บทที่ 6
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

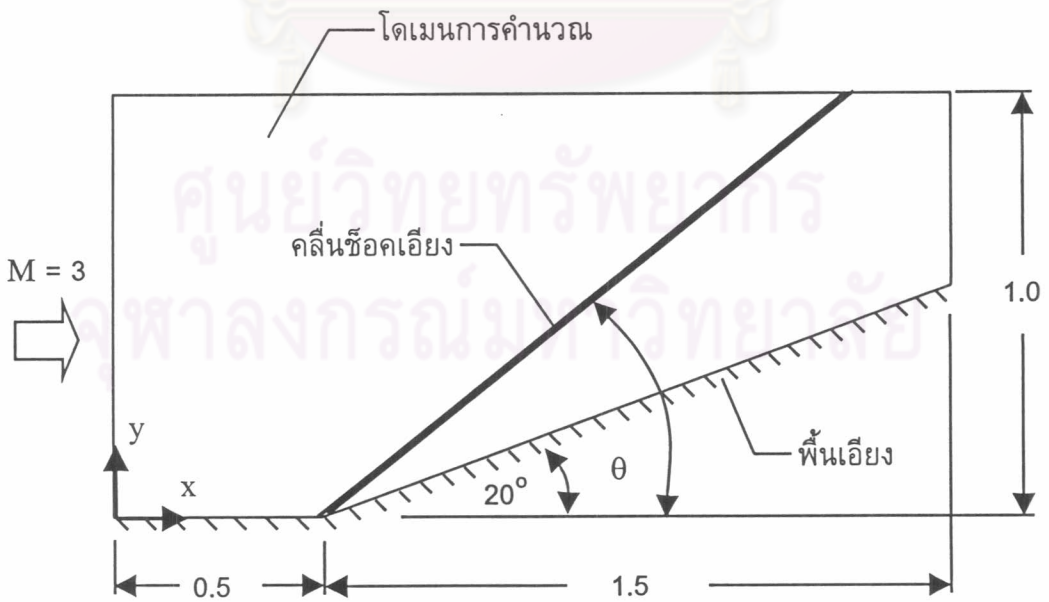
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง 2 โปรแกรม ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่ขึ้นกับเวลาและปัญหากลศาสตร์ของแข็งอย่างละ 1 โปรแกรม ได้ถูกตรวจสอบความถูกต้องกับผลเฉลยแม่นตรง ผลการทดลอง และผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีอื่น ๆ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

6.1 ตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง

โปรแกรม CELLHIFLOW และ TGHIFLOW ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้ถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับ 3 ตัวอย่างที่เป็นปัญหาการไหลแบบไม่หนืด และอีก 2 ตัวอย่างที่เป็นปัญหาการไหลแบบหนืด ดังนี้

6.1.1 การไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง

ลักษณะปัญหาของการไหลความเร็วสูงแบบไม่รวมความหนืด (inviscid flow) แสดงในรูปที่ 6.1 ของไหลที่มีความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าไหลเข้ามาทางขอบด้านซ้ายของโดเมนการคำนวณ (computational domain) แล้วผ่านมากระทบกับพื้นเอียงที่ทำมุมกับแนวระนาบ $\delta = 20$ องศา ก่อให้เกิดคลื่นช็อคเอียง (oblique shock wave) เป็นแนวเอียงทำมุม θ กับแนวระนาบ

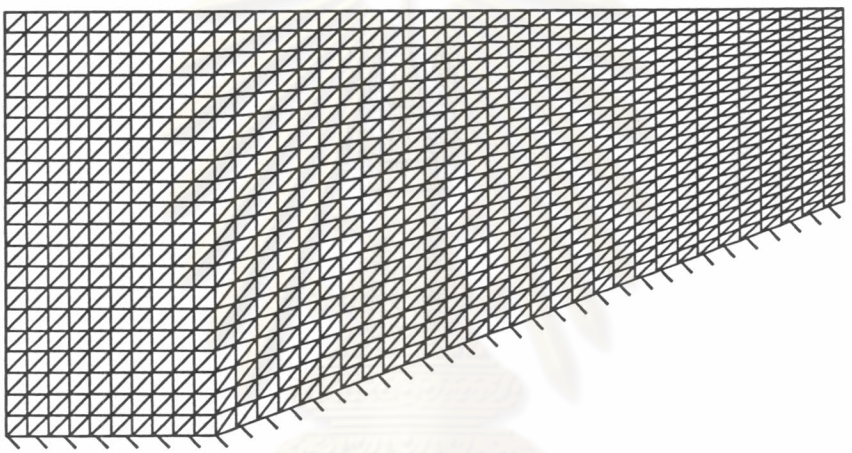


รูปที่ 6.1 การไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง

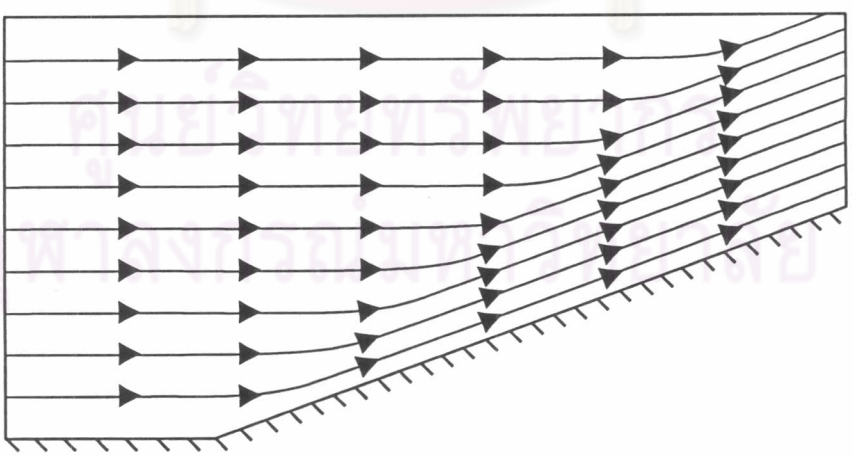
มุม θ ของแนวช็อคดังกล่าวสามารถหาได้จากสมการของฟังก์ชันอดิศัย (transcendental function) [18] ดังนี้

$$\tan\delta = 2\cot\theta\left[\frac{M_1^2\sin^2\theta+1}{M_1^2(\gamma+\cos 2\theta)+2}\right] \tag{6.1}$$

โดย M_1 คือค่ามัคนัมเบอร์ (Mach number) ที่ด้านหน้าก่อนแนวช็อคและ γ คือค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล ส่วนเงื่อนไขขอบเขตการไหลเข้าตลอดขอบทางด้านซ้ายคือ $\rho = 1$, $u = 1$, $v = 0$, $\varepsilon = 0.698412$ และ $\gamma = 1.4$



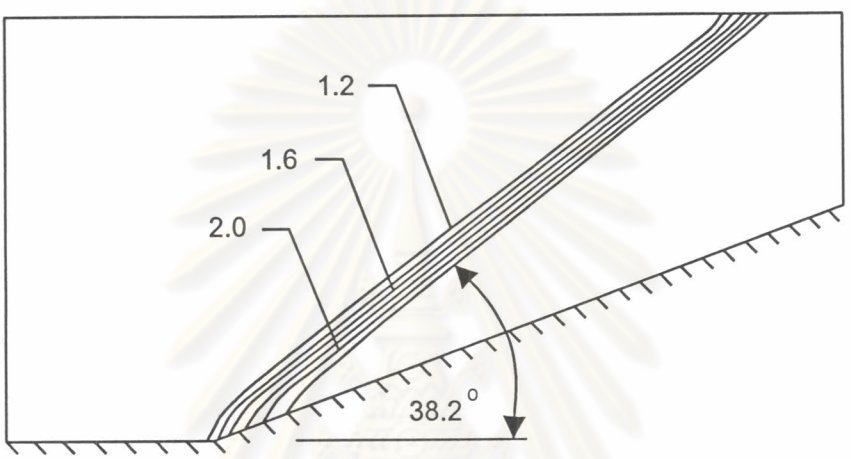
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



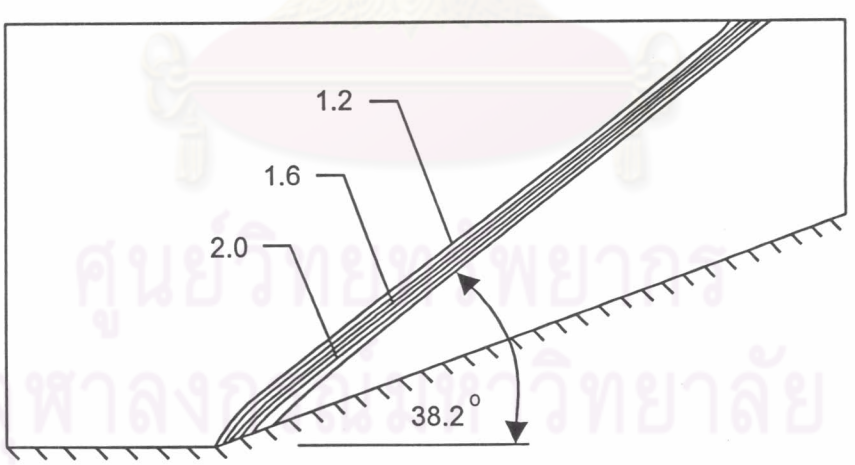
(ข) สตรีมไลน์

รูปที่ 6.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และทิศทางการไหลแสดงด้วยสตรีมไลน์
สำหรับการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง

รูปที่ 6.2 (ก) แสดงการจัดรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่มีขนาด 0.05 จำนวน 1600 เอลิเมนต์ และ 861 จุดต่อ จากนั้นนำโปรแกรม CELLHIFLOW และ TGHIFLOW มาทำการคำนวณหาผลลัพธ์ตลอดโดเมนการไหลทั้งหมด ผลลัพธ์ของความเร็ว u และ v ได้แสดงอยู่ในรูปแบบสตรีมไลน์ (stream lines) ในรูป 6.2 (ข) รูปดังกล่าวแสดงถึงการไหลที่เข้ามาทางด้านซ้ายของโดเมนเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ (uniform) ในแนวระดับก่อนผ่านคลื่นช็อคทำให้ทิศทางการไหลของความเร็วนั้นเปลี่ยนไปขนานกับพื้นเอียงอย่างฉับพลัน



(ก) ค่าความหนาแน่นที่คำนวณด้วยโปรแกรม TGHIFLOW



(ข) ค่าความหนาแน่นที่คำนวณด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW

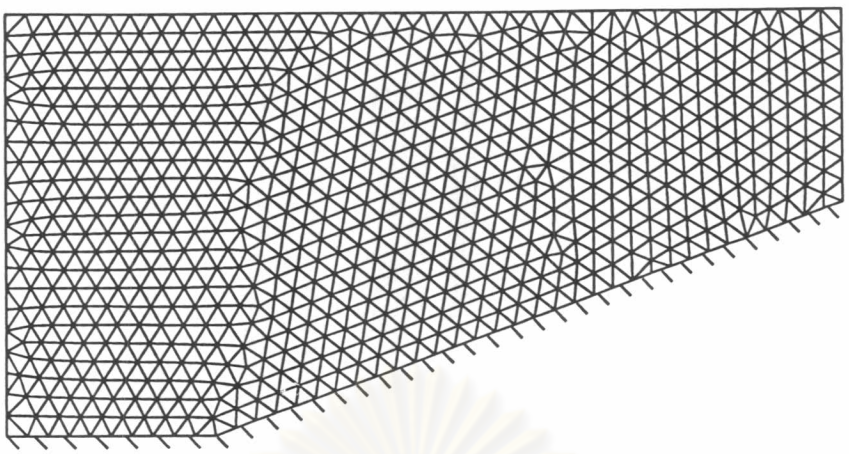
รูปที่ 6.3 การกระจายความหนาแน่นของของไหลสำหรับการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง

สำหรับค่าความหนาแน่นที่เกิดขึ้นบนโดเมนการไหลสามารถแสดงได้ด้วยเส้นชั้นดังในรูปที่ 6.3 (ก) เป็นผลการคำนวณด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW และรูปที่ 6.3 (ข) เป็นผลการคำนวณด้วย TGHIFLOW ผลความหนาแน่นของการไหลที่เกิดขึ้นจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างกะทันหันผ่านแนวของคลื่นช็อคโดยเพิ่มค่าจาก 1 ไปเป็น 2.52 สำหรับผลการคำนวณด้วยโปรแกรม TGHIFLOW และ 2.45 สำหรับผลการคำนวณด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW พบว่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้จาก 2 โปรแกรมมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงคือ 2.42 ที่คำนวณมาจาก [18]

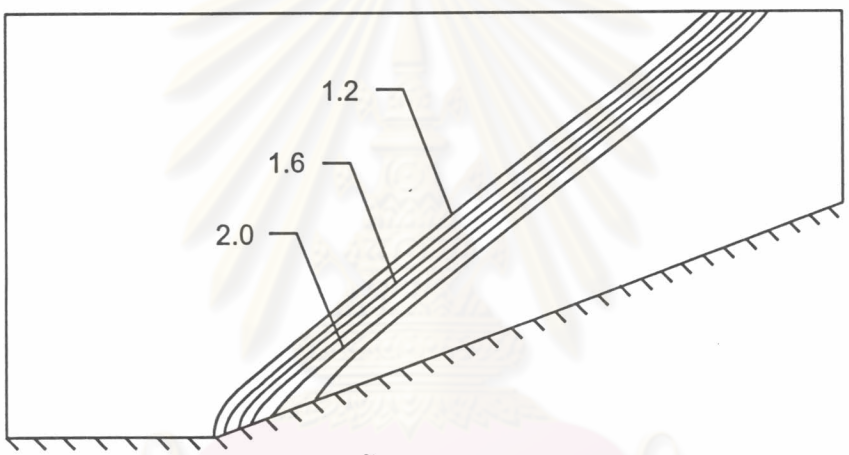
$$\rho_2 = \rho_1 \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\theta}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\theta + 2} \right] \tag{6.2}$$

โดยตัวห้อย 1 และ 2 แสดงถึงค่าก่อนและหลังแนวช็อคตามลำดับ นอกจากนั้นมุมของแนวช็อคที่เกิดขึ้นนั้นคือ 37.8 องศา ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับมุม θ ที่คำนวณได้จากสมการ (6.1) เช่นกัน

จากผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะเห็นได้ว่าแนวของคลื่นช็อคยังคงกว้างอยู่มาก และสามารถทำให้แคบลงได้หากมีการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณดังกล่าว ซึ่งลำดับถัดไปจะแสดงการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรม CELLHIFLOW ดังแสดงรายละเอียดไว้ในบทที่ 4 เริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเอลิเมนต์ใกล้เคียงกัน จำนวน 1,401 เอลิเมนต์ และ 757 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.4 (ก) และรูปที่ 6.4 (ข) แสดงเส้นชั้นความหนาแน่นที่คำนวณได้จากโปรแกรม CELLHIFLOW จากนั้นนำค่าความหนาแน่นดังกล่าวตลอดทั้งโดเมนการไหลมาทำการคำนวณหาขนาดและทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์ใหม่ และสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นมาใหม่ที่มีจำนวนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 1,701 เอลิเมนต์ 881 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.5 (ก) และทำการคำนวณหาผลลัพธ์อีกครั้งด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW ซึ่งค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้แสดงเป็นเส้นชั้นได้ดังในรูปที่ 6.5 (ข) จะเห็นได้ว่าความกว้างของเส้นชั้นความหนาแน่นตลอดแนวคลื่นช็อคแคบลงมาก และได้ทำกระบวนการทั้งหมดอีกครั้งทำให้ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่อีกครั้งดังแสดงในรูปที่ 6.6 (ก) มีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,397 เอลิเมนต์ 720 จุดต่อและเส้นชั้นความหนาแน่นแสดงในรูปที่ 6.6 (ข) ผลการคำนวณค่าความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามสามารถพล็อตตลอดแนว $x = 1.4$ ดังแสดงในรูป 6.7 พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรม CELLHIFLOW จะทำให้คำตอบที่ได้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น ในขณะที่ใช้จำนวนจุดต่อที่ใกล้เคียงกัน ทำให้ประหยัดเวลาและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ต้องใช้ในการคำนวณไปได้มาก

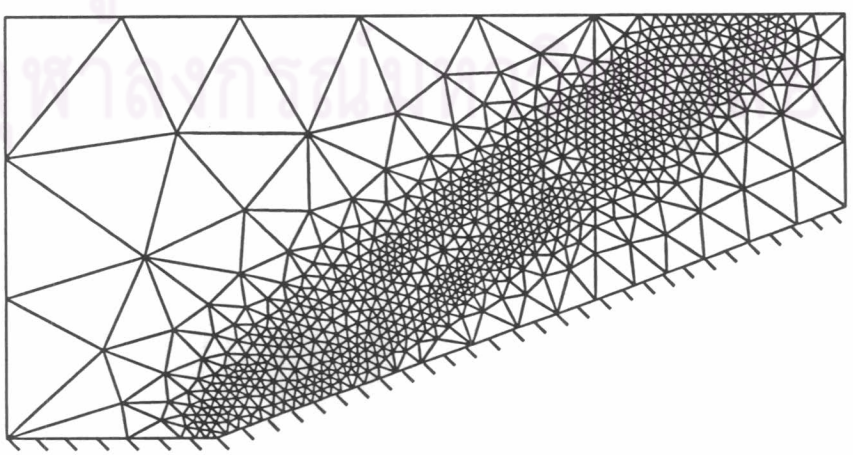


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

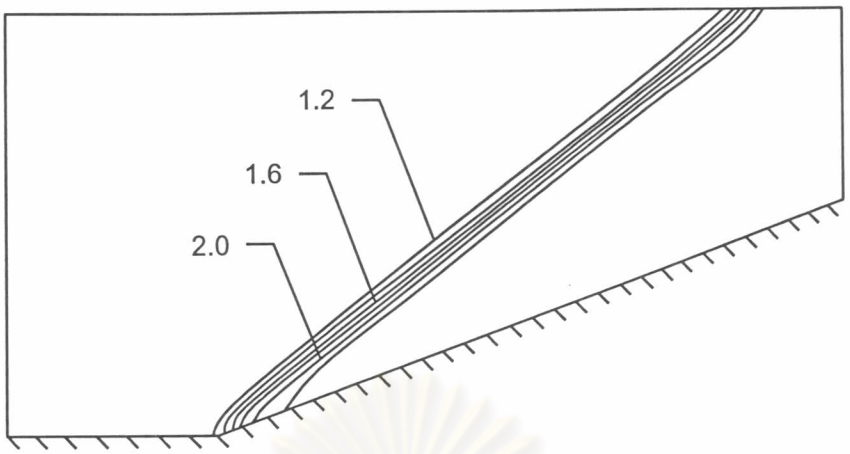


(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.4 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและการกระจายความหนาแน่นของของไหล สำหรับการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง

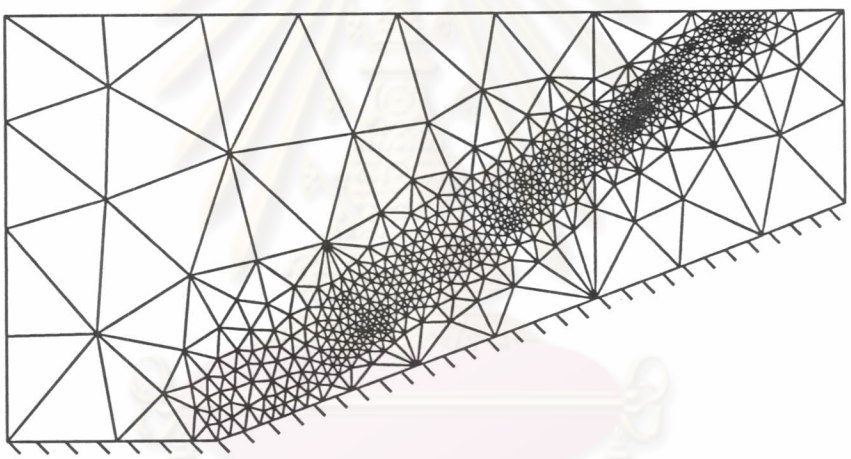


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง

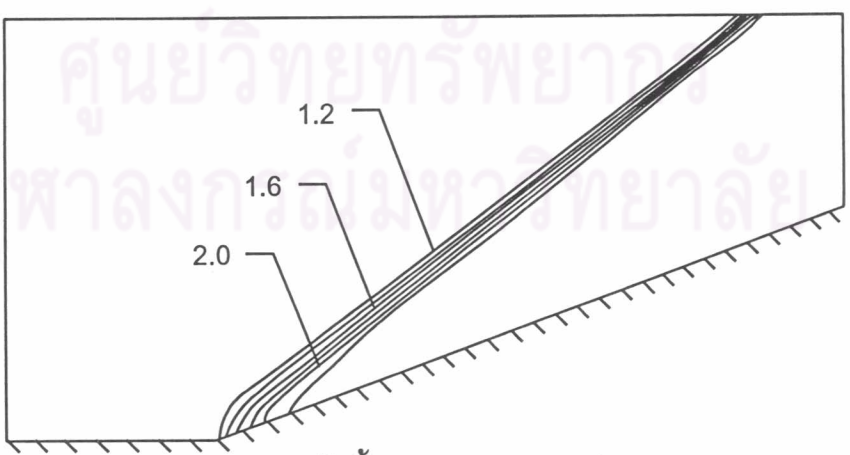


(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.5 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่งและการกระจายความหนาแน่นของ
ของไหลสำหรับการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง



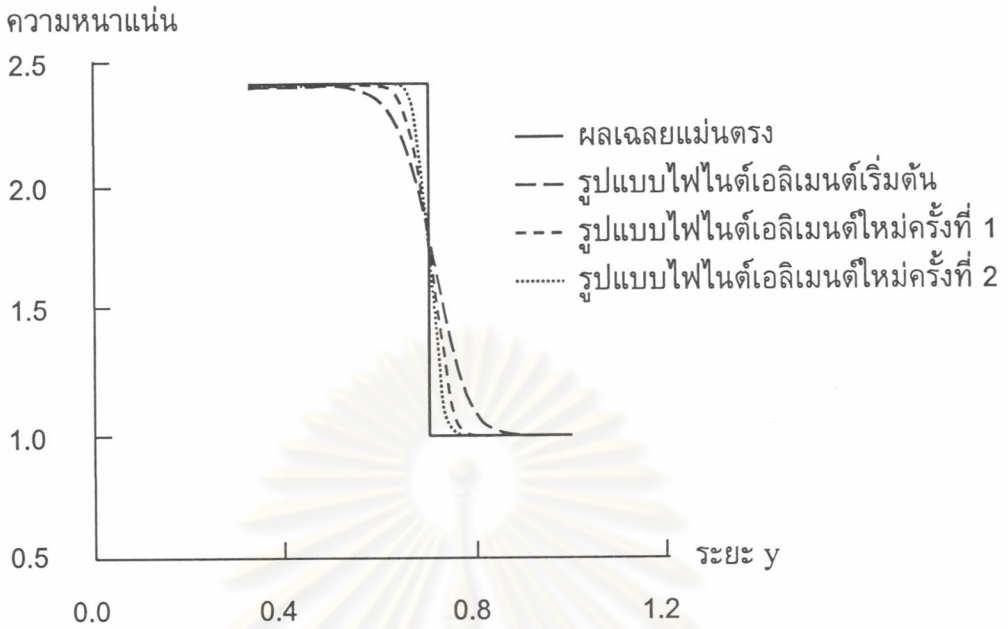
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สอง



(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.6 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองและการกระจายความหนาแน่นของ
ของไหลสำหรับการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียง

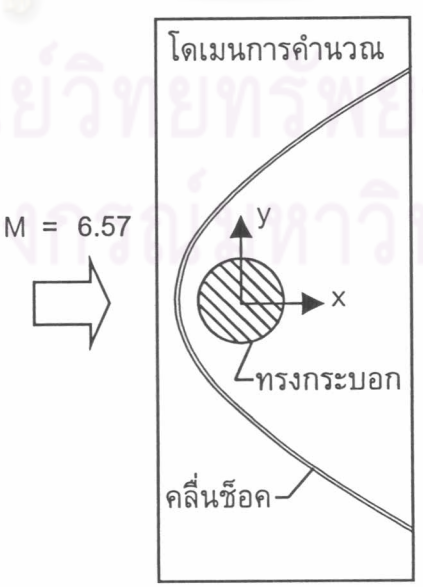
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 6.7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนาแน่นกับระยะ y ที่ตำแหน่ง x = 1.4

6.1.2 การไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านทรงกระบอก

ลักษณะปัญหาเป็นการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่าเข้ามาทางด้านซ้ายของโดเมนการไหลและปะทะกับผิวโค้งของทรงกระบอกขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.75 นิ้ว ก่อให้เกิดคลื่นช็อคโค้งด้านหน้าห่างจากผิวทรงกระบอก ดังแสดงในรูปที่ 6.8 ความถูกต้องของคำตอบจะตรวจสอบได้จากความแม่นยำในการหาระยะห่างระหว่างแนวช็อคโค้งด้านหน้ากับผิวทรงกระบอก

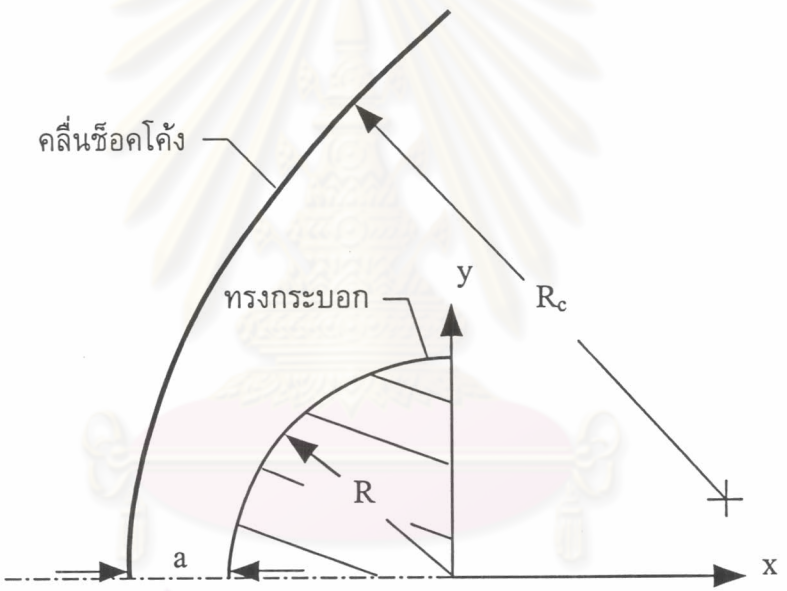


รูปที่ 6.8 ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านทรงกระบอก

การหาตำแหน่งของคลื่นช็อคโค้งที่อยู่ด้านหน้าของทรงกระบอกสามารถคำนวณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้มาจากผลการทดลองดังนี้ [16]

$$x = R + a - R_c\left(\cot^2\theta\right)\left[\left(1+\frac{y^2\tan^2\theta}{R_c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \tag{6.3}$$

โดย x และ y คือตำแหน่งของคลื่นช็อคในแนวแกน x และ y ตามลำดับ R คือรัศมีของทรงกระบอก R_c คือรัศมีของแนวคลื่นช็อคโค้ง a คือระยะห่างระหว่างทรงกระบอกกับแนวช็อคโค้ง และ θ คือมุมของแนวช็อคที่ตำแหน่ง x (attached shock angle) และ y เมื่อเทียบกับแนวระนาบ ดังแสดงในรูปที่ 6.9



รูปที่ 6.9 แนวคลื่นช็อคของปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกด้วยความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่า

โดยค่ารัศมีของแนวคลื่นช็อค R_c ระยะห่างระหว่างทรงกระบอกกับแนวช็อค a และรัศมีของทรงกระบอก R จะมีความสัมพันธ์กับค่ามัคนัมเบอร์ M ของของไหลด้านขาเข้าดังนี้

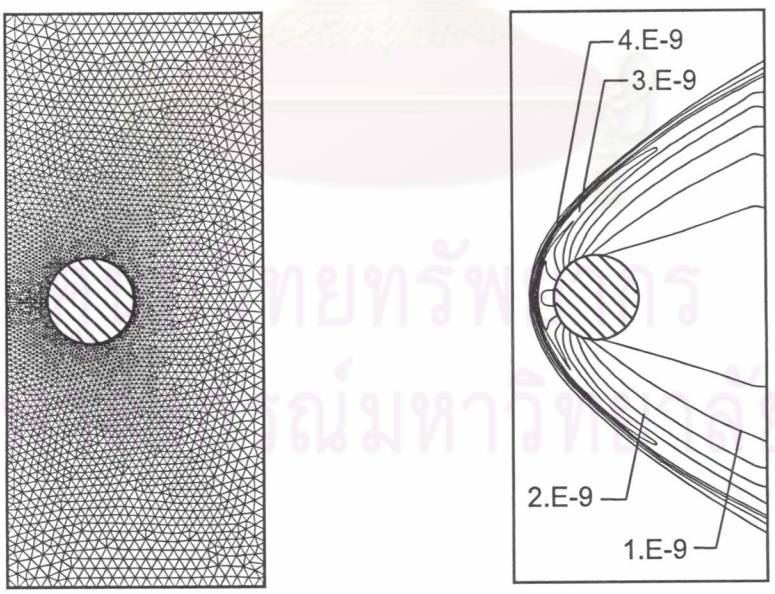
$$a = 0.386R\,e^{\left(\frac{4.67}{M^2}\right)} \tag{6.4}$$

$$R_c = 1.386R\,e^{\left[\frac{1.8}{(M-1)^{0.75}}\right]} \tag{6.5}$$

จากนั้นแทนสมการ (6.4) และ (6.5) ลงในสมการ (6.3) ทำให้ได้

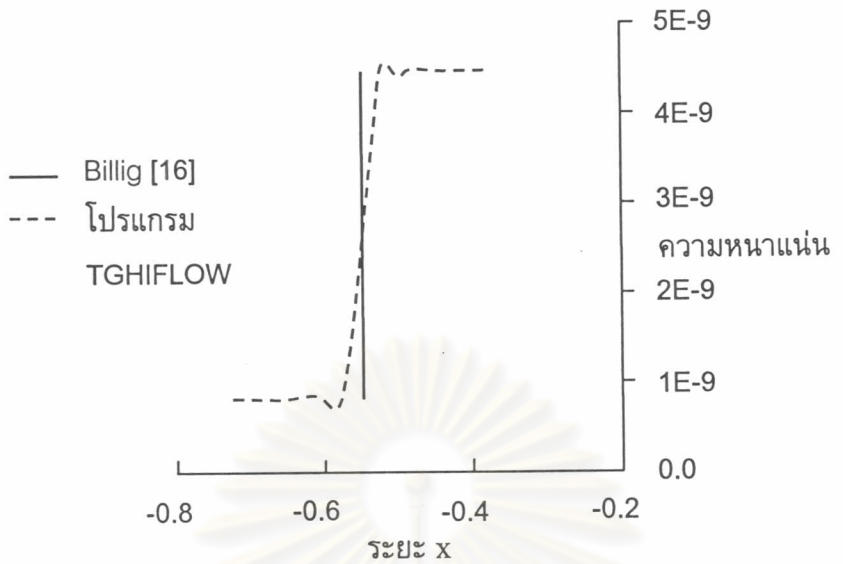
$$x = R + 0.386R\,e^{\left(\frac{4.67}{M^2}\right)} - 1.386R\,e^{\left[\frac{1.8}{(M-1)^{0.75}}\right]}\left(\cot^2\theta\right)\left[\left(1+\frac{y^2\tan^2\theta}{\left(1.386R\,e^{\left[\frac{1.8}{(M-1)^{0.75}}\right]}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \tag{6.6}$$

สมการ (6.6) สามารถนำมาคำนวณหาตำแหน่งของแนวคลื่นช็อคโค้งได้ด้วยการใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง ดังแสดงในรูปที่ 6.9 และค่าระยะห่างระหว่างแนวช็อคโค้งกับผิวของทรงกระบอกหาได้จากสมการ (6.4) มีค่าเท่ากับ 0.1613 นิ้ว สำหรับปัญหาความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่า พฤติกรรมการไหลที่เกิดขึ้นได้ทำการวิเคราะห์หาคำตอบด้วยการใช้โปรแกรม TGHIFLOW โดยทำการแบ่งโดเมนการไหลออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาด 7,156 เอลิเมนต์ 3,727 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.10 (ก) และคุณสมบัติของของไหลด้านขาเข้าทางซ้ายกำหนดให้ ρ = 0.810522E-9 $lb_f - sec^2/in^4$, u = 0.822991E+5 in/sec, v = 0, ε = 0.368579E+10 in^2/sec^2 และ γ = 1.38 ค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้สามารถแสดงด้วยเส้นชั้นดังในรูปที่ 6.10 (ข)



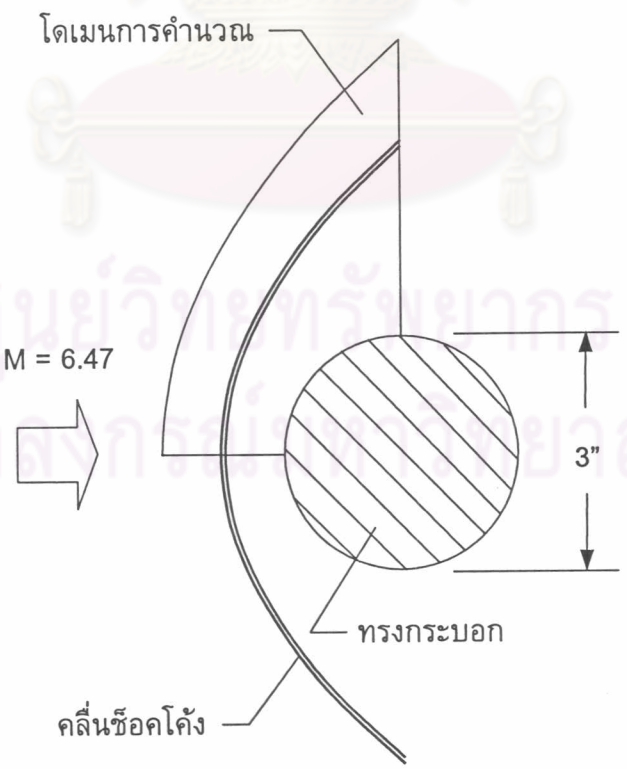
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายความหนาแน่นของของไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่าไหลผ่านทรงกระบอก



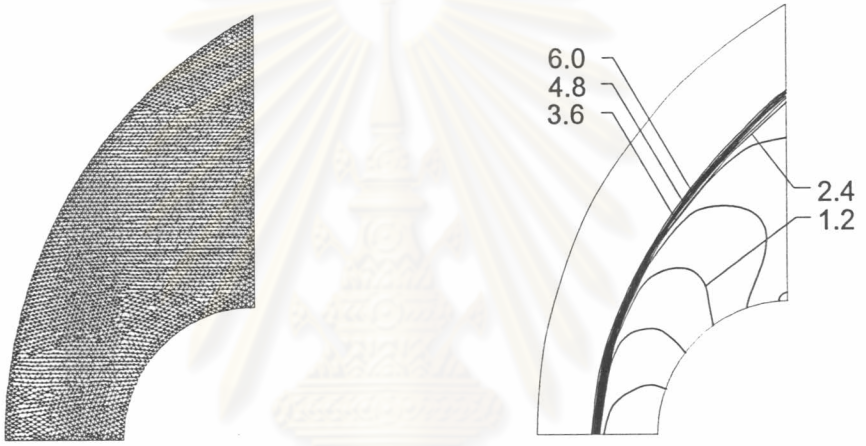
รูปที่ 6.11 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกับระยะจากจุดศูนย์กลางทรงกระบอก ของของไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่าไหลผ่านทรงกระบอก

รูปที่ 6.11 เป็นการพล็อตค่าความหนาแน่นตามระยะทางแนวแกน x ทางด้านซ้ายของผิวทรงกระบอก โดยเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากสมการ 6.4 กับโปรแกรม TGHIFLOW



รูปที่ 6.12 การไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 6.47 เท่าผ่านทรงกระบอก

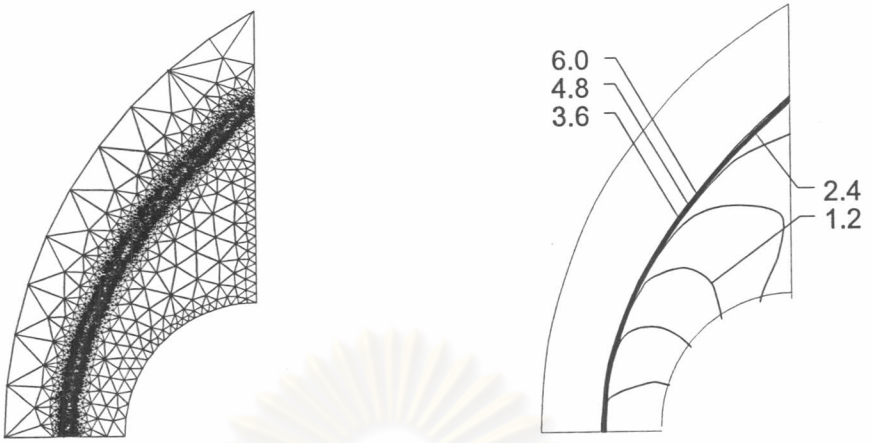
ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกจะมีความสมมาตร ทำให้สามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาเพียงครึ่งบนเหนือทรงกระบอกได้ ดังแสดงในรูปที่ 6.12 ลักษณะปัญหาเป็นการไหลแบบไม่หนืดที่มีความเร็วสูงกว่าเสียง 6.47 เท่าผ่านครึ่งบนของทรงกระบอกขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 3 นิ้ว และมีคุณสมบัติด้านขาเข้าคือ ρ = 0.84768698E-9 $lb_f - sec^2/in^4$, u = 0.80088E+5 in/sec, v = 0, ε = 0.349923E+10 in^2/sec^2 และ γ = 1.38 ปัญหานี้ได้ใช้โปรแกรม CELLHIFLOW ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น โดยเริ่มจากการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเริ่มต้นจำนวน 7,507 เอลิเมนต์ 3,883 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.13 (ก) และเมื่อทำการคำนวณด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW จะได้ลักษณะการกระจายค่ามัคนัมเบอร์ดังแสดงในรูปที่ 6.13 (ข)



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น (ข) เส้นชั้นแสดงค่ามัคนัมเบอร์

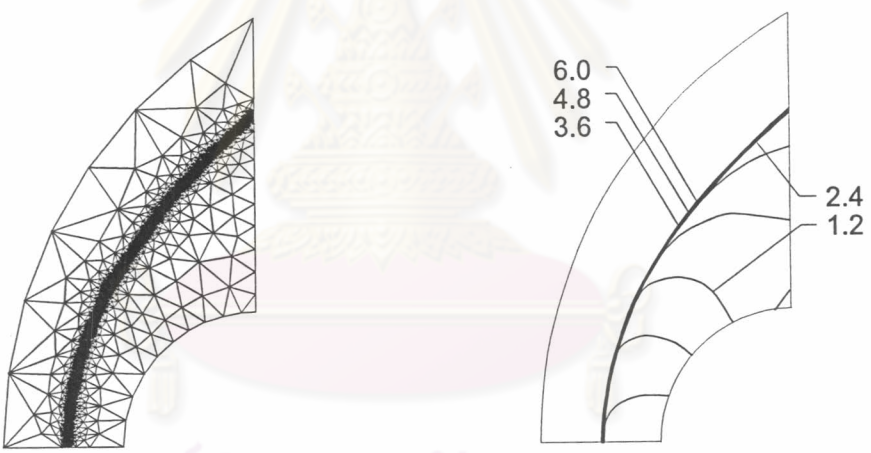
รูปที่ 6.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและการกระจายค่ามัคนัมเบอร์ของของไหลสำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 6.47 เท่าผ่านทรงกระบอก

จากนั้นนำค่าความหนาแน่นที่ได้ไปใช้ในการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม SPACE และเรียกใช้โปรแกรม BUILT ทำให้ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง ขนาด 7,635 เอลิเมนต์ 3,861 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.14 (ก) ซึ่งจะมีการจัดเรียงตัวของเอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดแนวคลื่นช็อคโค้ง และรูปที่ 6.14 (ข) เป็นลักษณะเส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์ที่คำนวณได้จากโปรแกรม CELLHIFLOW พบว่าคลื่นช็อคโค้งบางลง จึงได้ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ของทั้งโดเมนการไหลใหม่อีกครั้งหนึ่ง ด้วยกระบวนการเหมือนเดิมและใช้ค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้ครั้งล่าสุด ทำให้ได้ลักษณะการจัดเรียงตัวของเอลิเมนต์ขนาดเล็กอย่างหนาแน่นบริเวณตลอดแนวช็อคโค้ง ดังแสดงในรูปที่ 6.15 (ก) เป็นรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 7,373 เอลิเมนต์ 3,712 จุดต่อ และผลลัพธ์ที่คำนวณใหม่ด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW ทำให้ได้ลักษณะการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ดังแสดงในรูปที่ 6.15 (ข)



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง (ข) เส้นชั้นแสดงค่ามัคนัมเบอร์

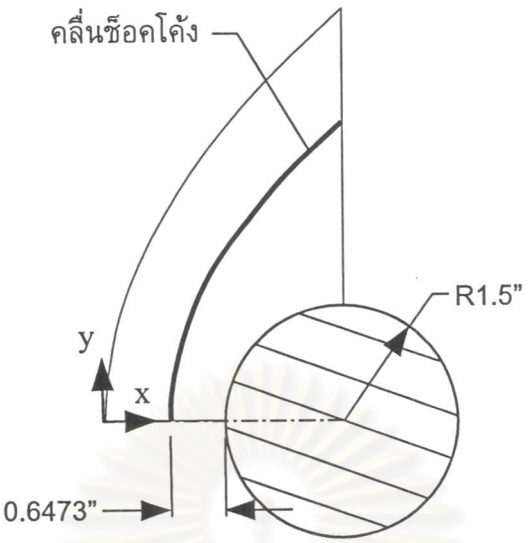
รูปที่ 6.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่งและการกระจายค่ามัคนัมเบอร์ของของไหล สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 6.47 เท่าผ่านทรงกระบอก



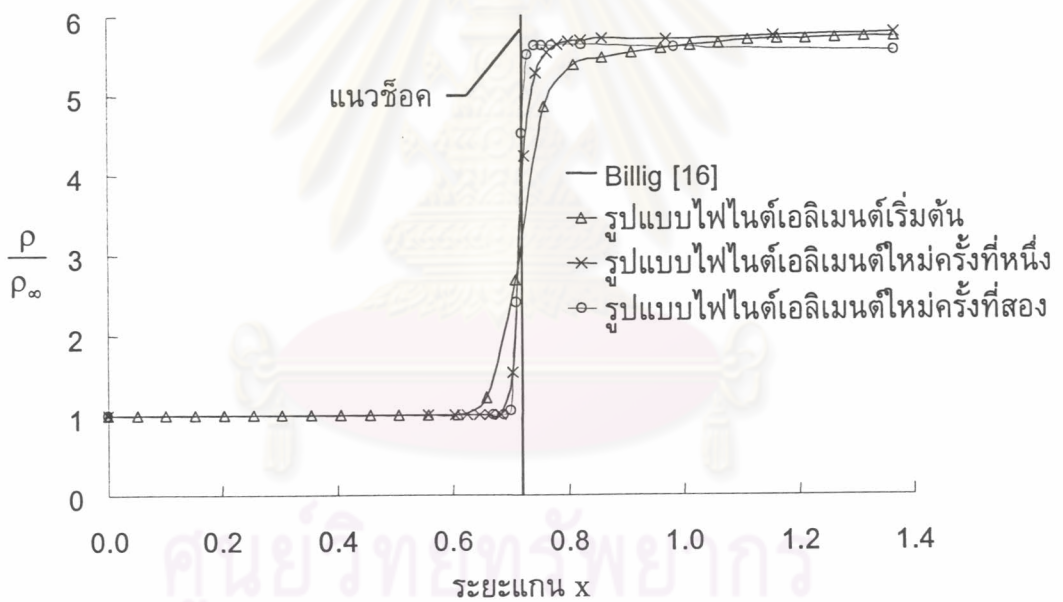
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สอง (ข) เส้นชั้นแสดงค่ามัคนัมเบอร์

รูปที่ 6.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ครั้งที่สองและการกระจายค่ามัคนัมเบอร์ของของไหล สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดด้วยความเร็วกว่าเสียง 6.47 เท่าผ่านทรงกระบอก

จากนั้นสมการ (6.6) สามารถหาแนวคลื่นช็อคได้ดังแสดงในรูปที่ 6.16 และสมการ (6.4) สามารถคำนวณหาระยะห่างของแนวช็อคโค้งจากผิวทรงกระบอกเท่ากับ 0.6473 นิ้ว แล้วนำค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามมาพล็อตเปรียบเทียบ จะได้ผลดังแสดงในรูปที่ 6.17



รูปที่ 6.16 แนวคลื่นช็อคของปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกด้วยความเร็วสูงกว่าเสียง 6.47 เท่า

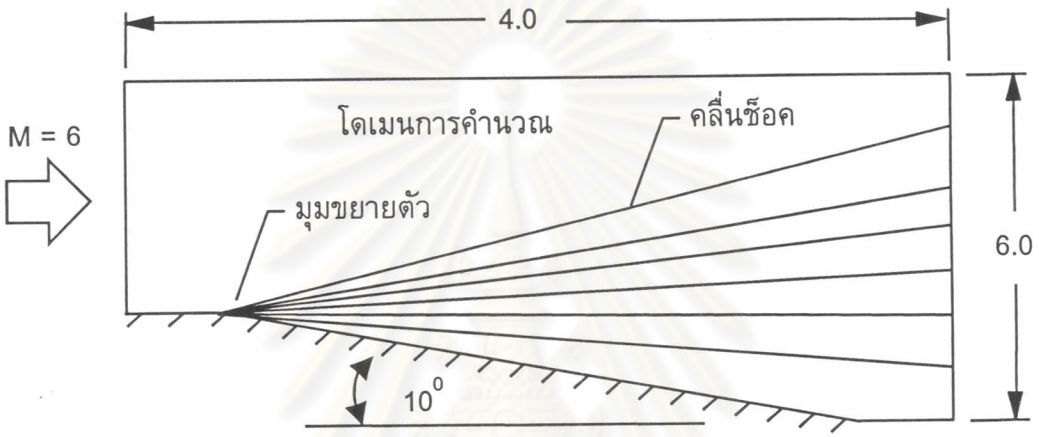


รูปที่ 6.17 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกับระยะ x ของของไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 6.47 เท่าไหลผ่านทรงกระบอก

จากการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรมวิเคราะห์การไหลความเร็วสูง CELLHIFLOW พบว่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะมีความแม่นยำมากขึ้น ในขณะที่จำนวนตัวไม่รู้ค่าของแต่ละรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์มีขนาดใกล้เคียงกัน ทำให้ประหยัดเวลาและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ไปได้มาก

6.1.3 การขยายตัวจากการไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านพื้นเอียง

ลักษณะปัญหาเป็นการไหลของของไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าเข้ามาทางด้านซ้ายของโดเมนการไหลและขนานกับแนวระดับ จากนั้นจึงไหลผ่านมุมขยายตัวที่พื้นที่หน้าตัดมีการขยายกว้างออกมากขึ้นด้วยมุม 10 องศา ดังแสดงในรูปที่ 6.18 เป็นผลให้คุณสมบัติของของไหลเปลี่ยนแปลงไป เช่น ค่ามัคนัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น ความหนาแน่น ความดันและอุณหภูมิมีค่าลดลง เป็นต้น รวมทั้งมุมของคลื่นช็อคเมื่อเทียบกับแนวระดับมีค่าลดลงเช่นกัน คุณสมบัติของของไหลด้านขาเข้าคือ $\rho = 1.0$, $u = 1.0$, $v = 0$, $\varepsilon = 0.553$ และ $\gamma = 1.38$



รูปที่ 6.18 ปัญหาการขยายตัวจากการไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านพื้นเอียง

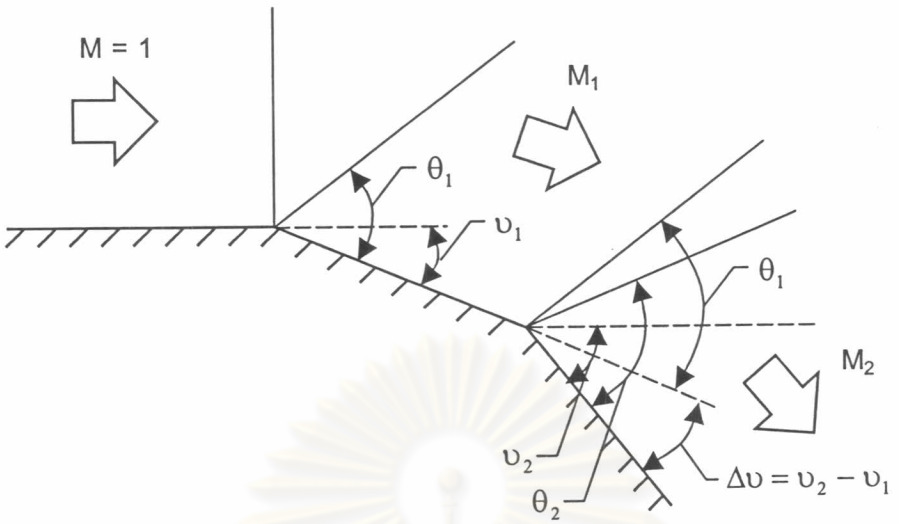
ลักษณะการไหลเกิดการขยายตัวและอยู่ในรูปแบบการไหลแบบไอเซนโทรปิก การหาคุณสมบัติของของไหลและมุมของคลื่นช็อคด้านหลังช็อคสามารถหาได้โดยเริ่มจากความสัมพันธ์ของมุมของพื้นผิวกับค่ามัคนัมเบอร์ดังนี้ [18]

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{M^2-1} \right]\Bigg|_{M_1}^{M_2} \qquad (6.7)$$

โดยตัวห้อย 1 คือสภาวะการไหลด้านหน้าแนวช็อค ตัวห้อย 2 คือสภาวะการไหลด้านหลังแนวช็อค υ คือมุมที่แตกต่างระหว่างพื้นด้านหน้าและหลังแนวช็อค γ คืออัตราส่วนของค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาตรคงที่ M คือค่ามัคนัมเบอร์ ดังแสดงในรูปที่ 6.19

และมุมของแนวคลื่นช็อค θ สามารถหาได้จากฟังก์ชันอดิศัยของค่ามัคนัมเบอร์ดังนี้

$$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{M} \qquad (6.8)$$



รูปที่ 6.19 ลักษณะการไหลความเร็วสูงแบบขยายตัว

สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่า จะกำหนดให้ $M_1 = 6$ เมื่อแทน M = 1 ในสมการ (6.7) และ (6.8) ทำให้ได้

$$\upsilon_1 - 0 = \left[\sqrt{\frac{1.38+1}{1.38-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1.38-1}{1.38+1}\left(6^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{6^2-1}\right]$$

$$\upsilon_1 = 87.4469$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}\frac{1}{6} = 9.594$$

จากรูปที่ 6.18 จะมีค่า $\Delta\upsilon$ เท่ากับ 10 องศา ดังนั้น

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \Delta\upsilon$$

$$= 87.4469 + 10 = 97.4469$$

แทนค่า υ_2 ลงในสมการ (6.7) เทียบกับค่ามัคนัมเบอร์ 1 ดังนั้น

$$97.4469 = \left[\sqrt{\frac{1.38+1}{1.38-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1.38-1}{1.38+1}\left(M_2^2-1\right)} - \tan^{-1}\sqrt{M_2^2-1}\right] \qquad (6.9)$$

ทำการหารากของสมการ (6.9) โดยใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง ทำให้ได้

$$M_2 = 7.73638 \tag{6.10}$$

และเมื่อแทน M_2 ในสมการ (6.8) จะได้

$$\theta_2 = 7.4268$$

ดังนั้นช่วงมุมที่เกิดคลื่นช็อคขยายตัวจะเท่ากับ

$$\theta_1 + \Delta\upsilon - \theta_2 = 12.1672 \quad \text{องศา} \tag{6.11}$$

สำหรับความหนาแน่นหลังคลื่นช็อคจะหาจาก

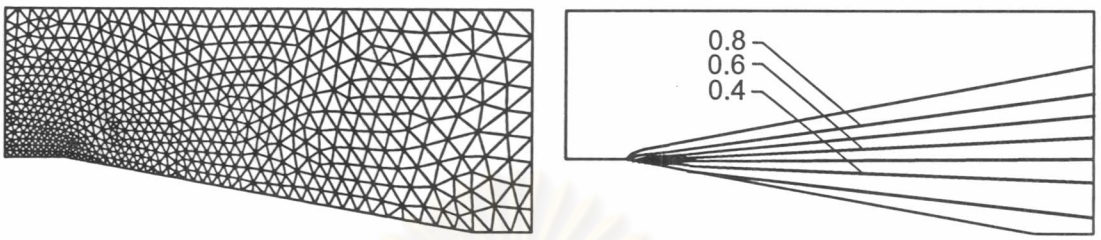
$$\rho_2 = \frac{\rho_2}{\rho_o}\frac{\rho_o}{\rho_1}\rho_1$$

$$= \frac{1.6833E-03}{5.1936E-03}(1) = 0.324 \tag{6.12}$$

โดยอัตราส่วนความหนาแน่นสามารถหาได้จากตารางคุณสมบัติการไหลแบบไอโซโทรปิก [18]

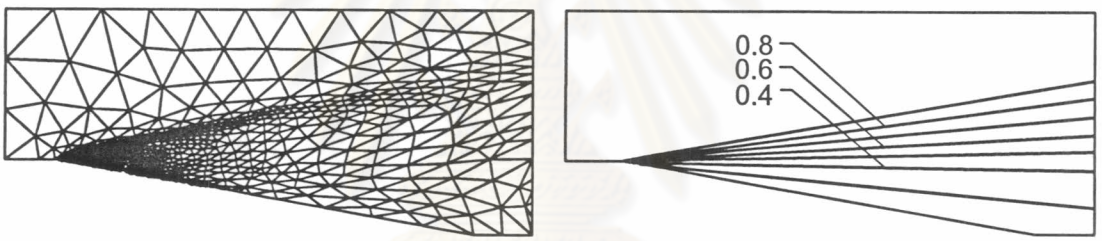
การวิเคราะห์หาการกระจายของความหนาแน่นทั้งโดเมนการไหลจะประยุกต์ใช้โปรแกรม CELLHIFLOW ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบเอลิเมนต์เริ่มต้นขนาด 1,131 เอลิเมนต์ 621 จุดต่อ ดังในรูปที่ 6.20 (ก) จากนั้นคำนวณหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW ทำให้ได้ลักษณะการกระจายของความหนาแน่นแสดงในรูปที่ 6.20 (ข) พบว่าแนวคลื่นช็อคขยายตัวค่อนข้างกว้าง โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณมุมขยายตัวควรจะต้องมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กอยู่ เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้ในบริเวณนี้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น เนื่องจากมีผลต่อเส้นแนวช็อคและคำตอบที่อยู่ด้านหลังมุมขยายตัวทั้งหมด ดังนั้นจึงเรียกใช้โปรแกรม SPACE ร่วมกับค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้ ทำให้ได้ขนาดเอลิเมนต์และทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์ และนำค่าที่ได้มาทำการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง ดังในรูปที่ 6.21 (ก) ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 990 เอลิเมนต์ 548 จุดต่อ พบว่ามีการแบ่งเอลิเมนต์ขนาดเล็กลงในบริเวณมุมขยายตัว เมื่อทำการหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW จะได้ลักษณะเส้นชั้นความหนาแน่นดังในรูปที่ 6.21 (ข) พบว่าแนวคลื่นช็อคที่ได้บริเวณมุมขยายตัวมีแนวตรงมากขึ้น จากนั้นทำกระบวนการเดิมอีกครั้งด้วยการใช้ค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้ล่าสุด และเมื่อทำการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จะได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองขนาด 1,071 เอลิเมนต์ 565 จุดต่อ ดังในรูปที่ 6.22 (ก) บริเวณมุมขยายตัวมีการแบ่งเอลิเมนต์ขนานเล็กอย่างหนาแน่น และ

เมื่อใช้โปรแกรม CELLHIFLOW ทำการคำนวณหาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น จะได้ลักษณะเส้นชั้นความหนาแน่น ดังในรูปที่ 6.22 (ข) พบว่าแนวคลื่นช็อคมีแนวตรงทั้งโดเมนการคำนวณ



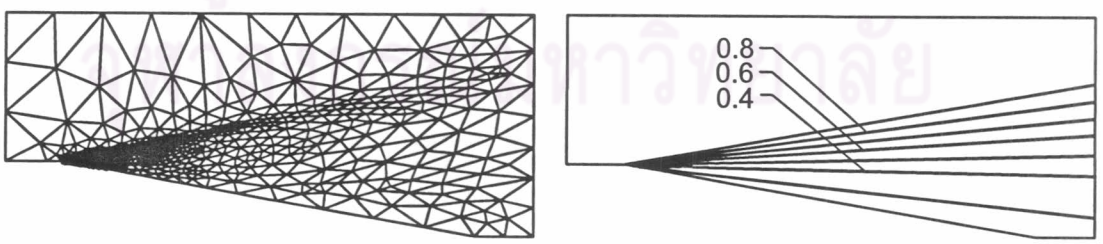
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น (ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและการกระจายความหนาแน่นของของไหล สำหรับปัญหาการขยายตัวจากการไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านพื้นเอียง



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง (ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่งและการกระจายความหนาแน่นของของไหล สำหรับปัญหาการขยายตัวจากการไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านพื้นเอียง



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สอง (ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6.22 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองและการกระจายความหนาแน่นของของไหล สำหรับปัญหาการขยายตัวจากการไหลความเร็วสูงแบบไม่หนืดผ่านพื้นเอียง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลการคำนวณที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองพบว่าบริเวณด้านหลังแนวช็อคขยายตัวมีค่ามัคนัมเบอร์เท่ากับ 7.553 และค่าความหนาแน่นมีค่าเท่ากับ 0.3175 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับผลการคำนวณในสมการ (6.10) และ (6.12)

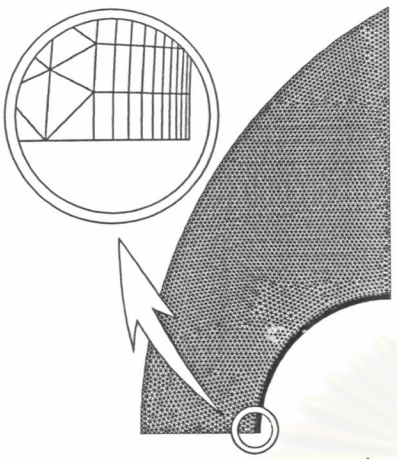
6.1.4 การไหลความเร็วสูงแบบหนืดผ่านผิวโค้ง

ตัวอย่างนี้เป็นการขยายผลต่อจากปัญหาในหัวข้อ 6.1.2 โดยพฤติกรรมการไหลที่เกิดขึ้นจะมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นเนื่องจากลักษณะการไหลได้รวมผลของความหนืดร่วมด้วย ทำให้เกิดการถ่ายเทความร้อนและความดันทางพลศาสตร์จากของไหลสู่โครงสร้างของผนังทรงกระบอก ดังนั้นผลการคำนวณที่เกิดขึ้นนอกจากจะพิจารณาตำแหน่งแนวช็อคโค้งต้องถูกต้องแล้ว ยังรวมไปถึงปริมาณความร้อนและความดันตลอดผิวทรงกระบอกที่ต้องมีความแม่นยำด้วยเช่นเดียวกัน ของไหลไหลเข้ามาทางซ้ายด้วยความเร็วเหนือกว่าเสียง 6.47 เท่า มีค่าความหนาแน่น ρ = 0.84768698E-9 $lb_f - sec^2/in^4$, u = 0.80088E+5 in/sec, v = 0, ε = 0.349923E+10 in^2/sec^2 และกำหนดให้ผิวโค้งมีค่าพลังงานรวม ε_w = 0.356246E+9 in^2/sec^2 ส่วนคุณสมบัติอื่น ๆ ของของไหลที่ใช้ร่วมในการคำนวณหาพฤติกรรมการไหล ได้แก่ ค่าอุณหภูมิ T_∞ = 434.7 R ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ γ = 1.38 ค่าแพรนด์เทิลนัมเบอร์ Pr = 0.72 และค่าความหนืดพลศาสตร์ซึ่งคำนวณมาจากกฎของซัทเทอร์แลนด์

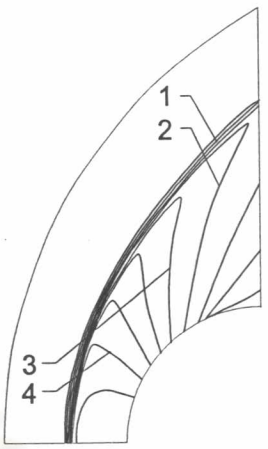
$$\mu = \mu_o \left(\frac{T}{T_o}\right)^{1.5} \frac{T_o + S}{T + S} \tag{6.13}$$

โดย μ_o = 2.48653E-9 $lb_f \cdot s/in^2$; T_o = 491.6 R; และ S = 199 R

การวิเคราะห์ปัญหาจะใช้ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลเซนเตอร์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 10 ชั้นในบริเวณใกล้กับผิวของทรงกระบอก เพื่อสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในขอบชั้น (boundary layer) ส่วนบริเวณอื่นยังคงใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเหมือนเดิม ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 7,270 เอลิเมนต์ และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 500 เอลิเมนต์ ด้วยจุดต่อจำนวน 4,274 จุด ดังแสดงในรูปที่ 6.23 (ก) จากนั้นเรียกใช้โปรแกรม CELLHIFLOW ทำการคำนวณหาผลลัพธ์ ทำให้ได้ลักษณะการกระจายความดัน ดังแสดงในรูปที่ 6.23 (ข)



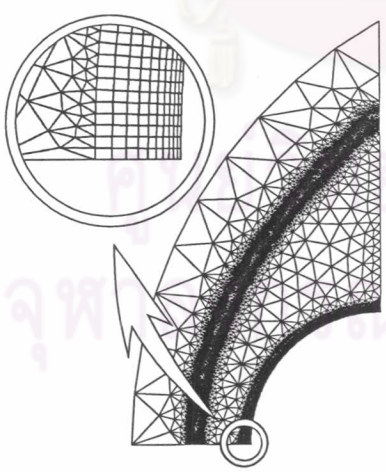
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น



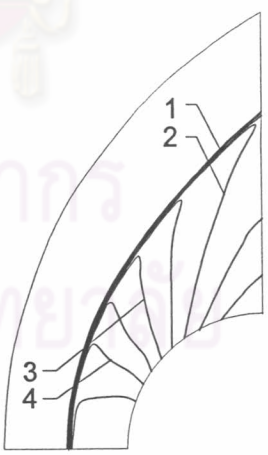
(ข) เส้นชั้นแสดงความดัน

รูปที่ 6.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและการกระจายความดันของของไหล สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบหนืดผ่านผิวโค้ง

จากนั้นประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับค่าความหนาแน่นของจุดต่อ ทำให้ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง ดังแสดงในรูปที่ 6.24 (ก) ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 7,725 เอลิเมนต์ และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 1,860 เอลิเมนต์ 5,857 จุดต่อ และเมื่อคำนวณหาพฤติกรรมการไหลด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW จะได้ลักษณะการกระจายความดันดังแสดงในรูปที่ 6.24 (ข) พบว่าแนวคลื่นช็อคบางลง



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่ง

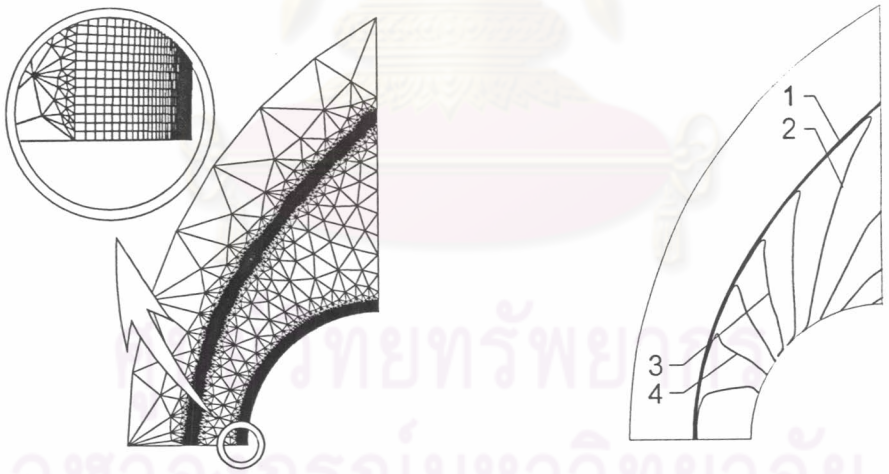


(ข) เส้นชั้นแสดงความดัน

รูปที่ 6.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่หนึ่งและการกระจายความดันของของไหล สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบหนืดผ่านผิวโค้ง

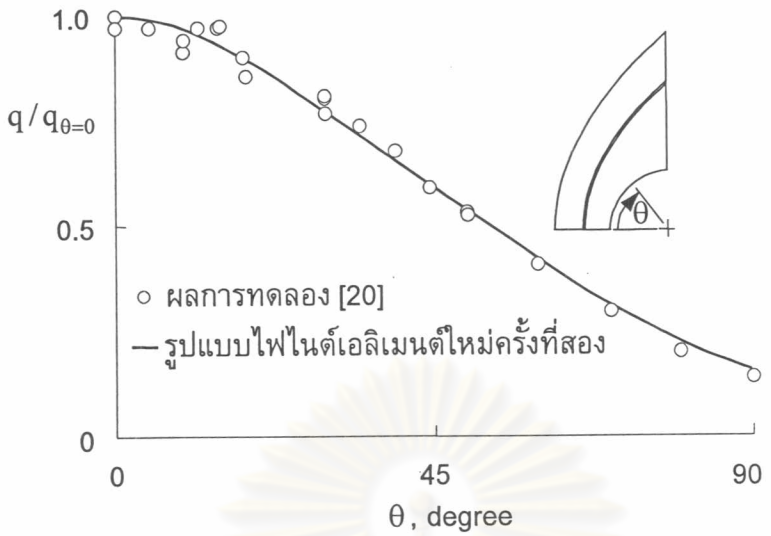
ทำกระบวนการเดิมอีกครั้งจะได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการปรับขนาดใหม่ครั้งที่สอง จะเห็นว่ามีการสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดแนวคลื่นช็อค ซึ่งทั้งโดเมนมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 10,143 เอลิเมนต์และแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 40 ชั้นบริเวณใกล้กับผนังทรงกระบอกจำนวน 13,400 เอลิเมนต์ 18,702 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.25 (ก) และเมื่อทำการคำนวณด้วยโปรแกรม CELLHIFLOW พบว่าแนวเส้นช็อคมีความบางมาก ดังในรูปที่ 6.25 (ข) แสดงการกระจายของค่าความดัน และเมื่อทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองกับผลการทดลอง พบว่ามีค่าใกล้เคียงทั้งปริมาณความร้อนทางพลศาสตร์ และความดันที่กระทำกับผิวทรงกระบอกที่กระทำกับผิวทรงกระบอก ดังแสดงในรูปที่ 6.26 และ 6.27 ตามลำดับ

ผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างนี้บ่งชี้ถึงความน่าเชื่อถือของคำตอบที่ได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลเซนเตอร์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ รวมไปถึงการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมขนาดเล็กบริเวณใกล้กับผนังเพื่อให้สามารถได้ค่าความดันและปริมาณความร้อนทางพลศาสตร์ที่กระทำกับผนังได้อย่างถูกต้อง

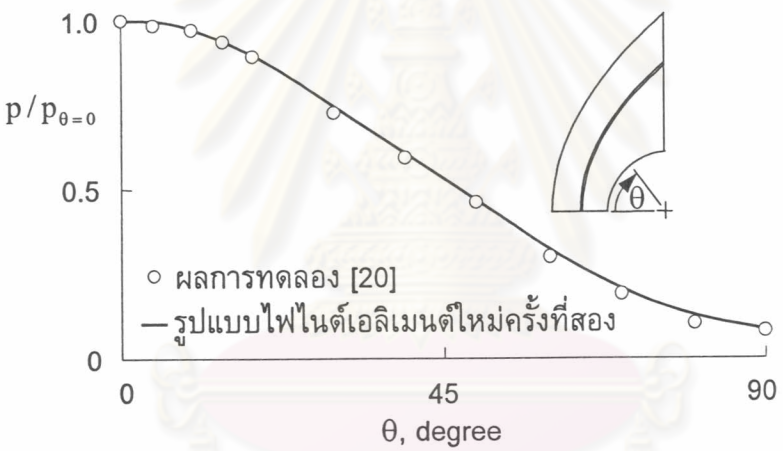


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สอง (ข) เส้นชั้นแสดงความดัน

รูปที่ 6.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองและการกระจายความดันของของไหลสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบหนืดผ่านผิวโค้ง



รูปที่ 6.26 การกระจายของความร้อนทางพลศาสตร์ที่กระทำกับผิวทรงกระบอก

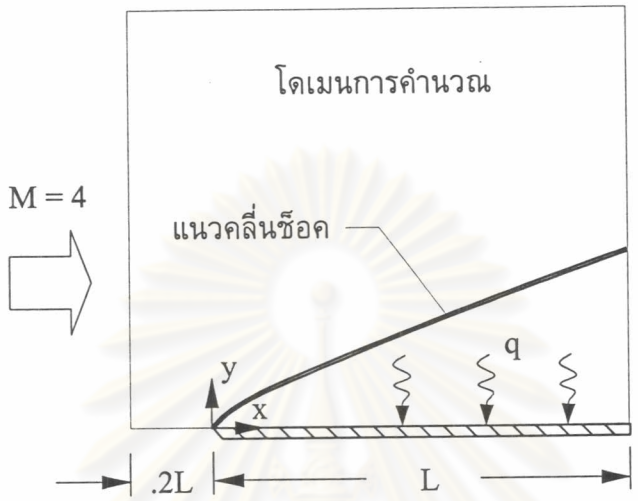


รูปที่ 6.27 การกระจายความดันของของไหลบนผิวทรงกระบอก

6.1.5 การไหลความเร็วสูงแบบหนืดผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม

ปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลแบบหนืดอีกตัวอย่างหนึ่งที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องได้เป็นอย่างดี โดยเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง [1] ลักษณะปัญหาเป็นการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 4 เท่าไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของโดเมนการไหล กระทบกับปลายแหลมของแผ่นเรียบ ซึ่งของไหลบริเวณดังกล่าวจะถูกลดความเร็วลงเนื่องจากอิทธิพลของความหนืด ทำให้ของไหลที่ตามมาเห็นอนุภาคของไหลดังกล่าวคล้ายเป็นส่วนโค้งเล็ก ๆ ของวัตถุแทน ก่อให้เกิดปรากฏการณ์ของคลื่นช็อคโค้ง ดังแสดงในรูปที่ 6.28 ความซับซ้อนของการไหลจึงเกิดขึ้นระหว่างคลื่นช็อคโค้งและพื้นแผ่นเรียบหรือที่เรียกว่าชั้นช็อค (shock layer)

คลื่นช็อคโค้งและคุณสมบัติอื่น ๆ ของของไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณปลายแหลมของแผ่นเรียบ ดังนั้นถ้าบริเวณดังกล่าวมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กอยู่หนาแน่นก็จะทำให้มีผลกับความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ

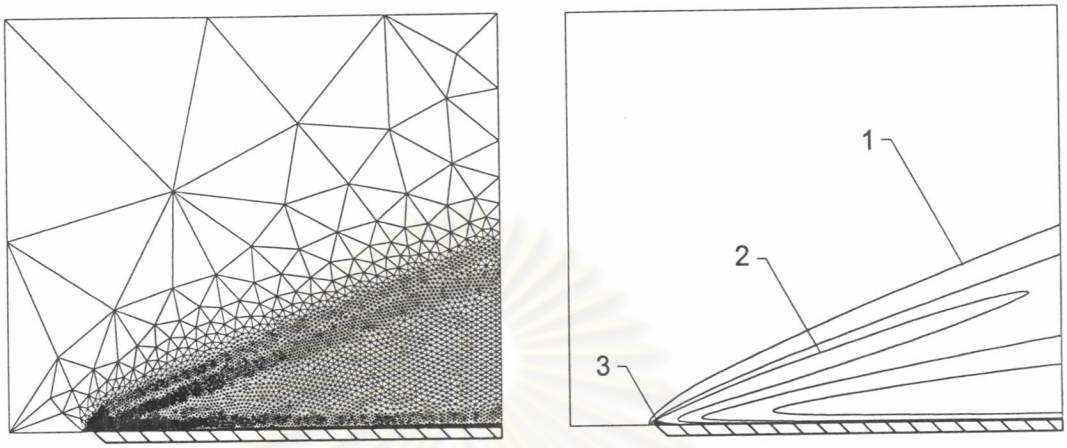


รูปที่ 6.28 การไหลความเร็วสูงผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม

ในการแก้ปัญหานี้จะกำหนดให้แผ่นเรียบมีความยาว L = 0.00001 เมตร โดยการไหลผ่านเข้ามาทางซ้ายของโดเมนการไหลด้วยค่ามัคนัมเบอร์ M = 4 ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.2252$ kg/m^3; ค่าความเร็ว u = 1,361.12 m/sec; v = 0, ค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 1,133.080$ J/kg และกำหนดให้ผิวแผ่นเรียบมีค่าพลังงานรวม $\varepsilon_w = 206.754.8$ J/kg ส่วนคุณสมบัติอื่น ๆ ของของไหลที่ใช้ร่วมในการคำนวณหาพฤติกรรมการไหล ได้แก่ ค่าอุณหภูมิ $T_\infty = 288.16$ K; ค่าแพรนด์เทิลนัมเบอร์ Pr = 0.71; ค่าคงตัวสากลของแก๊ส R = 287 J/kg-K และค่าความหนืดพลศาสตร์คำนวณจากสมการ (6.13) โดย μ_o = 1.7894E-5 kg/m-s; T_o = 288.16 K และ S = 110 K

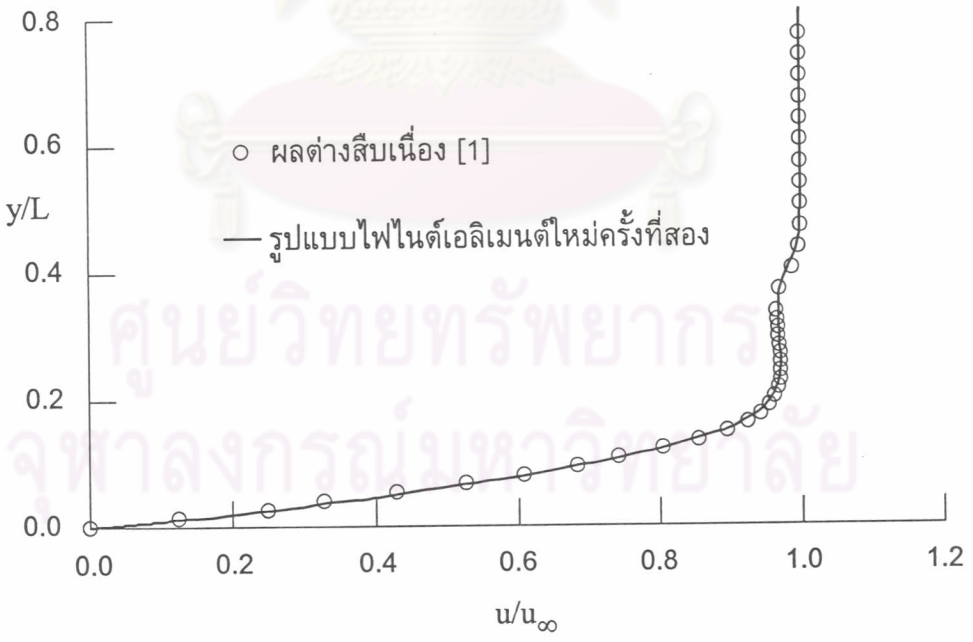
กระบวนการแก้ปัญหาได้ใช้เหมือนกับตัวอย่างอื่นที่ผ่านมาคือ ประยุกต์ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลเซนเตอร์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และแบ่งโดเมนบริเวณใกล้กับผนังแผ่นเรียบเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเพื่อสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในขอบชั้น (boundary layer) เมื่อทำการประยุกต์กระบวนการดังกล่าว 2 รอบทำให้ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สอง ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 10,353 เอลิเมนต์และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 4,011 เอลิเมนต์ ส่วนจุดต่อทั้งหมดมี 9,342 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.29 (ก) และเส้นชั้นแสดงความหนาแน่นของผลลัพธ์แสดงในรูปที่ 6.29 (ข) จากนั้นทำการพล็อตค่าความเร็ว u กับระยะในแนว y บนขอบด้านขวาสุดของโดเมนการไหล ดังแสดงในรูปที่ 6.30 ลักษณะการกระจายของความเร็ว u(y) ที่ได้แสดงให้เห็นถึงขอบชั้นบางที่เกิดขึ้นติด

กับผนังเรียบ และค่าที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง [1]



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สอง (ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

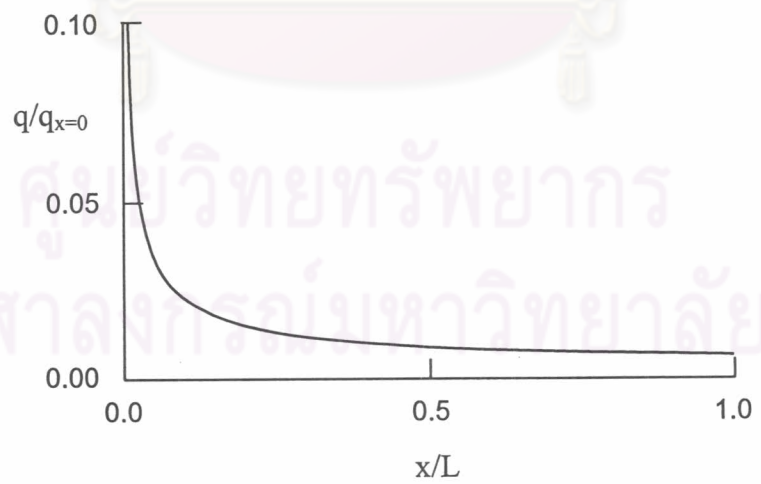
รูปที่ 6.29 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ครั้งที่สองและการกระจายความหนาแน่นของของไหล สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม



รูปที่ 6.30 การกระจายความเร็วตลอดขอบขวาด้านการไหลออก สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 6.31 การกระจายอุณหภูมิตลอดขอบขวาด้านการไหลออก
สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม



รูปที่ 6.32 ปริมาณความร้อนตามแนวยาวของแผ่นเรียบสำหรับ
ปัญหาการไหลความเร็วสูงผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

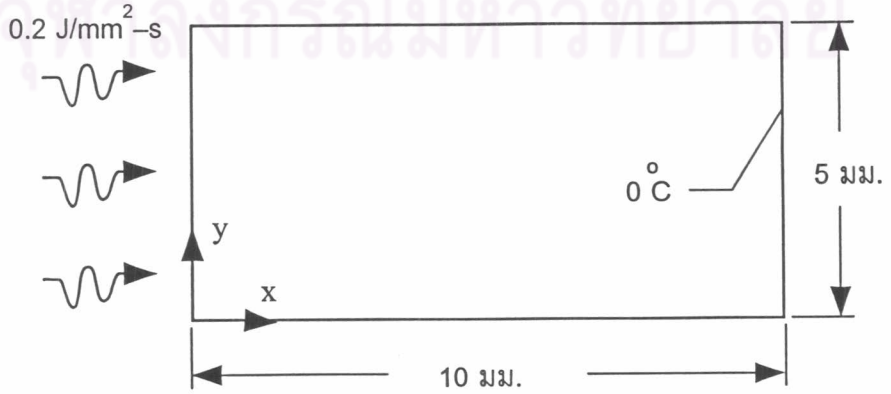
ผลลัพธ์ของค่าพลังงานรวม ε ที่คำนวณได้ตามจุดต่อต่าง ๆ ได้นำไปคำนวณหาค่าอุณหภูมิของแต่ละจุดต่อ และได้พล็อตค่าอุณหภูมิกับระยะในแนว y บนขอบด้านขวาสุดของโดเมนการไหล ดังแสดงในรูปที่ 6.31 ลักษณะของการกระจายของอุณหภูมิ T(y) ที่ได้มีความซับซ้อนกว่าของค่าความเร็ว u(y) ค่อนข้างมาก โดยเฉพาะบริเวณที่ใกล้กับแผ่นเรียบภายในโดเมนของขอบชั้นบางนั้นอุณหภูมิเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ทำให้ความชันของอุณหภูมิมีค่าสูงซึ่งก่อให้เกิดปริมาณความร้อน (heating rate) จากของไหลลงสู่แผ่นเรียบ รูปที่ 6.32 แสดงลักษณะการกระจายของปริมาณความร้อนนี้ตลอดแนวความยาวของแผ่นเรียบซึ่งพบว่าปริมาณความร้อนที่บริเวณปลายแหลมคมของแผ่นเรียบนี้มีค่าสูงมาก ปริมาณความร้อนที่กระทำต่อแผ่นเรียบนี้จะเป็นผลทำให้ระดับอุณหภูมิของแผ่นเรียบนั้นมีค่าแตกต่างกัน อันเป็นผลต่อเนื่องต่อการโก่งตัวและความเค้นเนื่องจากความร้อน การโก่งงอเสียรูปไปของแผ่นเรียบจะมีผลกระทบย้อนกลับไปเปลี่ยนสภาวะการไหลที่เกิดขึ้นเหนือแผ่นเรียบนั้น พฤติกรรมที่เกิดขึ้นของของไหลและแผ่นเรียบเช่นนี้เป็นปัญหาที่มีการปฏิสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันระหว่างการไหล ระดับอุณหภูมิ และการเสียรูปในของแข็ง (fluid-thermal-structural interaction) ซึ่งจะได้นำเสนอต่อไปในบทที่ 7

6.2 ตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่ขึ้นกับเวลา

โปรแกรม HEAT2DTS ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้ถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับตัวอย่างที่ขึ้นกับเวลาและมีผลเฉลยแม่นตรง 2 ตัวอย่างดังนี้

6.2.1 แผ่นสี่เหลี่ยมที่ได้รับความร้อนจากภายนอก

ปัญหานี้ต้องการหาการกระจายของอุณหภูมิที่เวลาต่าง ๆ ภายหลังจากที่แผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 10 x 5 ตร.มม. ได้รับความร้อนภายนอก 0.2 J/mm^2–s ทางด้านซ้าย ในขณะที่ตลอดขอบทางด้านขวามีอุณหภูมิคงที่ 0 องศาเซลเซียส ดังแสดงในรูปที่ 6.33 แผ่นสี่เหลี่ยมมีความหนาแน่น ρ = 0.1 g/mm; ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c เท่ากับ 0.22 J/g–°C; สัมประสิทธิ์การนำความร้อน k = 0.001736 W/mm–°C



รูปที่ 6.33 แผ่นสี่เหลี่ยมได้รับความร้อนจากภายนอก

ปัญหานี้สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้จากวิธีแยกตัวแปร (separation of variables) [19] ดังนี้

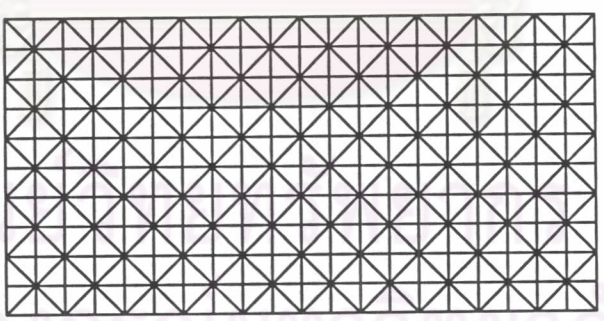
$$T(x,t) = \frac{q(L-x)}{k} - \frac{8qL}{k\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi(L-x)}{2L}e^{-\frac{k}{\rho c}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2 t} \qquad (6.14)$$

โดย q คือปริมาณความร้อนจากภายนอกขนาด 0.2 J/mm^2–s

L คือความยาวของแผ่นสี่เหลี่ยม เท่ากับ 10 มม.

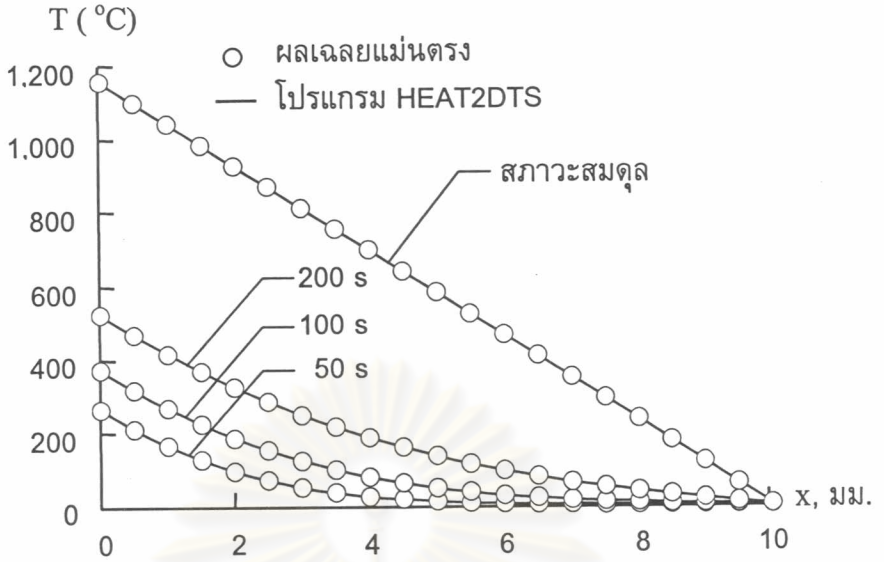
t คือเวลา

การคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิที่เวลาต่าง ๆ ของแผ่นสี่เหลี่ยมด้วยโปรแกรม HEAT2DTS เริ่มต้นจากการแบ่งย่อยแผ่นสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเท่า ๆ กันจำนวน 400 เอลิเมนต์ 231 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.34 จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตคือกำหนดปริมาณความร้อนจากภายนอกขนาด 0.2 J/mm^2–s บนขอบเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกับขอบทางด้านซ้ายทั้งหมด และกำหนดอุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียสบนจุดต่อที่อยู่บนขอบทางด้านขวา จากนั้นกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้น (t = 0 sec) ของจุดต่อทั้งหมดให้เท่ากับ 0 องศาเซลเซียส ต่อมาทำการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมที่เวลา 50, 100, 200 วินาที และที่สภาวะสมดุล



รูปที่ 6.34 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมได้รับความร้อนจากภายนอก

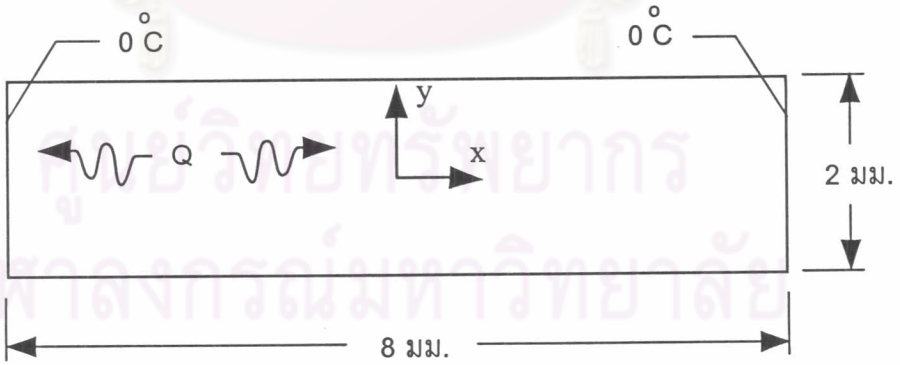
รูปที่ 6.35 เป็นการพล็อตเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 50, 100, 200 วินาที และที่สภาวะสมดุลระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม HEAT2DTS กับผลแฉลยแม่นตรงที่ได้จากสมการ (6.14) จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 6.35 การกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 50, 100, 200 วินาที และที่สภาวะสมดุล สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมได้รับความร้อนจากภายนอก

6.2.2 แผ่นสี่เหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

ลักษณะของปัญหาคือแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 8 x 2 ตร.มม. ตลอดขอบทั้งซ้ายและขวามีอุณหภูมิเท่ากับ 0 องศาเซลเซียส ภายในแผ่นสี่เหลี่ยมสามารถผลิตความร้อนได้เอง Q ขนาด 2000 W/mm^2 ดังแสดงในรูปที่ 6.36 แผ่นสี่เหลี่ยมมีความหนาแน่น $\rho = 1.0$ g/mm; ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c เท่ากับ 1.0 J/g–°C; สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 16.0$ W/mm–°C



รูปที่ 6.36 แผ่นสี่เหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

ปัญหานี้หาผลเฉลยแม่นตรงได้จากวิธีแยกตัวแปร (separation of variables) [19] ดังนี้

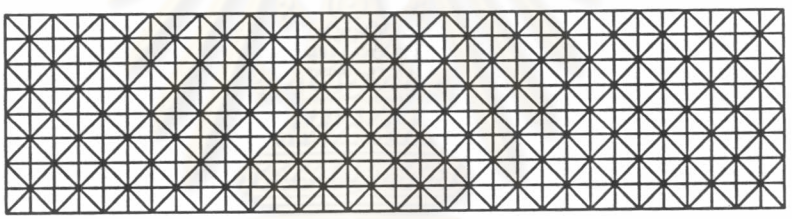
$$T(x,t) = \frac{QL^2}{2k}\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{32}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]e^{-\frac{k}{\rho c}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2 t}\right\} \quad (6.15)$$

โดย Q คือปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง เท่ากับ 2,000 W/mm^2

L คือความยาว เท่ากับ 4 มม.

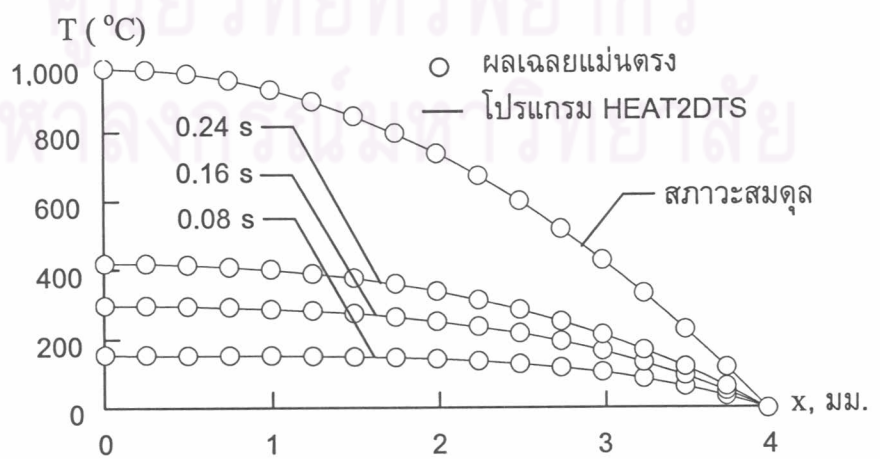
t คือเวลา

การคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิที่เวลาต่าง ๆ ของแผ่นสี่เหลี่ยมด้วยโปรแกรม HEAT2DTS เริ่มต้นจากการแบ่งย่อยแผ่นสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเท่า ๆ กันจำนวน 512 เอลิเมนต์ 297 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.37 จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตคือกำหนดปริมาณความร้อนภายในขนาด 2,000 W/mm^2 และกำหนดอุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียสบนจุดต่อที่อยู่บนขอบทางด้านซ้ายและขวา จากนั้นกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้น (t = 0 sec) ของจุดต่อทั้งหมดให้เท่ากับ 0 องศาเซลเซียส ต่อมาทำการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมที่เวลา 0.08, 0.16, 0.24 วินาที และที่สภาวะสมดุล



รูปที่ 6.37 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

รูปที่ 6.38 เป็นการพล็อตเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 0.08, 0.16, 0.24 วินาที และที่สภาวะสมดุลระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม HEAT2DTS กับผลแฉลยแม่นตรงที่ได้จากสมการ (6.15) จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง



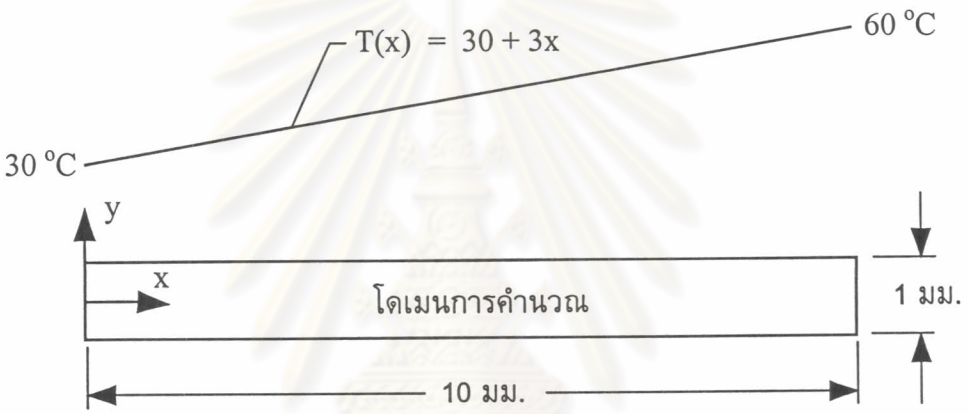
รูปที่ 6.38 การกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 0.08, 0.16, 0.24 วินาที และที่สภาวะสมดุล สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

6.3 ตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหากลศาสตร์ของแข็ง

โปรแกรม STRESS2DTH ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้ถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับตัวอย่างที่มีภาระเนื่องจากอุณหภูมิและมีผลเฉลยแม่นตรง 2 ตัวอย่างดังนี้

6.3.1 แผ่นสี่เหลี่ยมยาวที่มีอุณหภูมิสัมพันธ์เชิงเส้นกับระยะตามยาว

ลักษณะปัญหาเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 10 x 1 ตร.มม. มีอุณหภูมิที่ขึ้นกับระยะทาง x ด้วยความสัมพันธ์เชิงเส้นคือ $T(x) = 30 + 3x$ โดยตลอดขอบทางซ้ายจะมีอุณหภูมิเท่ากับ 30 $^{\circ}$C ส่วนตลอดขอบทางด้านขวามีอุณหภูมิเท่ากับ 60 $^{\circ}$C ดังแสดงในรูปที่ 6.39 ส่วนขอบทางด้านซ้ายจะไม่มีการเคลื่อนที่ ดังแสดงในรูปที่ 6.39 แผ่นสี่เหลี่ยมมีคุณสมบัติทางกลคือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 71{,}705.5$ N/mm^2; ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง ν เท่ากับ 0.29 และสัมประสิทธิ์การขยายตัว $\alpha = 1.27E\text{-}05$ mm/mm–$^{\circ}$C



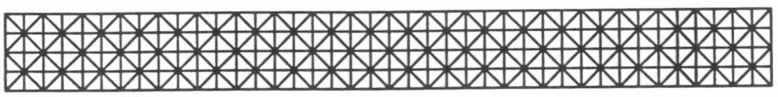
รูปที่ 6.39 แผ่นสี่เหลี่ยมที่อุณหภูมิมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับระยะตามยาว

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงดังนี้

$$u(x) = \alpha\left(30x + \frac{3x^2}{2}\right) \tag{6.17}$$

โดย $u(x)$ คือค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x

การคำนวณค่าการเคลื่อนตัวเนื่องจากอุณหภูมิที่แตกต่างกันบนแผ่นสี่เหลี่ยมจะใช้โปรแกรม STRESS2DTH โดยเริ่มต้นจากการแบ่งย่อยแผ่นสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเท่า ๆ กันจำนวน 320 เอลิเมนต์ 205 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.40 จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตคือกำหนดไม่ให้มีการเคลื่อนที่ตลอดขอบทางด้านซ้าย และกำหนดอุณหภูมิขณะที่วัสดุไม่มีความเค้น T_o เท่ากับ 0 องศาเซลเซียส และทำการคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น



รูปที่ 6.40 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่
อุณหภูมิมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับระยะตามยาว

รูปที่ 6.41 เป็นการพล็อตค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x ระหว่างผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นตรงและโปรแกรม STRESS2DTH พบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมาก

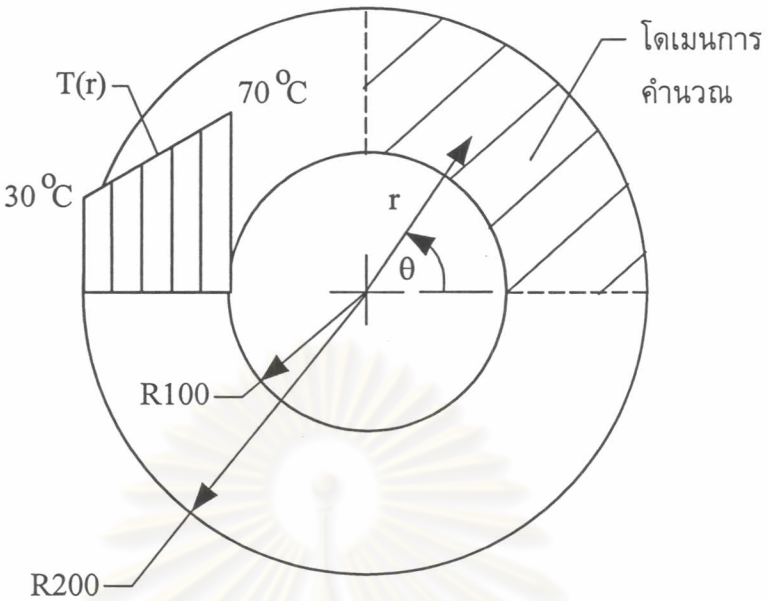
รูปที่ 6.41 ค่าการเคลื่อนตัวเนื่องจากความร้อนในแนวแกน x สำหรับปัญหา
แผ่นสี่เหลี่ยมที่อุณหภูมิมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับระยะตามยาว

6.3.2 วงแหวนที่มีอุณหภูมิสัมพันธ์เชิงเส้นกับรัศมี

ลักษณะปัญหาเป็นวงแหวนที่มีรัศมีภายใน a เท่ากับ 100 มม. รัศมีภายนอก b เท่ากับ 200 มม. และวงแหวนมีอุณหภูมิเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับรัศมี r ดังนี้

$$T(r) = 110 - 0.4\,r$$

โดยอุณหภูมิตลอดขอบด้านในเท่ากับ 30 °C และขอบด้านนอกเท่ากับ 70 °C ดังแสดงในรูปที่ 6.42 วงแหวนมีคุณสมบัติทางกลคือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E = 71,705.5 N/mm^2; ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง ν เท่ากับ 0.29; สัมประสิทธิ์การขยายตัว α = 2.286E-05 mm/mm –°C และมีอุณหภูมิขณะที่วัสดุไม่มีความเค้น T_o เท่ากับ 0 องศาเซลเซียส



รูปที่ 6.42 วงแหวนที่อุณหภูมิมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับรัศมี

ปัญหานี้สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงสำหรับกรณีความเค้นในระนาบได้ดังนี้

$$u(r) = \frac{\alpha}{r}\left[\frac{(1-\nu)r^2+(1+\nu)a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,dr+(1+\nu)\int_a^r T(r)\,r\,dr\right] \qquad (6.18)$$

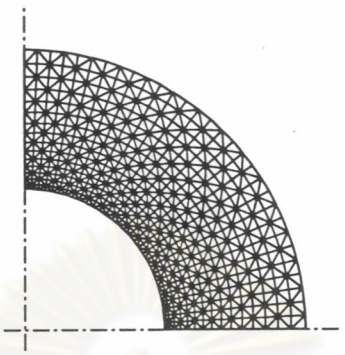
$$\sigma_r(r) = \frac{E\alpha}{r^2}\left[\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,dr-\int_a^r T(r)\,r\,dr\right] \qquad (6.19)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E\alpha}{r^2}\left[\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,dr+\int_a^r T(r)\,r\,dr-T(r)r^2\right] \qquad (6.20)$$

โดย u(r) คือค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี

ลักษณะปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นสามารถใช้โดเมนการคำนวณเพียง 1 ใน 4 ของวงแหวน ดังในรูปที่ 6.42 การคำนวณค่าการเคลื่อนตัวเนื่องจากอุณหภูมิที่แตกต่างกันบนวงแหวนจะใช้โปรแกรม STRESS2DTH โดยเริ่มต้นจากการแบ่งย่อยแผ่นสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเท่า ๆ กันจำนวน 900 เอลิเมนต์ 496 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.43 จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตคือกำหนดให้ตลอดขอบทางด้านล่างไม่มีการเคลื่อนที่ในแนว

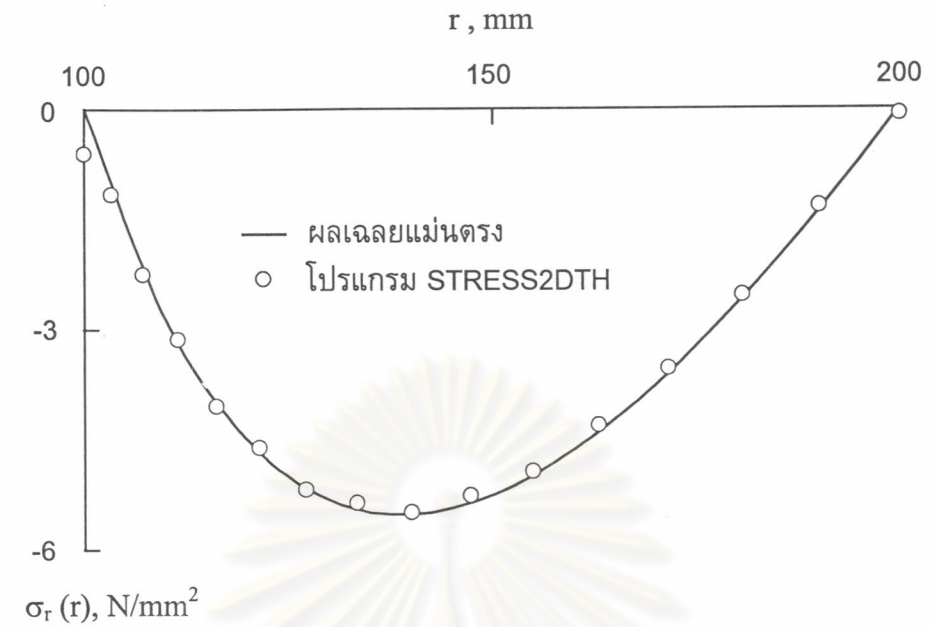
แกน y และขอบทางด้านซ้ายจะไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x รวมทั้งกำหนดอุณหภูมิ T(r) ตลอดทั้งโดเมน และทำการคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น



รูปที่ 6.43 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวงแหวน
ที่อุณหภูมิมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับรัศมี

ค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี ความเค้นในแนวรัศมีและในแนว θ ที่คำนวณได้จากโปรแกรม STRESS2DTH ได้นำมาพล็อตเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากสมการ (6.18) – (6.20) ตลอดแนวที่มุม θ = 0 ดังแสดงในรูปที่ 6.44 – 6.46 พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

รูปที่ 6.44 การเปลี่ยนแปลงของค่าการเคลื่อนตัวตามทิศทางรัศมี ในแนวมุม θ เท่ากับ 0



รูปที่ 6.45 ความเค้นในแนวรัศมี σ_r ตามทิศทางรัศมีที่แนวมุม θ เท่ากับ 0

รูปที่ 6.46 ความเค้นในทิศ θ, σ_θ ตามทิศทางรัศมีที่แนวมุม θ เท่ากับ 0

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย