บทที่ 3
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การแก้ปัญหาด้านการไหล การถ่ายเทความร้อน หรือแม้แต่ปัญหาการสั่น ล้วนต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์โดยการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการอธิบายลักษณะต่างๆ ที่เกิดขึ้น และวิธีที่จำเป็นอย่างมากในการหาคำตอบได้แก่ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งมีอยู่หลายวิธีด้วยกันเช่นระเบียบวิธีชิ้นประกอบขอบ ระเบียบวิธีปริมาตรอันตะ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะและระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ โดยการเลือกใช้จะขึ้นอยู่กับความต้องการความแม่นยำ เวลา และความสะดวกของผู้ที่ต้องการศึกษา

3.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite difference method)

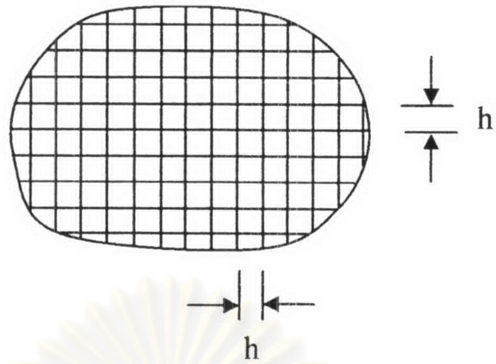
ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เป็นวิธีการเริ่มแรกที่นำมาใช้ในการหาผลเฉลยและยังคงเป็นที่นิยมนำมาใช้ในการศึกษาปัญหาต่างๆ เช่น ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ปัญหาคลื่นน้ำ และปัญหาที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก รวมทั้งยังสะดวกต่อการนำไปแก้ปัญหาใน 1 มิติ ซึ่งให้ความแม่นยำเพียงพอต่อการนำไปใช้

ในปี 1908 นักวิทยาศาสตร์ที่ชื่อ Runge [26] เป็นคนแรกที่นำระเบียบวิธีผลต่างอันตะมาทำการคำนวณด้วยวิธีการวิยุต (discretization) เพื่อตรวจสอบปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความยืดหยุ่น และต่อมาในปี 1910 Richardson [27] ได้ทำการศึกษาต่อไป

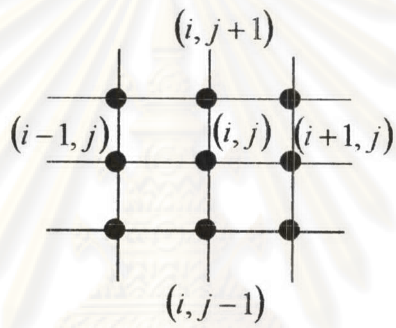
ปี 1946 Southwell [28] ได้อธิบาย pre-computer โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะในกลศาสตร์ภาวะต่อเนื่อง (continuum mechanics)

ต่อมาปี 1964 Young และ Wheeler [29] เป็นกลุ่มแรกที่นำระเบียบวิธีผลต่างอันตะ มาใช้กับปัญหาการไหลของของไหลชนิดเพาเวอร์ลอ (a power-law fluid) ซึ่งเป็นของไหลนอนนิวโตเนียนที่ไหลในท่อสี่เหลี่ยม (a square duct) จากนั้นได้มีผู้นำความรู้ทางระเบียบวิธีผลต่างอันตะ มาศึกษาปัญหาทางด้านของไหลและรีโอโลยีมากขึ้นได้แก่ Richtmyer และ Morton (1967) [30], Roache (1976) [31] และ Crochet et al. (1984) [32] เป็นต้น สามารถอธิบายถึงพฤติกรรมและผลกระทบต่างๆ ที่เกิดขึ้นได้ดีพอสมควร เนื่องจากมีข้อจำกัดในเรื่องของเทคโนโลยีและทรัพยากร จากการศึกษาเพิ่มขึ้นทำให้สามารถพัฒนาวิธีการนี้ได้จึงมีผู้สร้างทฤษฎีต่างๆ ขึ้นมากมาย ให้เราได้ศึกษากันในปัจจุบัน

โดยปกติแล้วในหลักการนี้เราจะแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยๆ ซึ่งมีลักษณะเป็นกริดที่สม่ำเสมอ (uniform grid) ขนาด h ดังรูปที่ 3.1



(ก) โดเมนที่แบ่งเป็นชิ้นประกอบย่อยๆ



(ข) ลักษณะพิกัดโนด

รูปที่ 3.1 การแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยๆ ซึ่งมีลักษณะเป็นกริดที่สม่ำเสมอ

เลขโนดต่างๆ ในปริภูมิ จะกำหนดเป็นคู่อันดับ (i, j) และค่าของตัวแปรต่างๆ จะแบ่งเป็นค่าที่ขึ้นกับจุดพิกัด เรียกจุดพิกัดเหล่านี้ว่าจุดโนด (nodal points) ตัวอย่างเช่น $p_{i,j}$ เป็นค่าของความดัน p ที่โนด (i, j) หรืออาจเรียกว่าโนด n เป็นต้น

จากการนำความรู้ในเรื่องการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) มาใช้จะได้

$$p_{i+1,j} = p_{i,j} + h\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{i,j} + O(h^3) \tag{3.1}$$

และในทำนองเดียวกัน

$$p_{i-1,j} = p_{i,j} - h\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{i,j} + O(-h^3) \tag{3.2}$$

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของ $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,j}$ และ $\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{i,j}$ ได้โดยการบวกและลบสมการจึงทำให้มีสูตรต่างๆ ดังนี้

1. สูตรผลต่างข้างหน้า (forward difference formula)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่1 (first-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่1 (first order accuracy)

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{(p_{i+1,j} - p_{i,j})}{h} + O(h) \tag{3.3}$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่2 (second-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่1

$$\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{p_{i+2,j} - 2p_{i+1,j} + p_{i,j}}{h^2} + O(h) \tag{3.4}$$

2. สูตรผลต่างย้อนหลัง (backward difference formula)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่1 (first-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่1

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{(p_{i,j} - p_{i-1,j})}{h} + O(h) \tag{3.5}$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่2 (second-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่1

$$\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{p_{i,j} - 2p_{i-1,j} + p_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \tag{3.6}$$

3. สูตรผลต่างตรงกลาง (central difference formula)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่1 (first-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่2 (second order accuracy)

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{(p_{i+1,j} - p_{i-1,j})}{2h} + O(h^2) \tag{3.7}$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่2 (second-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่2

$$\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \tag{3.8}$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหา $\frac{\partial p}{\partial y}$ และ อนุพันธ์อันดับอื่นๆ ได้

วิธีการนี้สามารถนำไปขยายใช้กับปัญหา 3 มิติได้

3.2 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (Finite element method)

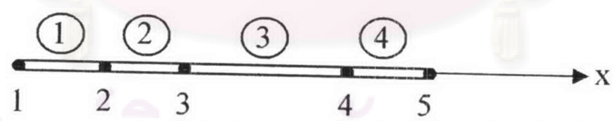
ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการประมาณค่าคงตัวสำคัญอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งพัฒนาต่อจากระเบียบวิธีผลต่างอันตะเพื่อใช้ในการหาสมการเชิงอนุพันธ์ โดยเริ่มนำมาใช้ในปลายทศวรรษที่1950 กับการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้าง และต่อมาได้นำความรู้ทางระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลอย่างง่าย โดยผู้ที่เริ่มนำมาใช้คือ Zienkiewicz และ Cheung [33] ในปี 1965 และต่อมาโดยการพัฒนาของ Oden และ Wellford (1972) [34], Chung (1978) [35], Baker (1983) [36-38] จนถึงปัจจุบันมีผู้นำมาใช้มากขึ้น

3.2.1 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะใน 1 มิติ (One-dimensional finite element method)

ในปัญหา 1 มิติทุกๆ โนดจะเรียงตัวอยู่ในทิศทางเดียวเท่านั้น เช่น ทิศทาง $\pm x$ ดังนั้นแต่ละโนดจะมีค่าระดับขั้นความเสรี (degree of freedom, dof) เป็น 1 ซึ่งปัญหาที่จะนำมาหาผลเฉลยด้วยวิธีการนี้ได้แก่ ปัญหาการรับน้ำหนักของคาน ปัญหาการสั่นของเส้นเชือก ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในเส้นลวด เป็นต้น ขั้นตอนในการแก้ปัญหาเหล่านี้ จะต้องเริ่มต้นโดยการแบ่งโดเมนที่พิจารณาออกเป็นชิ้นประกอบย่อยๆ ตามที่ต้องการและเลือกใช้จุดที่เป็นตัวแทนของชิ้นประกอบได้หลายแบบด้วยกันดังนี้

3.2.1.1 แบบเชิงเส้น

ในการพิจารณาแบบเชิงเส้นนี้เราจะให้แต่ละชิ้นประกอบประกอบด้วยโนด 2 โนด ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยๆ แบบเชิงเส้นในปัญหา 1 มิติ

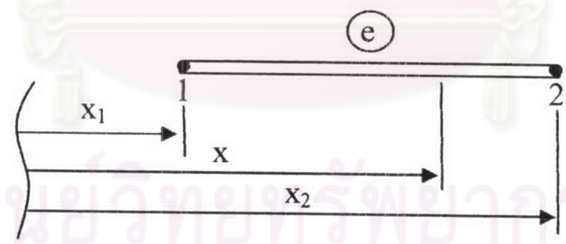
ดังนั้นเราสามารถหาจุดเชื่อมโนดของแต่ละชิ้นประกอบ (element connectivity) ซึ่งแสดงถึงการเชื่อมต่อของโนดในแต่ละชิ้นประกอบได้ดังรูปที่ 3.3

ชิ้นประกอบ	โนด		
e	1	2	จำนวนเฉพาะที่
1	1	2	จำนวนวงกว้าง
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	

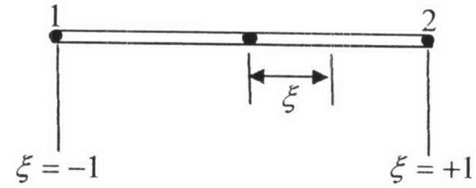
รูปที่ 3.3 การหาจุดเชื่อมโนดของแต่ละชิ้นประกอบ

จะเห็นได้ว่าจำนวนโนดเฉพาะที่ (local node numbers) ของแต่ละชิ้นประกอบจะมีเพียง 1 กับ 2 เท่านั้น ซึ่งเลข 2 ตัวนี้จะแสดงให้ทราบว่าใน 1 ชิ้นประกอบประกอบด้วย 2 โนด ส่วนจำนวนโนดวงกว้าง (global numbers) เป็นเลขที่แสดงค่าเลขโนดเฉพาะที่ (local node) นั้นอยู่ เทียบกับเลขโนดวงกว้างหรือโนดทั้งหมดจริงๆในโดเมนที่กำลังพิจารณา

หลักการพิจารณาค่าต่างๆ ของแต่ละชิ้นประกอบ ให้ทำการแปลงแกน x ไปยังแกน ξ หรือเรียกว่าแกนหลัก (master axis) ดังรูปที่ 3.4



(ก) พิจารณาที่แกน x



(ข) พิจารณาที่แกน ξ

รูปที่ 3.4 แสดงค่าต่างๆ ของแต่ละชิ้นประกอบ โดยทำการแปลงจากแกน x ไปยังแกน ξ

โดยโนดเฉพาะที่แรกจะเป็นเลข 1 และโนดถัดไปคือเลข 2 ตัวแปร x_1 คือพิกัด x ของโนดที่ 1 และ x_2 คือพิกัด x ของโนดที่ 2 จากนั้นให้ทำการแปลงพิกัด x ไปเป็นพิกัด ξ ได้ดังนี้

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \tag{3.9}$$

เรียกระบบการแปลงนี้ว่า ระบบพิกัดธรรมชาติ (a natural coordinate system) หรือเรียกว่าระบบพิกัดในตัว (intrinsic coordinate system)

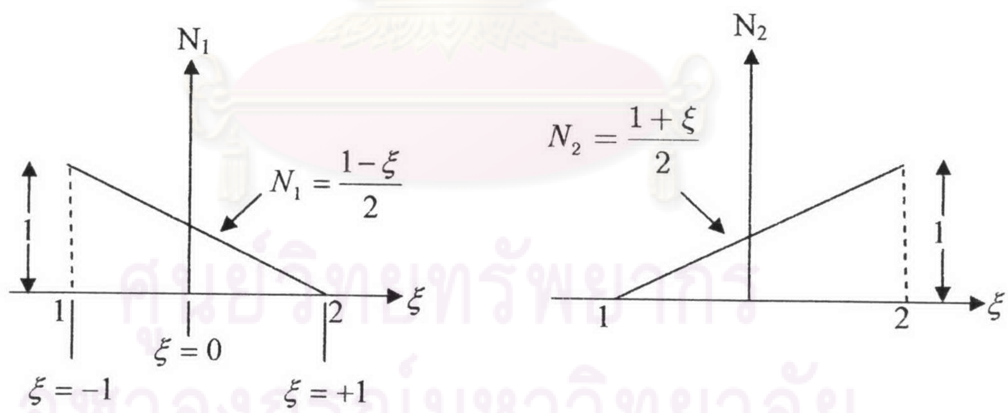
จะพบว่าโนดที่ 1 ค่า ξ มีค่าเท่ากับ -1 และโนดที่ 2 ค่า ξ มีค่าเท่ากับ 1 ทำให้ความยาวของชิ้นประกอบหนึ่งๆของระบบใหม่นี้อยู่ในช่วงของ ξ จาก -1 ถึง 1 จากระบบพิกัดใหม่นี้ทำให้เราสามารถนิยามค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) เพื่อใช้ในการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ณ ตำแหน่งภายในชิ้นประกอบได้

กำหนดให้ฟังก์ชันรูปร่างซึ่งใช้ในการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น คือ

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \tag{3.10}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{3.11}$$

ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 3.5



(ก) พิจารณาที่โนด 1 (ข) พิจารณาที่โนด 2

รูปที่ 3.5 แสดงฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น

จะเห็นได้ว่าค่าฟังก์ชันรูปร่าง N_1 จาก รูปที่ 3.5 (ก) ได้มาจากสมการ (3.10) เป็นเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด โดยสังเกตได้จากค่า $N_1 = 1$ ที่ $\xi = -1$ และ $N_1 = 0$ ที่ $\xi = 1$ ในทำนองเดียวกัน N_2 จาก รูปที่ 3.5 (ข) ได้มาจากจากสมการ (3.11) ซึ่ง $N_2 = 0$ ที่ $\xi = -1$ และ $N_2 = 1$ ที่ $\xi = 1$ เวกเตอร์การกระจัด

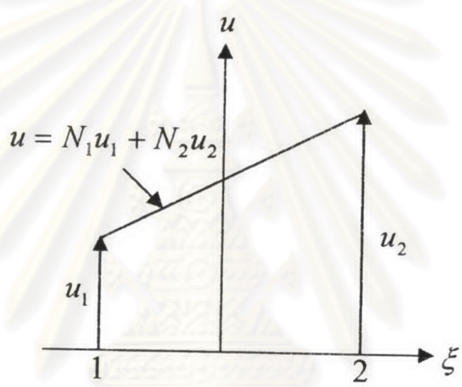
เชิงเส้นภายในชิ้นประกอบ สามารถเขียนในนิพจน์ของการกระจัดที่จุดโนด (nodal displacements) q_1 และ q_2 ดังนี้

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \qquad (3.12)$$

หรือสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$u = \vec{N}\,\vec{q} \qquad (3.13)$$

โดยที่ $\vec{N} = [N_1, N_2]$ และ $\vec{q} = [q_1, q_2]^t$ เป็นเวกเตอร์การกระจัดในชิ้นประกอบ
จากสมการ (3.12) จะพบว่า $u_1 = q_1$ ณ โนดที่ 1 และ $u_2 = q_2$ ณ โนดที่ 2 ส่วนค่า x ที่ตำแหน่งอื่นจะเปลี่ยนไปในลักษณะที่เป็นเชิงเส้นดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 การกระจัดเชิงเส้นภายในชิ้นประกอบที่ตำแหน่งต่างๆ

เราอาจสังเกตได้ว่าการแปลง (transformation) จากพิกัด x ไปเป็นพิกัด ξ ในสมการที่ (3.12) สามารถเขียนในนิพจน์ของ N_1 และ N_2 ได้โดยให้

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 \qquad (3.14)$$

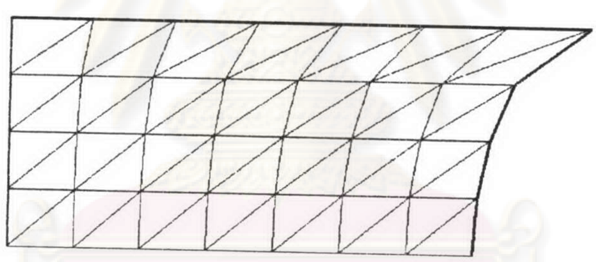
เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.12) กับสมการ (3.14) พบว่า การประมาณค่าในช่วงของชิ้นประกอบทั้งค่าการกระจัด u และพิกัด x จะใช้ฟังก์ชันรูปร่าง N_1 และ N_2 ตัวเดียวกัน ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น และถ้าต้องการประมาณค่าภายในชิ้นประกอบให้ละเอียดมากขึ้น อาจพิจารณาให้แต่ละชิ้นประกอบประกอบไปด้วยจำนวนโนดเพิ่มขึ้น เช่น เพิ่มโนดตรงกลางอีกหนึ่งโนดเพื่อสร้างฟังก์ชันการประมาณเป็นแบบฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) หรือเราอาจเพิ่มโนดที่พิจารณาในแต่ละชิ้นประกอบเป็น 4 โนด เพื่อสร้างฟังก์ชันการประมาณแบบฟังก์ชันกำลังสาม (cubic function)

3.2.2 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะใน 2 มิติ (Two-dimensional finite element method)

โดยทั่วไปปัญหาต่างๆ ที่พิจารณาจะเป็นปัญหาในระบบ 2 มิติ เพราะให้ค่าที่ใกล้เคียงกว่าใน 1 มิติ และเนื่องจากบางปัญหาไม่สามารถมองเป็นปัญหาใน 1 มิติได้ นอกจากนี้การพิจารณาปัญหาใน 2 มิติ ยังให้ความสะดวกและประหยัดเวลาในการคำนวณมากกว่าปัญหาใน 3 มิติ เช่นเดียวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ

ขั้นตอนในการพิจารณาค่าต่างๆ ในชิ้นประกอบที่รูปร่างไม่แน่นอนนั้น จะทำการย้ายพิกัดและค่าต่างๆ ของแต่ละชิ้นประกอบไปยังแกนหลัก ซึ่งนิยามในระบบของ ξ และ η โดยใช้ฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเดิมกับพิกัดของแกนหลักเป็น ฟังก์ชันรูปร่าง (N_i) เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ โดยที่ n เป็นจำนวนโนดของแต่ละชิ้นประกอบที่พิจารณา และ N_i จะมีค่าเท่ากับ 1 ที่โนดที่ i และจะมีค่าเป็นศูนย์ที่โนดอื่นๆ

ชิ้นประกอบที่พิจารณา อาจแบ่งเป็น 2 ลักษณะใหญ่ๆ คือ ชิ้นประกอบรูปสี่เหลี่ยม หรือชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม ในวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณารูปร่างของชิ้นประกอบเป็นแบบชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ 3.7



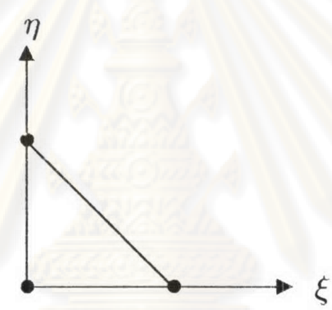
รูปที่ 3.7 รูปร่างของชิ้นประกอบที่เป็นแบบชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม

ชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม (triangular element) เป็นรูปแบบของชิ้นประกอบที่สามารถแบ่งโดเมนได้ค่อนข้างละเอียด ซึ่งสามารถพิจารณาได้ทั้งแบบเชิงเส้นและเป็นแบบกำลังสอง (quadratic) ทั้งโครงข่ายเป็นโครงสร้าง (structure mesh) และโครงข่ายไม่เป็นโครงสร้าง (unstructured mesh) ในที่นี้เราจะพิจารณาเป็นโครงข่ายเป็นโครงสร้าง ซึ่งมีโครงข่ายเป็นลักษณะโครงสร้างที่มีจำนวนชิ้นประกอบเท่ากันตลอดแนวเดียวกัน สำหรับค่าของความดันจะพิจารณาฟังก์ชันประมาณเป็นแบบเชิงเส้นด้วยการใช้ค่าจาก 3 โนด ส่วนค่าของความเร็วและความเค้นจะพิจารณาฟังก์ชันประมาณเป็นแบบกำลังสองด้วยการใช้ค่าประมาณจาก 6 โนด ดังนี้

3.2.2.1 ฟังก์ชันประมาณแบบเชิงเส้น

นำค่าที่ทราบจากโนดทั้งสามของชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 3.8 มาแปลงให้อยู่ในแกนหลักที่เป็นไปตามรูปที่ 3.9 เพื่อนำไปประมาณด้วยฟังก์ชันเชิงเส้น

รูปที่ 3.8 รูปแสดงโนดของชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณแบบเชิงเส้น



รูปที่ 3.9 การแปลงชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณแบบเชิงเส้นให้อยู่ในแกนหลัก

จึงได้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นที่ใช้ในการประมาณค่าเป็นดังนี้

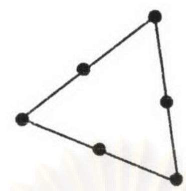
$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$
$$N_2 = \xi$$
$$N_3 = \eta$$

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับ ξ และ η คือ

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -1, \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -1$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0$$
$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1$$

3.2.2.2 ฟังก์ชันประมาณแบบกำลังสอง

นำค่าที่ทราบจาก 6 โนดดังรูปที่ 3.10 มามาแปลงให้อยู่ในแกนหลัก ดังรูปที่ 3.11 เพื่อนำไปประมาณด้วยฟังก์ชันกำลังสอง



รูปที่ 3.10 รูปแสดงโนดของชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณแบบกำลังสอง

รูปที่ 3.11 การแปลงชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณแบบกำลังสองให้อยู่ในแกนหลัก

ฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองที่ใช้ในการประมาณค่าเป็นดังนี้

$$N_1 = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta), \quad N_2 = \xi(2\xi-1)$$
$$N_3 = \eta(2\eta-1), \qquad N_4 = 4\xi(1-\xi-\eta)$$
$$N_5 = 4\xi\eta, \qquad N_6 = 4\eta(1-\xi-\eta)$$

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับ ξ และ η คือ

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -3+4\xi+4\eta, \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -3+4\xi+4\eta$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -1+4\xi, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0$$
$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = -1+4\eta$$
$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = 4(1-2\xi-\eta), \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -4\xi$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = 4\eta, \qquad \frac{\partial N_5}{\partial \eta} = 4\xi$$
$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -4\eta, \qquad \frac{\partial N_6}{\partial \eta} = 4(1-\xi-2\eta)$$

พิจารณา $U = u\big(r(\xi,\eta), z(\xi,\eta)\big)$ จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

J เป็นเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) ของการย้ายพิกัด ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

จาก $d\Omega = rdrdz$ จะได้ $d\Omega = r(\det J)d\xi d\eta$

เมื่อ $r = \sum_{i=1}^{n} r_i \phi_i$, $z = \sum_{i=1}^{n} z_i \phi_i$ และ $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i$, n คือ จำนวนโนดในชิ้นประกอบ

ϕ_i คือฟังก์ชันรูปร่าง

ดังนั้น

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} r_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^{n} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^{n} r_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{n} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\det J = J_{11} \times J_{22} - J_{12} \times J_{21}$ และ

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

พิจารณา

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & -\sum_{i=1}^{n} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ -\sum_{i=1}^{n} r_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{n} r_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ -J_{21} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

3.3 ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (Taylor-Galerkin method)

ในการคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น โดยทั่วไปนิยมเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตเพื่อสะดวกต่อการคำนวณ ซึ่งในที่นี้จะเปลี่ยนนิพจน์ที่เป็นอนุพันธ์ของเวลาให้อยู่ในรูปของผลต่างอันตะข้างหน้าโดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ในเวลา Δt และแยกขั้นตอนออกเป็นครึ่งขั้น (half-step) ส่วนค่าความดันให้ทำการแก้ไข โดยใช้หลักการเซมิอิมพลิซิทเพรซเชอร์คอร์เรคชัน (semi-implicit pressure correction) ต่อจากนั้นจะแยกความดันและความเร็วออกเป็น 2 สมการ โดยใช้ระเบียบวิธีเพรซเชอร์คอร์เรคชัน (pressure-correction methods) แล้วทำสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อน (Galerkin weak formulation) โดยผ่านการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) และการวิยุต (discretization) จะได้สมการพีชคณิตเพื่อนำไปคำนวณหาค่าต่างๆ ต่อไป วิธีการนี้คิดค้นโดย Donea [40] ดังรายละเอียดต่อไปนี้

จากสมการควบคุม

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \cdot \tilde{\sigma} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{neglect}} \tag{3.19}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3.20}$$

โดยที่

$$\tilde{\sigma} = -p\tilde{\delta} + \tilde{T}$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}_N + \tilde{T}_v$$

$$\tilde{T}_N = 2\mu_N \tilde{D}$$

$$\tilde{D} = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t}{2}$$

เมื่อพิจารณาสมการควบคุมของปัญหาในรูปแบบระบบไร้หน่วยเมื่อละเครื่องหมาย $*$ สมการ (3.19) จะเป็น

$$\mathrm{Re} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{T} - \mathrm{Re}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nabla p \tag{3.21}$$

สมการ (3.20) จะได้รูปแบบสมการเดิม

กระจายผลเฉลย u ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ในเวลา Δt จะได้

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{n} + \Delta t \vec{u}_t^{n} + \underbrace{\ldots}_{\text{neglect}} \tag{3.22}$$

จะได้

$$\frac{\partial \vec{u}^{n}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n}\right) \tag{3.23}$$

เมื่อ $\dfrac{\partial \vec{u}^{n}}{\partial t} = \vec{u}_t^{n}$

จากสมการ (3.23) และหลักการเพรซเชอร์คอร์เรคชัน ดังนั้นสมการ (3.21) กับสมการ (3.20) จะกลายเป็น

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n}\right) = \left[\nabla \cdot \tilde{T} - \mathrm{Re}\,\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right]^{n} - \nabla p^{n+1} \tag{3.24}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^{n+1} = 0 \tag{3.25}$$

จากการแยกขั้นตอนออกเป็นครึ่งขั้น (T.J.Chung [39])

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^{n} + \Delta t \vec{u}_t^{n}\right) + \frac{1}{2}\vec{u}^{n} \\ &= \vec{u}^{n} + \frac{1}{2}\Delta t \vec{u}_t^{n} \end{aligned} \tag{3.26}$$

ดังนั้น

$$\vec{u}_t^{n} = \frac{2}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}^{n}\right) \tag{3.27}$$

คูณทั้งสองข้างด้วย Re จะได้

$$\mathrm{Re}\,\vec{u}_t^{n} = \frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}^{n}\right) \tag{3.28}$$

ในนิพจน์การแพร่แบบหนืด (viscous diffusion term) โดยปกติแล้วจะไม่เปลี่ยนแปลงค่า ความเร็วเท่ากับ นิพจน์การพา (convection term) ดังนั้นเพื่อไม่ให้เกิดการประมาณค่าเกิน (over estimation) เราจึงควรทำการเฉลี่ยค่า ดังนี้

$$\text{diffusion} = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) \tag{3.29}$$

แทนสมการ (3.28), (3.29) ลงในสมการ (3.21) จะได้

$$\frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) - \mathrm{Re}\left(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right)^{n} - \nabla p^{n}$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\boxed{\frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}}-\vec{u}^{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\tilde{T}^{n+\frac{1}{2}}-\nabla\cdot\tilde{T}^{n}\right)+\nabla\cdot\tilde{T}^{n}-\mathrm{Re}\left(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)^{n}-\nabla p^{n}} \quad \text{(stage 1a)}$$

หาอนุพันธ์สมการ (3.22) เทียบกับ t

$$\vec{u}_t^{n+1}=\vec{u}_t^{n}+\underbrace{\Delta t\vec{u}_{tt}^{n}+\ldots}_{\text{neglect}}$$

เมื่อ Δt มีค่าน้อยมาก จึงได้

$$\vec{u}_t^{n+1}=\vec{u}_t^{n} \tag{3.30}$$

หาอนุพันธ์สมการ (3.26) เทียบกับ t จะได้

$$\vec{u}_t^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}_t^{n+1}+\vec{u}_t^{n}\right)$$

จากสมการ (3.30) จึงได้ $\quad \vec{u}_t^{n+\frac{1}{2}}=\vec{u}_t^{n}$

จากสมการ (3.27) ได้ $\quad \vec{u}_t^{n+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}}-\vec{u}^{n}\right)$

จากสมการ (3.26) ได้ $\quad \vec{u}_t^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1}+\vec{u}^{n}\right)-\frac{2}{\Delta t}\vec{u}^{n}$

$$=\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n}}{\Delta t}$$

คูณด้วย Re ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n}\right)=\mathrm{Re}\,\vec{u}_t^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

จากสมการ (3.24) เมื่อพิจารณาที่เวลา $n+\frac{1}{2}$ จะได้

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n}\right)=\left[\nabla\cdot\vec{T}-\mathrm{Re}\,\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right]^{n+\frac{1}{2}}-\nabla p^{n+1} \tag{3.32}$$

จากหลักการเซมิอิมพลิซิทเพรซเชอร์คอร์เรคชัน (semi-implicit pressure correction) $p^{n+1}=(1-\theta)p^{n}+\theta p^{n+1}$ ดังนั้นสมการ (3.32) กลายเป็น

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n}\right)=\left[\nabla\cdot\tilde{T}-\mathrm{Re}\,\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right]^{n+\frac{1}{2}}-(1-\theta)\nabla p^{n}-\theta\nabla p^{n+1}$$

$$=\left[\nabla\cdot\tilde{T}-\mathrm{Re}\,\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right]^{n+\frac{1}{2}}-\nabla p^{n}-\theta\left(\nabla p^{n+1}-\nabla p^{n}\right)$$

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{*}+\vec{u}^{*}-\vec{u}^{n}\right)=\left[\nabla\cdot\tilde{T}-\mathrm{Re}\,\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right]^{n+\frac{1}{2}}-\nabla p^{n}-\theta\nabla q^{n+1} \tag{3.33}$$

เมื่อ $\left(q^{n+1}=p^{n+1}-p^{n}\right)$ จากระเบียบวิธีเพรซเชอร์คอร์เรคชัน เราสามารถแยกความดันและความเร็วเป็นดังนี้

$$p^{n+1}=p^{n}-p'$$
$$v_j^{n+1}=v_i^{*}+v_i'$$

เมื่อเครื่องหมาย $*$ แสดงถึงค่าระหว่างกลางและเครื่องหมาย “ ′ ” แสดงถึงค่าที่แก้ไขแล้ว
แยกพิจารณาสมการ (3.33) ออกเป็น 2 สมการดังนี้

$$\boxed{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{*}\right) = \theta \nabla q^{n+1}} \qquad \text{(stage 3)}$$

และ

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{*} - \vec{u}^{n}\right) = \left[\nabla \cdot \tilde{T} - \mathrm{Re}\,\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n} \qquad (3.34)$$

ทำในทำนองเดียวกับสมการ (3.34) นั่นคือ

$$\text{convection} = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{*} + \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right)$$

ดังนั้นสมการ (3.34) จะกลายเป็น

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{*} - \vec{u}^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{*} + \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) - \mathrm{Re}\left(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{*} - \vec{u}^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{*} - \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) + \nabla \cdot \tilde{T}^{n} - \mathrm{Rc}\left(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n}} \qquad \text{(stage 1b)}$$

ใส่ไดเวอร์เจนซ์ $(\nabla\cdot)$ ลงไปใน stage 3 จะได้

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\nabla \cdot \vec{u}^{n+1} - \nabla \cdot \vec{u}^{*}\right) = -\theta \nabla^{2} q^{n+1}$$

จากสมการความต่อเนื่อง (3.25) (นั่นคือ $\nabla \cdot \vec{u}^{n+1} = 0$ แต่ $\nabla \cdot u^{*} \neq 0$ เนื่องจาก u^{*} คือความเร็วอิสระ) ได้

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\nabla \cdot \vec{u}^{*} = \theta \nabla^{2} q^{n+1}$$

หรือ

$$\boxed{\theta \nabla^{2} q^{n+1} = \frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\nabla \cdot \vec{u}^{*}} \qquad \text{(stage 2)}$$

สรุป

- **<u>stage 1a</u>**

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} - \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) + \nabla \cdot \tilde{T}^{n} - \mathrm{Re}\left(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right)^{n} - \nabla p^{n} \qquad (3.35)$$

- **<u>stage 1b</u>**

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{*} - \vec{u}^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{*} - \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) + \nabla \cdot \tilde{T}^{n} - \mathrm{Re}\left(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n} \qquad (3.36)$$

- **stage 2**

$$\theta\nabla^2 q^{n+1} = \frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\nabla\cdot\vec{u}^* \qquad (3.37)$$

- **stage 3**

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^*\right) = \theta\nabla q^{n+1} \qquad (3.38)$$

ต่อไปนี้จะพิจารณาแต่ละนิพจน์ของสมการ (3.35) ถึงสมการ (3.38)

1. **นิพจน์การแพร่ $\left(\nabla\cdot\tilde{T}\right)$**

r component

$$\left(\nabla\cdot\tilde{T}\right)_r = T_{rr,r} + \frac{1}{r}T_{r\theta,\theta} + \frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r} + T_{rz,z}$$

เราสามารถเขียนสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi\left(\nabla\cdot\tilde{T}\right)_r d\Omega &= \int_\Omega \phi\left[T_{rr,r} + \frac{1}{r}T_{r\theta,\theta} + \frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r} + T_{rz,z}\right] r d\bar{\Omega} \\ &= \int_\Omega (r\phi)T_{rr,r}d\bar{\Omega} + \int_\Omega \phi T_{r\theta,\theta}d\bar{\Omega} + \int_\Omega \phi\left(T_{rr}-T_{\theta\theta}\right)d\bar{\Omega} + \int_\Omega \phi\left(T_{rz,z}\right)r d\bar{\Omega} \qquad (3.39)\end{aligned}$$

เมื่อ $d\bar{\Omega} \;=\; drd\theta dz$

พิจารณา $\int_\Omega (r\phi)\frac{\partial}{\partial r}T_{rr}d\bar{\Omega}$

จาก
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(r\phi)\cdot T_{rr}\right] = (r\phi)\frac{\partial}{\partial r}T_{rr} + T_{rr}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\phi\right)$$

จะได้ว่า
$$(r\phi)\frac{\partial}{\partial r}T_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(r\phi)\cdot T_{rr}\right] - T_{rr}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\phi\right)$$

ดังนั้น

$$\int_\Omega (r\phi)\frac{\partial}{\partial r}T_{rr}d\bar{\Omega} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}\left[(r\phi)\cdot T_{rr}\right]d\bar{\Omega} - \int_\Omega T_{rr}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\phi\right)d\bar{\Omega}$$

โดยหลักการของทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ จะได้

$$\int_\Omega (r\phi)\frac{\partial}{\partial r}T_{rr}d\bar{\Omega} = -\int_\Omega T_{rr}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\phi\right)d\bar{\Omega} + \int_{\partial\Omega}\left[(r\phi)\cdot T_{rr}\right]\cdot n_r dS \qquad (3.40)$$

พิจารณา $\int_\Omega \phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(T_{r\theta}\right)d\bar{\Omega}$

จาก
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\phi\cdot T_{r\theta}\right] = \phi\frac{\partial}{\partial\theta}T_{r\theta} + T_{r\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

จะได้ว่า $$\phi\frac{\partial}{\partial\theta}T_{r\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}[\phi\cdot T_{r\theta}]-T_{r\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

และใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ จะได้

$$\int_{\Omega}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(T_{r\theta})d\bar{\Omega}=-\int_{\Omega}T_{r\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\bar{\Omega}+\int_{\partial\Omega}[\phi\cdot T_{r\theta}]\cdot n_r dS \tag{3.41}$$

พิจารณา $\int_{\Omega}\phi\left(T_{rz,z}\right)rd\bar{\Omega}$

จากอนุพันธ์เชิงผลคูณและจากทฤษฎีของกรีนหรือทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ จะได้ว่า

$$\int_{\Omega}\phi\frac{\partial}{\partial z}(T_{rz})rd\bar{\Omega}=-\int_{\Omega}T_{rz}\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot rd\bar{\Omega}+\int_{\partial\Omega}[\phi r\cdot T_{rz}]\cdot n_r dS \tag{3.42}$$

แทนค่าสมการ (3.36) สมการ (3.37) และสมการ (3.38) ลงในสมการ (3.35) จะได้

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\phi\left(\nabla\cdot\tilde{T}\right)_r d\Omega &= -\int_{\Omega}(T_{rr})r\frac{\partial\phi}{\partial r}d\bar{\Omega}-\int_{\Omega}\phi T_{rr}d\bar{\Omega}-\int_{\Omega}T_{r\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\bar{\Omega}+\int_{\Omega}\phi T_{rr}d\bar{\Omega}\\ &\quad-\int_{\Omega}\phi T_{\theta\theta}d\bar{\Omega}-\int_{\Omega}T_{rz}\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot rd\bar{\Omega}+\text{boundary terms} \qquad (3.43)\\ &= -\int_{\Omega}(T_{rr})r\frac{\partial\phi}{\partial r}d\bar{\Omega}-\int_{\Omega}T_{r\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\bar{\Omega}-\int_{\Omega}\phi T_{\theta\theta}d\bar{\Omega}-\int_{\Omega}T_{rz}\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot rd\bar{\Omega}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\tilde{T}=\tilde{T}_N+\tilde{T}_v$ และ $\tilde{T}_N=2\mu_N D_{ij}$ ดังนั้น

ถ้าพิจารณากรณีของของไหลนิวโตเนียน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\phi\left(\nabla\cdot\tilde{T}_N\right)_r d\Omega &= -\int_{\Omega}\left[2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{r^2}u_r\theta+\mu\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]rd\bar{\Omega}\\ &\quad-\int_{\Omega}\left[-\frac{\mu}{r^2}u_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\phi\right]rd\bar{\Omega}-\int_{\Omega}\mu\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial z}rd\bar{\Omega}\end{aligned} \tag{3.44}$$

จาก $\phi=\psi\sum_{i=1}^{n}\phi_i$ จะได้ $\frac{\partial\phi}{\partial r}=\psi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_i}{\partial r}$, $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\psi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}$ และ $\frac{\partial\phi}{\partial z}=\psi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_i}{\partial z}$

$u=\sum_{j=1}^{n}u_j\phi_j$ จะได้ $\frac{\partial u}{\partial r}=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial\phi_j}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}$ และ $\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial\phi_j}{\partial z}$

แทนค่าลงในสมการ (3.40) และจาก ψ เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\int_{\Omega} \phi\left(\nabla\cdot\tilde{T}_N\right)_r d\Omega = -\psi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_r^j\int_{\Omega}\left[2\mu\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{r^2}\phi_i\phi_j\right.$$
$$\left.+\mu\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\frac{\partial\phi_j}{\partial z}\right]rd\bar{\Omega}$$
$$-\psi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_\theta^j\int_{\Omega}\left[\frac{-\mu}{r^2}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\phi_j+\frac{\mu}{r}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}+\frac{2\mu}{r^2}\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}\right]rd\bar{\Omega}$$
$$-\psi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_z^j\int_{\Omega}\left[\mu\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}\right]rd\bar{\Omega}$$

ดังนั้น

$$\int_{\Omega} \phi\left(\nabla\cdot\tilde{T}_N\right)_r d\Omega = -\psi\left(\left[S_{rr}\right]u_r^j+\left[S_{r\theta}\right]u_\theta^j+\left[S_{rz}\right]u_z^j\right) \tag{3.45}$$

โดยที่

$$\left(S_{rr}\right)_{ij} = \int_{\Omega}\left(2\mu\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}+\frac{2\mu}{r^2}\phi_i\phi_j+\mu\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\frac{\partial\phi_j}{\partial z}\right)rd\bar{\Omega}$$
$$\left(S_{r\theta}\right)_{ij} = \int_{\Omega}\left(-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\phi_j+\frac{\mu}{r}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}+\frac{2\mu}{r^2}\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}\right)rd\bar{\Omega}$$
$$\left(S_{rz}\right)_{ij} = \int_{\Omega}\left(\mu\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}\right)rd\bar{\Omega}$$

θ component

$$\boxed{\left(\nabla\cdot\tilde{T}\right)_\theta = \frac{1}{r}T_{\theta\theta,\theta}+T_{r\theta,r}+\frac{2}{r}T_{r\theta}+T_{\theta z,z}}$$

ในทำนองเดียวกับ **r component** ถ้าพิจารณากรณีของของไหลนิวโตเนียน จะได้

$$\int_{\Omega} \phi\left(\nabla\cdot\tilde{T}_N\right)_\theta d\Omega = -\psi\left(\left[S_{\theta r}\right]u_r^j+\left[S_{\theta\theta}\right]u_\theta^j+\left[S_{\theta z}\right]u_z^j\right) \tag{3.46}$$

โดยที่

$$(S_{\theta r})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \phi_j + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{\mu}{r^2} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) r d\bar{\Omega}$$

$$(S_{\theta\theta})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \phi_j + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \phi_i \phi_j - \frac{\mu}{r} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) r d\bar{\Omega}$$

$$(S_{\theta z})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) r d\bar{\Omega}$$

z component

$$\boxed{\left(\nabla \cdot \tilde{T}\right)_z = T_{rz,r} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{1}{r} T_{\theta z,\theta} + T_{zz,z}}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณากรณีของของไหลนิวโตเนียน จะได้

$$\int_{\Omega} \phi \left(\nabla \cdot \tilde{T}_N\right)_z d\Omega = -\psi \left([S_{zr}] u_r^j + [S_{z\theta}] u_\theta^j + [S_{zz}] u_z^j \right) \tag{3.47}$$

โดยที่

$$(S_{zr})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) r d\bar{\Omega}$$

$$(S_{z\theta})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) r d\bar{\Omega}$$

$$(S_{zz})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) r d\bar{\Omega}$$

2. **นิพจน์ความดัน** (∇p)

$$(\nabla p)_r = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$(\nabla p)_\theta = \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$(\nabla p)_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

เมื่อทำสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนโดยผ่านการอินทิเกรตทีละส่วนและการวิยุต จะได้

$$\int_{\Omega} \phi(\nabla p)_r \, d\Omega = -\psi\left([L_r] p_j\right) \tag{3.48}$$

$$\int_{\Omega} \phi(\nabla p)_\theta \, d\Omega = -\psi\left([L_\theta] p_j\right) \tag{3.49}$$

$$\int_{\Omega} \phi(\nabla p)_z \, d\Omega = -\psi\left([L_z] p_j\right) \tag{3.50}$$

โดยที่

$$(L_r)_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\phi_i}{r} \right) \psi_j r d\bar{\Omega}$$

$$(L_\theta)_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \psi_j d\bar{\Omega}$$

$$(L_z)_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \psi_j r d\bar{\Omega}$$

3. นิพจน์การพา $(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})$

$$(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})_r = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})_\theta = u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})_z = u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

เมื่อทำสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อน โดยผ่านการวิยุตจะได้

$$\int_{\Omega} \phi(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})_r \, d\Omega = -\psi[N(u)_r] \tag{3.51}$$

$$\int_{\Omega} \phi(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})_\theta \, d\Omega = -\psi[N(u)_\theta] \tag{3.52}$$

$$\int_{\Omega} \phi(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})_z \, d\Omega = -\psi[N(u)_z] \tag{3.53}$$

โดยที่

$$(N(u)_r)_{ij} = \left(\int_{\Omega}\left[\phi_i\phi_k \frac{\partial\phi_j}{\partial r}u_r^k + \frac{\phi_i\phi_k}{r}\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}u_\theta^k + \phi_i\phi_k\frac{\partial\phi_j}{\partial z}u_z^k\right]rd\bar{\Omega}\right)u_r^j - \int_{\Omega}\frac{\phi_i\phi_k\phi_k}{r}u_\theta^k u_\theta^k rd\bar{\Omega}$$

$$(N(u)_\theta)_{ij} = \left(\int_{\Omega}\left[\phi_i\phi_k \frac{\partial\phi_j}{\partial r}u_r^k + \frac{\phi_i\phi_k}{r}\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}u_\theta^k + \phi_i\phi_k\frac{\partial\phi_j}{\partial z}u_z^k\right]rd\bar{\Omega}\right)u_\theta^j + \int_{\Omega}\frac{\phi_i\phi_k\phi_k}{r}u_r^k u_\theta^k rd\bar{\Omega}$$

$$(N(u)_z)_{ij} = \left(\int_{\Omega}\left[\phi_i\phi_k \frac{\partial\phi_j}{\partial r}u_r^k + \frac{\phi_i\phi_k}{r}\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}u_\theta^k + \phi_i\phi_k\frac{\partial\phi_j}{\partial z}u_z^k\right]rd\bar{\Omega}\right)u_z^j$$

<u>สมการปัวส์ซงความดัน stage 2</u>

<u>ทางซ้ายของสมการ</u>

$$\nabla^2 q = \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

เมื่อทำสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนโดยผ่านการอินทิเกรตทีละส่วนและการวิยุตจะได้

$$\int_{\Omega}\phi\left(\nabla^2 q\right)d\Omega = -\psi\left([K]q_j\right) \qquad (3.54)$$

โดยที่

$$K_{ij} = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}\frac{\partial\psi_j}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)rd\bar{\Omega}$$

<u>ทางขวาของสมการ</u>

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

เมื่อทำสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนโดยผ่านการอินทิเกรตทีละส่วนและการวิยุตจะได้

$$\int_{\Omega}\phi(\nabla\cdot\vec{u})d\Omega = -\psi\left([L_r^t]u_r^j + [L_\theta^t]u_\theta^j + [L_z^t]u_z^j\right) \qquad (3.55)$$

โดยที่ $L_{ij}^t = L_{ji}$

แทนสมการ (3.39) ถึงสมการ (3.54) ลงในสมการ (3.35) ถึงสมการ (3.38) จะได้สมการพีชคณิตที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็วและความดันกรณีของไหลนิวโตเนียนที่อุณหภูมิไม่ขึ้นกับเวลา ในระบบพิกัดทรงกระบอก ต่อจากนั้นจะทำการย้าย (transformation) พิกัดจาก (r,z) ให้ไปอยู่ในพิกัดของ (ξ,η) จะได้ผลเป็นดังต่อไปนี้

stage 1a

r-component

$$\left(\frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]+\frac{1}{2}[S_{rr}]\right)\nu_{r_j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}[S_{rz}]\nu_{z_j}^{n+\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]-\frac{1}{2}[S_{rr}]\right)\nu_{r_j}^{n}-\frac{1}{2}[S_{rz}]\nu_{z_j}^{n} \\ -\mathrm{Re}\left([NR]_k\,\nu_{r_k}^{n}+[NZ]_k\,\nu_{z_k}^{n}\right)+[L_r]\,p_j^{n} \tag{3.56}$$

z-component

$$\left(\frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]+\frac{1}{2}[S_{zz}]\right)\nu_{z_j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}[S_{zr}]\nu_{r_j}^{n+\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\,\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]-\frac{1}{2}[S_{zz}]\right)\nu_{z_j}^{n}-\frac{1}{2}[S_{zr}]\nu_{r_j}^{n} \\ -\mathrm{Re}\left([NR]_k\,\nu_{r_k}^{n}+[NZ]_k\,\nu_{z_k}^{n}\right)\nu_{z_j}^{n}+[L_z]\,p_j^{n} \tag{3.57}$$

stage 1b

r-component

$$\left(\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]+\frac{1}{2}[S_{rr}]\right)\nu_{r_j}^{*}+\frac{1}{2}[S_{rz}]\nu_{z_j}^{*}=\left(\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]-\frac{1}{2}[S_{rr}]\right)\nu_{r_j}^{n}-\frac{1}{2}[S_{rz}]\nu_{z_j}^{n}+[L_r]\,p_j^{n} \\ -\mathrm{Re}\left([NR]_k\,\nu_{r_k}^{n+\frac{1}{2}}+[NZ]_k\,\nu_{z_k}^{n+\frac{1}{2}}\right)\nu_{r_j}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

z-component

$$\left(\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]+\frac{1}{2}[S_{zz}]\right)\nu_{z_j}^{*}+\frac{1}{2}[S_{zr}]\nu_{r_j}^{*}=\left(\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]-\frac{1}{2}[S_{zz}]\right)\nu_{z_j}^{n}-\frac{1}{2}[S_{zr}]\nu_{r_j}^{n}+[L_z]\,p_j^{n} \\ -\mathrm{Re}\left([NR]_k\,\nu_{r_k}^{n+\frac{1}{2}}+[NZ]_k\,\nu_{z_k}^{n+\frac{1}{2}}\right)\nu_{z}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.59}$$

stage 2 $\left(\theta=\frac{1}{2}\right)$ (Crank-Nicolson [41])

$$\theta[K]\,q_j^{n+1}=-\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[L_r^t]\,\nu_{r_j}^{*}-\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[L_z^t]\,\nu_{z_j}^{*};\quad q_j^{n+1}=p_j^{n+1}-p_j^{n} \tag{3.60}$$

stage 3

r-component

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]\left(\nu_{r_j}^{n+1}-\nu_{r_j}^{*}\right)=\theta[L_r]\,q_j^{n+1} \tag{3.61}$$

z-component

$$\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}[M]\left(\nu_{z_j}^{n+1}-\nu_{z_j}^{*}\right)=\theta[L_z]\,q_j^{n+1} \tag{3.62}$$

โดยที่

$$M_{ij} = \sum_k \iint_\Omega N_i N_j n_k r_k \mid J \mid d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}(S_{rr})_{ij} = \mu \sum_k \iint_\Omega & \left\{ \frac{1}{\mid J \mid} \left[2\left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)\left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right.\right. \\ & \left.\left. + \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)\left(-J_{21} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] \right\} n_k r_k d\xi d\eta \\ & + 2\mu \iint_\Omega \frac{N_i N_j}{r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3} \mid J \mid d\xi d\eta\end{aligned}$$

$$(S_{rz})_{ij} = \mu \sum_k \iint_\Omega \left[\frac{1}{\mid J \mid} \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)\left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] n_k r_k d\xi d\eta$$

$$(S_{zr})_{ij} = \mu \sum_k \iint_\Omega \left[\frac{1}{\mid J \mid} \left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)\left(-J_{21} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] n_k r_k d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}(S_{zz})_{ij} = \mu \sum_k \iint_\Omega \frac{1}{\mid J \mid} & \left[\left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)\left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + 2\left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)\left(-J_{21} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] n_k r_k d\xi d\eta\end{aligned}$$

$$(NR)_k = \sum_\ell \iint_\Omega N_i N_k \left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) n_\ell r_\ell d\xi d\eta$$

$$(NZ)_k = \sum_\ell \iint_\Omega N_i N_k \left(-J_{21} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) n_\ell r_\ell d\xi d\eta$$

$$(L_r)_{ij} = \sum_k \iint_\Omega \left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) n_j n_k r_k d\xi d\eta + \iint_\Omega N_i n_j \mid J \mid d\xi d\eta$$

$$(L_z)_{ij} = \sum_k \iint_\Omega \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) n_j n_k r_k d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}K_{ij} = \mu \sum_k \iint_\Omega \frac{1}{|J^*|} & \left[\left(J^*_{22} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} - J^*_{12} \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \right)\left(J^*_{22} \frac{\partial n_j}{\partial \xi} - J^*_{12} \frac{\partial n_j}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + \left(-J^*_{21} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + J^*_{11} \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \right)\left(-J^*_{21} \frac{\partial n_j}{\partial \xi} + J^*_{11} \frac{\partial n_j}{\partial \eta} \right) \right] n_k r_k d\xi d\eta\end{aligned}$$

$\left[L_r^t \right]_{ij} = \left[L_r \right]_{ji}$, $\left[L_z^t \right]_{ij} = \left[L_z \right]_{ji}$

3.4 เทคนิคการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น (Technique for solving system of linear equation)

สิ่งที่ต้องคำนึงถึงในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นคือ จำนวนสมการจะต้องมีไม่น้อยกว่าจำนวนตัวแปร จึงจะเพียงพอในการหาผลเฉลยของระบบสมการนั้น สำหรับวิธีการแก้ระบบสมการสามารถทำได้หลายวิธีด้วยกัน ทั้งเทคนิคโดยตรง (direct technique) และเทคนิคโดยอ้อม (indirect technique) โดยแต่ละเทคนิคจะมีวิธีการหาคำตอบ ความแม่นยำรวมทั้งข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน

การหาคำตอบในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้เทคนิคโดยอ้อม

เทคนิคโดยอ้อม หรืออาจหมายถึง เทคนิคการทำซ้ำ (iterative technique) คือเทคนิคในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ โดยเริ่มจากการประมาณค่าเริ่มต้น $\vec{x}^{(0)}$ ไปแทนในสมการเพื่อหาค่า $\vec{x}$ และให้ $\vec{x}^{(1)}$ แทนผลเฉลย จากนั้นให้สร้างลำดับของเวกเตอร์คำตอบ $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k-0}^{\infty}$ จนกระทั่งลู่เข้าผลเฉลย $\vec{x}$

เทคนิคการทำซ้ำนี้ ส่วนมากจะไม่ค่อยนำมาแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีมิติน้อยๆ เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพื่อให้ได้ความแม่นยำทำได้นานกว่าวิธีใช้เทคนิคโดยตรง สำหรับระบบสมการใหญ่ๆ การคำนวณด้วยเทคนิคการทำซ้ำ จะมีประสิทธิภาพสูงกว่าทั้งในเรื่องการจัดสรรหน่วยความจำในคอมพิวเตอร์และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (computational time) ดังนั้นวิธีการแบบนี้ จึงเป็นที่นิยมกันมาก

การหาผลเฉลยของปัญหาในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและปัญหาค่าขอบ (boundary-value problem) บางปัญหาจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งมีหลายวิธีด้วยกันดังนี้

3.4.1 ระเบียบวิธีการทำซ้ำจาโคบี (Jacobi iterative method)

วิธีการนี้เป็นการประมาณค่าผลเฉลย x_i ลำดับที่ i ของระบบสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ ณ เวลา k โดยการจัดสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ ใหม่ให้อยู่ในรูปของผลรวม

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

แล้วทำการย้ายนิพจน์ทางซ้ายที่ไม่ได้อยู่ในแนวทแยงไปไว้ทางขวาของสมการ

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j + b_i$$

นำสัมประสิทธิ์ของ x_i ในแนวทแยง (a_{ii}) หารตลอดจะได้

$$x_i = \frac{-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j + b_i}{a_{ii}}, \quad a_{ii} \neq 0$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \dfrac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dfrac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \dfrac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

หลังจากการเลือกเวกเตอร์เริ่มต้น $\vec{x}^{(0)}$ แล้วลำดับของเวกเตอร์คำตอบ ณ เวลา k จะกำหนดโดย

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}, \qquad (a_{ii} \neq 0, i = 1,2,3,\ldots,n, k \geq 1) \tag{3.64}$$

หรือ

$$\vec{x}^{(k)} = \tilde{T}\vec{x}^{(k-1)} + \vec{c} \tag{3.65}$$

เมื่อ

$$\tilde{T} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

และ

$$\vec{c} = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

ในการหาผลเฉลยจะประมาณค่า $\vec{x}^{(0)}$ เป็นค่าเริ่มต้น และจากนั้นให้ทำการคำนวณซ้ำตามสมการ (3.64) จนกระทั่งได้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำตามต้องการ

วิธีการนี้สามารถพิจารณาเป็นอีกแนวทางโดยการแยกเมทริกซ์ $\tilde{A}$ ของระบบสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ ออกเป็นเมทริกซ์แนวทแยง (diagonal matrix, $\tilde{D}$) เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix, $\tilde{L}$) และเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix, $\tilde{U}$) ดังนี้

$$\tilde{A} = \tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

ดังนั้นสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ สามารถเขียนใหม่เป็น

$$(\tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U})\vec{x} = \vec{b}$$

$$\tilde{D}\vec{x} = (\tilde{L} + \tilde{U})\vec{x} + \vec{b} \tag{3.67}$$

เนื่องจาก $\tilde{D}$ เป็นเมทริกซ์แนวทแยงซึ่งมีสมาชิกในแนวทแยงมุมไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นสามารถหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ $\tilde{D}$ ได้ เราจึงนำ $\tilde{D}^{-1}$ คูณตลอดสมการ (3.67) จะได้

$$\vec{x} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U})\vec{x} + \tilde{D}^{-1}\vec{b}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากเทคนิคการทำซ้ำจาโคบี สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์คือ

$$\boxed{\vec{x}^{(k)} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U})\vec{x}^{(k-1)} + \tilde{D}^{-1}\vec{b}, \qquad k = 1,2,\ldots,n} \tag{3.68}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.68) กับสมการ (3.65) สามารถกล่าวได้ว่า

$$\tilde{T} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U}) \text{ และ } \vec{c} = \tilde{D}^{-1}\vec{b}$$

3.4.2 เทคนิคการทำซ้ำเกาส์ไซเดล (Gauss-Seidel iterative technique)

เทคนิคการทำซ้ำเกาส์ไซเดลเป็นวิธีที่ปรับปรุงมาจากระเบียบวิธีการทำซ้ำจาโคบีโดยการคำนวณครั้งแรกของแต่ละรอบที่ k จะคำนวณเหมือนกับสมการ (3.64) ดังนี้

$$x_1^{(k)} = \frac{-\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{1j}x_j^{(k-1)} + b_1}{a_{11}}, \qquad a_{11} \neq 0$$

ส่วนในการคำนวณหา $x_i^{(k)}$ ที่ตำแหน่ง i ถัดไป $(i \neq 1)$ เราจะนำค่า $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ ที่คำนวณแล้วมาใช้คำนวณหาค่า $x_i^{(k)}$ เพื่อเป็นการนำค่าที่เข้าใกล้ผลเฉลยมาใช้ในการคำนวณทำให้สามารถหาผลเฉลยได้แม่นยำและคำนวณได้เร็วขึ้นหรือถ้าสมการนั้นไม่สามารถหาผลเฉลยได้ก็จะทำให้ค่าที่กำลังคำนวณลู่ออกเร็วขึ้น สมการในการคำนวณหา $x_i^{(k)}$ เป็นดังนี้

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}, \qquad (a_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ k \geq 1) \tag{3.69}$$

เมื่อนำ a_{ii} คูณตลอดทั้งสองข้าง และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + a_{ii}x_i^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

หรือสามารถเขียนได้เป็น

$$(\tilde{D}-\tilde{L})\vec{x}^{(k)} = \tilde{U}\vec{x}^{(k-1)} + \vec{b}$$

$$\vec{x}^{(k)} = (\tilde{D}-\tilde{L})^{-1}\tilde{U}\vec{x}^{(k-1)} + (\tilde{D}-\tilde{L})^{-1}\vec{b}, \qquad k = 1,2,\ldots \tag{3.70}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.70) กับสมการ (3.65) เราสามารถกล่าวได้ว่า

$$\tilde{T} = (\tilde{D} - \tilde{L})^{-1}\tilde{U}, \quad \text{และ } \vec{c} = (\tilde{D} - \tilde{L})^{-1}\vec{b}$$

สำหรับเมทริกซ์ $(\tilde{D} - \tilde{L})$ เป็นเมทริกซ์ที่มิใช่เอกฐาน (nonsingular matrix)

3.4.3 เอสโออาร์ (Successive Over-Relaxation) (SOR)

เอสโออาร์เป็นวิธีแก้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งขยายมาจากวิธีเกาส์ไซเดลมีหลักการดังนี้

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}$$

เมื่อ ω เป็นตัวประกอบการประมาณค่านอกช่วง (extrapolation factor)

ถ้า $0 < \omega < 1$ จะเรียกว่า วิธีการภายใต้การผ่อนคลาย (under-relaxation method) ใช้เมื่อวิธีเกาส์ ไซเดล ให้ผลเฉลยที่คำนวณ ไม่ลู่เข้าและต้องการปรับให้ผลเฉลยลู่เข้า

ถ้า $\omega > 1$ จะเรียกว่า วิธีการเกินการผ่อนคลาย (over-relaxation method) ใช้เมื่อวิธีเกาส์ไซเดลให้ผลเฉลยที่คำนวณลู่เข้า และอยากจะเร่งให้ผลเฉลยลู่เข้าเร็วขึ้น

$r_{ij}^{(k)}$ เป็น ส่วนประกอบของเวกเตอร์เศษตกค้าง (residual vector) สำหรับ $\vec{x}$ $(\vec{r} = \vec{b} - \tilde{A}\vec{x})$ ที่รอบที่ k โนดที่ i และโนดที่ j

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

เมื่อนำ a_{ii} คูณตลอดทั้งสองข้าง และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i$$

หรือสามารถเขียนได้เป็น

$$(\tilde{D} - \omega\tilde{L})\vec{x}^{(k)} = [(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}]\vec{x}^{(k-1)} + w\vec{b}$$

$$\vec{x}^{(k)} = (\tilde{D} - \omega\tilde{L})^{-1}[(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}]\vec{x}^{(k-1)} + \omega(\tilde{D} - \omega\tilde{L})^{-1}\vec{b}, \quad k = 1,2,\ldots \quad (3.71)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.71) กับสมการ (3.65) เราสามารถกล่าวได้ว่า

$$\tilde{T} = (\tilde{D} - \omega\tilde{L})^{-1}[(1-\omega)\tilde{D} + \omega\tilde{U}], \qquad \text{และ } \vec{c} = \omega(\tilde{D} - \omega\tilde{L})^{-1}\vec{b}$$

สำหรับเมทริกซ์ $(\tilde{D} - \omega\tilde{L})$ เป็นเมทริกซ์ที่มิใช่เอกฐาน

3.5 เทคนิคอื่นๆ ที่ช่วยในการคำนวณ (Technique for computation)

3.5.1 หลักการเพ็นนัลทิ (Penalty approach)

หลักการเพ็นนัลทิ เป็นวิธีการปรับค่าสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ ใหม่ ซึ่งจะปรับค่าของเมทริกซ์ $\tilde{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{b}$ บริเวณตำแหน่งที่กำหนดให้เป็นไปตามเงื่อนไขค่าขอบเพื่อสามารถหาผลเฉลยได้โดยค่าที่ขอบยังคงมีค่าเท่าเดิมตลอดการคำนวณ ให้บวกค่าคงตัว C ซึ่งเป็นค่ามากๆเข้าไปที่ตำแหน่งขอบของเมทริกซ์ $\tilde{A}$ และบวกค่าผลคูณของ C กับค่าที่ตำแหน่งขอบของเวกเตอร์ $\vec{b}$ เข้าไปที่ตำแหน่งขอบในเวกเตอร์ $\vec{b}$ นั่นคือ

$$C = \max\left|A_{ij}\right| * 10^n \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

3.5.2 หลักการประมาณค่าพื้นที่เกาส์เซียน (Gaussian quadrature approach)

โดยทั่วไปวิธีการของหลักการประมาณค่าพื้นที่เกาส์เซียน เป็นวิธีการประมาณค่าปริพันธ์ด้วยผลรวมของฟังก์ชันซึ่งคูณอยู่กับน้ำหนักดังสมการต่อไปนี้

$$\int_{\Omega} f(\xi,\eta)d\Omega \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j)$$

โดยที่ (ξ_i,η_i) เป็นจุดที่เลือกมาเป็นตัวแทน เรียกว่าจุดของเกาส์ (Gauss points)

n เป็นจำนวนจุดของเกาส์

w_i เป็นน้ำหนัก

ในที่นี้เราพิจารณาชิ้นประกอบเป็นแบบสามเหลี่ยม โดยเลือกจำนวนจุดของเกาส์เป็นแบบ 4 จุด

$$\int_{\Omega} f(\xi,\eta)d\Omega \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} w_i f(\xi_i,\eta_i)$$

ตารางที่ 3.1 ค่าจุดของเกาส์และน้ำหนักที่ใช้ประมาณค่าอินทิกรัลแบบ 4 จุด สำหรับชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้จากหนังสือของ Reddy [42]

i	ξ	η	w
1	1/3	1/3	27/48
2	2/15	2/15	25/48
3	11/15	2/15	25/48
4	2/15	11/15	25/48

3.5.3 เกรเดียนต์ริคัฟเวอรี (Gradient recovery)

เกรเดียนต์ริคัฟเวอรีเป็นเทคนิคที่มีผู้ใช้แล้วเป็นจำนวนมาก ซึ่งสามารถหาอ่านได้จากวารสารของ Hawken et al. [43], Levine [44, 45], Boroomand และ Zienkiewicz [46-47], Zienkiewicz และ Zhu [48] และหนังสือวิทยานิพนธ์ของ Matallah [49] เป็นเทคนิคที่ช่วยในการปรับค่าต่างๆ เช่น เกรเดียนต์ความเร็วให้เกิดความต่อเนื่องเป็นระเบียบใกล้เคียงกับพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติ ทำให้การคำนวณมีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น เนื่องจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะจะเป็นการคำนวณที่แต่ละชิ้นประกอบจึงทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องจากชิ้นประกอบหนึ่งไปยังอีกชิ้นประกอบหนึ่ง และจะส่งผลกระทบต่อค่าความเค้นซึ่งเป็นค่าที่มีความละเอียดอ่อน (sensitive) มาก จึงต้องการความแม่นยำของค่าต่างๆ ที่มีผลต่อค่าความเค้นสูง โดยเทคนิคนี้จะทำหลังจากได้ผลเฉลยของค่าความเร็วและความดันที่ได้จากการคำนวณแบบนิวโตเนียน แล้วจึงนำมาหาค่าของเกรเดียนต์ความเร็วโดยใช้หลักการของ เกรเดียนต์ริคัฟเวอรี

ในการคำนวณหา เกรเดียนต์ความเร็ว สามารถคำนวณได้หลายวิธี ได้แก่ วิธีโดยตรงเฉพาะที่ (local direct method) วิธีกาเลอร์คินวงกว้าง (global Galerkin method) และวิธีกาเลอร์คินเฉพาะที่ (local Galerkin method) ในงานนี้จะใช้วิธีโดยตรงเฉพาะที่ เพื่อหลีกเลี่ยงการเก็บค่าในเมทริกซ์ขนาดใหญ่

ในงานวิจัยนี้ พิจารณาชิ้นประกอบเป็นแบบสามเหลี่ยมที่ประกอบไปด้วย 6 โนด ตามหลักการของเกรเดียนต์ริคัฟเวอรี ให้พิจารณาทีละชิ้นประกอบและคำนวณหาค่าเกรเดียนต์ความเร็วที่แต่ละโนด i ในชิ้นประกอบนั้น เช่น เมื่อพิจารณาที่โนด j ฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 6 ตัวจะเป็นฟังก์ชันของ ξ_j, η_j ดังนั้นจากการนำความรู้ของระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะที่ว่า $u = \sum_{i=1}^{n} \phi_i u_i$ มาใช้ในการหาเกรเดียนต์ความเร็ว $(G_k^e = \dfrac{\partial u}{\partial x_k})$ เมื่อ u เป็นส่วนประกอบของความเร็วในทิศ r และ z และ x_k เป็นทิศ r และ z ตามลำดับ จะได้ว่า

$$G_k^e(\xi_j,\eta_j,t)=\frac{\partial u(\xi_j,\eta_j,t)}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial \phi_i(\xi_j,\eta_j)}{\partial x_k}u_i(t), \qquad k=1,2$$

โดยที่ค่า ξ_j,η_j เป็นค่าพิกัดในแกนหลักดังนี้

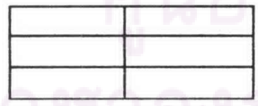
ตารางที่ 3.2 แสดงค่าพิกัดในแกนหลักของชิ้นประกอบสามเหลี่ยมแบบ 6 โนด

i	ξ_i	η_i
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	0.5	0
5	0.5	0.5
6	0	0.5

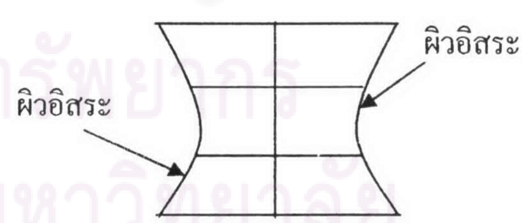
ต่อจากนั้นเราจะนำค่าเกรเดียนต์ความเร็วที่ได้จากการคำนวณของแต่ละชิ้นประกอบ ที่มีเลขโนดซ้ำกันมาหาค่าเฉลี่ย

3.5.4 การปรับโครงข่าย (Remesh)

การยืดของไหลตามแนวแกนหรือแนวรัศมีทำให้รูปร่างของโดเมนเปลี่ยนไปดังรูปที่ 3.12



(ก) โดเมนเริ่มต้น



(ข) โดเมนหลังการยืด

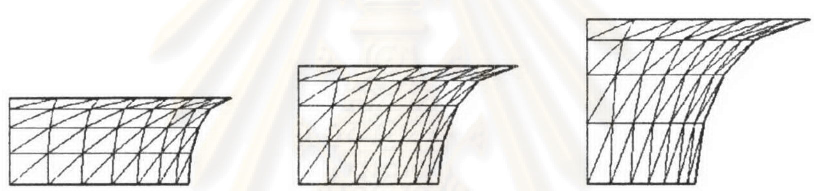
รูปที่ 3.12 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโดเมนตามแนวแกนและแนวรัศมี

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของขอบหรือบริเวณที่เรียกว่าผิวอิสระ (free surface) เกิดขึ้นเนื่องจากการดึงทำให้ชิ้นประกอบเล็กๆภายในโดเมนมีการปรับเปลี่ยนขนาดให้สอดคล้องกับโดเมนที่เปลี่ยนไป และทำการรักษาตำแหน่งของโนดให้คงตัว จึงต้องมีการปรับโครงข่ายให้มีจำนวนชิ้นประกอบเท่าเดิมแต่ขนาด

ของชิ้นประกอบเปลี่ยนไปขึ้นกับอัตราส่วนของความยาวและความกว้างในโดเมนเก่าต่อโดเมนใหม่ การปรับโครงข่ายลักษณะนี้เพื่อรักษาความต่อเนื่องและความมีเสถียรภาพของผลเฉลย โดยทั่วไปมีวิธีการปรับเปลี่ยน 2 วิธีคือ

1. การตรึงจุดต่อ (fixed-connectivity)

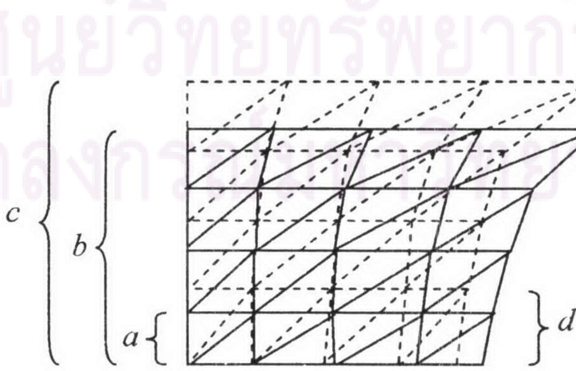
วิธีการนี้จะรักษารูปแบบดั้งเดิมไว้ โดยแต่ละโนดที่กระจายอยู่ภายในโดเมนจะมีจำนวนคงเดิม และมีจำนวนชิ้นประกอบไม่เปลี่ยนแปลงรวมทั้งอัตราการโอนเอียง (bias) ของโครงข่ายและลักษณะจุดเชื่อมโนดของแต่ละชิ้นประกอบ เป็นไปตามรูปแบบที่กำหนดไว้เริ่มแรก เพียงแต่เปลี่ยนตำแหน่งพิกัดและค่าที่คำนวณได้ไปยังพิกัดใหม่ โดยตำแหน่งพิกัดใหม่จะสามารถหาได้จากการเทียบอัตราส่วนทั้งในแนวแกน r และ z ให้สอดคล้องกับตำแหน่งขอบที่เปลี่ยนไป เช่นในปัญหาการยืดฟิลาเมนต์ ที่ขอบด้านบนจะเลื่อนสูงขึ้นส่วนที่ด้านผิวอิสระจะหดตัวลงเนื่องจากการอนุรักษ์ปริมาตรให้คงเดิมดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 แสดงรูปร่างที่เปลี่ยนไปของฟิลาเมนต์ที่ยังคงการอนุรักษ์ปริมาตร

ในแต่ละครั้งของการยืดเราจะยืดทีละแกนโดยการเทียบอัตราส่วนโดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่1 ยืดในแนวแกน z จะเปลี่ยนค่าพิกัดที่โนดต่างๆ เฉพาะค่า z ดังรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 การเปลี่ยนค่าพิกัด z ที่โนดต่างๆ ขณะยืด

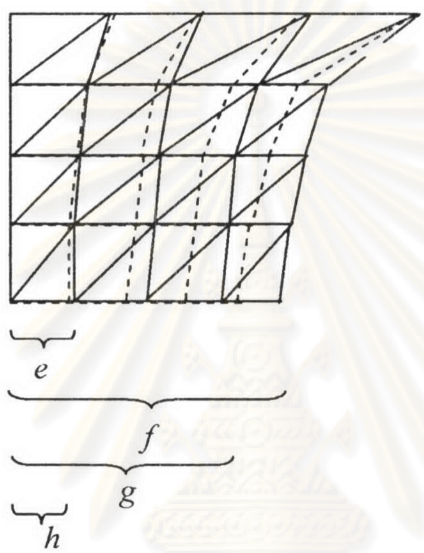
ซึ่งมีอัตราส่วน $\text{scale}_1 = \dfrac{a}{b}$ และยังได้ $\text{scale}_1 = \dfrac{d}{c}$ ดังนั้น $d = (\text{scale}_1 \times c)$

ตำแหน่งใหม่ที่ได้คือ ตำแหน่งขอบล่าง + ตำแหน่งที่เปลี่ยนไป

เมื่อขอบล่างคือศูนย์

ตำแหน่งใหม่ที่ได้ = ตำแหน่งที่เปลี่ยนไป

ขั้นที่ 2 ยืดในแนวแกน r จะเปลี่ยนค่าพิกัดที่โนดต่างๆ เฉพาะค่า r ดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 การเปลี่ยนค่าพิกัด r ที่โนดต่างๆ ขณะยืด

อัตราส่วน $\text{scale}_2 = \dfrac{e}{f}$ และ $\text{scale}_2 = \dfrac{h}{g}$ ดังนั้น $h = (\text{scale}_2 \times g)$

ค่าที่คำนวณได้จะต้องปรับให้สอดคล้องกับตำแหน่งใหม่โดยค่าที่อยู่ในบริเวณเดิมจะทำการ ประมาณค่าในช่วงโดยใช้หลักการของชิ้นประกอบอันตะ ส่วนค่าที่อยู่ภายนอกโดเมนให้คงค่าเดิมของโนดนั้นไว้

2. การสร้างโครงข่ายอย่างอัตโนมัติ (automatic mesh generation) หรือการสร้างโครงข่ายดัดแปลง (adaptive mesh generation)

วิธีนี้เป็นวิธีการปรับโครงข่ายใหม่อัตโนมัติโดยมีการเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นประกอบ จำนวนชิ้นประกอบและความหนาแน่นของชิ้นประกอบ เพื่อรองรับพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงให้สามารถหาผลเฉลยที่มีความแม่นยำเหมาะสมกับปัญหา

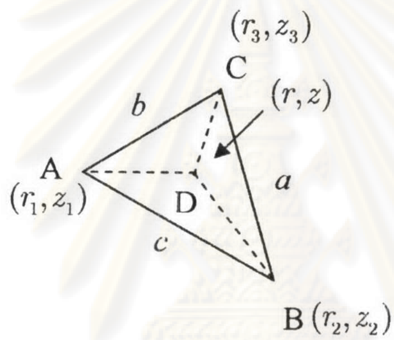
ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้หลักการปรับโครงข่ายด้วยวิธีการตรึงจุดต่อ

3.5.5 การประมาณภายในช่วง (Interpolation)

การประมาณภายในช่วงเป็นการประมาณค่าที่ต้องการทราบเช่น ความเร็ว ความดันและความเค้น ณ ตำแหน่งต่างๆ ภายในชิ้นประกอบ มีหลักการหาดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ใส่จุดพิกัด (r,z) ของค่าที่ต้องการหาดังรูปที่ 3.16 เพื่อหาชิ้นประกอบที่บรรจุพิกัดนี้ โดยการตรวจสอบผลรวมของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมย่อย ADB, BDC และ ADC มีค่าเท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใหญ่ ABC ถ้าพบว่าเท่ากันแสดงว่าพิกัดของค่าที่ต้องการหาอยู่ในชิ้นประกอบนี้

สมมติให้พิกัดที่เราต้องการทราบค่าคือ (r,z) อยู่ในชิ้นประกอบที่มีจุดยอด คือ $\mathrm{A}(r_1,z_1)$ $\mathrm{B}(r_2,z_2)$ และ $\mathrm{C}(r_3,z_3)$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 แสดงการแบ่งชิ้นประกอบออกเป็นรูปสามเหลี่ยมย่อย

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = พื้นที่สามเหลี่ยม ABD + พื้นที่สามเหลี่ยม BCD + พื้นที่สามเหลี่ยม ADC

สูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยมใดๆ เป็นดังนี้

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

หรือหาพื้นที่จากจุดพิกัดที่จุด A, B และ C

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ r_3 & z_3 \\ r_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= r_1z_2 + r_2z_3 + r_3z_1 - r_1z_3 - r_3z_2 - r_2z_1$$

ขั้นตอนที่ 2 หาฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายใน ξ และ η จาก

$$r = (r_2 - r_1)\xi + (r_3 - r_1)\eta + r_1 \tag{3.72}$$

$$z = (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta + z_1 \quad (3.73)$$

จัดรูปสมการ (3.72) และ (3.73) ใหม่ จะได้ว่า

$$A\xi + B\eta = C \quad (3.74)$$
$$D\xi + E\eta = F \quad (3.75)$$

เมื่อ

$$A = (r_2 - r_1), \quad B = (r_3 - r_1)$$
$$C = (r - r_1), \quad D = (z_2 - z_1)$$
$$E = (z_3 - z_1), \quad F = (z - z_1)$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้น (3.74) และ (3.75) เพื่อหาค่า ξ และ η ของจุดที่ต้องการประมาณค่า

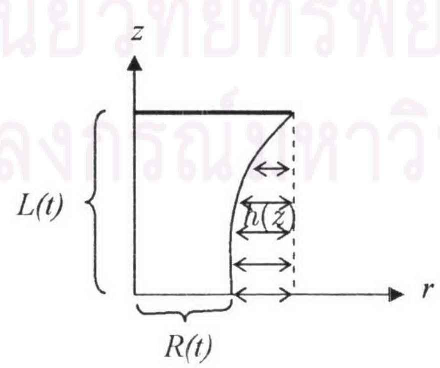
ขั้นตอนที่ 3 ประมาณค่าต่างๆ ณ พิกัดที่ต้องการทราบ โดยใช้ ฟังก์ชันรูปร่างของชิ้นประกอบที่หาได้จากขั้นตอนที่ 2 ก็จะได้ค่าต่างๆ ตามที่ต้องการดังสมการต่อไปนี้

$$u = \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\xi,\eta)u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\xi,\eta)v_i \quad \text{และ} \quad p = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(\xi,\eta)p_i$$

3.6 ตำแหน่งผิวอิสระ (Free surface location)

3.6.1 การส่งเชิงวงรี (Elliptic mapping)

การส่งเชิงวงรี คือวิธีการประมาณตำแหน่งที่เปลี่ยนไปของผิวอิสระขณะดึงหรือยืดพอลิเมอร์หลอมเหลวที่ขอบด้านบน เพื่อให้ค่าเริ่มต้นในการคำนวณหาตำแหน่งของผิวอิสระจากเงื่อนไขขอบของผิวอิสระดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 แสดงตำแหน่งของผิวอิสระที่เปลี่ยนไปจากการประมาณด้วยการส่งเชิงวงรีโดยมีขั้นตอนการหาตำแหน่งที่เปลี่ยนไปของผิวอิสระดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ในการยืดแต่ละครั้งจะให้

$$L(t) = \frac{L_0}{2}\exp(\dot{\varepsilon}\, t) \tag{3.76}$$

$$R(t) = R_0 \exp\left(\frac{-\dot{\varepsilon}\, t}{2}\right) \tag{3.77}$$

ขั้นตอนที่ 2 จากสมการเชิงวงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \tag{3.78}$$

ดังนั้นสามารถหาระยะ h จาก

$$h = \left(R_0 - R(t)\right)\sqrt{1 - \frac{z}{L(t)^2}} \tag{3.79}$$

เมื่อ $0 \le z \le L(t)$

ขั้นตอนที่ 3 ใช้กฎอนุรักษ์ปริมาตรเพื่อหาตำแหน่งที่ถูกต้อง ซึ่งได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 3.7

3.6.2 ระเบียบวิธีการทำนายที่ขึ้นกับเวลา (Time dependent prediction method)

ในการคำนวณระยะผิวอิสระ จะเริ่มจากการประมาณค่าเริ่มต้นที่ผิวอิสระก่อน โดยใช้การประมาณค่าการส่งเชิงวงรี ซึ่งได้กล่าวรายละเอียดในหัวข้อ 3.6.1 ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายระยะผิวอิสระที่เวลา t คือ $h(z,t)$ ซึ่งจะคำนวณภายใต้เงื่อนไขขอบแบบจลนศาสตร์แล้วทำการปรับสมการให้เป็นไปตามเวลา ซึ่งในที่นี้จะทำการผ่านกระบวนการผลต่างตรงกลาง (central differencing scheme) (CDS) จะได้

เงื่อนไขขอบแบบจลนศาสตร์

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_r - u_z\frac{\partial h}{\partial z} \tag{3.80}$$

จากกระบวนการผลต่างตรงกลาง

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n}\right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n} - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n-1}\right] \tag{3.81}$$

แทนสมการ (3.81) ลงในสมการ (3.80) จะได้

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{n+1} = u_r^n - u_z^n \left\{\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n} - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{n-1}\right]\right\} \tag{3.82}$$

นอกจากเมื่อพิจารณาผลกระทบจากแรงตึงผิวที่บริเวณผิวอิสระสัมผัสกับอากาศ การคำนวณจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบแบบพลศาสตร์ด้วย โดยจะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 และอนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังนี้

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{1}{\Delta z_{i+1} + \Delta z_i}\left[\frac{\Delta z_i}{\Delta z_{i+1}}\left(h_{i+1} - h_i\right) + \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i}\left(h_i - h_{i-1}\right)\right] \tag{3.83}$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) = \frac{2}{\Delta z_{i+1} + \Delta z_i}\left[\frac{\left(h_{i+1} - h_i\right)}{\Delta z_{i+1}} + \frac{\left(h_i - h_{i-1}\right)}{\Delta z_i}\right] \tag{3.84}$$

โดยที่ $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$

3.7 การอนุรักษ์ปริมาตร (Volume conservation)

ในที่นี้จะพิจารณาการไหลเป็นแบบไม่อัดตัว (incompressible flow) ดังนั้นปริมาตรของโดเมนเก่าควรเท่ากับปริมาตรของโดเมนใหม่ โดยทำการตรวจสอบจากผลรวมของปริมาตรกรวยตัดยอดมาเป็นปริมาตรของของเหลวขณะที่ยืด และปริมาตรเริ่มต้นก่อนการยืดจากสูตรปริมาตรทรงกระบอกดังรูปที่ 3.18

สูตรการหาปริมาตรของกรวยตัดยอด

$$\text{ปริมาตรของกรวยตัดยอด} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2) \tag{3.85}$$

สูตรปริมาตรทรงกระบอก

$$\text{ปริมาตรทรงกระบอก} = \pi R_c^2 h_c \tag{3.86}$$

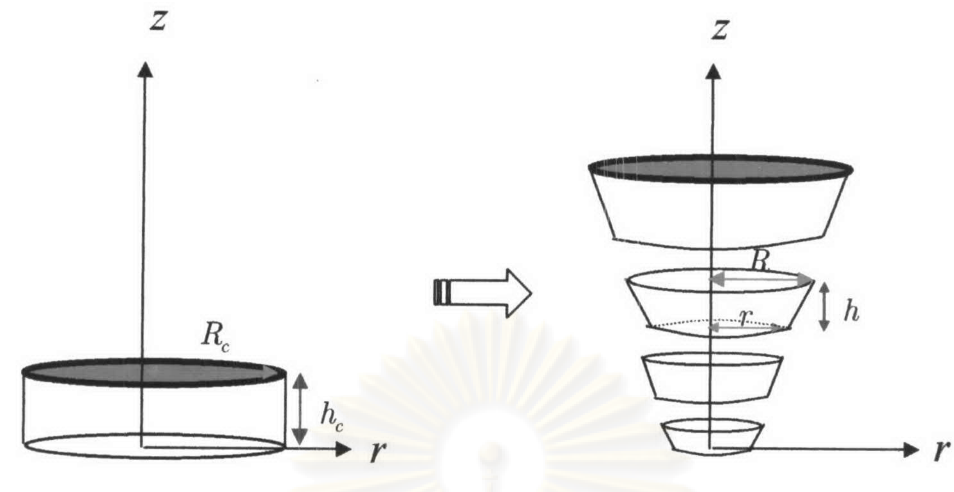
เมื่อ R เป็นรัศมีของฐานกรวยตัดยอด

r เป็นรัศมีของยอดตัดของกรวยตัดยอด

R_c เป็นรัศมีของทรงกระบอก

h เป็นความสูงของกรวยตัดยอด

h_c เป็นความสูงของทรงกระบอก



รูปที่ 3.18 การแบ่งโดเมนขณะยืดออกเป็นกรวยตัดยอดย่อยๆ

3.8 เกณฑ์การลู่เข้า (Convergence criterior)

ในการคำนวณค่าประมาณของผลเฉลย ค่าความคลาดเคลื่อนจะเป็นตัวกำหนดการลู่เข้าของผลเฉลยที่ยอมรับได้ โดยค่าความคลาดเคลื่อนจะต้องมีค่าน้อยเพียงพอต่อความแม่นยำของผลเฉลยให้มากที่สุดเท่าที่ความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์และข้อจำกัดของเวลาในการคำนวณ โดยในที่นี้จะใช้หลักการของ l_∞-norm เป็นตัวกำหนดดังนี้

$$\|E(x)\|_\infty = \left\|\left(x^{n+1} - x^n\right)\right\|_\infty \le \mathrm{TOL} \tag{3.87}$$

โดยที่ $\|E(x)\|_\infty$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย

x^n คือ เวกเตอร์ของผลเฉลยรอบที่ n

x^{n+1} คือ เวกเตอร์ของผลเฉลยรอบที่ $n+1$

TOL คือ ค่าคงตัวน้อยๆ

ในที่นี้ใช้ TOL=10^{-5} สำหรับการตรวจสอบการลู่เข้าของค่าความเร็วและความดัน

TOL=10^{-9} สำหรับการคำนวณเกาส์ไซเดล

และ TOL=10^{-3} สำหรับการตรวจสอบค่าปริมาตร