บทที่ 2

วิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัล
(Frontal Substructure Method)

2.1 ความนำ

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงวิธีฟรอนทัลและวิธีโครงสร้างย่อยและการนำเอาวิธีทั้งสองมารวมกันกลายเป็นวิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัลซึ่งเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพพอสำหรับวิเคราะห์โครงสร้างที่ต้องการเนื้อที่หน่วยความจำหลักเกินความจุของหน่วยความจำหลักของเครื่องและจะมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นในโครงสร้างที่มีโครงสร้างย่อยเหมือนกันเป็นจำนวนมาก ดังนั้นจึงได้นำเอาวิธีดังกล่าวมาวิเคราะห์ผนังต้านแรงเฉือน

2.2 วิธีโครงสร้างย่อย (Substructure Method)

วิธีโครงสร้างย่อยเป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบการรวมสติฟเนสโดยตรง เหมาะสำหรับโครงสร้างที่มีขนาดใหญ่เกินความจุของหน่วยความจำหลักของเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยเราแบ่งโครงสร้างออกเป็นโครงสร้างย่อยหลาย ๆ ชิ้น แต่ละชิ้นจะยึดต่อกันด้วยขั้วที่ขอบ และจะทำการคำนวณในแต่ละโครงสร้างย่อยจนหมดก่อน จากนั้นจะนำผลที่ได้มารวมกันเพื่อทำการคำนวณในโครงสร้างทั้งหมด วิธีโครงสร้างย่อยแบ่งออกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. แบ่งโครงสร้างออกเป็นโครงสร้างย่อยโดยแต่ละโครงสร้างย่อยจะถูกแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ เช่น Q4 หรือ Q8 ชิ้นส่วนย่อยจะเชื่อมต่อกันที่ขั้ว โดยทั่วไปขั้วจะมีอยู่ 2 แบบคือ

   ก. ขั้วที่ถูกกำจัดออกไป (Condensed Nodes) ได้แก่ ขั้วที่อยู่ในโครงสร้างย่อย หรือขั้วที่ไม่ได้ต่อกับขั้วของโครงสร้างย่อยอื่นที่อยู่ใกล้เคียง

   ข. ขั้วที่คงอยู่ (Retained Nodes) ได้แก่ ขั้วที่อยู่ที่ขอบของโครงสร้างย่อยซึ่งต่อกับขั้วของโครงสร้างย่อยอื่นที่อยู่ใกล้เคียง

จากรูปที่ 2.1 แสดงขั้วทั้ง 2 แบบของแต่ละโครงสร้างย่อย ค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วของโครงสร้างย่อยสามารถเขียนได้ในรูป

$$\underset{\sim}{U} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U}_c \\ \\ \underset{\sim}{U}_r \end{Bmatrix} \qquad (2.1)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{U}_c$ = ระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ถูกกำจัดออกไป

$\underset{\sim}{U}_r$ = ระดับขั้นความเสรีของขั้วที่คงอยู่

จากสมการของความสมดุลย์

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R} \qquad (2.2)$$

สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{cc} & \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{cr} \\ \\ \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{rc} & \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U}_c \\ \\ \underset{\sim}{U}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{R}_c \\ \\ \underset{\sim}{R}_r \end{Bmatrix} \qquad (2.3)$$

โดยที่ดรรชนีล่าง c หมายถึงค่าที่ถูกกำจัดออกไป และ r หมายถึงค่าที่คงอยู่

2. กำจัดค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ถูกกำจัดออกไป สมการ (2.3) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{cc}\underset{\sim}{U}_c + \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{cr}\underset{\sim}{U}_r = \underset{\sim}{R}_c \qquad (2.4)$$

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{rc}\underset{\sim}{U}_c + \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{rr}\underset{\sim}{U}_r = \underset{\sim}{R}_r \qquad (2.5)$$

จากสมการ (2.4)

$$\underset{\sim}{U}_c = \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{cc}^{-1} \{ \underset{\sim}{R}_c - \underset{\sim}{\underset{\sim}{K}}_{cr}\underset{\sim}{U}_r \} \qquad (2.6)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แทน $\underset{\sim}{U}_c$ ลงในสมการ (2.5)

$$\{\underset{\sim}{K}_{rr} - \underset{\sim}{K}_{rc}\underset{\sim}{K}_{cc}^{-1}\underset{\sim}{K}_{cr}\}\underset{\sim}{U}_r = \underset{\sim}{R}_r - \underset{\sim}{K}_{rc}\underset{\sim}{K}_{cc}^{-1}\underset{\sim}{R}_c \qquad (2.7)$$

$$\underset{\sim}{K}_{rr}^{*}\underset{\sim}{U}_r = \underset{\sim}{R}_r^{*} \qquad (2.8)$$

โดยที่
$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{K}_{rr}^{*} &= \underset{\sim}{K}_{rr} - \underset{\sim}{K}_{rc}\underset{\sim}{K}_{cc}^{-1}\underset{\sim}{K}_{cr} \\ \underset{\sim}{R}_r^{*} &= \underset{\sim}{R}_r - \underset{\sim}{K}_{rc}\underset{\sim}{K}_{cc}^{-1}\underset{\sim}{R}_c \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

3. เมื่อกำจัดสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงหรือค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ถูกกำจัดออกไปแล้วก็จะทำการรวมสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของโครงสร้างทั้งหมดเข้าด้วยกัน และใช้วิธีการกำจัดของเกาส์เพื่อหาค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่คงอยู่

4. เมื่อทราบค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่คงอยู่แล้ว จะทำการแทนค่าย้อนหลังเพื่อหาค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ถูกกำจัดออกไปจากสมการ (2.6)

ข้อดีของวิธีโครงสร้างย่อย คือ สามารถวิเคราะห์โครงสร้างที่ต้องการเนื้อที่หน่วยความจำมากกว่าหน่วยความจำของเครื่องได้ โดยเฉพาะเหมาะกับโครงสร้างที่มีโครงสร้างย่อยซ้ำ ๆ กันโดยจะช่วยลดเวลาในการคำนวณและการป้อนข้อมูล

2.3 วิธีฟรอนทัล (Frontal Method)

วิธีฟรอนทัลเป็นวิธีการรวมสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของชิ้นส่วนย่อยเข้าด้วยกันทีละชิ้นส่วนย่อย และทำการกำจัดค่าสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วที่ไม่ได้ต่อกับชิ้นส่วนย่อยอื่นโดยวิธีการกำจัดของเกาส์ ค่าสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วที่ถูกกำจัดออกไปจะเก็บไว้ในหน่วยความจำสำรอง ดังนั้นจึงมีเพียงค่าสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วที่ไม่ถูกกำจัดอยู่ภายในหน่วยความจำของเครื่องซึ่งเป็นเพียงส่วนน้อยเท่านั้น ทำให้วิเคราะห์โครงสร้างที่มีจุดต่อมาก ๆ ได้

วิธีฟรอนทัลจะมีแถวลำดับที่เรียกว่า ฟรอนต์ (Front) ทำหน้าที่เก็บข้อมูลหมายเลขขั้วที่เข้ามาในฟรอนต์ทั้งก่อนและหลังที่มีการกำจัดขั้วใด ๆ ออกไป อย่างไรก็ดีในที่นี้ฟรอนต์อาจหมายถึง ค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วหรือสมการก็ได้

ขั้นตอนของวิธีฟรอนทัล มีดังนี้

1. นำชิ้นส่วนย่อยเข้ามาในฟรอนต์ทีละชิ้นดังรูปที่ 2.2 ในตัวอย่างนี้จะสมมุติให้แต่ละขั้วมีค่าระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 1 เมื่อนำชิ้นส่วนย่อยชิ้นที่ 1 เข้ามาฟรอนต์อันแรกก็จะประกอบด้วยสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงหรือค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ 1, 2, 8, 9

2. ทำการกำจัดค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ 1 ออกไปและเก็บไว้ในหน่วยความจำสำรอง เพราะค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ 1 ไม่ได้เกี่ยวข้องกับชิ้นส่วนย่อยอื่น ๆ ที่เหลืออยู่

3. นำชิ้นส่วนย่อยที่ 2 เข้ามารวม จะต้องรวมสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วของชิ้นส่วนย่อยที่ 2 กับสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วที่ไม่ถูกกำจัดในข้อ 2 จะประกอบด้วยขั้วที่ 2, 3, 8, 9, 10

4. จากนั้นจะทำการกำจัดและรวมสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วของชิ้นส่วนย่อยอื่น ๆ จนถึงชิ้นส่วนย่อยสุดท้ายที่ 18 โดยค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ถูกกำจัดออกไปก็จะนำไปเก็บเรียงลำดับในหน่วยความจำสำรองต่อจากขั้นตอนที่ 2 และมีความกว้างของฟรอนต์ที่โตที่สุดเท่ากับ 5 ขั้ว

5. แทนค่าย้อนหลังเพื่อจะได้ค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วต่าง ๆ โดยเริ่มจากค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วของชิ้นส่วนย่อยที่ 18 กลับมาถึงค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ 1 ของชิ้นส่วนย่อยที่ 1 ทั้งนี้โดยใช้สัมประสิทธิ์ที่ได้กำจัดออกไปและเก็บไว้ในหน่วยความจำสำรอง (ขั้นตอนที่ 2 และ 4)

จะเห็นว่าวิธีฟรอนทัลนั้นใช้เนื้อที่หน่วนความจำของเครื่องสำหรับสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเพียง 15 ตัวเท่านั้น และในกรณีนี้ความกว้างของฟรอนต์ในแต่ละฟรอนต์จะมีค่าไม่เกินความกว้างของแถบ (Bandwidth) กล่าวคือ ความกว้างของแถบที่เล็กที่สุดเท่ากับ 5 ขั้ว

(โดยการจัดหมายเลขขั้วในรูป 2.2 เสียใหม่) และสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์แถบใช้เนื้อที่หน่วยความจำเท่ากับ 160 ตัว ดังนั้นข้อดีของวิธีฟรอนทัล คือ สามารถวิเคราะห์โครงสร้างขนาดใหญ่ที่ไม่สามารถวิเคราะห์โดยใช้เนื้อที่หน่วยความจำของเครื่องเพียงอย่างเดียวได้

2.4 วิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัล (Frontal Substructure Method)

เป็นวิธีผสมระหว่างวิธีโครงสร้างย่อยกับวิธีฟรอนทัล เมื่อพิจารณาถึงข้อดีทั้ง 2 วิธี สามารถนำเอาวิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัลมาวิเคราะห์ผนังต้านแรงเฉือนได้ เพราะผนังต้านแรงเฉือนส่วนใหญ่จะมีลักษณะยาวและในแต่ละชั้นจะเหมือน ๆ กัน ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.3.ก ผนังต้านแรงเฉือนมี 4 ชั้น โดยที่ช่องเปิดมีขนาดเท่ากันวางอยู่ในตำแหน่งเดียวกันในแต่ละชั้น แบ่งโครงสร้างออกเป็นโครงสร้างย่อยตามลักษณะของชั้นและแบ่งโครงสร้างย่อยแต่ละชั้นออกเป็นชิ้นส่วนย่อยชนิด Q4 โดยเรียงลำดับหมายเลขชิ้นส่วนย่อยเพื่อจำกัดความกว้างของฟรอนต์ที่โตที่สุดให้มีขนาดเล็กที่สุด และมีน้ำหนักกระทำเป็นจุดกระทำที่ขั้วต่าง ๆ ของชิ้นส่วนย่อย ดังแสดงในรูป สมมุติให้แต่ละขั้วมีค่าระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 1 โครงสร้างย่อยชั้นที่ 1 และ 2 มีรูปร่างและสมบัติต่าง ๆ เหมือนกัน ชั้นที่ 3 และ 4 มีรูปร่างและสมบัติต่าง ๆ เหมือนกันเช่นกัน สำหรับผนังต้านแรงเฉือนแบบนี้ ความกว้างของฟรอนต์ที่โตที่สุดในแต่ละโครงสร้างย่อยมีค่าเท่ากัน และขั้วของโครงสร้างย่อยจะแบ่งออกเป็นขั้วที่คงอยู่กับขั้วที่ถูกกำจัดออกไป วิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัลแบ่งออกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. ในแต่ละโครงสร้างย่อยจะทำการกำจัดและรวมค่าสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของชิ้นส่วนย่อยเข้าด้วยกันทีละชิ้นส่วนย่อยตามลำดับโดยวิธีฟรอนทัล ดังรูปที่ 2.3.ข ในขณะเดียวกัน ค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่ถูกกำจัดออกไปจะเก็บไว้ในหน่วยความจำสำรอง สำหรับค่าสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงหรือค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่คงอยู่จะเก็บไว้ใช้เป็นของชิ้นส่วนย่อยในรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับถัดไป ความกว้างของฟรอนต์ที่โตที่สุดเท่ากับ 14 เพื่อช่วยลดเวลาการทำงานของเครื่องและเนื้อที่ในหน่วยความจำสำรองอาศัยรูปร่างและสมบัติต่าง ๆ ที่เหมือนกัน จะทำการรวมและกำจัดค่าสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของขั้วต่าง ๆ เฉพาะโครงสร้างย่อยที่ 1 และ 3 เท่านั้น สำหรับรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 1

013489

2. รูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ถัดไป คือ ระดับที่ 2 การกำจัดและรวมคำสติฟเนสและเวกเตอร์ของแรงของชิ้นส่วนย่อยเข้าด้วยกันก็ทำเช่นเดียวกับรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 1 ด้วยวิธีฟรอนทัล ดังรูปที่ 2.3.ค โดยรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 2 จะมีโครงสร้างย่อย 1 รูปแบบ ซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อย 4 ชิ้น

3. แทนค่าย้อนหลังจากรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 2 มาจนถึงรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 1 โดยวิธีฟรอนทัล คือ เริ่มจากค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่เก็บไว้ในสมการสุดท้ายของรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 2 มาจนถึงค่าระดับขั้นความเสรีของขั้วที่เก็บไว้ในสมการแรกของรูปแบบโครงสร้างย่อยในระดับที่ 1

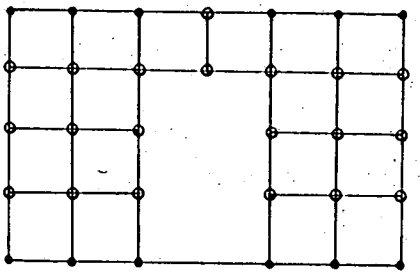
เราจะแสดงให้เห็นภายหลังว่า สำหรับผนังต้านแรงเฉือนที่มีการแบ่งโครงสร้างออกเป็นโครงสร้างย่อยดังรูป 2.3.ก การใช้โครงสร้างย่อยเพียงแค่ระดับที่ 2 จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการใช้โครงสร้างย่อยระดับที่สูงกว่า เช่น ระดับที่ 3 เป็นต้น

ข้อดีของวิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัล คือ

ก. ช่วยลดเวลาทำงานของเครื่องและช่วยประหยัดเนื้อที่ของหน่วยความจำหลัก โดยเฉพาะโครงสร้างที่มีโครงสร้างย่อยเหมือนกันเป็นจำนวนมาก

ข. ช่วยแก้ปัญหาสำหรับโครงสร้างใหญ่ ๆ ได้ โดยการแบ่งโครงสร้างออกเป็นโครงสร้างย่อย ๆ ให้พอเหมาะกับเนื้อที่หน่วยความจำที่มีอยู่

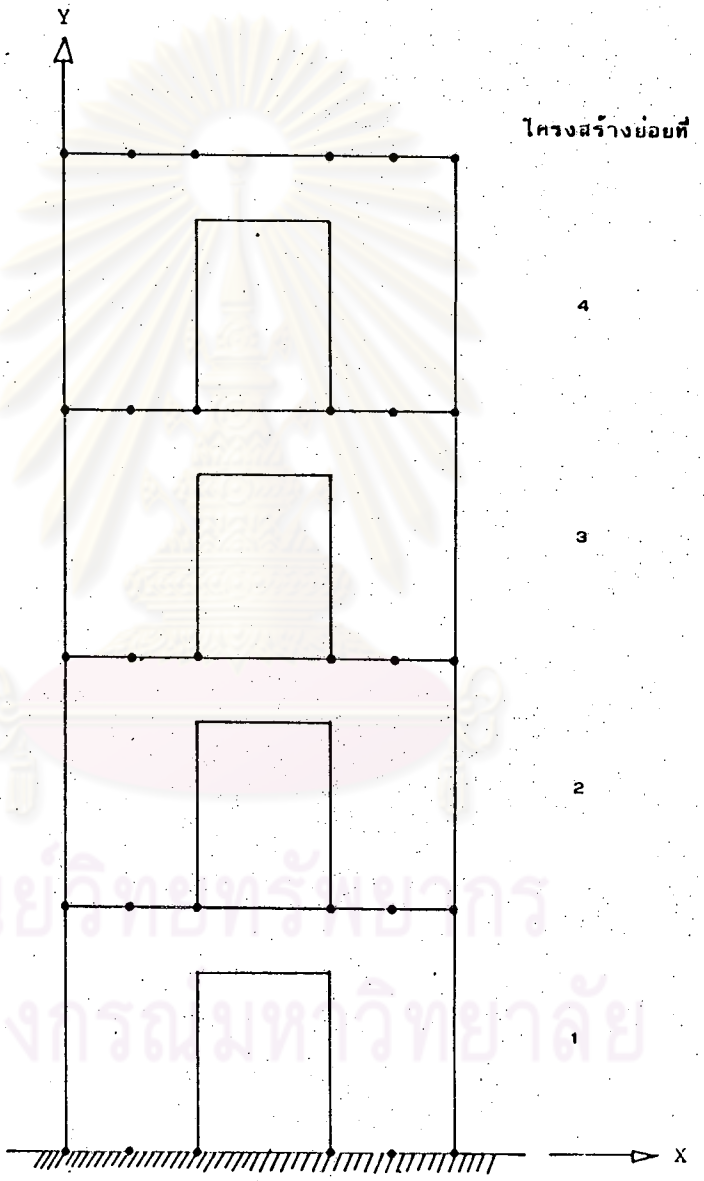
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



• ข้อที่หงอยู่

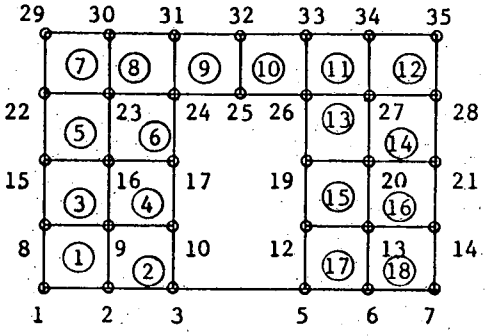
o ข้อที่ถูกกำจัดออกไป

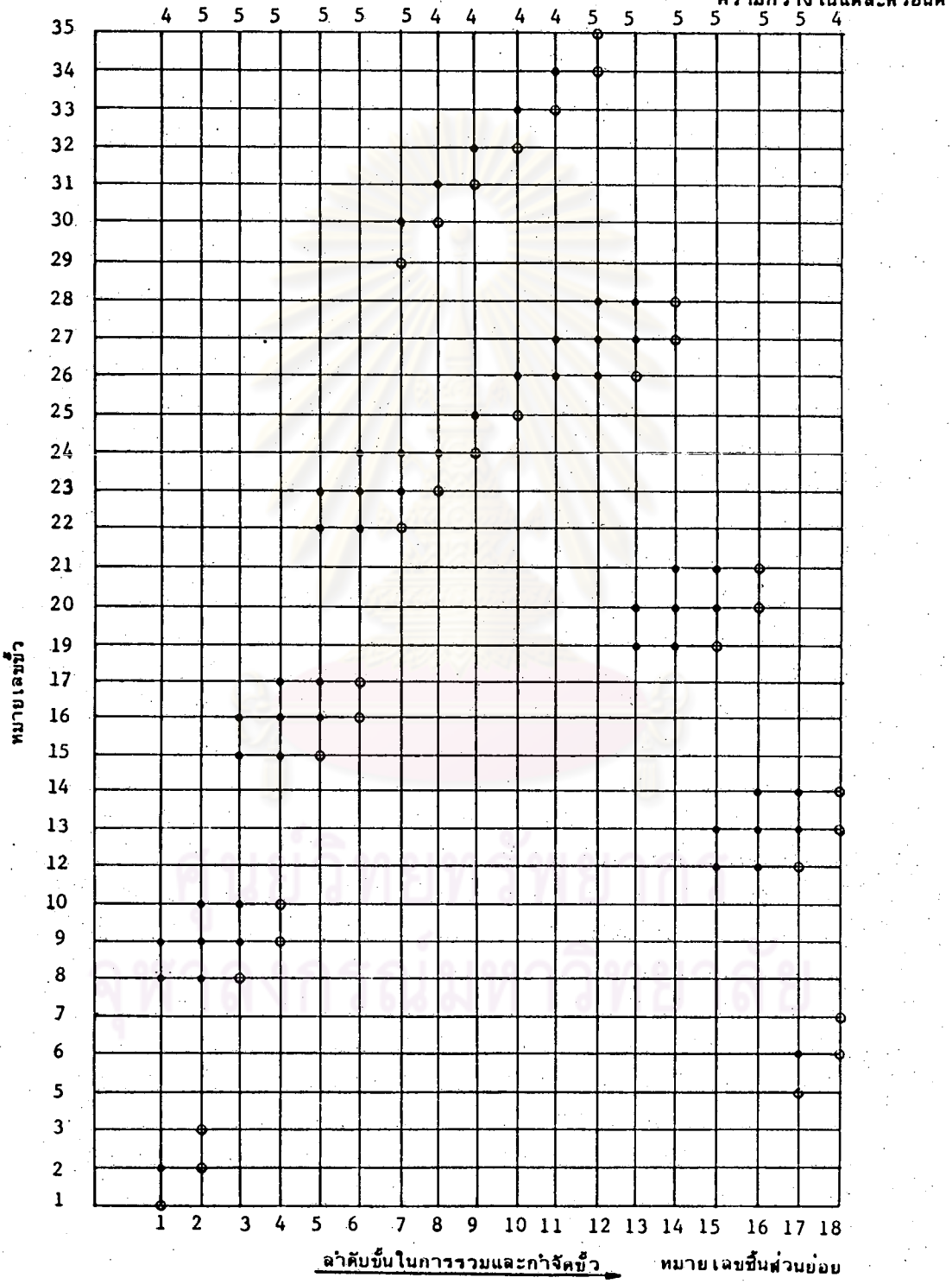
โครงสร้างย่อยที่ 1,2,3,4



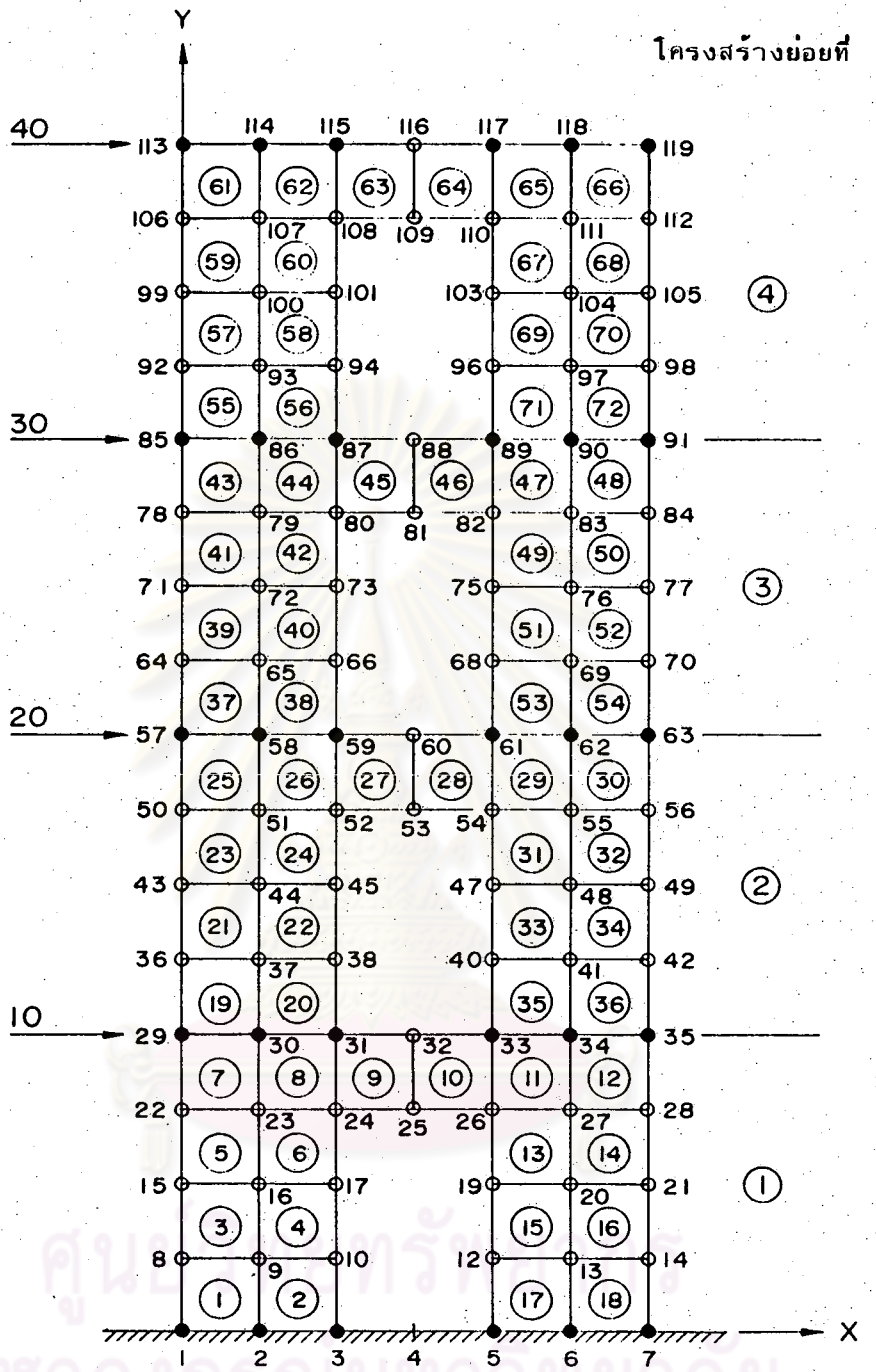
รูปที่ 2.1 ตัวอย่างวิธีโครงสร้างย่อย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



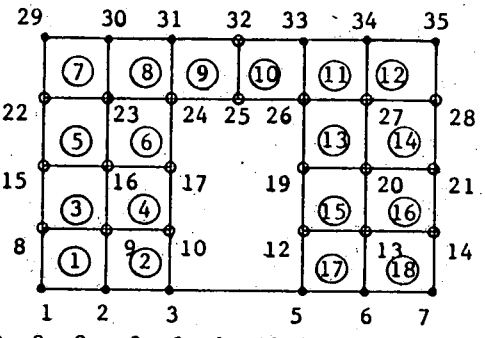


รูปที่ 2.2 ตัวอย่างวิธีฟรอนทัล

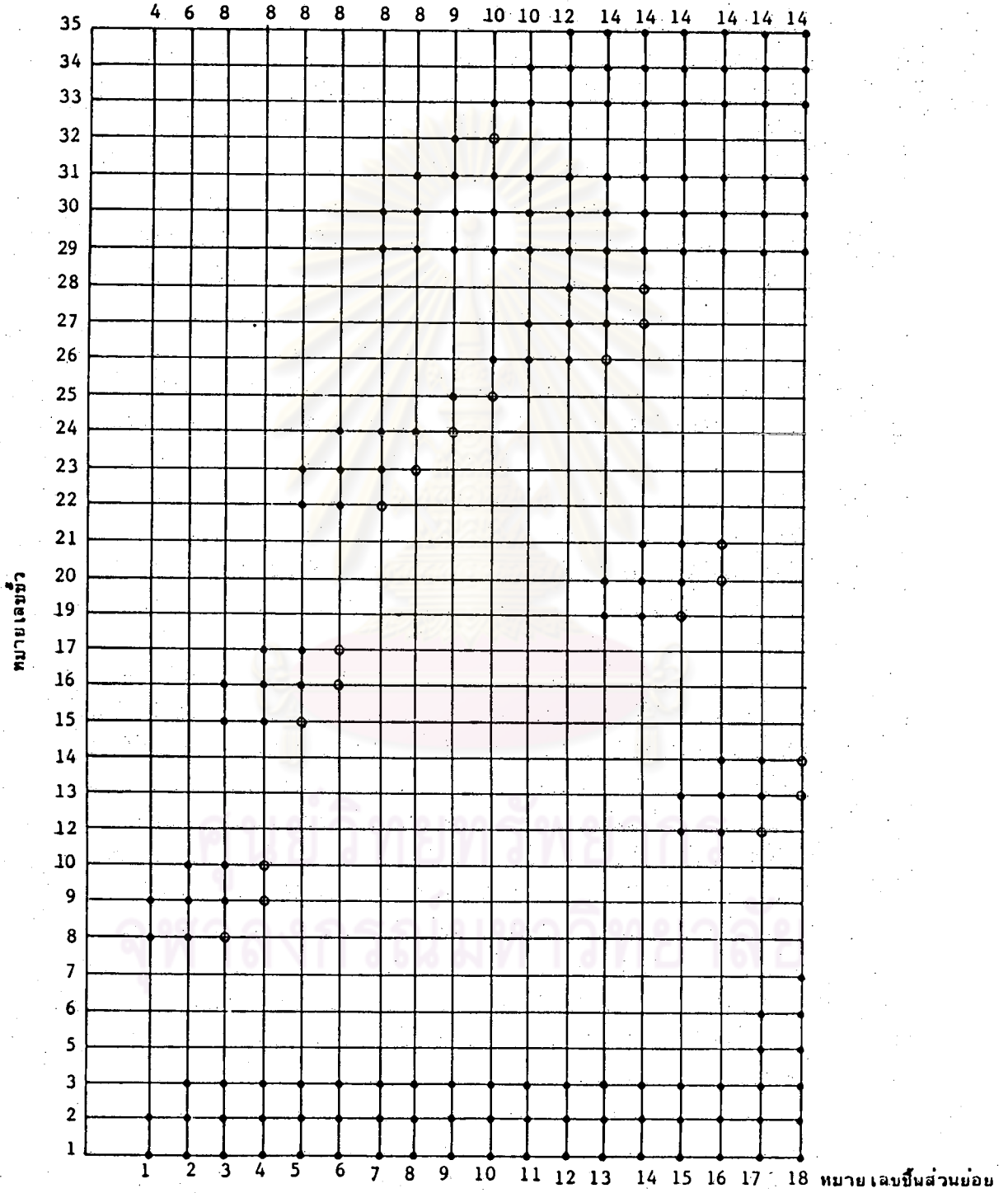


(2.3 ก.) การแบ่งโครงสร้างในระดับที่ 1

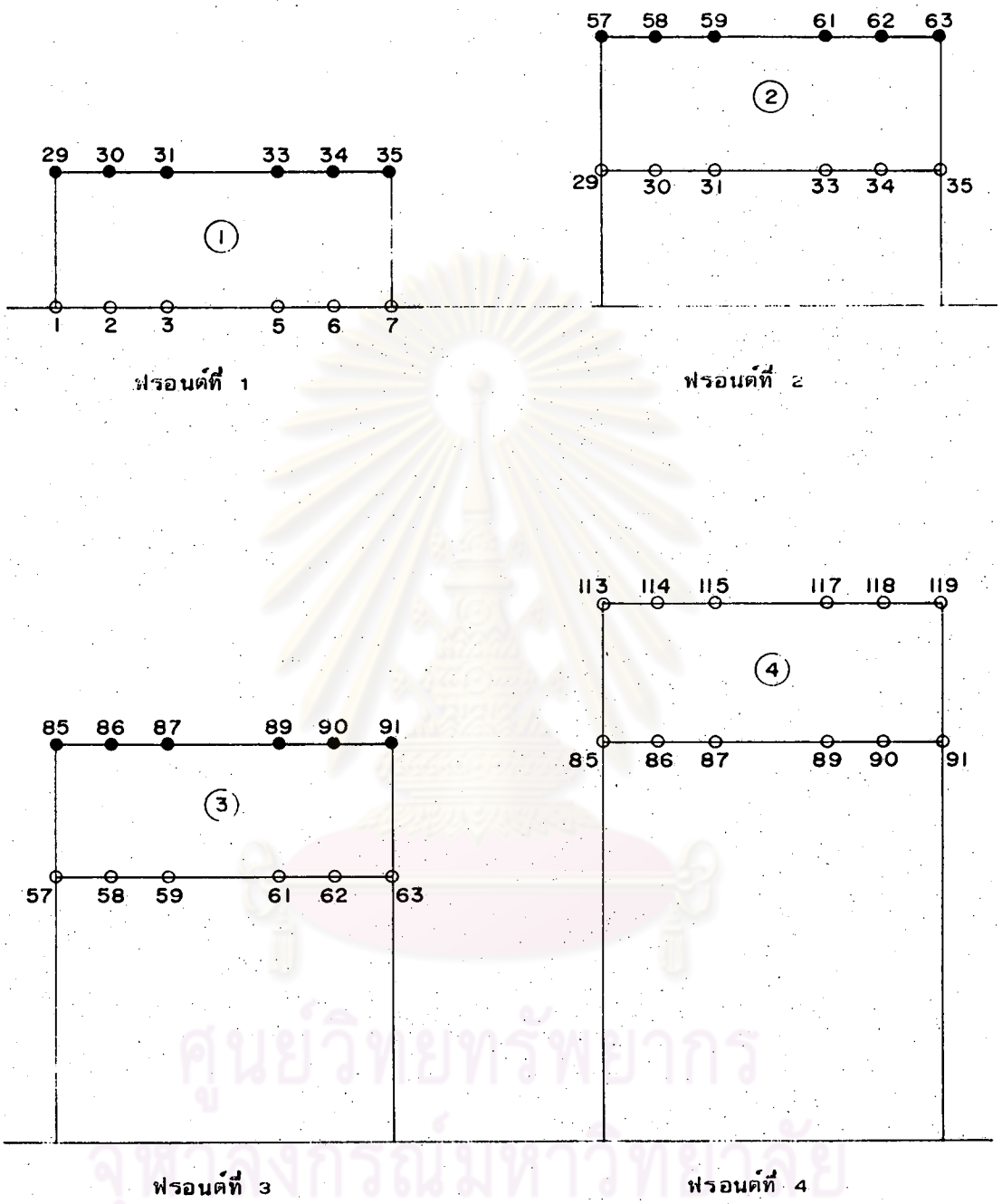
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ความกว้างในแต่ละฟรอนต์



(2.3ข.) การรวมและกำจัดขั้วภายในโครงสร้างย่อย



(2.3 ค.) ลำดับขั้นในการรวมและกำจัดข้วสำหรับโครงสร้างในระดับที่ 2

● ข้วที่คงอยู่

○ ข้วที่ถูกกำจัดออกไป

รูปที่ 2.3 ตัวอย่างวิธีโครงสร้างย่อยแบบฟรอนทัล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย