับทฤษฎีบางประการของ Stationary time series ที่ว่าในกรณีที่ข้อมูลแสดงแนวโน้มในระยะยาวที่สามารถอธิบายได้ด้วยความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์แบบง่าย ๆ แล้ว ส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากแนวโน้มนั้น ถือว่ามี process เป็น Stationary[1] นอกจากนี้จะวิเคราะห์ผลการเลื่อนจุดตั้งต้นของสมการของแนวโน้ม อัตราตายของทารกต่อแบบจำลอง Linear Stationary ของส่วนเบี่ยงเบน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการใช้แบบจำลองที่วิเคราะห์ได้มากยิ่งขึ้น ส่วน Linear Nonstationary

---

1 P. Holgate, "Time series Analysis applied to Wildfowl Counts", Journal of the Royal Statistical Society, XV, No 1 (1956),15

model จะเป็นอีกแบบจำลองหนึ่ง ที่สร้างให้กับอนุกรมอัตราตายของทารกโดยตรง เป็นการลดความยุ่งยากเกี่ยวกับระดับ หรือแนวโน้มของอนุกรมอัตราตายของทารก

๔.๒ แบบจำลองอัตราตายของทารก

จากลักษณะข้อมูลดังกล่าวในตอนที่แล้ว จะเริ่มการวิเคราะห์อัตราตายของทารกในเบื้องแรกด้วยสมการเส้นตรงก่อน

การสร้างสมการเส้นตรงเสกลเลขคณิต โดยวิธี Least Square

ให้ปี ๒๔๘๐ เป็นจุดเริ่มต้น หรือ $t=0$ ในปีนี้ การประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b ในสมการ $Z_t = a + bt$ จะทำได้โดยการ solve normal equations หรือโดยใช้สูตร

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{n\sum tZ_t - \sum t\sum Z_t}{n\sum t^2 - (\sum t)^2} \\ a &= \frac{\sum Z_t}{n} - \frac{b\sum t}{n} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ตารางที่ ๔.๗ แสดงการคำนวณค่าเทอมต่าง ๆ ในสูตร (๑) ซึ่งทำให้หาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$b = \frac{35(28421.8) - (595)(2212.9)}{35(13685) - (595)^2}$$

$$a = \frac{2212.9}{35} - \frac{(-2.57633)595}{35}$$

$$= 107.0232$$

สมการเส้นตรงในที่นี้ คือ

$$\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t \qquad (*)$$

จุดตั้งต้น : ปี ๒๔๘๐ หน่วย t เป็นปี

ตาราง 4.7 แสดงการคำนวนหาค่า a,b

t	Z_t	t^2	tZ_t
0	104.2	0	0
1	91.1	1^2	1 (91.1)
2	101.4	$(2)^2$	2 (101.4)
3	109.8	$(3)^2$	3 (109.8)
4	99.8	$(4)^2$	4 (99.8)
5	94.8	$(5)^2$	5 (94.8)
6	97.4	$(6)^2$	6 (97.4)
7	98.7	$(7)^2$	7 (98.7)
8	105.6	$(8)^2$	8 (105.6)
9	94.6	$(9)^2$	9 (94.6)
10	79.8	$(10)^2$	10 (79.8)
11	68.1	$(11)^2$	11 (63.1)
12	65.9	$(12)^2$	12 (65.9)
13	62.4	$(13)^2$	13 (62.4)
14	65.3	$(14)^2$	14 (65.3)
15	62.8	$(15)^2$	15 (62.8)
16	64.9	$(16)^2$	16 (64.9)
17	63.5	$(17)^2$	17 (63.5)
18	56.1	$(18)^2$	18 (56.1)
19	55.2	$(19)^2$	19 (55.2)
20	61.7	$(20)^2$	20 (61.7)
21	54.1	$(21)^2$	21 (54.1)
22	47.1	$(22)^2$	22 (47.1)
23	48.9	$(23)^2$	23 (48.9)
24	51.0	$(24)^2$	24 (51.0)
25	44.7	$(25)^2$	25 (44.7)
26	37.9	$(26)^2$	26 (37.9)
27	37.8	$(27)^2$	27 (37.8)
28	31.2	$(28)^2$	28 (31.2)
29	33.5	$(29)^2$	29 (33.5)
30	27.9	$(30)^2$	30 (27.9)
31	26.5	$(31)^2$	31 (26.5)
32	26.2	$(32)^2$	32 (26.2)
33	25.5	$(33)^2$	33 (25.5)
34	22.5	(34)	34 (22.5)
595	2212.90	13685	28421.80

โดยมี $\hat{Z}_t$ เป็นค่าประมาณอัตราตายของทารก ที่ขึ้นกับช่วงเวลา t และมี intercept หรือ a = 107.0232 กับ slope คือ b = -2.57633 ดังแสดงค่าที่ได้จากสมการเส้นตรงนี้ ในตารางที่ ๔.๘ และภาพที่ ๔.๔ ถ้าอัตราตายของทารกตั้งแต่ปี ๒๔๘๐ มีแนวโน้มที่จะลดลงในจำนวนที่เป็นไปตามแบบจำลอง (*) แล้ว หมายความว่า เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ๑ ปี อัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี โดยเฉลี่ยแล้ว มีค่าลดลงจากปีที่แล้ว ๒.๕๗๖๓๓ ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน หรือ ในจำนวนเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน จะมีเด็กอายุต่ำกว่า ๑ ปี เสียชีวิตลดลงโดยเฉลี่ย ๒.๕๗๖๓๓ ต่อปี

ในกรณีที่เลื่อนจุดตั้งต้นของสมการเส้นตรงไป เพื่อทำให้ค่าของ $\Sigma t = 0$ แล้ว ค่า a, b จะหาได้จากสูตร ดังนี้

$$a = \frac{\sum Z_t}{n}$$

$$b = \frac{\sum tZ_t}{\sum t^2}$$

จากตาราง ๔.๙ จะคำนวณหาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$a = 63.22571$$

$$b = \frac{-9197.5}{3570} = -2.57633$$

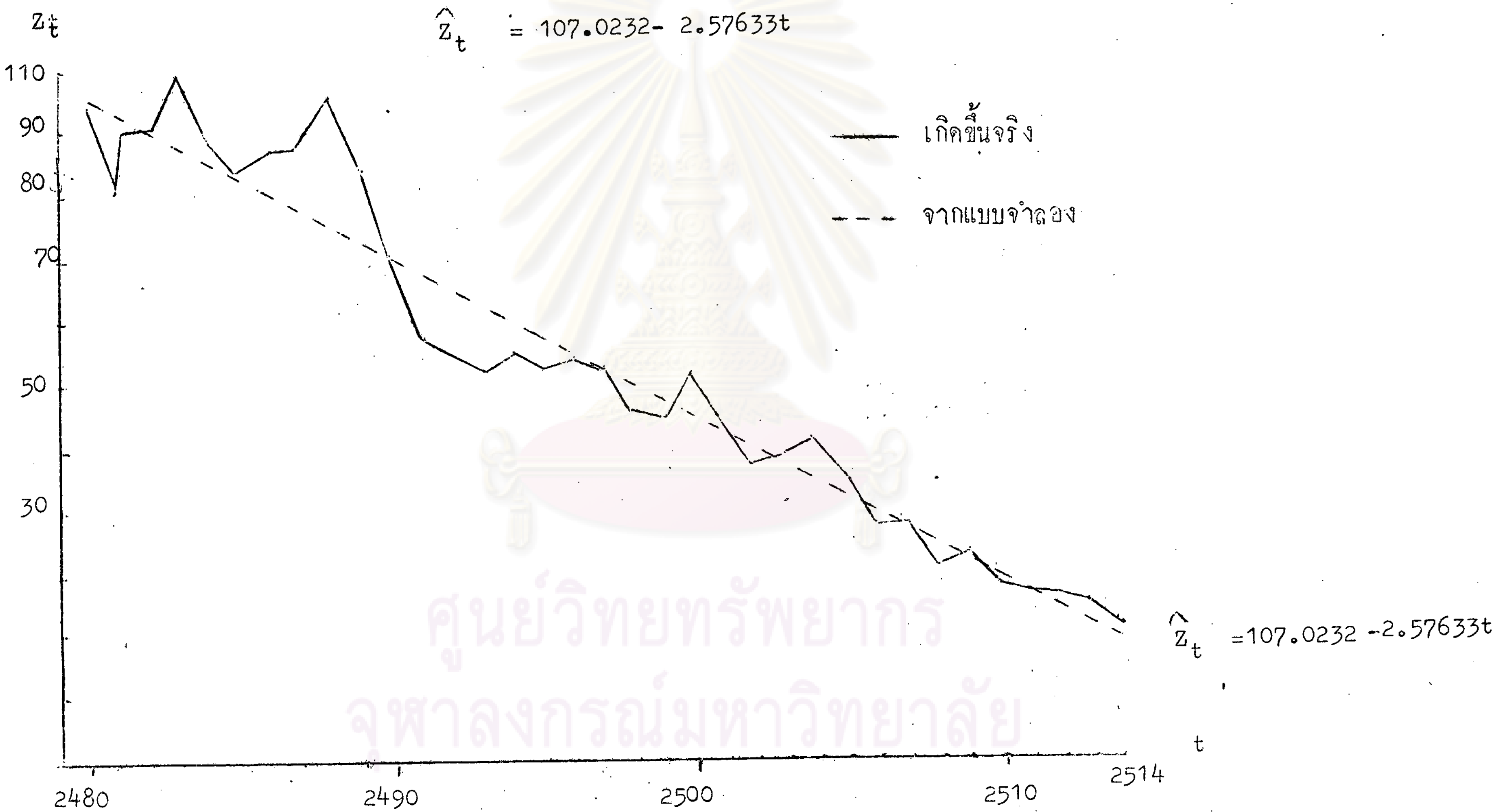
ดังนั้นสมการเส้นตรงของแนวโน้มอัตราตายของทารกเมื่อเลื่อนจุดตั้งต้น เป็นปี พ.ศ. ๒๔๙๗ คือ

$$\hat{Z}_t = 63.22571 - 2.57633t$$

ตาราง 4.8 ความแตกต่างระหว่างอัตราตายของทารกที่เกิดขึ้นจริง เทียบค่าที่ได้จากสมการเส้นตรง $\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$

Z_t	$\hat{Z}_t$	$\tilde{Z}_t = Z_t - \hat{Z}_t$
104.200000	107.023200	-2.82320
91.100000	104.446900	-13.34690
101.400000	101.870600	-.47060
109.800000	99.294300	10.50570
99.800000	96.717900	3.08210
94.800000	94.141600	.65840
97.400000	91.565300	5.83470
98.700000	88.989000	9.71100
105.600000	86.412600	19.18740
94.600000	83.836300	10.76370
79.800000	81.260000	-1.46000
63.100000	78.683700	-15.58370
65.900000	76.107300	-10.20730
62.400000	73.531000	-11.13100
65.300000	70.954700	-5.65470
62.800000	68.378400	-5.57840
64.900000	65.802000	-.90200
63.500000	63.225700	.27430
56.100000	60.649400	-4.54940
55.200000	58.073100	-2.87310
61.700000	55.496700	6.20330
54.100000	52.920400	1.17960
47.100000	50.344100	-3.24410
48.900000	47.767800	1.13220
51.000000	45.191400	5.80860
44.700000	42.615100	2.08490
37.900000	40.038800	-2.13880
37.800000	37.462400	.33760
31.200000	34.886100	-3.68610
33.500000	32.309800	1.19020
27.900000	29.733500	-1.83350
26.500000	27.157100	-.65710
26.200000	24.580800	1.61920
25.500000	22.004500	3.49550
22.500000	19.428200	3.07180

ภาพที่4.4 แผนภาพแสดงอัตราตายทารกที่เกิดขึ้นจริงและจากแบบจำลองโดยเปรียบเทียบ



ตาราง 4.9แสดงการคำนวนหาค่า a,b เมื่อเลื่อนจุดตั้งต้นไปที่ปี2497

ปี	t	Z_{nt}	tZ_t
2480	-17	104.2	(104.2)-17
2481	-16	91.1	(91.1)-16
2482	-15	101.4	(101.4)-15
2483	-14	109.8	(109.8)-14
2484	-13	99.8	(99.8)-13
2485	-12	94.8	(94.8)-12
2486	-11	97.4	(97.4)-11
2487	-10	98.7	(98.7)-10
2488	- 9	105.6	(105.6)- 9
2489	- 8	94.6	(94.6)- 8
2490	- 7	79.8	(79.8)- 7
2491	- 6	63.1	(63.1)- 6
2492	- 5	65.9	(65.9)- 5
2493	- 4	62.4	(62.4)- 4
2494	- 3	65.3	(65.3)- 3
2495	- 2	62.8	(62.8)- 2
2496	- 1	64.9	(64.9)- 1
2497	0	63.5	(63.5) 0
2498	1	56.1	(56.1) 1
2499	2	55.2	(55.2) 2
2500	3	61.7	(61.7) 3
2501	4	54.1	(54.1) 4
2502	5	47.1	(47.1) 5
2503	6	48.9	(48.9) 6
2504	7	51.0	(51.0) 7
2505	8	44.7	(44.7) 8
2506	9	37.9	(37.9) 9
2507	10	37.8	(37.8) 10
2508	11	31.2	(31.2) 11
2509	12	33.5	(33.5) 12
2510	13	27.9	(27.9) 13
2511	14	26.5	(26.5) 14
2512	15	26.2	(26.2) 15
2513	16	25.5	(25.5) 16
2514	17	22.5	(22.5) 17

โดยสรุปแล้ว สมการเส้นตรงสำหรับแนวโน้มอัตราตายของทารกที่มีรูปที่ง่ายที่สุด คือ

$$\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$$

จุดตั้งต้น : พ.ศ. ๒๔๘๐ หน่วย t : ๑ ปี

และ $\hat{Z}_t = 63.22571 - 2.57633t$

จุดตั้งต้น : พ.ศ. ๒๔๙๗ หน่วย t: ๑ ปี

การสร้างสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิตนั้น เป็นการศึกษาแนวโน้มระยะยาวอย่างง่ายที่สุด และให้ผลการวิเคราะห์อย่างหยาบ ๆ ถ้าปัจจัยที่มีอิทธิพลทำให้อัตราตายของทารกเปลี่ยนแปลงยังอยู่ในสภาพที่คงเดิม หรือไม่ต่างไปมากนัก สมการเส้นตรงที่ขึ้นกับเวลาดังกล่าว จะนำมาอธิบายภาพจำลองของแนวโน้มระยะยาวได้ แต่ในการนำสมการเส้นตรงที่ขึ้นกับเวลามาใช้พยากรณ์ค่าอัตราตายของทารกในอนาคต จะเห็นว่าในเวลาไม่ช้านัก อัตราตายของทารกจะมีค่าเป็น ๐ ซึ่งผลการวิเคราะห์ดังกล่าว เป็นการขัดกับความจริงเป็นอย่างยิ่ง เพราะอัตราตายของทารกจะไม่มีโอกาสเป็นศูนย์ได้เลยตามสภาพทางชีวภาพ นอกจากนี้เป็นที่น่าสังเกตว่า ยังเกิดส่วนเบี่ยงเบนจากสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิตของแนวโน้มอัตราตายของทารก การวิเคราะห์ในขั้นต่อไป จึงเป็นการวิเคราะห์ส่วนเบี่ยงเบนนี้ด้วย แบบจำลอง Stationary

๔.๒.๑ แบบจำลอง Stationary ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกจากเส้นตรงสเกลเลขคณิต

ส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกในที่นี้ เป็นส่วนที่เบนไปจากสมการเส้นตรง

$\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$ ซึ่งเป็นสมการคณิตศาสตร์ ที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกกับเวลา ในรูปสมการที่ง่ายที่สุด จากข้อเท็จจริงนี้ ส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารก จึงควรมีลักษณะเป็น Stationary process และสามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง Stationary

การวิเคราะห์แบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกจะวิเคราะห์โดยอาศัยทฤษฎีบางประการของ Stationary time series และจากลักษณะข้อมูลเบื้องต้นที่ดูจากการแจกแจงร่วมของอัตราตายของทารกที่ต่างเวลากัน ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ ๔.๑.๒ จึงสมควรนำ Linear Stationary model มาพิจารณาเป็นแบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารก โดยให้ $\tilde{Z}_t$ เป็นส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกที่เบนไปจากแนวโน้มในปีที่ t

<u>การสร้างแบบจำลอง Linear Stationary</u>

โครงสร้างของส่วนเบี่ยงเบนจากสมการเส้นตรง $\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$ สามารถจะศึกษาจากลักษณะของ autocorrelation function ในช่วงเวลาที่ต่าง ๆ กัน หรือเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าเบี่ยงเบนในอนุกรมค่าเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกกับค่าข้างเคียง เช่น เมื่อช่วงเวลาห่าง ๑ ปี autocorrelation function ที่ lag 1 จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเบี่ยงเบนในแต่ละปีกับค่าถัดมา ๑ ปี เพื่อใช้ค่าในปีที่ล่วงมาแล้วมาพยากรณ์ค่าในปีปัจจุบัน

ค่า autocorrelation function จะประมาณจากสูตร

$$r_k = \frac{c_k}{c_o}$$

เมื่อ $$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t-1}^{N-k} (\tilde{Z}_t - \bar{\tilde{Z}})(\tilde{Z}_{t+k} - \bar{\tilde{Z}})$$

ดังนั้น ในกรณีที่ $k = 0$ autocorrelation function r_k มีค่าเป็น ๑ เสมอ

ให้ r_k เป็น autocorrelation function ที่ lag k

$\tilde{Z}_t$ เป็น ส่วนเบี่ยงเบนอัตราภาษีทารกในปีที่ t

$\bar{\tilde{Z}}_t$ เป็น ค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนทั้งหมด

$\tilde{Z}_{t+k}$ เป็น ส่วนเบี่ยงเบนในปีที่ห่างจากปีที่ t ไป k ปี

k เป็น จำนวนปีที่ห่างจาก t

N เป็น จำนวนค่าสังเกต ซึ่งในที่นี้เท่ากับ 35

ค่า k ที่มากที่สุด ซึ่งจะช่วยในการดูลักษณะของ autocorrelation function คือ 20[1] ดังนั้นในทางปฏิบัติมักใช้ 20 ค่าแรกของ r_k มาเขียนแผนภาพ

การคำนวณค่า autocorrelation function $r_k = \frac{C_k}{C_o}$ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots\ldots 20$ ในทางปฏิบัติจะหาค่า C_k ใน lag k ต่าง ๆ ก่อน แล้วจึงหารด้วย C_o โดยใช้สูตร

$$C_o = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{35} (\tilde{Z}_t - \bar{\tilde{Z}})^2$$

$$C_1 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{34} (\tilde{Z}_t - \bar{\tilde{Z}})(\tilde{Z}_{t+1} - \bar{\tilde{Z}})$$

$$C_2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{33} (\tilde{Z}_t - \bar{\tilde{Z}})(\tilde{Z}_{t+2} - \bar{\tilde{Z}})$$

$$\vdots$$

$$C_{20} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{15} (\tilde{Z}_t - \bar{\tilde{Z}})(\tilde{Z}_{t+20} - \bar{\tilde{Z}})$$

ตัวอย่างการคำนวณหาค่า C_k เมื่อ k = 1 ได้แสดงไว้ในตารางที่ ๔.๑๐ การคำนวณ C_k ต้องคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ ซึ่งใช้เวลาในการเขียนโปรแกรมมากพอสมควร และได้เสนอโปรแกรมไว้ในภาคผนวก

---

1 Box and Jenkins, Time Series Analysis forecasting and control, ("Holden-day") P.175

ตาราง 4.10 แสดงการคำนวนหาค่า c_k เมื่อ $k=0,1$

$\tilde{Z}_t$	$(\tilde{Z}_t - \bar{\bar{Z}})^2$	$(\tilde{Z}_t - \bar{\bar{Z}})(\tilde{Z}_{t+1} - \bar{\bar{Z}})$
- 282320	$(-282320 - .00001)^2$	$(-282320 - .00001)(-1334690 - .00001)$
-1334690	$(-1334690 - .00001)^2$	$(-1334690 - .00001)(-.47060 - .00001)$
-.47060	$(-.47060 - .00001)^2$	$(-.47060 - .00001)(10.50570 - .00001)$
10.50570	$(10.50570 - .00001)^2$	$(10.50570 - .00001)(3.08210 - .00001)$
3.08210	$(3.08210 - .00001)^2$	$(3.08210 - .00001)(.65840 - .00001)$
.65840	$(.65840 - .00001)^2$	$(.65840 - .00001)(5.83470 - .00001)$
5.83470	$(5.83470 - .00001)^2$	$(5.83470 - .00001)(9.71100 - .00001)$
9.71100	$(9.71100 - .00001)^2$	$(9.71100 - .00001)(19.18740 - .00001)$
19.18740	$(19.18740 - .00001)^2$	$(19.18740 - .00001)(10.76370 - .00001)$
10.76370	$(10.76370 - .00001)^2$	$(10.76370 - .00001)(-1.46000 - .00001)$
-1.46000	$(-1.46000 - .00001)^2$	$(-1.46000 - .00001)(-15.58370 - .00001)$
-15.58370	$(-15.58370 - .00001)^2$	$(-15.58370 - .00001)(-10.20730 - .00001)$
-10.20730	$(-10.20730 - .00001)^2$	$(-10.20730 - .00001)(-11.13100 - .00001)$
-11.13100	$(-11.13100 - .00001)^2$	$(-11.13100 - .00001)(-5.65470 - .00001)$
-5.65470	$(-5.65470 - .00001)^2$	$(-5.65470 - .00001)(-5.57840 - .00001)$
-5.57840	$(-5.57840 - .00001)^2$	$(-5.57840 - .00001)(-.90200 - .00001)$
-.90200	$(-.90200 - .00001)^2$	$(-.90200 - .00001)(.27430 - .00001)$
.27430	$(.27430 - .00001)^2$	$(.27430 - .00001)(-4.54940 - .00001)$
-4.54940	$(-4.54940 - .00001)^2$	$(-4.54940 - .00001)(-2.87310 - .00001)$
-2.87310	$(-2.87310 - .00001)^2$	$(-2.87310 - .00001)(6.20330 - .00001)$
6.20330	$(6.20330 - .00001)^2$	$(6.20330 - .00001)(1.17960 - .00001)$
1.17960	$(1.17960 - .00001)^2$	$(1.17960 - .00001)(-3.24410 - .00001)$
-3.24410	$(-3.24410 - .00001)^2$	$(-3.24410 - .00001)(1.13220 - .00001)$
1.13220	$(1.13220 - .00001)^2$	$(1.13220 - .00001)(5.80860 - .00001)$
5.80860	$(5.80860 - .00001)^2$	$(5.80860 - .00001)(2.08490 - .00001)$
2.08490	$(2.08490 - .00001)^2$	$(2.08490 - .00001)(-2.13880 - .00001)$
-2.13880	$(-2.13880 - .00001)^2$	$(-2.13880 - .00001)(.33760 - .00001)$
.33760	$(.33760 - .00001)^2$	$(.33760 - .00001)(-3.68610 - .00001)$
-3.68610	$(-3.68610 - .00001)^2$	$(-3.68610 - .00001)(1.19020 - .00001)$
1.19020	$(1.19020 - .00001)^2$	$(1.19020 - .00001)(-1.83350 - .00001)$
-1.83350	$(-1.83350 - .00001)^2$	$(-1.83350 - .00001)(-.65710 - .00001)$
-.65710	$(-.65710 - .00001)^2$	$(-.65710 - .00001)(1.61920 - .00001)$
1.61920	$(1.61920 - .00001)^2$	$(1.61920 - .00001)(3.49550 - .00001)$
3.49550	$(3.49550 - .00001)^2$	$(3.49550 - .00001)(3.07180 - .00001)$
3.07180	$(3.07180 - .00001)^2$	

ค่า c_k ที่ได้จากการคำนวณ คือ

$$c_o = \frac{1622.51285}{35} = 46.35751$$

$$c_1 = \frac{921.82630}{35} = 26.33789$$

$$r_1 = \frac{26.33789}{46.35751} = .56815$$

ในทำนองเดียวกัน ค่า r_k จะคำนวณจาก c_k ใน log เดียวกันแล้วหารด้วยค่าคงที่ $c_o = 46.35751$ ซึ่งรวบรวมผลการคำนวณ r_k ไว้ในตารางที่ ๔.๑๑

จะเห็นว่าค่า r_k จากการคำนวณในตารางที่ ๔.๑๑ เมื่อ $k = 1$ ค่า autocorrelation function เป็น 0.56815 แสดงถึง ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเบี่ยงเบนในปีหนึ่งกับปีถัดไป ๑ ปี สูง แต่แสดงค่าน้อยลงเมื่อ k มีค่าเป็น 2 ซึ่งมีค่าเพียง .09991 และมีค่าน้อยมากจนใกล้ 0 เมื่อ k = 3 แต่เมื่อ k = 4 ค่า r_k เป็นลบ จนเมื่อ k = 19 ค่า r_k กลับเป็นบวกอีก ลักษณะของ autocorrelation function จะเห็นได้ชัดเจนยิ่งขึ้นด้วยการนำค่า r_k ในตารางที่ ๔.๑๑ มาเขียนแผนภาพ โดยให้แกนนอนเป็นค่า **k** แกนตั้งเป็นค่า r_k ที่คำนวณได้จากตารางที่ ๔.๑๑ ดังแสดงในภาพที่ ๔.๕

เมื่อพิจารณาค่า autocorrelation function ตั้งแต่ k = 1 จนถึง k = 20 จะเห็นว่ามีลักษณะเป็น damped sine wave ลักษณะดังกล่าวสอดคล้องกับลักษณะของ autocorrelation function ของ AUTOREGRESSIVE MODEL ORDER p (AR (p) process) ที่มีรากสมการ characteristic $\phi(B) = 1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ เป็น complex หรือเมื่อ $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$

ดังนั้นค่าเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกที่ต่างไปจากแนวโน้มเส้นตรง $\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$ มีลักษณะที่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER p

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \cdots\cdots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p}$$

ตาราง 4.11 ค่า autocorrelation function r_k ใน lag 1 ถึง 20

k (1)	$\sum(\tilde{Z}_t - Z)(Z_{t+k} - Z)$ (2)	$c_k = (2)/35$ (3)	$r_k = c_k/46.35751$ (4)
0	1622.51285	46.35751	1
1	921.82630	26.33789	.56815
2	162.11170	4.63176	.09991
3	-132.34900	-3.78140	-.08157
4	-155.03310	-4.42952	-.09555
5	-286.15730	-8.17592	-.17637
6	-413.55310	-11.81580	-.25488
7	-570.90380	-16.31153	-.35186
8	-516.21750	-14.74907	-.31816
9	-298.57480	-8.53071	-.18402
10	-73.57025	-2.10201	-.04534
11	38.61277	1.10322	.02380
12	129.00450	3.68584	.07951
13	80.16327	2.29038	.04941
14	69.82840	1.99510	.04304
15	82.39551	2.35416	.05078
16	138.49330	3.95695	.08536
17	265.54640	7.58704	.16366
18	49.58170	1.41662	.03056
19	-165.19230	-4.71978	-.10181
20	-127.56630	-3.64475	-.07862

ภาพที่ 4.5 แสดงแผนภาพของ autocorrelation function r_k ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารกที่เบนจากเส้นตรง $\hat{Z}_t = 107.0232-2.57633t$

ในขั้นต่อไปจะเป็นการหา order หรือค่า p ของ AUTOREGRESSIVE MODEL ของอนุกรมอัตราตายของทารกในส่วนที่เบี่ยงเบนจากแนวโน้ม ซึ่งพิจารณาจากค่าประมาณของ partial autocorrelation ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง lag k กับ k ค่านี้จะประมาณจากสูตร

$$
(*)(*)\quad
\begin{cases}
\hat{\phi}_{kk} = r_1 , & k = 1 \\[2ex]
\hat{\phi}_{kk} = \dfrac{r_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\, r_{k-j}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\, r_j} , & k = 2,3,\ldots,K
\end{cases}
$$

ซึ่ง $\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\, \hat{\phi}_{k-1,k-j}$, $j = 1,2,\ldots, k-1$

โดย $\hat{\phi}_{kk}$ เป็นค่า partial autocorrelation function โดยประมาณที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกที่ lag k กับอัตราตายของทารกที่ lag k นั่นเอง

$\hat{\phi}_{kj}$ เป็นค่าประมาณของ partial autocorrelation function ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราตายของทารกที่ lag k กับ lag j

r_k เป็นค่า autocorrelation function ที่ lag k โดยประมาณ

การดูลักษณะของ partial autocorrelation function $\hat{\phi}_{kk}$ จะดูความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{\phi}_{kk}$ กับ k เพียง 20 ค่าแรก ในทำนองเดียวกัน การดูลักษณะ autocorrelation function เพื่อเป็นแนวทางในการหาค่า p หรือ ORDER

การคำนวณค่า partial autocorrelation function คำนวณโดย

นำค่า $\hat{\phi}_{11} = r_1$ ไปแทนค่าในสูตร

จะได้ $\hat{\phi}_{22} = \dfrac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$

และ $\hat{\phi}_{2,1}$ ซึ่งจำเป็นสำหรับการคำนวณหา ϕ_{33} มีค่าเท่ากับ

$$\hat{\phi}_{2,1} = \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22}\hat{\phi}_{11} = r_1 - \phi_{22} r_1$$

ซึ่ง
$$\hat{\phi}_{33} = \frac{r_3 - (\hat{\phi}_{2,1} r_2 + \hat{\phi}_{22} r_1)}{1 - (\hat{\phi}_{2,1} r_1 + \hat{\phi}_{22} r_2)}$$

จากค่า $\hat{\phi}_{33}$ จะใช้หาค่า $\hat{\phi}_{31}$, $\hat{\phi}_{32}$ เพื่อหาค่า ϕ_{44} ต่อไป

$$\hat{\phi}_{3,1} = \hat{\phi}_{2,1} - \phi_{33}\phi_{22}$$
$$\hat{\phi}_{3,2} = \phi_{2,2} - \phi_{33}\phi_{2,1}$$

การคำนวณค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ดังกล่าวจะดำเนินวนเวียนไปในลักษณะเช่นนี้ จนถึงค่า kk = 20,20 ยิ่ง kk มีค่าสูงขึ้น ย่อมต้องอาศัยค่า $\hat{\phi}_{kj}$ หลายค่ามากขึ้นด้วย ดังนั้น ในการคำนวณหาค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ใน lag k ต่าง ๆ จึงกระทำโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งโปรแกรมการหาค่า $\hat{\phi}_{kk}$ เป็นสิ่งสำคัญมากในการวิเคราะห์อนุกรมด้วย Linear Stationary Model โปรแกรมนี้ได้แสดงไว้ในภาคผนวกเช่นกัน และเมื่อนำค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ที่คำนวณได้ในตารางที่ ๔.๑๒ มาเขียนแผนภาพจะเห็นลักษณะ partial autocorrelation function ของอนุกรมส่วนเบี่ยงเบนอย่างชัดเจนในภาพที่ ๔.๖ ว่ามีลักษณะเป็นแบบ cuts off หลัง lag 2 ค่า p หรือ ORDER จึงควรเป็น 2

เพื่อเป็นการสรุปค่าของ r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ที่คำนวณได้ พร้อมทั้งแผนภาพที่จำเป็นในการพิจารณาแบบจำลอง Stationary ให้กับส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารก จึงนำค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ มารวมไว้ในตารางที่ ๔.๑๓ และภาพที่ ๔.๕,๔.๖ ซึ่งแสดงถึงลักษณะของแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ที่มีORDER เป็น 2 นั่นคือ มีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t = \hat{\phi}_1 \tilde{Z}_{t-1} + \hat{\phi}_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

ตาราง 4.12แสดงการคำนวณค่า $\hat{\phi}_{kk}$

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
0		1	
1		.56815	
2		-.329112	
2	1		.755131
3		.049623	
3	1		.771462
3	2		-.366583
4		-.040157	
4	1		.773455
4	2		-.381304
4	3		.080602
5		-.197546	
5	1		.765522
5	2		-.365382
5	3		.005277
5	4		.112636
6		-.092351	
6	1		.747279
6	2		-.354979
6	3		.005765
6	4		.078893
6	5		-.126849
7		-.265046	
7	1		.722801
7	2		-.388600
7	3		.026675
7	4		.080421
7	5		-.220934
7	6		.105712
8		-.053477	
8	1		.708628
8	2		-.382947
8	3		.014860
8	4		.084721
8	5		-.219508
8	6		.084931
8	7		-.226393
9		-.067058	

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
9	1		.705042
9	2		-.398129
9	3		.020555
9	4		.070001
9	5		-.213827
9	6		.085927
9	7		-.252073
9	8		-.005957
10		-.054013	
10	1		.701420
10	2		-.398450
10	3		.006940
10	4		.074643
10	5		-.225376
10	6		.089708
10	7		-.250962
10	8		-.027461
10	9		-.028977
11		-.044583	
11	1		.699012
11	2		-.399742
11	3		.005716
11	4		.063454
11	5		-.221377
11	6		.079660
11	7		-.247635
11	8		-.027152
11	9		-.046741
11	10		-.022741
12		-.026758	
12	1		.697819
12	2		-.400351
12	3		.004465
12	4		.062727
12	5		-.228003
12	6		.081792
12	7		-.253558
12	8		-.025454
12	9		-.046588

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
12	10		-.033438
12	11		-.025879
13		-.165579	
13	1		.693388
13	2		-.404636
13	3		-.001071
13	4		.055013
13	5		-.232218
13	6		.039808
13	7		-.240015
13	8		-.063207
13	9		-.036202
13	10		-.032698
13	11		-.092169
13	12		.088786
14		-.037118	
14	1		.687242
14	2		-.401340
14	3		-.004492
14	4		.053800
14	5		-.233561
14	6		.037462
14	7		-.248924
14	8		-.061729
14	9		-.044821
14	10		-.030656
14	11		-.092208
14	12		.073767
14	13		-.139842
15		-.096069	
15	1		.683677
15	2		-.414774
15	3		.002594
15	4		.044941
15	5		-.236506
15	6		.033156
15	7		-.254854
15	8		-.085643

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
15	9		-.041222
15	10		-.053094
15	11		-.087040
15	12		.073335
15	13		-.178398
15	14		.028904
16		-.002898	
16	1		.683398
16	2		-.414691
16	3		.002077
16	4		.045154
16	5		-.236759
16	6		.033002
16	7		-.254974
16	8		-.085891
16	9		-.041961
16	10		-.052998
16	11		-.087725
16	12		.073465
16	13		-.178391
16	14		.027702
16	15		-.094087
17		.137545	
17	1		.683797
17	2		-.401750
17	3		-.001733
17	4		.069691
17	5		-.246863
17	6		.045068
17	7		-.247684
17	8		-.080120
17	9		-.030147
17	10		-.017928
17	11		-.092265
17	12		.106030
17	13		-.184601
17	14		.027417
17	15		-.037049
17	16		-.096896

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
18		-.316671	
18	1		.727353
18	2		-.432434
18	3		-.013465
18	4		.078373
18	5		-.305321
18	6		.078645
18	7		-.276902
18	8		-.085797
18	9		-.039694
18	10		-.043299
18	11		-.170699
18	12		.120302
18	13		-.262776
18	14		.049486
18	15		-.037598
18	16		-.224119
18	17		.354084
19		.044514	
19	1		.741450
19	2		-.448195
19	3		-.003489
19	4		.080046
19	5		-.307524
19	6		.090342
19	7		-.282257
19	8		-.078198
19	9		-.037767
19	10		-.041532
19	11		-.166880
19	12		.132628
19	13		-.266276
19	14		.063077
19	15		-.041086
19	16		-.223519
19	17		.373333
19	18		-.349049
20		-.043714	

ตาราง 4.13 สรุป r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของส่วนเบี่ยงเบน
อัตราตายทารกที่เบนจากสมการ $\hat{Z}_t = 107.0232-2.57633t$

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1	1
1	.56815	.56815
2	.09991	-.329112
3	-.08157	.049623
4	-.09555	-.040157
5	-.17637	-.197546
6	-.25488	-.092351
7	-.35186	-.265046
8	-.31816	-.053477
9	-.18402	-.067058
10	-.04534	-.054013
11	.02380	-.044583
12	.07951	-.026758
13	.04941	-.165579
14	.04304	-.037118
15	.05078	-.096069
16	.08536	-.002898
17	.16366	.137545
18	.03056	-.316671
19	-.10181	.044514
20	-.07862	-.043714

ภาพที่ 4.6 แสดงแผนภาพของ partial autocorrelation function $\hat{\phi}_{kk}$ ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารกที่เบนจากเส้นตรง

$$\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$$

จะเห็นได้ว่า การพิจารณาเลือกแบบจำลอง Linear Stationary จะอาศัยการดูลักษณะ Autocorrelation function พร้อมไปกับลักษณะของ partial autocorrelation function เสมอ และค่าของ partial autocorrelation function ยังมีประโยชน์ในการประมาณค่า พารามิเตอร์ โดยอาศัยวิธีของ Yule-Walker

วิธีการพิจารณาแบบจำลองดังกล่าว จะใช้ในการพิจารณาแบบจำลอง Linear Stationary สำหรับส่วนเบี่ยงเบนจากสมการเส้นตรงสเกล log ที่จะทำการวิเคราะห์ต่อไปด้วย

การคำนวณหาค่า Partial autocorrelation function ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ตั้งแต่ kk มีค่า = 1,1 จนถึง 20,20 ตามลำดับ ได้แสดงอย่างละเอียดไว้ในตารางที่ ๔.๑๒ โดยการนำค่า r_k ที่คำนวณได้ในตารางที่ ๔.๑๑ มาใช้ เช่น การหาค่า $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{22}$, $\hat{\phi}_{33}$
แทนค่าตามสูตร ที่ (*)(*) ได้

$$\hat{\phi}_{11} = .56815$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{.09991 - .56815^2}{1 - .56815^2} = -.329112$$

$$\hat{\phi}_{2,1} = .56815 - (-.329112)(.56815) = .755131$$

$$\hat{\phi}_{33} = \frac{-.08157 - [.755131(.09991)+(-.329112)(.56815)]}{1 - [.755131(.56815)+(-.329112)(.09991)]}$$

$$= .049623$$ ใช้หาค่า $\hat{\phi}_{3,1}$ และ $\hat{\phi}_{3,2}$

$$\hat{\phi}_{3,1} = .755131 - (.049623)(-.329112) = .771462$$

$$\hat{\phi}_{3,2} = -.329112 - .049623(.755131) = -.366583$$

$$\hat{\phi}_{20\ 20} = -.043712$$

การพิจารณาลักษณะของ partial autocorrelation function กระทำโดยการพิจารณา ค่า $\hat{\phi}_{11}$ จนถึง $\hat{\phi}_{20\ 20}$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ ๔.๑๓ จะเห็นได้ว่า ค่า $\hat{\phi}_{11}$ มีค่ามากที่สุดคือ .56815 ส่วนค่า $\hat{\phi}_{22}$ มีค่าสูงเป็นที่ 2 ส่วน $\hat{\phi}_{kk}$ ใน lag ที่ k มากกว่า 2 เป็นต้นไป มีค่าน้อยมากเกือบถึง 0

<u>การประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยวิธี Yule-Walker</u>

ซึ่งประมาณค่า $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ จาก

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2} = \frac{.56815(1 - .09991)}{1 - .56815^2} = .755131$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{.09991 - .56815^2}{1 - .56815^2} = -.329112$$

ดังนั้นแบบจำลอง Linear Stationary ที่เหมาะกับส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารกจากสมการเส้นตรงเสกลเลขคณิตนี้ จึงมีลักษณะแบบ AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER 2 ที่มีรูปเป็น

$$\tilde{Z}_t = .755131\ \tilde{Z}_{t-1} - .329112\ \tilde{Z}_{t-2}$$

<u>การทดสอบความเป็น Stationary ของอนุกรมส่วนเบี่ยงเบนที่ได้จากสมการ AUTOREGRESSIVE ORDER 2 $\tilde{Z}_t = .755131\tilde{Z}_{t-1} - .329112\tilde{Z}_{t-2}$</u>

เนื่องจากลักษณะของ autocorrelation function เป็น damped sine wave แสดงว่า process ที่ได้จาก AUTOREGRESSIVE MODEL ที่มี ORDER 2 เป็น Stationary ก็ต่อเมื่อ รากของสมการ characteristic $1 - .755131B + .329112B^2 = 0$ เป็น complex หรือเมื่อ $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$

โดยอาศัยค่า $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ ที่ได้จากแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ORDER 2

$\tilde{Z}_t = .755131\tilde{Z}_{t-1} - .329112\tilde{Z}_{t-2}$ ได้

$$(.755131)^2 + 4(-.329112) = -.746225 < 0$$

ดังนั้น อนุกรมอัตราตายของทารกเป็นส่วนเบี่ยงเบน เป็นอนุกรมที่ได้จาก LINEAR STATIONARY AUTOREGRESSIVE MODEL ที่มี ORDER เป็น 2 และมีรูปสมการ เป็น

$$\tilde{Z}'_t = .755131\ \tilde{Z}_{t-1} - .329112\ \tilde{Z}_{t-2}$$

แสดงว่า ค่าเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกจากสมการเส้นตรงเสกลเลขคณิตในปีปัจจุบันมีความสัมพันธ์กับค่าที่ล่วงมาแล้ว ๑ ปี ด้วยน้ำหนัก .755131 และสัมพันธ์กับค่าที่ล่วงมาแล้ว 2 ปี ด้วย น้ำหนัก -.329112

<u>การทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองส่วนเบี่ยงเบน</u>

การทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองมีหลายวิธี วิธีที่ดีวิธีหนึ่งคือ การใช้ค่าสถิติ Q ซึ่งมีการแจกแจงแบบ approximate chi Square ด้วย degree of freedom K - p - q[1]

$$Q = n \sum_{k=1}^{20} r_k^2 (\hat{a})$$

โดย Q เป็นค่าสถิติที่คำนวณได้

n = N - d ซึ่งเป็นจำนวนค่าสังเกตที่ใช้ในการสร้างแบบจำลอง ในที่นี้มีค่า n เท่ากับ 35

k เป็นค่า lag ในที่นี้มีค่าตั้งแต่ 1,2,3....,20 ดังนั้น K ซึ่งเป็นค่าที่มากที่สุดของ k จึงมีค่าเท่ากับ 20

$r_k(\hat{a})$ เป็นค่า autocorrelation function ของค่าผิดพลาด (error term)

p,q เป็น ORDER ของแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE และ MOVING AVERAGE ที่นำมาทดสอบตามลำดับ

---

1 Box and Jenkins, <u>Time Series Analysis forecasting and control</u> ("Holden - day") P. 29

โดยใช้ค่าผิดพลาดในตารางที่ ๔.๑๔ มาคำนวณค่า autocorrelation function ของค่าผิดพลาด $r_k(\hat{a})$ ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ 20 ค่าแรก ดังแสดงในตารางที่ ๔.๑๕ จะหาค่า Q ได้ดังนี้

$$Q = 35\left[.09044^2 + .06507^2 + \ldots + (-.10121)^2\right]$$

$$= 35(.17914)$$

$$= 6.26990$$

ค่า Q นี้จะนำไปเทียบกับค่า $\chi^2_{(.05)}$ ที่มี degree of freedom

$$= 20 - 2 - 0 = 18$$

จากตาราง χ^2 $\chi^2_{.05(18)} = 28.87$

$$Q < \chi^2_{.05(18)}$$

ผลการทดสอบ สนับสนุนสมมติฐานที่ว่า แบบจำลองส่วนเบี่ยงเบน $\tilde{Z}_t = .755131\tilde{Z}_{t-1} - .329112\tilde{Z}_{t-2}$ เป็นแบบจำลองที่เหมาะกับข้อมูล

ถ้าพิจารณาวิเคราะห์แบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกที่เบนไปจากสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิต โดยเลื่อนจุดตั้งต้นจากปี ๒๔๘๐ ไปยังปี ๒๔๙๗ ซึ่งมีรูปสมการเป็น $\hat{Z}_t = 63.22571 - 2.57633t$ โดยใช้ autocorrelation function และ partial autocorrelation function จะพบว่ามีค่าและลักษณะเหมือนเดิม คือ เหมือนกับค่าและลักษณะ autocorrelation function กับ partial autocorrelation function ของส่วนเบี่ยงเบนจากสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิตที่มีจุดตั้งต้น ปี ๒๔๘๐ ดังแสดงในตารางที่ ๔.๑๖ ซึ่งสรุปได้ว่า แม้จะเปลี่ยนจุดตั้งต้นจากปี ๒๔๘๐ เป็น ๒๔๙๗ ก็ไม่ทำให้แบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ส่วนเบี่ยงเบนเปลี่ยนไป นั่นคือ ยังคงเป็น LINEAR STATIONARY AUTOREGRESSIVE MODEL ที่มี ORDER เป็น 2 และ มีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t = .755131\tilde{Z}_{t-1} - .329112\tilde{Z}_{t-2}$$

ตาราง 4.14 ค่าส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกที่เกิดขึ้นจริง เทียบกับที่ได้จากแบบจำลอง $\tilde{z}'_t = .755131\tilde{z}_{t-1} - .329112\tilde{z}_{t-2}$ แสดงค่าผิดพลาด $\hat{a}_t$

$\tilde{z}_t$	$\tilde{z}'_t$	$\hat{a}_t = \tilde{z}_t - \tilde{z}'_t$
-.47060	-9.14951	8.67891
10.50570	4.03726	6.46844
3.08210	8.08806	-5.00596
.65840	-1.13016	1.78856
5.83470	-.51718	6.35188
9.71100	4.18928	5.52173
19.18740	5.41281	13.77460
10.76370	11.29300	-.52930
-1.46000	1.81320	-3.27320
-15.58370	-4.64495	-10.93875
-10.20730	-11.28723	1.07993
-11.13100	-2.57907	-8.55194
-5.65470	-5.04602	-.60868
-5.57840	-.60669	-4.97171
-.90200	-2.35139	1.44939
.27430	1.15479	-.88049
-4.54940	.50399	-5.05339
-2.87310	-3.52567	.65257
6.20330	-.67230	6.87560
1.17960	5.62988	-4.45028
-3.24410	-1.15083	-2.09327
1.13220	-2.83794	3.97014
5.80860	1.92263	3.88597
2.08490	4.01363	-1.92873
-2.13880	-.33731	-1.80149
.33760	-2.30124	2.63884
-3.68610	.95884	-4.64494
1.19020	-2.89460	4.08480
-1.83350	2.11190	-3.94540
-.65710	-1.77624	1.11914
1.61920	.10723	1.51197
3.49550	1.43897	2.05653
3.07180	2.10666	.96514

ตาราง 4.15 แสดงการคำนวณค่า autocorrelation function

ของค่าผิดพลาด $\hat{a}_t$

k (1)	$\sum(a_t - \bar{a})(a_{t+k} - \bar{a})$ (2)	$c_k = (2)/33$ (3)	$r_k = c_k/25.29423$ (4)
0	834.70959	25.29423	1
1	75.48722	2.28749	.09044
2	54.31066	1.64578	.06507
3	-52.84333	-1.60131	-.06331
4	79.99226	2.42401	.09583
5	-66.51833	-2.01571	-.07969
6	32.61801	.98842	.03908
7	-54.63766	-1.65569	-.06546
8	-105.35890	-3.19269	-.12622
9	-125.29760	-3.79690	-.15011
10	-125.01090	-3.78821	-.14977
11	-67.17202	-2.03552	-.08047
12	17.13595	.51927	.02053
13	-67.86099	-2.05639	-.08130
14	-24.64454	-.74680	-.02952
15	67.28847	2.03904	.08061
16	-85.05584	-2.57745	-.10190
17	160.40050	4.86062	.19216
18	-11.49791	-.34842	-.01377
19	-36.00016	-1.09091	-.04313
20	-84.47739	-2.55992	-.10121

ตาราง 4.16 สรุปค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ เมื่อเลื่อนจุดตั้งต้น

คือสมการเส้นตรง $\hat{Z}_t = 63.22571 - 2.576330t$

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1.	1
1	.56815	.56815
2	.09991	-.329112
3	-.08157	.049623
4	-.09555	-.040157
5	-.17637	-.197546
6	-.25488	-.092351
7	-.35186	-.265046
8	-.31816	-.053477
9	-.18402	-.067058
10	-.04534	-.054013
11	.02380	-.044583
12	.07951	-.026758
13	.04941	-.165579
14	.04304	-.037118
15	.05078	-.096069
16	.08536	-.002898
17	.16366	.137545
18	.03056	-.316671
19	-.10181	.044514
20	-.07862	-.043714

เนื่องจากลักษณะแนวโน้มของข้อมูลในหัวข้อ ๔.๑.๓ นอกจากจะสร้างด้วยสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิตแล้ว ยังควรพิจารณาสมการเส้นตรงสเกล log ในอันดับต่อไป จึงเป็นการสร้างสมการเส้นตรงสเกล log พร้อมทั้งแบบจำลองของส่วนเบี่ยงเบน

<u>การสร้างสมการเส้นตรงสเกล log โดยวิธี Least Square</u>

สมการเส้นตรงในรูป log คือ $\log Z_t = \log a + (\log b)t$

การหาค่าพารามิเตอร์ log a และ log b โดยวิธี Least Square หาได้จาก normal equations

$$\Sigma \log Z = n\log a + (\log b)\Sigma t$$

$$\Sigma t\log Z = (\log a)\Sigma t + (\log b)\Sigma t^2$$

ตารางที่ ๔.๑๗ แสดงการคำนวณค่าต่าง ๆ ในสมการ normal ดังนี้

$$61.48202 = 35\log a + 595\log b \qquad (1)$$

$$975.4865 = 595\log a + 13685\log b \qquad (2)$$

โดยการแก้สมการ (1) และ (2)

จะได้ $\log a = 2.088572$

$\log b = -.019526$

$$\widehat{\log Z_t} = 2.088572 - .019526t$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่เป็นตัวแทนของแนวโน้มในสเกล log จึงมีรูปเป็น $\widehat{\log Z_t} = 2.088572 - .019526t$ แสดงว่า มีแนวโน้มที่จะลดลงในสเกล log ด้วยค่าเฉลี่ย .019526 ต่อปี โดยมีปี ๒๔๘๐ เป็นจุดเริ่มต้น ซึ่งแสดงค่าที่ได้จากการใช้แบบจำลองนี้ในตารางที่ ๔.๑๘

ตาราง 4.17 แสดงการคำนวณค่าพารามิเตอร์ loga, logb

Z_t	$\log Z_t$	t^2	$\mathrm{lt}(\log Z_t)$
0	2.01786	0	0
1	1.95951	1^2	1.95951
2	2.00603	2^2	2(2.00603)
3	2.04060	3^2	3(2.04060)
4	1.99913	4^2	4(1.99913)
5	1.97680	5^2	5(1.97680)
6	1.98855	6^2	6(1.98855)
7	1.99431	7^2	7(1.99431)
8	2.02366	8^2	8(2.02366)
9	1.97589	9^2	9(1.97589)
10	1.90200	10^2	10(1.90200)
11	1.80002	11^2	11(1.80002)
12	1.81888	12^2	12(1.81888)
13	1.79518	13^2	13(1.79518)
14	1.81491	14^2	14(1.81491)
15	1.79795	15^2	15(1.79795)
16	1.81224	16^2	16(1.81224)
17	1.80277	17^2	17(1.80277)
18	1.74896	18^2	18(1.74896)
19	1.74193	19^2	19(1.74193)
20	1.79028	20^2	20(1.79028)
21	1.73319	21^2	21(1.73319)
22	1.67302	22^2	22(1.67302)
23	1.68124	23^2	23(1.68930)
24	1.70757	24^2	24(1.70757)
25	1.65030	25^2	25(1.65030)
26	1.57863	26^2	26(1.57863)
27	1.57749	27^2	27(1.57749)
28	1.49415	28^2	28(1.49415)
29	1.52504	29^2	29(1.52504)
30	1.44560	30^2	30(1.44560)
31	1.42324	31^2	31(1.42324)
32	1.41830	32^2	32(1.41830)
33	1.40653	33^2	33(1.40653)
34	1.35218	34	34(1.35218)

ตาราง 4.18 ความแตกต่างระหว่างอัตราตายของทารกในสเกล log ที่เกิดขึ้นจริง และเป็นไปตามแบบจำลอง

k	$\log Z_t$	$\widehat{\log Z_t}$	$\tilde{Z}_t = \log Z_t - \widehat{\log Z_t}$
	2.017867	2.088575	-.070708
1	1.959518	2.069049	-.109531
2	2.006037	2.049523	-.043486
3	2.040602	2.029996	.010606
4	1.999130	2.010470	-.011340
5	1.976808	1.990944	-.014136
6	1.988558	1.971417	.017141
7	1.994316	1.951891	.042425
8	2.023663	1.932365	.091298
9	1.975890	1.912839	.063051
10	1.902002	1.893312	.008690
11	1.800029	1.873786	-.073757
12	1.818885	1.854260	-.035375
13	1.795184	1.834734	-.039550
14	1.814912	1.815207	-.000295
15	1.797959	1.795681	.002278
16	1.812244	1.776155	.036089
17	1.802773	1.756629	.046144
18	1.748962	1.737103	.011859
19	1.741938	1.717577	.024361
20	1.790284	1.698051	.092233
21	1.733196	1.678524	.054672
22	1.673020	1.658998	.014022
23	1.689308	1.639472	.049836
24	1.707570	1.619946	.087624
25	1.650306	1.600419	.049887
26	1.578638	1.580893	-.002255
27	1.577491	1.561367	.016124
28	1.494154	1.541841	-.047687
29	1.525044	1.522314	.002730
30	1.445603	1.502788	-.057185
31	1.423245	1.483262	-.060017
32	1.418300	1.463735	-.045435
33	1.406539	1.444209	-.037670
34	1.352182	1.424683	-.072501

ในกรณีที่เลื่อนจุดตั้งต้นไปที่ปี ๒๔๙๗ หรือทำให้ $\sum t$ มีค่า 0 ดังนั้นค่า log a, log b จะประมาณจาก

$$\log a = \frac{\sum \log Z}{n}$$

$$\log b = \frac{\sum t \log Z}{\sum t^2}$$

การคำนวณค่าต่าง ๆ แสดงในตารางที่ ๔.๑๙

โดยการคำนวณของคอมพิวเตอร์ได้ $\log a = \frac{61.48202}{35} = 1.756629$

$$\log b = \frac{-69.70881}{3570} = -.019526$$

โดยวิธี Least Square จะได้สมการที่อธิบายแนวโน้มของอัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ในรูป

$$\widehat{\log Z_t} = 1.756629 - .019526t$$

ดังนั้นสำหรับอัตราตายของทารกมีสมการเส้นตรงสเกลlog อธิบายแนวโน้มในรูปของ log คือ

$$\widehat{\log Z_t} = 2.088572 - .019526t$$

จุดตั้งต้นปี ๒๔๘๐ , หน่วย t: ๑ ปี

$$\widehat{\log Z_t} = 1.756629 - .019526t$$

จุดตั้งต้นปี ๒๔๙๗ , หน่วย t: ๑ ปี

จากตารางที่ ๔.๑๘ เมื่อเปรียบเทียบค่า log ของอัตราตายของทารกที่เกิดขึ้นจริงกับ log ของอัตราตายของทารกที่เป็นไปตามสมการเส้นตรงที่มีจุดตั้งต้น ๒๔๘๐ จะเห็นว่าค่าที่ประมาณได้ใกล้เคียงกับค่าจริงมาก ซึ่งเป็นประโยชน์ในการนำสมการเส้นตรงสเกล log มา

ตาราง 4.19 แสดงการคำนวณสำหรับหาค่าพารามิเตอร์ loga, logb
เมื่อเลื่อนจุดตั้งต้นไปที่ปี 2497

t	t^2	$\log Z_t$	$t\log Z_t$
-17	$(-17)^2$	2.01786	-17(2.01786)
-16	$(-16)^2$	1.95951	-16(1.95951)
-15	$(-15)^2$	2.00603	-15(2.00603)
-14	$(-14)^2$	2.04060	-14(2.04060)
-13	$(-13)^2$	1.99913	-13(1.99913)
-12	$(-12)^2$	1.97680	-12(1.97680)
-11	$(-11)^2$	1.98855	-11(1.98855)
-10	$(-10)^2$	1.99431	-10(1.99431)
-9	$(-9)^2$	2.02366	-9(2.02366)
-8	$(-8)^2$	1.97589	-8(1.97589)
-7	$(-7)^2$	1.90200	-7(1.90200)
-6	$(-6)^2$	1.83314	-6(1.83314)
-5	$(-5)^2$	1.81888	-5(1.81888)
-4	$(-4)^2$	1.79518	-4(1.79518)
-3	$(-3)^2$	1.81491	-3(1.81491)
-2	$(-2)^2$	1.79795	-2(1.79795)
-1	$(-1)^2$	1.81224	-1(1.81224)
0	$(0)^2$	1.80277	0(1.80277)
1	$(1)^2$	1.74896	1(1.74896)
2	$(2)^2$	1.74193	2(1.74193)
3	$(3)^2$	1.79028	3(1.79028)
4	$(4)^2$	1.73319	4(1.73319)
5	$(5)^2$	1.67302	5(1.67302)
6	$(6)^2$	1.68930	6(1.68930)
7	$(7)^2$	1.70757	7(1.70757)
8	$(8)^2$	1.65030	8(1.65030)
9	$(9)^2$	1.57863	9(1.57863)
10	$(10)^2$	1.57749	10(1.57749)
11	$(11)^2$	1.49415	11(1.49415)
12	$(12)^2$	1.52504	12(1.52504)
13	$(13)^2$	1.44560	13(1.44560)
14	$(14)^2$	1.42324	14(1.42324)
15	$(15)^2$	1.41830	15(1.41830)
16	$(16)^2$	1.40653	16(1.40653)
17	$(17)^2$	1.35218	17(1.35218)
0	3570	61.482020	-69.70881

ประมาณค่าหรืออธิบายแนวโน้มของอัตราตายของทารกได้ละเอียดกว่า สมการเส้นตรงสเกลเลขคณิต อย่างไรก็ดี เมื่อพิจารณาส่วนเบี่ยงเบนแล้ว จะเห็นว่ายังคงมีส่วนที่เป็นไปจากสมการเส้นตรงสเกล log ที่ควรนำมาวิเคราะห์ด้วยแบบจำลอง Linear Stationary ต่อไปอีก

๔.๒.๒ แบบจำลอง Linear Stationary ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกจากเส้นตรงสเกล log

ทำนองเดียวกับการพิจารณาแบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารกจากเส้นตรงสเกลเลขคณิต โดยเริ่มวิเคราะห์แบบจำลองส่วนที่เบนจากสมการเส้นตรงที่มีจุดตั้งต้น ปี ๒๔๘๐ ซึ่งมีรูปสมการเป็น $\widehat{\log Z_t} = 2.088572 - .019526t$ ซึ่งอาศัยการพิจารณาลักษณะ autocorrelation function และ partial autocorrelation function ของส่วนเบี่ยงเบนในตารางที่ ๔.๑๘ การคำนวณต่าง ๆ จึงกล่าวโดยย่อ

การคำนวณค่า autocorrelation function r_k 20 ค่าแรก

จากสูตร

$$r_k = \frac{C_k}{C_o} \qquad k = 1,2.....20$$

การคำนวณค่า autocorrelation function ใน lag 0 ถึง lag 20 อย่างละเอียด จะแสดงในตารางที่ ๔.๒๐

ส่วนค่า partial autocorrelation function $\hat{\phi}_{kk}$ ประมาณ

จากสูตร $\hat{\phi}_{kk} = r_1 \qquad ,k = 1$

ตาราง 4.20 แสดงการคำนวณค่า autocorrelation function r_k ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกในสเกล log

k (1)	$\sum(\tilde{z}_t-\bar{\tilde{z}})(\tilde{z}_{t+k}-\bar{\tilde{z}})$ (2)	c_k = (2)/35 (3)	$r_k = c_k/.00254$ (4)
0	.08890	.00254	1
1	.05560	.00159	.62659
2	.02765	.00079	.31164
3	.01363	.00039	.15364
4	.00834	.00024	.09404
5	-.00747	-.00021	-.08417
6	-.01461	-.00042	-.16468
7	-.02365	-.00068	-.26655
8	-.02219	-.00063	-.25002
9	-.01666	-.00048	-.18780
10	-.00912	-.00026	-.10281
11	-.00135	-.00004	-.01516
12	-.00068	-.00002	-.00765
13	-.00699	-.00020	-.07876
14	-.00990	-.00028	-.11154
15	-.00066	-.00002	-.00742
16	-.00017	-.00000	-.00190
17	.00456	.00013	.05134
18	-.00228	-.00007	-.02568
19	-.00862	-.00025	-.09718
20	-.01078	-.00031	-.12144

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\, r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\, r_j} \quad ,k = 2,3,\ldots 20$$

โดยที่ $\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\, \hat{\phi}_{k-1,k-j} \quad ,j = 1,2,\ldots k-1$

วิธีการคำนวณ $\hat{\phi}_{kj}$ อย่างละเอียด แสดงไว้ตาราง ๔.๒๑

เพื่อให้เห็นค่าและลักษณะของ autocorrelation function และ partial autocorrelation function ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น จึงสรุปค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ที่คำนวณได้ไว้ในตารางที่ ๔.๒๒ พร้อมกับแสดงแผนภาพลักษณะของ r_k และ ϕ_{kk} 20 ค่าแรก ในภาพที่ ๔.๗ จากตารางที่ ๔.๒๒ จะเห็นว่า ค่า r_k ที่ $k = 1$ มีค่าสูงที่สุด= .62658 ใน lag ต่อมา ค่า r_k จะลดลงแล้วเพิ่มขึ้น แสดงในลักษณะ damped sine wave ดังแสดงในภาพ ๔.๗.๑ ซึ่งเหมือนกับส่วนเบี่ยงเบนจากเส้นตรงสเกลเลขคณิต และเมื่อพิจารณาค่าของ partial autocorrelation จะเห็นว่า หลังจาก lag 2 ไป ค่า ϕ_{kk} มีค่าน้อยมาก โดยเฉพาะที่ lag $k = 3,4$ ϕ_{kk} มีค่าเพียง .026593 และ .025427 ตามลำดับ อันแสดงถึงลักษณะ cuts off หลัง lag 2 ซึ่งแสดงในภาพที่ ๔.๗.๒ เพื่อเป็นแนวทางในการพิจารณาแบบจำลองที่เหมาะสมต่อไป

ด้วยลักษณะของ r_k ที่เป็น damped sine wave และลักษณะ $\hat{\phi}_{kk}$ เป็น cuts off หลัง lag 2 ดังกล่าว แบบจำลองของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกที่เบนไปจากสมการ $\widehat{\log Z_t} = 2.088572 - .019526t$ จึงเป็นแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ORDER 2 ที่มีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t = \hat{\phi}_1 \tilde{Z}_{t-1} + \hat{\phi}_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

<u>การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธี Yule - Walker</u>

ประมาณค่า $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ โดยใช้สูตร

ตาราง 4.21 แสดงการคำนวนคา $\hat{\phi}_{kk}$ ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกในสเกล log

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
0		1	
1		.62658	
2		-.133313	
2	1		.710117
3		.026592	
3	1		.713662
3	2		-.152196
4		.025431	
4	1		.712985
4	2		-.148326
4	3		.008443
5		-.246712	
5	1		.719260
5	2		-.146243
5	3		-.028151
5	4		.201333
6		.010331	
6	1		.721808
6	2		-.148323
6	3		-.027860
6	4		.202844
6	5		-.254142
7		-.207307	
7	1		.723950
7	2		-.201009
7	3		.014191
7	4		.197068
7	5		-.284891
7	6		.159967
8		.030488	
8	1		.730270
8	2		-.205886
8	3		.022877
8	4		.191060
8	5		-.285323
8	6		.166096
8	7		-.229379
9		.025158	

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
9	1		.729503
9	2		-.200115
9	3		.018698
9	4		.198238
9	5		-.290130
9	6		.165520
9	7		-.224199
9	8		.012116
10		-.006146	
10	1		.729658
10	2		-.200040
10	3		.017320
10	4		.199255
10	5		-.291913
10	6		.166738
10	7		-.224084
10	8		.010886
10	9		.029642
11		.111691	
11	1		.730344
11	2		-.203351
11	3		.016104
11	4		.224283
11	5		-.310536
11	6		.199342
11	7		-.246339
11	8		.008951
11	9		.051985
11	10		-.087642
12		-.152620	
12	1		.747391
12	2		-.216727
12	3		.024038
12	4		.225649
12	5		-.348133
12	6		.229766
12	7		-.293733
12	8		.043181
12	9		.054443

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
12	10		-.118678
12	11		.223156
13		-.121831	
13	1		.728797
13	2		-.189540
13	3		.009579
13	4		.232282
13	5		-.342872
13	6		.193980
13	7		-.265741
13	8		.000768
13	9		.081934
13	10		-.115749
13	11		.196752
13	12		-.061564
14		-.069073	
14	1		.720382
14	2		-.193792
14	3		.023170
14	4		.224287
14	5		-.337212
14	6		.194033
14	7		-.284096
14	8		.014167
14	9		.058250
14	10		-.099705
14	11		.197413
14	12		-.074657
14	13		-.071491
15		.109625	
15	1		.727954
15	2		-.185955
15	3		.031354
15	4		.202646
15	5		-.326282
15	6		.187648
15	7		-.285649
15	8		.045311

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
15	9		.036979
15	10		-.062738
15	11		.172826
15	12		-.077197
15	13		-.050246
15	14		-.148045
16		-.069468	
16	1		.735569
16	2		-.196239
16	3		.027863
16	4		.197283
16	5		-.314276
16	6		.183289
16	7		-.283080
16	8		.048459
16	9		.017136
16	10		-.049702
16	11		.150160
16	12		-.063119
16	13		-.048068
16	14		-.160963
16	15		.160194
17		.168202	
17	1		.747254
17	2		-.223184
17	3		.054938
17	4		.205368
17	5		-.303660
17	6		.158032
17	7		-.274720
17	8		.045576
17	9		.008985
17	10		-.002088
17	11		.119330
17	12		-.010257
17	13		-.081252
17	14		-.165650
17	15		.193202
17	16		-.193192

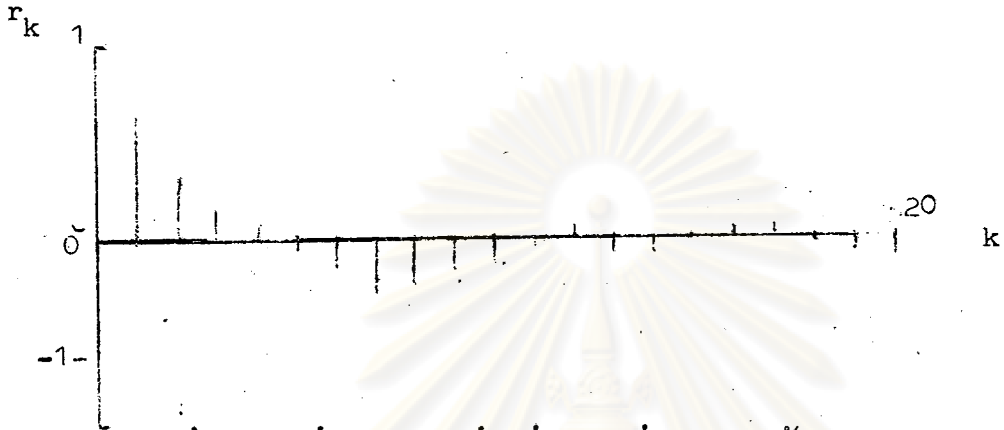
k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
18		-.203307	
18	1		.781450
18	2		-.262462
18	3		.094217
18	4		.171690
18	5		-.320179
18	6		.155947
18	7		-.250460
18	8		.045152
18	9		.010812
18	10		.007178
18	11		.063478
18	12		.021872
18	13		-.142988
18	14		-.123897
18	15		.204371
18	16		-.238567
18	17		.320124
19		-.111454	
19	1		.758791
19	2		-.226783
19	3		.067628
19	4		.194468
19	5		-.333988
19	6		.140010
19	7		-.248022
19	8		.052227
19	9		.011612
19	10		.008384
19	11		.068510
19	12		-.006043
19	13		-.125607
19	14		-.159582
19	15		.223507
19	16		-.228066
19	17		.290872
19	18		-.116211
20		-.018317	

ตารางที่ 4.22

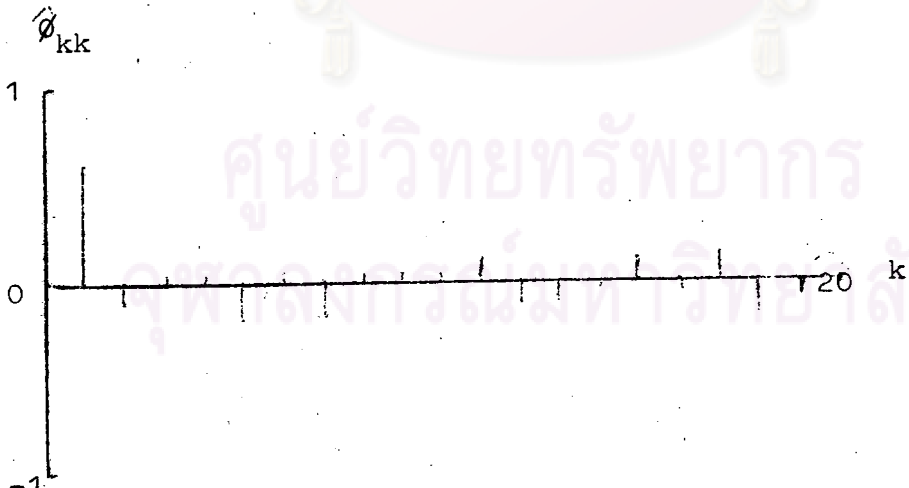
สรุปค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกในสเกล log

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1	1
1	.62658	.62658
2	.31164	−.133313
3	.15363	.026592
4	.09403	.025431
5	−.08417	−.246712
6	−.16468	.010331
7	−.26655	−.207307
8	−.25002	.030488
9	−.18778	.025158
10	−.10279	−.006146
11	−.01515	.111691
12	−.00765	−.152620
13	−.07876	−.121831
14	−.11154	−.069073
15	−.00743	.109625
16	−.00192	−.069468
17	.05133	.168202
18	−.02569	−.203307
19	−.09719	−.111454
20	−.12145	−.018317

ภาพที่4.7 สรุปแผนภาพ r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารกที่เบนจาก
เส้นตรง $\widehat{\log Z_t} = 2.088572-.019526t$



ภาพที่4.7.1 ค่า r_k ของค่าเบี่ยงเบนที่เบนจากเส้นตรง
$\widehat{\log Z_t} = 2.088572-.019526t$



ภาพที่ 4.7.2 ค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ของค่าเบี่ยงเบนจากเส้นตรง
$\widehat{\log Z_t} = 2.088572-.019526t$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2} = \frac{.62658(1-.31164)}{1-.31164^2} = .710117$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2} = \frac{.31164 - .62658^2}{1-.31164^2} = -.133313$$

ดังนั้นแบบจำลอง Linear Stationary ที่เหมาะสมกับอนุกรมส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกที่เบนไปจากสมการเส้นตรงสเกล log นี้ จึงมีลักษณะแบบ AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER 2 และรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t = .710117\,\tilde{Z}_{t-1} - .133313\,\tilde{Z}_{t-2}$$

การทดสอบความเป็น Stationary ของ อนุกรมส่วนเบี่ยงเบนที่ได้จากสมการ AUTOREGRESSIVE ORDER 2 $\tilde{Z}_t = .710117\,\tilde{Z}_{t-1} - .133313\,\tilde{Z}_{t-2}$

เนื่องจากลักษณะ autocorrelation function ของอนุกรมส่วนเบี่ยงเบนเป็นแบบ damped sine wave แสดงว่า process ที่ได้จาก AUTOREGRESSIVE ORDER 2 ดังกล่าวจะเป็น Stationary ก็ต่อเมื่อรากของสมการ characteristic $1 - .710117\,B + .133313\,B^2 = 0$ เป็น complex หรือเป็น Stationary เมื่อ $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$

$$(.710117)^2 + 4(-.133313) = -.02898 < 0$$

ดังนั้นอนุกรมอัตราตายของทารกในส่วนเบี่ยงเบนเป็นอนุกรมที่ได้จาก LINEAR STATIONARY AUTOREGRESSIVE MODEL ที่มี ORDER 2 เหมือนกับส่วนเบี่ยงเบนที่ต่างไปจากสมการเส้นตรงเลขคณิต แต่มีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t = .710117\,\tilde{Z}_{t-1} - .133313\,\tilde{Z}_{t-2}$$

การทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนที่มีรูปสมการ

AUTOREGRESSIVE ORDER 2 $\tilde{Z}_t = .710117\,\tilde{Z}_{t-1} - .133313\,\tilde{Z}_{t-2}$

วิธีทดสอบยังคงใช้ค่าสถิติ Q เหมือนเดิม คือ

$$Q = n \sum_{k=1}^{20} r_k^2(\hat{a})$$

โดยใช้ค่าผิดพลาด $\hat{a}_t$ จากตารางที่ 4.23 มาคำนวณหาค่า autocorrelation function ของค่าผิดพลาด $r_k(\hat{a})$ แสดงตัวเลขในตารางที่ ๔.๒๔ ได้ค่า Q ดังนี้

$$Q = 35\left[-.03488^2 + .02708^2 + \ldots + .03623^2\right]$$

$$= 35(.19374) = 6.78098$$

เนื่องจากเป็นแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER 2 และ lag ที่มากที่สุด = 20

$\therefore$ Q มี degree of freedom = 20-2-0 = 18

แล้วเทียบกับค่า $\chi^2_{.05(18)}$ จากตาราง ซึ่งเท่ากับ 28.87

$$Q < \chi^2_{.05(18)}$$

การทดสอบนี้ สนับสนุนสมมติฐานว่า แบบจำลอง STATIONARY AUTOREGRESSIVE ORDER 2 สำหรับส่วนเบี่ยงเบนจากสมการเส้นตรงเสกล lag เหมาะกับข้อมูล

ในทำนองเดียวกัน การพิจารณาผลของการเลื่อนจุดตั้งต้นของสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิตที่มีต่อแบบจำลอง Stationary ของส่วนเบี่ยงเบน โดยการเลื่อนจุดตั้งต้นของสมการเส้นตรงสเกล log จากปี ๒๔๘๐ ไปยังปี ๒๔๙๗ ที่มีรูปสมการเป็น $\widehat{\log Z_t} = 1.756629 - .019526t$ อาศัยค่า autocorrelation function และ partial autocorrelation function ในตารางที่

ตาราง 4.23 แสดงค่า $\hat{a}_t$ เป็นค่าผิดพลาดระหว่างส่วนเบี่ยงเบนจากสมการเส้นตรงสเกล log ที่เกิดขึ้นจริงกับที่ได้จากสมการ $\tilde{z}_t = .710117\tilde{z}_{t-1} - .133313\tilde{z}_{t-2}$

$\tilde{z}_t$	$\tilde{z}'_t$	$\hat{a}_t = \tilde{z}_t - \tilde{z}'_t$
-.04349	-.06835	.02487
.01061	-.01628	.02688
-.01134	.01333	-.02467
-.01414	-.00947	-.00467
.01714	-.00853	.02567
.04243	.01406	.02837
.09130	.02784	.06346
.06305	.05918	.00387
.00869	.03260	-.02391
-.07376	-.00223	-.07152
-.03538	-.05353	.01816
-.03955	-.01529	-.02426
-.00030	-.02337	.02307
.00228	.00506	-.00279
.03609	.00166	.03443
.04614	.02532	.02082
.01186	.02796	-.01610
.02436	.00227	.02209
.09223	.01572	.07651
.05467	.06225	-.00758
.01402	.02653	-.01251
.04984	.00267	.04717
.08762	.03352	.05410
.04989	.05558	-.00569
-.00226	.02374	-.02600
.01612	-.00825	.02438
-.04769	.01175	-.05944
.00273	-.03601	.03874
-.05719	.00830	-.06548
-.06002	-.04097	-.01905
-.04544	-.03500	-.01044
-.03767	-.02426	-.01341
-.07250	-.02069	-.05181

ตาราง 4.24 แสดงการคำนวนค่า r_k ของค่าผิดพลาด $\hat{a}_t$ ที่เกิดจากการใช้แบบจำลอง $\widehat{\log Z}_t = 2.088572 - .019526t$

k (1)	$\Sigma(a_t-\bar{a})(a_{t+k}-\bar{a})$ (2)	$c_k = (2)/33$ (3)	$r_k = c_k/.00117$ (4)
0	0.03861	.00117	1.00000
1	-.00134	-.00004	-.03488
2	.00104	.00003	.02708
3	-.00404	-.00012	-.10489
4	.00449	.00014	.11656
5	-.00370	-.00011	-.09597
6	-.00196	-.00006	-.05082
7	-.00104	-.00003	-.02689
8	-.00407	-.00012	-.10556
9	-.00340	-.00010	-.08813
10	-.00533	-.00016	-.13827
11	-.00219	-.00007	-.05679
12	-.00044	-.00001	-.01146
13	-.00164	-.00005	-.04266
14	-.00367	-.00011	-.09530
15	.00532	.00016	.13807
16	-.00272	-.00008	-.07065
17	.01046	.00032	.27134
18	-.00102	-.00003	-.02651
19	.00200	.00006	.05198
20	-.00140	-.00004	-.03623

๔.๒๕ จะเห็นว่ามีค่าเหมือนกับในกรณีที่ไม่เลื่อนจุดตั้งต้น จึงสรุปได้ว่า การเลื่อนจุดตั้งต้นของสมการเส้นตรงสเกล log จากปี ๒๔๘๐ ไปยังปี ๒๔๙๗ ไม่ทำให้แบบจำลอง Stationary ของส่วนเบี่ยงเบนเปลี่ยนไป คือ เป็นแบบจำลอง LINEAR STATIONARY AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER 2 ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t' = .710117\ \tilde{Z}_{t-1} - .133313\ \tilde{Z}_{t-2}$$

จากการวิเคราะห์หา แบบจำลองที่เหมาะกับส่วนเบี่ยงเบนของอัตราตายทารก ได้แบบจำลอง ดังนี้

๑. เมื่อแนวโน้มอธิบายด้วยสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารกจากเส้นตรงนี้มี แบบจำลอง เป็น AUTOREGRESSIVE ORDER 2 ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t' = .755131\ \tilde{Z}_{t-1} - .329112\ \tilde{Z}_{t-2}$$

๒. เมื่อแนวโน้มอธิบายด้วยสมการเส้นตรงสเกล log ส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายทารกจากเส้นตรงสเกล log มีแบบจำลอง เป็น AUTOREGRESSIVE ORDER 2 ที่มีรูปสมการเป็น

$$\tilde{Z}_t' = .710117\ \tilde{Z}_{t-1} - .133313\ \tilde{Z}_{t-2}$$

จะเห็นได้ว่า แบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนทั้ง ๒ ชนิด ต้องเกี่ยวข้องกับระดับแนวโน้มอยู่เสมอ จึงจะพยากรณ์ค่าอัตราตายของทารกได้ ด้วยเหตุนี้จึงควรมีแบบจำลองอื่นที่เป็นประโยชน์ในการพยากรณ์ค่าอัตราตายของทารกได้โดยตรง และมีรูปที่ไม่ยุ่งยากนัก

ตารางที่ 4.25 ค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของส่วนเบี่ยงเบนในสเกล log เมื่อเลื่อนจุดตั้งต้นไปที่ปี 2497

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1	1
1	.62659	.62659
2	.31164	-.133309
3	.15364	.026593
4	.09404	.025427
5	-.08417	-.246712
6	-.16468	.0[illegible]0329
7	-.26655	-.207310
8	-.25002	.030484
9	-.18780	.025150
10	-.10281	-.006144
11	-.01516	.111691
12	-.00765	-.152617
13	-.07876	-.121834
14	-.11154	-.069070
15	-.00742	.109629
16	-.00199	-.069070
17	.05134	.109629
18	-.02568	-.203303
19	-.09718	-.111448
20	-.12144	-.018314

๔.๔ แบบจำลอง Nonstationary สำหรับอนุกรมอัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อคนเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐คน

ลักษณะ Homogeneous ของอนุกรมอัตราตายของทารกดังกล่าวแล้ว ในหัวข้อ ๔:๑.๔ อันเป็นลักษณะหนึ่งของ Nonstationary time series ดังนั้นถ้าจะพิจารณาอนุกรมเวลาของอัตราตายของทารก ซึ่งเป็น Nonstationary time series แล้ว การวิเคราะห์หาแบบจำลองจะดูลักษณะของ autocorrelation function และ partial autocorrelation function ของ Z_t , ∇Z_t และ $\nabla^2 Z_t$ โดยให้ Z_t เป็นอัตราตายของทารกในปีที่ t

$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ เป็นผลต่างระหว่างอัตราตายของทารกในปีที่ t กับ ในปีที่ล่วงมาแล้ว ๑ ปี เรียกว่าส่วนแตกต่างที่ ๑ (first difference)

$\nabla^2 Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-2}$ เป็นผลต่างระหว่างอัตราตายของทารกในปีที่ t ที่ต่างจากอัตราตายของทารกในปีที่ล่วงมาแล้ว ๑ ปี กับอัตราตายของทารกในปีที่ล่วงมาแล้ว ๒ ปี เรียกว่า ส่วนแตกต่างที่ ๒ (Second difference)

การสร้างแบบจำลองให้กับอัตราตายของทารกในหน่วย Z_t , ∇Z_t และ $\nabla^2 Z_t$ จะทำโดยใช้หลักของ Stationary time series[1] หรือใช้ Stationary model มาช่วยเป็นแนวทางในการเลือกแบบจำลองเพื่ออธิบายข้อมูลอย่างเหมาะสม

ดังนั้นในขั้นแรก จะเริ่มคำนวณหา Autocorrelation function ของ Z_t และ ∇Z_t , $\nabla^2 Z_t$ โดยอาศัยค่า Z_t และส่วนแตกต่างที่หนึ่งและสอง ในตารางที่ ๔.๒๖

การคำนวณค่า Autocorrelation function

---

1 Box and Jenkens, Time Series Analysis forecasting and control, ("Holden - day") P.11

ตาราง 4.26 ส่วนแตกต่างที่ 1 และ 2 ของอัตราตายของทารก

Z_t	$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$	$\nabla^2 Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-2}$
104.2		
91.1	-13.1	
101.4	10.3	-93.9
109.8	8.4	-82.7
99.8	-10.0	-111.4
94.8	-5.0	-114.8
97.4	2.6	-97.2
98.7	1.3	-93.5
105.6	6.9	-90.5
94.6	-11.0	-109.7
79.8	-14.8	-120.4
63.1	-16.7	-106.3
65.9	-2.8	-82.0
62.4	-3.5	-71.6
65.3	2.9	-63.0
62.8	-2.5	-64.9
64.9	2.1	-63.2
63.5	-1.4	-64.2
56.1	-7.4	-72.3
55.2	-0.9	-64.4
61.7	6.5	-49.6
54.1	-7.6	-62.8
47.1	-7.0	-68.7
48.9	1.8	-52.3
51.0	2.1	-45.0
44.7	-6.3	-55.2
37.9	-6.8	-57.8
37.8	-0.1	-44.8
31.2	-6.6	-44.5
33.5	2.3	-35.5
27.9	5.6	-36.8
26.5	-1.4	-34.9
26.2	-0.3	-28.2
25.5	-0.7	-27.2
22.5	-3.0	-29.2

การคำนวณ r_k จะอาศัยค่า Z_t หรืออัตราตายของทารกรายปี โดยใช้

สูตร $$r_k = \frac{C_k}{C_{o_{N-k}}} \qquad (\diamond)$$

เมื่อ $$C_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})$$

วิธีการคำนวณยังคงใช้วิธีเดียวกับการหาค่า autocorrelation function ของอนุกรมส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารก ซึ่งเป็น Stationary time series และแสดงการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ในตารางที่ ๔.๒๗

ในทำนองเดียวกัน จะหาค่า autocorrelation function ของ ∇Z_t และ $\nabla^2 Z_t$ โดยนำค่าในตารางที่ ๔.๒๖ มาหาค่า autocorrelation function 20 ค่าแรก ด้วยสูตร $(\diamond)$ แสดงการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ในตารางที่ ๔.๒๘, ๔.๒๙ ตามลำดับ

การคำนวณหาค่า partial autocorrelation function ยังคงคำนวณด้วยสูตรเดิม คือ

$$\hat{\phi}_{kk} = r_1 \qquad ,k = 1$$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\, r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\, r_j} \qquad ,k = 2,3,\ldots 20$$

ซึ่ง $$\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\, \hat{\phi}_{k-1,k-j} \qquad ,j = 1,2,\ldots,k-1$$

สำหรับการคำนวณค่าของ partial autocorrelation function Z_t จะนำค่าของ autocorrelation function Z_t ในตารางที่ ๔.๒๗ มาหาค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ดังกล่าว และแสดงการคำนวณอย่างละเอียดในตารางที่ ๔.๓๐ ในทำนองเดียวกัน ค่า r_k ของ ∇Z_t และ r_k ของ $\nabla^2 Z_t$ ในตารางที่ ๔.๒๘, ๔.๒๙ นั้น ใช้คำนวณหาค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ซึ่งดูได้ในตารางที่ ๔.๓๑,๔.๓๒ ตามลำดับ

ส่วนตารางที่ ๔.๓๓, ๔.๓๔, ๔.๓๕ จะแสดงค่าของ autocorrelation

ตาราง 4.27 แสดงการคำนวนค่า r_k ของอัตราตายทารก Z_t

k (1)	$\sum(Z_t-\bar{Z})(Z_{t+k}-\bar{Z})$ (2)	$c_k=(2)/35$ (3)	$r_k=c_k/723.37680$ (4)
0	25318.18800	723.37680	1
1	22859.87000	653.13910	.90290
2	20871.95000	596.34140	.82439
3	18721.86000	534.91020	.73946
4	16254.25000	464.40710	.64200
5	13965.72000	399.02050	.55161
6	11954.02000	341.54340	.47215
7	9487.40300	271.06860	.37473
8	7261.57600	207.47360	.28681
9	4673.36800	133.52480	.18459
10	2683.81900	76.68054	.10600
11	1365.00300	39.00008	.05391
12	554.24290	15.83551	.02189
13	-725.30400	-20.72297	-.02865
14	-1614.13700	-46.11820	-.06375
15	-2376.42100	-67.89774	-.09386
16	-3389.50600	-96.84302	-.13388
17	-4513.06600	-128.94470	-.17825
18	-5707.06200	-163.05890	-.22541
19	-6611.25000	-188.89280	-.26113
20	-7422.12800	-212.06080	-.29315

ตาราง 4.28แสดงการคำนวนค่า r_k ของอัตราตายของทารกในหน่วย ∇z_t

k (1)	$\Sigma(\nabla z_t - \bar{\nabla z})(\nabla z_{t+k} - \bar{\nabla z})$ (2)	$c_k = (2)/34$ (3)	$r_k = c_k/39.85652$ (4)
0	1255.02168	39.85652	1
1	112.17070	3.29914	.08278
2	-385.32120	-11.33297	-.28434
3	-186.90210	-5.49712	-.13792
4	11.92582	.35076	.00880
5	-48.10954	-1.41499	-.03550
6	57.70606	1.69724	.04258
7	-209.13780	-6.15111	-.15433
8	-137.62120	-4.04768	-.10156
9	-77.32954	-2.27440	-.05706
10	19.52498	.57426	.01441
11	30.60967	.90028	.02259
12	141.60430	4.16483	.10450
13	-33.95816	-.99877	-.02506
14	.67705	.01991	.00050
15	-29.32620	-.86254	-.02164
16	-30.04036	-.88354	-.02217
17	304.21180	8.94741	.22449
18	5.70473	.16779	.00421
19	-239.86900	-7.05497	-.17701
20	-57.33270	-1.68626	-.04231

ตาราง 4.29 แสดงการคำนวนค่า r_k ของอัตราตายของทารกในหน่วย $\nabla^2 z_t$

k (1)	$\sum(\nabla^2 z_t - \overline{\nabla^2 z})(\nabla^2 z_{t+k} - \overline{\nabla^2 z})$ (2)	$c_k = (2)/33$ (3)	$r_k = c_k/723.9933$ (4)
0	23891.7789	723.99330	1
1	20578.42000	623.58840	.86132
2	17049.52000	516.65210	.71361
3	14546.99000	440.81780	.60887
4	12925.21000	391.67300	.54099
5	11481.88000	347.93570	.48058
6	9434.48900	285.89360	.39488
7	7470.40600	226.37590	.31268
8	4914.90800	148.93660	.20572
9	2825.09000	85.60878	.11825
10	934.73220	28.32521	.03912
11	-23.28470	-.70560	-.00097
12	-742.57620	-22.50230	-.03108
13	-1291.64700	-39.14081	-.05406
14	-2115.95800	-64.11993	-.08856
15	-3256.11600	-98.67018	-.13629
16	-3682.08300	-111.57820	-.15411
17	-4167.89900	-126.29990	-.17445
18	-5814.54400	-176.19830	-.24337
19	-6983.39300	-211.61790	-.29229
20	-7749.54300	-234.83460	-.32436

ตารางที่ 4.30 แสดงการคำนวนค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายทารก Z_t

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
0		1	
1			.902920
2		.049531	
2	1		.858181
3		-.069074	
3	1		.861603
3	2		.108809
4		-.122428	
4	1		.853146
4	2		.122130
4	3		.096411
5		-.032636	
5	1		.849151
5	2		.123318
5	3		.040396
5	4		-.094585
6		.011928	
6	1		.849540
6	2		.124446
6	3		.039915
6	4		-.096056
6	5		-.042764
7		-.139311	
7	1		.851201
7	2		.118489
7	3		.026533
7	4		-.090496
7	5		-.025428
7	6		.130278
8		-.042098	
8	1		.845337
8	2		.123973
8	3		.025462
8	4		-.094305
8	5		-.024311
8	6		.135266
8	7		-.103477
9		-.143945	

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
9	1		.839277
9	2		.109078
9	3		.044933
9	4		-.097805
9	5		-.037885
9	6		.138931
9	7		-.085632
9	8		.079584
10		.049293	
10	1		.846372
10	2		.105156
10	3		.049154
10	4		-.104653
10	5		-.036018
10	6		.143752
10	7		-.087847
10	8		.074207
10	9		-.185315
11		.100846	
11	1		.841402
11	2		.123844
11	3		.041671
11	4		-.095794
11	5		-.050515
11	6		.147384
11	7		-.077293
11	8		.069250
11	9		-.195920
11	10		-.036060
12		.083424	
12	1		.832989
12	2		.126852
12	3		.058015
12	4		-.101571
12	5		-.044067
12	6		.135089
12	7		-.073079
12	8		.077242
12	9		-.199396

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
12	10		-.046391
12	11		.030652
13		-.150242	
13	1		.845522
13	2		.131457
13	3		.051045
13	4		-.131529
13	5		-.032462
13	6		.124110
13	7		-.052783
13	8		.070621
13	9		-.214656
13	10		-.037675
13	11		.049711
13	12		.208574
14		-.029225	
14	1		.841132
14	2		.137553
14	3		.052498
14	4		-.132630
14	5		-.038735
14	6		.126173
14	7		-.054325
14	8		.074248
14	9		-.215605
14	10		-.041519
14	11		.051203
14	12		.212416
14	13		-.125532
15		.017557	
15	1		.841645
15	2		.139757
15	3		.048769
15	4		-.133529
15	5		-.038006
15	6		.129959
15	7		-.055629
15	8		.075202

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
15	9		-.217820
15	10		-.040839
15	11		.053531
15	12		.211494
15	13		-.127947
15	14		-.043993
16		-.084844	
16	1		.843134
16	2		.136024
16	3		.037913
16	4		-.115585
16	5		-.033464
16	6		.126494
16	7		-.074110
16	8		.081582
16	9		-.222540
16	10		-.029813
16	11		.050307
16	12		.200165
16	13		-.123809
16	14		-.032136
16	15		.088966
17		-.118295	
17	1		.833098
17	2		.146548
17	3		.034112
17	4		-.130231
17	5		-.009786
17	6		.132445
17	7		-.077636
17	8		.055257
17	9		-.212889
17	10		-.038579
17	11		.065270
17	12		.196206
17	13		-.137482
17	14		-.027651
17	15		.105057
17	16		.014894

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
18		-.145256	
18	1		.815915
18	2		.148712
18	3		.049372
18	4		-.134247
18	5		-.029756
18	6		.160945
18	7		-.068155
18	8		.049653
18	9		-.243812
18	10		-.030553
18	11		.053993
18	12		.215445
18	13		-.138903
18	14		-.046567
18	15		.110012
18	16		.036181
18	17		.002717
19		.018295	
19	1		.818572
19	2		.148662
19	3		.048710
19	4		-.136260
19	5		-.028904
19	6		.163486
19	7		-.072097
19	8		.048665
19	9		-.243253
19	10		-.026092
19	11		.053085
19	12		.216692
19	13		-.141848
19	14		-.046023
19	15		.112468
19	16		.035278
19	17		-.000003
19	18		-.160183
20		-.007609	

ตาราง 4.31 แสดงการคำนวนค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายทารกในหน่วย ∇Z_t

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
00		1	
1		.08278	
2		-.293205	
2	1		.107045
3		-.091670	
3	1		.080168
3	2		-.283392
4		-.059030	
4	1		.074756
4	2		-.300120
4	3		-.086937
5		-.108569	
5	1		.068347
5	2		-.309559
5	3		-.119521
5	4		-.050914
6		.029060	
6	1		.071502
6	2		-.308080
6	3		-.116048
6	4		-.041918
6	5		-.110556
7		-.233622	
7	1		.078291
7	2		-.333908
7	3		-.125841
7	4		-.069029
7	5		-.182530
7	6		.045764
8		-.085913	
8	1		.058220
8	2		-.329976
8	3		-.141523
8	4		-.074960
8	5		-.193341
8	6		.017077
8	7		-.226896
9		-.182949	

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	ϕ_{kj}
9	1		.042503
9	2		-.371486
9	3		-.138398
9	4		-.110331
9	5		-.207055
9	6		-.008814
9	7		-.287265
9	8		-.075262
10		-.112908	
10	1		.021846
10	2		-.379984
10	3		-.170833
10	4		-.111327
10	5		-.230433
10	6		-.021271
10	7		-.302891
10	8		-.117206
10	9		-.178150
11		-.100483	
11	1		.010501
11	2		-.397885
11	3		-.182610
11	4		-.141762
11	5		-.232570
11	6		-.044426
11	7		-.314077
11	8		-.134371
11	9		-.216332
11	10		-.110713
12		-.015024	
12	1		.008991
12	2		-.399548
12	3		-.185860
12	4		-.143781
12	5		-.237289
12	6		-.045093
12	7		-.317571
12	8		-.136501
12	9		-.219076

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
12	10		-.116691
12	11		-.100325
13		-.109986	
13	1		.007339
13	2		-.410583
13	3		-.198694
13	4		-.167876
13	5		-.252302
13	6		-.080022
13	7		-.322531
13	8		-.162600
13	9		-.234889
13	10		-.137133
13	11		-.144270
13	12		-.014035
14		-.047457	
14	1		.002119
14	2		-.411249
14	3		-.205541
14	4		-.174384
14	5		-.263449
14	6		-.087738
14	7		-.337837
14	8		-.166397
14	9		-.246863
14	10		-.145100
14	11		-.153699
14	12		-.033520
14	13		-.109638
15		-.120060	
15	1		-.003579
15	2		-.424412
15	3		-.209565
15	4		-.192837
15	5		-.280870
15	6		-.117377
15	7		-.357815
15	8		-.206958

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
15	9		-.257397
15	10		-.176730
15	11		-.174635
15	12		-.058197
15	13		-.159013
15	14		-.047203
16		-.136175	
16	1		-.019928
16	2		-.430839
16	3		-.231219
16	4		-.200762
16	5		-.304651
16	6		-.141443
16	7		-.392866
16	8		-.235140
16	9		-.306122
16	10		-.192713
16	11		-.212883
16	12		-.084457
16	13		-.187550
16	14		-.104997
16	15		-.120547
17		.195731	
17	1		.006726
17	2		-.407245
17	3		-.210668
17	4		-.164052
17	5		-.288120
17	6		-.099775
17	7		-.355146
17	8		-.175222
17	9		-.260098
17	10		-.115817
17	11		-.185198
17	12		-.024827
17	13		-.148255
17	14		-.059740
17	15		-.036219
17	16		-.132275

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
18		-.159407	
18	1		.037927
18	2		-.428330
18	3		-.216441
18	4		-.173575
18	5		-.311753
18	6		-.103733
18	7		-.384668
18	8		-.193684
18	9		-.301559
18	10		-.143749
18	11		-.241811
18	12		-.040732
18	13		-.194183
18	14		-.085891
18	15		-.069800
18	16		-.197192
18	17		.196804
19		-.048972	
19	1		.030120
19	2		-.418692
19	3		-.226098
19	4		-.176994
19	5		-.315959
19	6		-.113242
19	7		-.386663
19	8		-.205526
19	9		-.308599
19	10		-.158517
19	11		-.251296
19	12		-.059570
19	13		-.199263
19	14		-.101158
19	15		-.078301
19	16		-.207792
19	17		.175827
19	18		-.157550
20		-.054877	

ตาราง 4.32แสดงการคำนวณค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายของทารกในหน่วย $\nabla^2 z_t$

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
0		1	
1		.86132	
2		-.109456	
2	1		.955594
3		.083205	
3	1		.964702
3	2		-.188966
4		.066312	
4	1		.959184
4	2		-.176435
4	3		.019233
5		-.006920	
5	1		.959643
5	2		-.176302
5	3		.018012
5	4		.072950
6		-.110992	
6	1		.958875
6	2		-.168206
6	3		.020012
6	4		.053382
6	5		.099593
7		-.015787	
7	1		.957123
7	2		-.166633
7	3		.020854
7	4		.053698
7	5		.096937
7	6		-.095854
8		-.176107	
8	1		.954342
8	2		-.183514
8	3		.037926
8	4		.063154
8	5		.100610
8	6		-.125200
8	7		.152768
9		-.006452	

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
9	1		.953206
9	2		-.182528
9	3		.037118
9	4		.063804
9	5		.101017
9	6		-.124955
9	7		.151584
9	8		-.169949
10		-.079783	
10	1		.952691
10	2		-.196087
10	3		.049212
10	4		.053834
10	5		.109077
10	6		-.119864
10	7		.154546
10	8		-.184511
10	9		.069597
11		.084698	
11	1		.959449
11	2		-.201982
11	3		.064839
11	4		.040745
11	5		.119229
11	6		-.129103
11	7		.149986
11	8		-.188679
11	9		.086205
11	10		-.160474
12		-.023199	
12	1		.961414
12	2		-.205705
12	3		.066839
12	4		.036367
12	5		.122708
12	6		-.132098
12	7		.152752
12	8		-.187734
12	9		.087709

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
12	10		-.165160
12	11		.106957
13		.048066	
13	1		.962529
13	2		-.210845
13	3		.074778
13	4		.032152
13	5		.131732
13	6		-.139440
13	7		.159101
13	8		-.193632
13	9		.085961
13	10		-.168372
13	11		.116844
13	12		-.069411
14		-.074486	
14	1		.966109
14	2		-.216015
14	3		.083481
14	4		.019610
14	5		.138135
14	6		-.153863
14	7		.170952
14	8		-.204018
14	9		.095773
14	10		-.165977
14	11		.122414
14	12		-.085115
14	13		.119760
15		-.051424	
15	1		.962279
15	2		-.209857
15	3		.079104
15	4		.025905
15	5		.129600
15	6		-.148938
15	7		.160461
15	8		-.195227

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
15	9		.087861
15	10		-.158874
15	11		.123422
15	12		-.080823
15	13		.108652
15	14		-.024805
16		.026255	
16	1		.963629
16	2		-.209206
16	3		.076251
16	4		.028027
16	5		.126359
16	6		-.144767
16	7		.158154
16	8		-.190102
16	9		.083648
16	10		-.154964
16	11		.120019
16	12		-.081503
16	13		.106575
16	14		-.019295
16	15		-.076688
17		-.071770	
17	1		.965513
17	2		-.214710
17	3		.074866
17	4		.035676
17	5		.120510
17	6		-.136153
17	7		.147032
17	8		-.184098
17	9		.070005
17	10		-.143613
17	11		.109630
17	12		-.072434
17	13		.108587
17	14		-.013823
17	15		-.091703
17	16		.095414

k	j	$\hat{\phi}_{kk}$	$\hat{\phi}_{kj}$
18		-.276023	
18	1		.945703
18	2		-.188373
18	3		.049554
18	4		.031861
18	5		.150482
18	6		-.156146
18	7		.177293
18	8		-.223739
18	9		.089328
18	10		-.194428
18	11		.150214
18	12		-.110015
18	13		.141850
18	14		-.003975
18	15		-.071038
18	16		.036149
18	17		.194734
19		.052027	
19	1		.960064
19	2		-.198505
19	3		.047674
19	4		.035557
19	5		.150689
19	6		-.163526
19	7		.183016
19	8		-.231554
19	9		.099443
19	10		-.199076
19	11		.161854
19	12		-.119239
19	13		.149974
19	14		-.011804
19	15		-.072695
19	16		.033571
19	17		.204534
19	18		-.325225
20		-.087880	

ตารางที่ 4.33

สรุปค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายของทารก Z_t

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1	1
1	.90290	.90290
2	.82439	.049531
3	.73946	−.069074
4	.64200	−.122429
5	.55161	−.032636
6	.47215	.011928
7	.37473	−.139311
8	.28681	−.042098
9	.18459	−.143945
10	.10600	.049293
11	.05391	.100846
12	.02189	.083424
13	−.02865	−.150242
14	−.06375	−.029225
15	−.09386	.017557
16	−.13388	−.084844
17	−.17825	−.118295
18	−.22541	−.145256
19	−.26113	.018295
20	−.29315	−.007609

ตารางที่ 4.34

ค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$

ของ ∇z_t

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1	1
1	.08278	.08278
2	−.28434	−.293205
3	−.13792	−.091670
4	.00880	−.059030
5	−.03550	−.108569
6	.04258	.029060
7	−.15433	−.233622
8	−.10156	−.085913
9	−.05706	−.182949
10	.01441	−.112908
11	.02259	−.100483
12	.10450	−.015024
13	−.02506	−.109986
14	.00050	−.047457
15	−.02164	−.120060
16	−.02217	.196175
17	.22449	.199731
18	.00421	−.159407
19	−.17701	−.048972
20	−.04231	−.054877

ตารางที่ 4.35 สรุปค่า r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายของทารก ในหน่วย z_t

k	r_k	$\hat{\phi}_{kk}$
0	1	1
1	.86132	.86132
2	.71361	-.109456
3	.60887	.083205
4	.54099	.066312
5	.48058	-.006920
6	.39488	-.110992
7	.31268	-.015787
8	.20572	-.176107
9	.11825	-.006452
10	.03912	-.079783
11	-.00097	.084698
12	-.03108	-.023199
13	-.05406	.048066
14	.08856	-.074486
15	-.13629	-.051424
16	-.15411	.026255
17	-.17445	-.071770
18	-.24337	-.276023
19	-.29229	.052027
20	-.32436	-.087880

function และ partial autocorrelation function ของ Z_t , ∇Z_t , $\nabla^2 Z_t$ ที่คำนวณได้ ตามลำดับ เพื่อนำมาเขียนแผนภาพที่ ๔.๘, ๔.๙, ๔.๑๐ ตามลำดับ

<u>ลักษณะของ autocorrelation function และ partial autocorrelation function ของ Z_t</u>

ลักษณะของ r_k จะเห็นได้อย่างชัดเจนในภาพที่ ๔.๘.๑ ค่าของ autocorrelation มีค่าสูงมากใน lag ที่มีค่าน้อยแล้วค่าลดลงตามลำดับ จนมีค่าใกล้ 0 เมื่อ lag k = 12 หรือเรียกว่ามีลักษณะ exponential to zero

ส่วนค่า partial autocorrelation function จะมีลักษณะ cuts off หลัง lag 1 คือค่าของ partial autocorrelation function ใน lag ที่ 1 มีค่าสูงสุดคือ .90290 หลังจากนั้นมีค่าใกล้ 0 มาก ดังแสดงในภาพที่ ๔.๘.๒

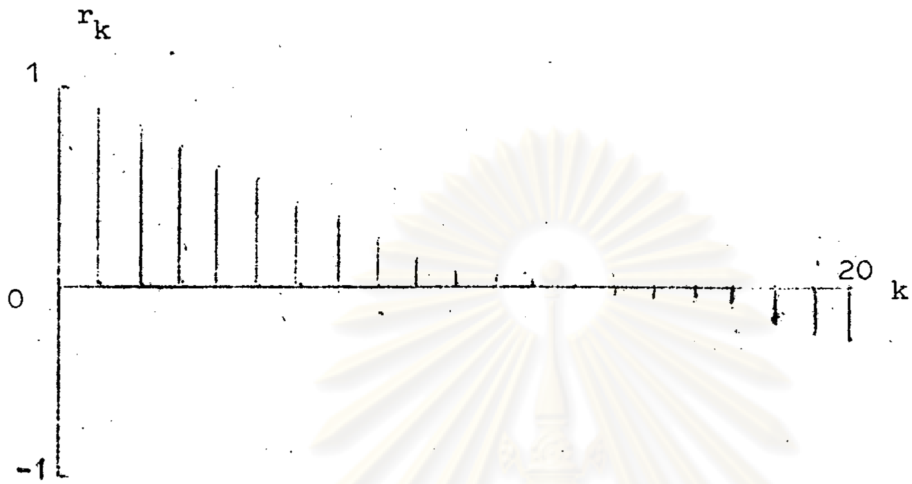
จากลักษณะ autocorrelation function แบบ expenential to zero และลักษณะ cuts off ของ partial autocorrelation function ดังกล่าว แบบจำลองของ Z_t ควรเป็น AUTOREGRESSIVE MODEL ที่มี ORDER เป็น 1 [1] ที่มีรูปสมการเป็น $Z_t = \hat{\phi}_1 Z_{t-1} + a_t$

จากลักษณะของ Autocorrelation function และ partial autocorrelation function ของ ∇Z_t หรือ $Z_t - Z_{t-1}$ ดังแสดงในตารางที่ ๔.๓๔ และภาพที่ ๔.๙ จะเห็นว่าค่า autocorrelation function และ partial autocorrelation function ตั้งแต่ lag 1 ถึง 20 มีค่าน้อยมาก และลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเทียบระหว่าง Autocorrelation function ของ Z_t

---

1 Box and Jenkins, <u>Time Series Analysis forefasting and control</u> ("Holden-day") p.57, p.65

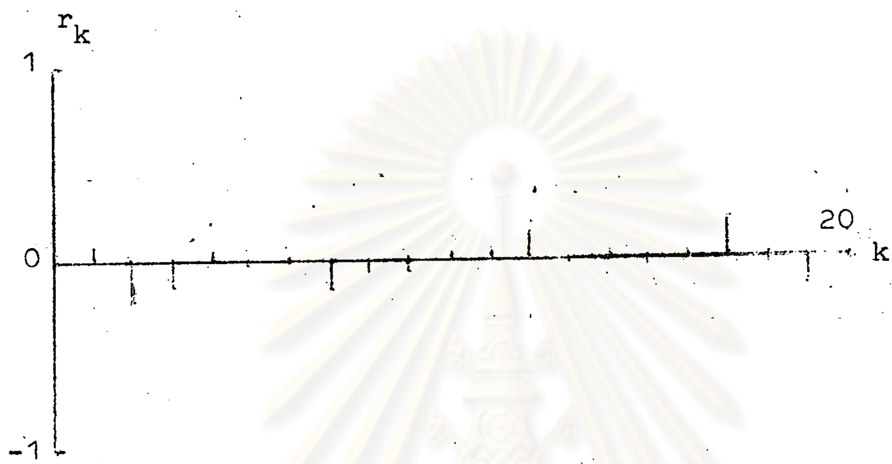
ภาพที่ 4.8สรุปแผนภาพลักษณะ r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายของทารก Z_t



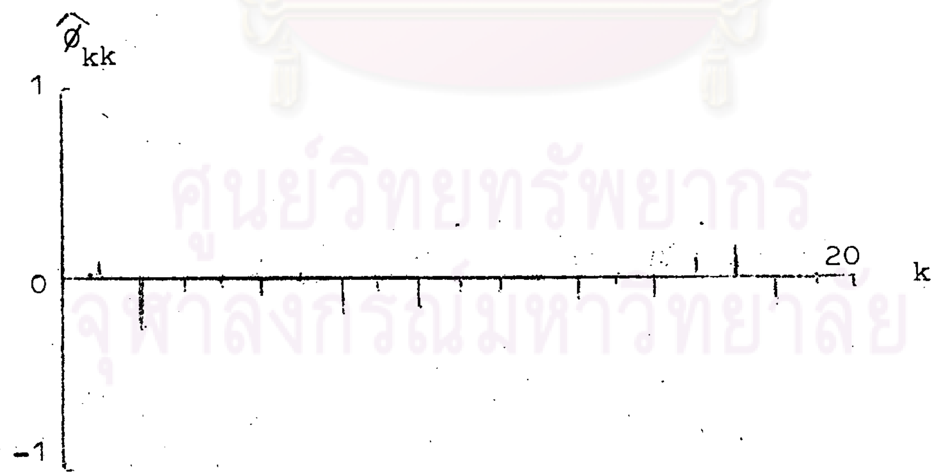
ภาพที่ 4.8.1 ค่า autocorrelation function ของ Z_t

ภาพที่ 4.8.2 ค่า partial autocorrelation function ของ Z_t

ภาพที่ 4.9 สรุปแผนภาพลักษณะ r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายทารกในหน่วย ∇z_t



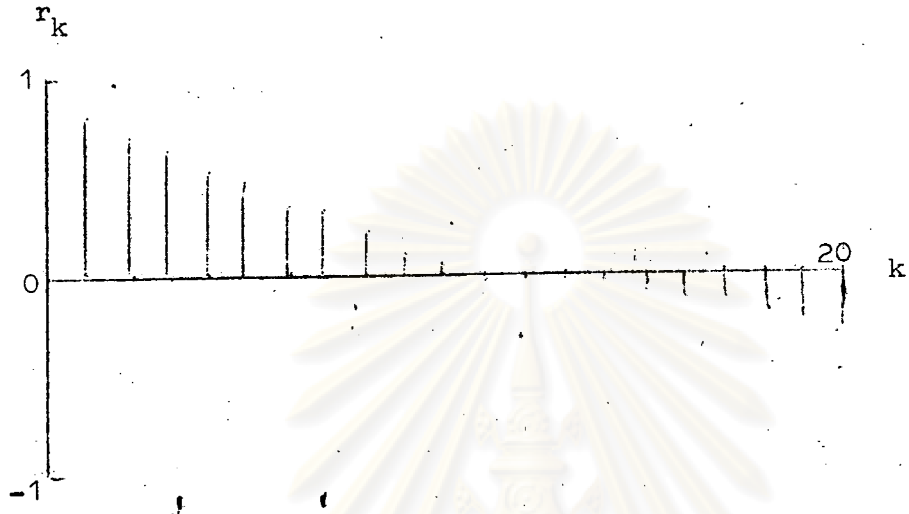
ภาพที่ 4.9.1 ค่า autocorrelation function ของ ∇Z_t



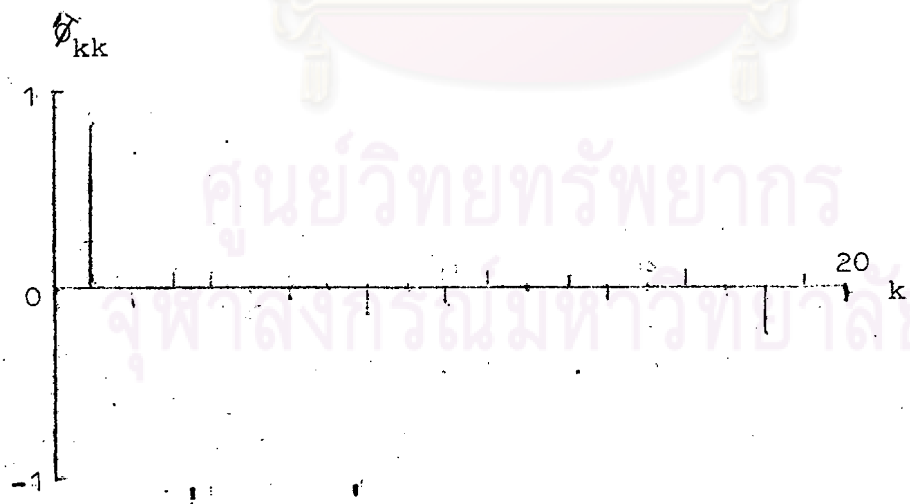
ภาพที่ 4.9.2 ค่า partial autocorrelation function ของ ∇Z_t

ภาพที่ 4.10 สรุปแผนภาพ r_k และ $\hat{\phi}_{kk}$ ของอัตราตายของทารกในหน่วย

$\nabla^2 Z_t$



ภาพที่ 4.10.1 ค่า autocorrelation function ของ $\nabla^2 Z_t$



ภาพที่ 4.10.2 ค่า partial autocorrelation function ของ $\nabla^2 Z_t$

กับ ∇Z_t จะเห็นว่า เดิม Z_t มี autocorrelation function เข้าสู่จุด 0 ได้ใน lag สูง ๆ หรือลดลงช้ามาก เมื่อพิจารณาค่า Autocorrelation function ของ ∇Z_t จะเห็นว่าค่า r_k ใน lag ที่ 1,2,3 มีค่าสูงกว่า lag อื่น นอกนั้นมีค่าใกล้ 0 และลักษณะ Partial Autocorrelation function ก็ยังคงแสดงลักษณะคล้ายกับลักษณะของ Autocorrelation functionซึ่งสอดคล้องกับลักษณะของ The first order autoregressive - The first order moving average. model หรือ ARMA (1,1)

ดังนั้น แบบจำลองของอนุกรมอัตราตายของทารกในหน่วย ∇Z_t ควรเป็น ARMA (1,1) ซึ่งมีรูปเป็น

$$\nabla Z_t - \phi_1 \nabla Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

แต่เมื่อ $\nabla^2 Z_t$ ในตารางที่ ๔.๒๖ ถูกนำมาหาค่า autocorrelation function และ partial autocorrelation function แล้ว จะกลับแสดงลักษณะคล้ายกับลักษณะของ autocorrelation function และ partial autocorrelation function ของ Z_t คือเป็นลักษณะของแบบจำลอง Autoregressive ที่มี order เป็น 1 อีกอย่างเห็นได้ชัดเจนในภาพที่ ๔.๑๐ และตารางที่ ๔.๓๕

แบบจำลองของอัตราตายของทารก จึงอาจอยู่ในรูป

$$\nabla^2 Z_t = \phi_1 \nabla^2 Z_{t-1} + a_t$$

จากการวิเคราะห์นี้ได้แบบจำลอง ๓ แบบ ที่อาจเป็นแบบจำลองของอนุกรมอัตราตายของทารก ดังนี้

๑. AR (1) ในหน่วย Z_t คือมีรูปเป็น $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$

๒. ARMA(1,1) ในหน่วยของ ∇Z_t มีรูปเป็น

$$\nabla Z_t - \phi_1 \nabla Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

๓. AR(1) ในหน่วย $\nabla^2 Z_t$ มีรูปเป็น $\nabla^2 Z_t = \phi_1 \nabla^2 Z_{t-1} + a_t$

จะเห็นว่า ทุกแบบจำลองมีลักษณะเป็น AUTOREGRESSIVE PROCESS ทั้งสิ้น และมี ORDER เป็น 1 ร่วมด้วยเสมอ ดังนั้นแบบจำลอง ที่ควรเลือกก็คือ แบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER เป็นหนึ่ง และรูปของสมการง่ายที่สุด คือ แบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ที่มี ORDER 1 ในหน่วย Z_t หรืออัตราตายของทารกรายปี ดังสมการ

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

การที่สมการนี้เป็นสมการที่เหมาะสมที่สุด เพราะเป็นสมการที่ได้รับการสนับสนุน หรือสอดคล้องกับ แบบจำลองในหน่วย ∇Z_t และ $\nabla^2 Z_t$ นอกจากนี้ยังมีรูปง่ายที่สุด คือ ประมาณค่าอัตราตายของทารกในปีปัจจุบัน จากอัตราตายของทารกในปีที่ผ่านไปโดยอาศัยค่า ϕ_1

<u>การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Nonstationary ของอนุกรมอัตราตายทารก</u>

เนื่องจากแบบจำลองที่ใช้เป็น Autoregressive มี order 1 และมีรูปสมการเป็น $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$

ϕ_1 จึงประมาณจาก ค่า autocorrelation function ของอนุกรมอัตราตายของทารกที่มี lag = 1[1] ด้วย

$$\hat{\phi}_1 = r_1 = .9029$$

---

1 Box & Jenkins, <u>Time Series Analysis forecasting and control</u>, ("Holden-day"), p. 243

ดังนั้น อัตราตายของทารก ควรประมาณได้จากแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ที่มี order 1 และมีรูปเป็น

$$\hat{Z}_t = .9029\ Z_{t-1}$$

หรือเป็นแบบจำลอง Nonstationary ที่มี $p = 1,\ d = 0$ และ $q = 0$ นั่นเอง

<u>การทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลอง $\hat{Z}_t = .9029\ Z_{t-1}$</u>

จะใช้ค่าสถิติ Q เช่นเดียวกับแบบจำลอง Stationary ของส่วนเบี่ยงเบนอัตราตายของทารก อาศัยค่าผิดพลาดจากตารางที่ ๔.๓๖ มาคำนวณหาค่า autocorrelation function ของค่าผิดพลาด $r_k(\hat{a})$ โดยแสดงการคำนวณ $r_k(\hat{a})$ ในตารางที่ ๔.๓๗ และได้

$$Q = n \sum_{k=1}^{20} r_k^2\ (a)$$

$$= 35\ [(.19115)^2 + (-.18421)^2 + \ldots\ldots + (-.07924)^2$$

$$= 35\ (.23567) = 8.24845$$

ด้วย degree of freedom $= K-p-q = 20-1-0 = 19$

จากตาราง $\chi^2_{.95(19)} = 30.14$ เมื่อเปรียบเทียบค่า Q กับค่า χ^2 ในตาราง χ^2 จะเห็นว่า

$$Q < \chi^2_{.95(19)}$$

การทดสอบนี้แสดงว่า ยอมรับความเหมาะสมของแบบจำลองที่ระดับ นัยสำคัญ 5 % ดังนั้น แบบจำลองของอัตราตายของทารกที่เหมาะกับข้อมูล คือ

$$\hat{Z}_t = .9029\ Z_{t-1}$$

ตาราง 4.36 ค่าผิดพลาด $\hat{a}_t$ จากการใช้แบบจำลอง AUTOREGRESSIVE

$$\hat{Z}_t = .9029 Z_{t-1}$$

Z_t	$\hat{Z}_t$	$\hat{a}_t = Z_t - \hat{Z}_t$
91.10000	94.08218	-2.98218
101.40000	82.25419	19.14590
109.80000	91.55406	18.24600
99.80000	99.13842	.66158
94.80000	90.10942	4.69058
97.40000	85.59492	11.80508
98.70000	87.94246	10.75754
105.60000	89.11623	16.48380
94.60000	95.34624	-.74624
79.80000	85.41434	-5.61434
63.10000	72.05142	-8.95142
65.90000	56.97299	8.92701
62.40000	59.50111	2.89889
65.30000	56.34096	8.95904
62.80000	58.95937	3.84063
64.90000	56.70212	8.19788
63.50000	58.59821	4.90179
56.10000	57.33415	-1.23415
55.20000	50.65269	4.54731
61.70000	49.84008	11.85992
54.10000	55.70893	-1.60893
47.10000	48.84689	-1.74689
48.90000	42.52659	6.37341
51.00000	44.15181	6.84819
44.70000	46.04790	-1.34790
37.90000	40.35963	-2.45963
37.80000	34.21991	3.58009
31.20000	34.12962	-2.92962
33.50000	28.17048	5.32952
27.90000	30.24715	-2.34715
26.50000	25.19091	1.30909
26.20000	23.92685	2.27315
25.50000	23.65598	1.84402
22.50000	23.02395	-.52395

ตาราง 4.37 แสดงการคำนวนค่า $r_k(\hat{a})$ ของแบบจำลอง $\hat{Z}_t = .9029Z_{t-1}$

(1) t	$\Sigma(a_t - \bar{a})(a_{t+k} - \bar{a})$ (2)	$c_k = (2)/34$ (3)	$r_k = c_k/43.08644$ (4)
0	1464.93896	43.08644	1
1	280.02540	8.23604	.19115
2	-269.85960	-7.93705	-.18421
3	-153.45670	-4.51343	-.10475
4	201.08830	5.91436	.13727
5	96.10777	2.82670	.06561
6	84.11661	2.47402	.05742
7	-183.11810	-5.38583	-.12500
8	-205.00430	-6.02954	-.13994
9	-67.51813	-1.98583	-.04609
10	100.60820	2.95906	.06868
11	108.73540	3.19810	.07423
12	151.14370	4.44540	.10317
13	-47.33192	-1.39212	-.03231
14	-28.83663	-.84814	-.01968
15	-6.10635	-.17960	-.00417
16	-100.46660	-2.95490	-.06858
17	254.53410	7.48630	.17375
18	-3.58722	-.10551	-.00245
19	-240.51050	-7.07384	-.16418
20	-116.07880	-3.41408	-.07924

จากการวิเคราะห์หาแบบจำลองโดยวิธีวิเคราะห์อนุกรมเวลา สามารถอธิบายแนวโน้มของอัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน โดยใช้สมการรีเกรสชั่น ที่มีเวลาเป็นตัวแปรอิสระเพียงอย่างเดียวในการกำหนดค่าของอัตราตายของทารก ส่วนเบี่ยงเบนของอัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ที่กระเพื่อมห่างไปจากแนวโน้มระยะยาวของอัตราตายทารกนั้น สามารถอธิบายได้ด้วย LINEAR STATIONARY, AUTOREGRESSIVE MODEL โดยใช้ทฤษฎี Stationary time series มาประยุกต์

แบบจำลองสำหรับแนวโน้ม และส่วนเบี่ยงเบนจากแนวโน้ม ได้อาศัยอัตราตายของทารกที่มีอายุต่ำกว่า ๑ ปี ต่อเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ที่เกิดขึ้นตั้งแต่ พ.ศ. ๒๔๘๐ ๒๕๑๔ มาวิเคราะห์ และได้แบบจำลองที่มีรูปสมการคณิตศาสตร์ต่าง ๆ สำหรับแนวโน้มระยะยาวและส่วนเบี่ยงเบน ดังนี้

๑. แบบจำลองสำหรับแนวโน้มระยะยาวเป็นเส้นตรงสเกลเลขคณิต มีรูปเป็น

$$\hat{Z}_t = 107.0232 - 2.57633t$$

จุดตั้งต้น : ปี ๒๔๘๐ หน่วยเวลา t เป็นปี

ส่วนแบบจำลองของส่วนเบี่ยบเบนจากแนวโน้ม

$$\hat{\tilde{Z}}_t = .755131\, \tilde{Z}_{t-1} - .329112\, \tilde{Z}_{t-2}$$

เมื่อเลื่อนจุดตั้งต้นของสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิตของแนวโน้มจากปี ๒๔๘๐ ไปปี ๒๔๙๗ ซึ่งมีรูปสมการ เป็น $\hat{Z}_t = 63.2257 - 2.57633t$ Stationary model สำหรับ แบบจำลองส่วนเบี่ยงเบนยังคงเดิม

ความหมายที่สำคัญของสมการคือ แนวโน้มระยะยาวของอัตราตายของทารกจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ๑ ปี ด้วยค่าเฉลี่ย ๒.๕๗๖๓๓ ต่อเด็กเกิดมีชีพ ๑,๐๐๐ คน ส่วนที่เบี่ยบเบนหรือกระเพื่อมไปจากแนวโน้มนั้น เป็นผลจากการกระเพื่อมขึ้นลงในปีที่ผ่านมาแล้ว ๒ ปี คือ ถ้าในปีใดที่มีอัตราตายของทารกสูงกว่าปกติ ด้วยสาเหตุใดสาเหตุหนึ่ง

จะทำให้ค่าอัตราตายของทารกในปีต่อมา 1 ปี และ 2 ปี สูงขึ้น อาจกล่าวได้ว่า อัตราตายของทารกที่เปลี่ยนแปลงจากแนวโน้มนั้นมีผลทำให้ค่าอัตราตายของทารกเปลี่ยนแปลงไปด้วย เป็นเวลา 2 ปี[1]

2. แบบจำลองสำหรับแนวโน้มระยะยาวสำหรับเสกล log มีรูปเป็น

$$\widehat{\log Z_t} = 2.088572 - .019526t$$

จุดตั้งต้น : ปี 2480 หน่วยเวลา t เป็นปี

ซึ่งเป็นสมการรีเกรสชั่นเส้นตรงในเสกล log หาแบบจำลองนี้เพื่อให้การประมาณค่าอัตราตายของทารกได้ใกล้เคียงยิ่งขึ้น

และส่วนเบี่ยงเบนไปจากสมการของแนวโน้มนี้ มีรูปเป็นสมการ Autoregressive order 2

$$\tilde{Z}'_t = .710117\ \tilde{Z}_{t-1} - 133313\ \tilde{Z}_{t-2}$$

ถึงแม้ว่ามีการเลื่อนจุดตั้งต้นของสมการรีเกรสชั่นเส้นตรงของแนวโน้มไปที่ปี พ.ศ. 2497 ซึ่งมีรูปเป็น

$$\widehat{\log Z_t} = 1.756629 - .019526\ t$$

แบบจำลองของส่วนเบี่ยงเบนยังคงมีรูปสมการ Autoregressive order 2 เหมือนเดิมทุกอย่าง

ในทำนองเดียวกัน ความหมายของสมการเส้นตรงเสกล log คือ แนวโน้มของอัตราตายของทารกในเสกล log จะมีค่าลดลงเฉลี่ย .019526 ต่อปี และ

---

1 P. Holgate, "Time Series Analysis Applied to wildfo... Counts", Journal of the Royal Statistical Society XV, No 1 (1966), P.19

ส่วนเบี่ยงเบนของอัตราตายทารก ยังคงสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ Autoregressive order 2 ดังกล่าว ซึ่งหมายความว่า อัตราตายของทารกที่กระเพื่อมขึ้นลงจากแนวโน้มในปีปัจจุบันได้รับผลสะท้อนมาจากการกระเพื่อมขึ้นลงของอัตราตายของทารกในปีที่ผ่านมาแล้ว 1 ปี และ 2 ปี

อย่างไรก็ดี สมการคณิตศาสตร์หรือแบบจำลองที่ได้รับยังไม่สามารถให้ผลการประมาณค่าอัตราตายของทารก ได้ใกล้เคียงความจริงได้ ถ้าใช้สมการรีเกรสชั่นเส้นตรงที่ได้ จะเห็นว่าอัตราตายของทารกจะมีค่าเท่ากับ 0 ในเวลาไม่ช้า ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ควรจะเป็น ประกอบกับปัจจัยหรือสาเหตุที่สำคัญที่ทำให้อัตราตายทารกมีค่าเปลี่ยนแปลงไปมีมาก จึงมีแบบจำลองอื่นที่ให้ผลการประมาณค่าที่ดีขึ้น และมีรูปง่ายที่สุด โดยอาศัยทฤษฎีของ Stationary time series เหมือนเดิม แต่ใช้กับหน่วย Z_t , ∇Z_t, $\nabla^2 Z_t$ ได้แบบจำลอง NONSTATIONARY สำหรับอนุกรมอัตราตายของทารกเป็น Autoregressive ที่มี order 1 และมีรูปสมการเป็น

$$\hat{Z}_t = .9029\, Z_{t-1}$$

จะเห็นว่า อัตราตายของทารกในปีปัจจุบัน จะประมาณค่ามาจาก อัตราตายทารกในปีที่แล้ว 1 ปี ด้วยน้ำหนัก .9029 การประมาณค่าจากสมการนี้ จึงมีข้อยุ่งยากน้อยที่สุด และไม่ต้องอาศัยข้อมูลอื่นเลย

แบบจำลองต่าง ๆ ที่วิเคราะห์ได้ ได้รวบรวมสรุปไว้ในตาราง 4.38 เนื่องจากแบบจำลองสำหรับอนุกรมอัตราตายของทารกมีอยู่หลายแบบด้วยกัน จึงคำนวณ R^2 ไว้ใช้เปรียบเทียบความเหมาะสมของแบบจำลอง อัตราตายของทารกหรือส่วนเบี่ยงเบนที่เกิดขึ้นจริงระหว่างหลายแบบจำลองเหล่านั้น โดยคำนวณ R^2 จากสูตร

$$R^2 = \frac{\Sigma(Y_c - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}$$

โดย R^2 เป็นอัตราส่วนระหว่าง $\dfrac{\text{explained sum of squares}}{\text{total sum of squares}}$

ตารางที่ ๔.๓๘

ตารางสรุปสมการคณิตศาสตร์สำหรับแบบจำลองที่ได้วิเคราะห์

แนวโน้มระยะยาว	จุดตั้งต้น	ส่วนเบี่ยงเบน
$\hat{Z}_t = 107.0232-2.57633t$	พ.ศ. ๒๔๘๙	$\tilde{Z}_t = .755131\tilde{Z}_{t-1} - .329112\tilde{Z}_{t-2}$
$\hat{Z}_t = 63.2257-2.57633t$	พ.ศ. ๒๔๙๗	
$\widehat{\log Z_t} = 2.088572-.019526t$	พ.ศ. ๒๔๘๐	$\tilde{Z}_t = .710117\tilde{Z}_{t-1} - .133313\tilde{Z}_{t-2}$
$\widehat{\log Z_t} = 1.756629-.019526t$	พ.ศ. ๒๔๙๗	
$\hat{Z}_t = .9029Z_{t-1}$		

Y เป็นค่าสังเกตที่เกิดขึ้นจริง

Y_c เป็นค่าตัวแปรที่ได้จากแบบจำลอง

$\bar{Y}$ เป็นค่าเฉลี่ย ของค่าสังเกตที่เกิดขึ้นจริง

และแสดงค่า R^2 ที่ได้จากการคำนวนของคอมพิวเตอร์พร้อมทั้งแบบจำลองต่างๆใน ตารางที่ 4.39

จากการเปรียบเทียบ ระหว่างแบบจำลองของอัตราตายของทารก 3 แบบคือ สมการเส้นตรงสเกลเลขคณิต **Linear Regression** สมการเส้นตรงสเกล log ซึ่งเป็น **Linear Regression** เช่นเดียวกันจะเห็นว่า ค่า R^2 ของสมการเส้นตรงสเกลlog มากกว่าสมการเส้นตรงสเกลเลขคณิต แสดงว่าสมการเส้นตรงสเกลlog เหมาะสมกว่าการสร้างด้วยเส้นตรงเลขคณิต แต่เมื่อนำมาเทียบกับแบบจำลอง AUTOREGRESSIVE ORDER1 ซึ่งมีค่า R^2 ถึง .95096 แสดงว่าความเหมาะสมของสมการนี้สูงกว่าความเหมาะสมของ 2สมการแรก

ดังนั้นสมการคณิตศาสตร์ของอัตราตายทารกที่มีอายุต่ำกว่า 1ปีต่อคนเกิดมีชีพ 1,000คนในประเทศไทย จึงควรใช้

$$\hat{Z}_t = .9929Z_{t-1}$$

เป็นสมการประมาณค่าอัตราตายของทารกรายปีเฉพาะผู้ที่มาแจ้งจดทะเบียนเท่านั้น

เมื่อพิจารณาความเหมาะสมของสมการส่วนเบี่ยงเบนของอัตราตายทารกทั้ง 2แบบจาก R^2 ซึ่งมีค่าน้อยเพียง.39311, .40250ตามลำดับ ในระหว่างสมการ AUTOREGRESSIVE ORDER 2 ของส่วนเบี่ยงเบนนี้ สมการ AUTOREGRESSIVE ORDER2 ที่มีรูปเป็น

$$\tilde{Z}_t = .710117\tilde{Z}_{t-1} - .133313\tilde{Z}_{t-2}$$

เหมาะสมมากกว่า

ตารางที่ ๔.๓๙

ตารางสรุปแบบจำลอง, ค่าพารามิเตอร์ และ R^2

ตัวแปร	ชนิดของแบบจำลอง	intercept	slope	ϕ_1	ϕ_2	R^2
๑ อัตราตายของทารก [illegible] Z_t	Linear regression	107.0232 63.22571	-2.57633 -2.57633			.93591
๒ ส่วนเบี่ยงเบน $\tilde{Z}_t$	AUTOREGRESSIVE ORDER2			.755131	-.329112	.39311
๓ log ของอัตราตายของทารก [illegible] ($\log Z_t$)	Linear regression	2.088572 1.756629	-.019526 -.019526			.93877
๔ ส่วนเบี่ยงเบนในรูป $\log(\tilde{Z}_t)$	AUTOREGRESSIVE ORDER2			.710117	-.133313	.40250
๕ อัตราตายของทารก Z_t	AUTOREGRESSIVE ORDER1			.9029		.95096