บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แนวคิดและทฤษฎี

1. <u>การแจกแจงแบร์นูลลี</u>

ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี ถ้า

$$X = \begin{cases} 1 & ,\text{success} \\ 0 & ,\text{failure} \end{cases}$$

เมื่อ success คือผลการทดลองสำเร็จ

และ failure คือผลการทดลองล้มเหลว

โดยที่ $P(X=1)=\theta$ $,0<\theta<1$

และ $P(X=0)=1-\theta$

เราอาจเขียนแทนด้วย $X \sim Ber(\theta)$ ซึ่งฟังก์ชันความน่าจะเป็นอยู่ในรูปของ

$$P(X=x)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

และมีค่า $E(X)=\theta$ และ $Var(X)=\theta(1-\theta)$

2. <u>การแจกแจงทวินาม</u>

ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่าเป็น ตัวแปรสุ่มทวินาม ถ้า $X=$ จำนวนผลสำเร็จทั้งหมดในการทดลองแบบแบร์นูลลีที่เป็นอิสระกัน n ครั้ง และเขียนแทนด้วย $X \sim B(n,\theta)$ ซึ่งฟังก์ชันความน่าจะเป็นอยู่ในรูปของ

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

และมีค่า $E(X)=n\theta$ และ $Var(X)=n\theta(1-\theta)$

3. <u>การแจกเบตา</u>

ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่ามีการแจกแจงเบตา ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\alpha > 0, \beta > 0$ ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูปของ

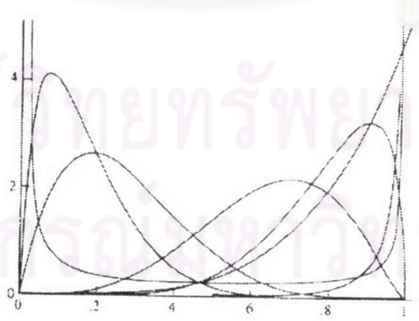
$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0 < x < 1$$

สามารถเขียนแทนด้วย $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ โดยที่ $Var(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ และ $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ และจากสมบัติของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ดังนั้น

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1$$

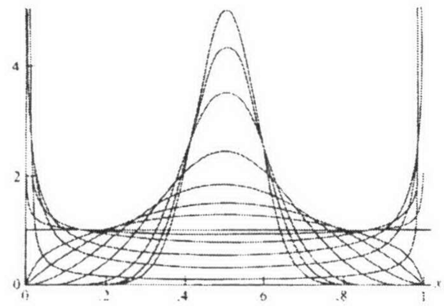
$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

พารามิเตอร์ α และ β เป็นค่าที่กำหนดรูปร่างของโค้งความหนาแน่น ถ้า $\alpha > 1, \beta = 1$ โค้งความหนาแน่นจะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม, ถ้า $\alpha = 1, \beta > 1$ โค้งความหนาแน่นจะเป็นฟังก์ชันลด, ถ้า $\alpha < 1, \beta < 1$ โค้งความหนาแน่นจะเป็นรูปตัวยู (U), ถ้า $1 < \alpha < \beta$ โค้งความหนาแน่นจะเป็นโค้งยูนิโมเดลเบ้ขวา, ถ้า $1 < \beta < \alpha$ โค้งความหนาแน่นจะเป็นโค้งยูนิโมเดลเบ้ซ้าย ดังรูป 2.1



รูปที่ 2.1

ถ้า $\beta = \alpha$ โค้งความหนาแน่นจะเป็นโค้งสมมาตร, ถ้าค่าที่เท่ากันนั้นมีค่าเท่ากับ 1 แล้ว X จะมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (0,1), ถ้าค่าที่เท่ากันนั้นมีค่าน้อยกว่า 1 โค้งความหนาแน่นจะเป็นรูปตัวยู , และถ้าค่าที่เท่ากันนั้นมีค่ามากกว่า 1 โค้งความหนาแน่นจะเป็นรูปยูนิโมเดลดังรูป 2.2



รูปที่ 2.2

4. <u>ฟังก์ชันแกมมา</u>

ฟังก์ชันแกมมา Γ (gamma function) ถูกกำหนดดังนี้

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx, \quad \alpha > 0$$

และความสัมพันธ์ต่างๆของฟังก์ชันแกมมามีดังนี้

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1), \quad \alpha > 1$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5. <u>กฎของเบส์</u>

ถ้า B_1, B_2, Λ, B_n เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกันจากการทดลองที่มีปริภูมิตัวอย่าง S และ $\mathop{Y}_{i=1}^{n} B_i = S$ ให้ A เป็นเหตุการณ์หนึ่งซึ่ง $P(A) \neq 0$ จะได้

$$P(B_j / A) = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)} \qquad ; j = 1, 2, \Lambda, n$$

6. <u>แนวคิดเบส์กับตัวแปรสุ่มทวินาม</u>

กำหนดให้ X แจกแจงแบบทวินาม (n,θ) และมีการแจกแจงก่อนของ θ คือ การแจกแจงเบตา (α,β) ดังนั้นการแจกแจงร่วมของ X และ θ คือ ผลคูณของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f(x|\theta)$ กับฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\pi(\theta)$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x,\theta) &= f(x|\theta)\pi(\theta) \\
&= \left[\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}\right]\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\right] \\
&= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}
\end{aligned}
$$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นส่วนริมของ X คือ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{0}^{1} f(x,\theta)\,d\theta \\
&= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

และการแจกแจงหลังของ θ เมื่อกำหนด x คือ

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta|x) &= \frac{f(x,\theta)}{f(x)} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}
\end{aligned}
$$

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่าง $E(\theta), Var(\theta)$ และ α,β เป็นดังนี้

$$\alpha+\beta = \frac{E(\theta)(1-E(\theta))}{Var(\theta)} - 1$$

$$\beta = (\alpha+\beta)(1-E(\theta))$$

$$\alpha = (\alpha+\beta)E(\theta)$$

7. <u>การทดสอบสมมติฐานแบบเบส์</u>

การทดสอบสมมติฐานโดยแนวความคิดของเบส์นั้นไม่เพียงแต่จะใช้การแจกแจง $f(x|\theta)$ ซึ่งเรียก $f(x|\theta)$ ว่าการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่าง แต่ยังใช้การแจกแจงก่อน $\pi(\theta)$ ด้วย โดยการแจกแจงก่อนนั้นจะถูกกำหนดโดยผู้วิจัย

แนวคิดแบบเบส์นั้นกำหนดว่าข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างจะนำไปรวมกับข้อมูลจากการแจกแจงก่อนโดยใช้ทฤษฎีกฎของเบส์ เพื่อให้ได้การแจกแจงหลัง $\pi(\theta|x)$ การอนุมานทั้งหมดที่เกี่ยวพารามิเตอร์ θ จะอ้างอิงจากการแจงแจงหลังนี้นั้นเอง

สำหรับปัญหาเกี่ยวกับการทดสอบสมมติฐาน การแจกแจงหลังจะถูกใช้ในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นว่า H_0 และ H_1 เป็นจริง เนื่องจาก $\pi(\theta|x)$ คือฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม ดังนั้นค่าความน่าจะเป็น $P(\theta \in \Theta_0|x) = P(H_0\,\text{เป็นจริง}|x)$ และ ค่าความน่าจะเป็น $P(\theta \in \Theta_0^c|x) = P(H_1\,\text{เป็นจริง}|x)$ จะถูกคำนวณ

ค่าความน่าจะเป็น $P(H_0\,\text{เป็นจริง}|x)$ และ $P(H_1\,\text{เป็นจริง}|x)$ ไม่มีความหมายมากเท่าใดนักสำหรับแนวคิดแบบคลาสสิก สำหรับแนวความคิดแบบคลาสสิกจะพิจารณา θ เป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าคงที่ สมมติฐานจะถูกตัดสินว่าเป็นจริงหรือไม่ก็เท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้า $\theta \in \Theta_0$ แล้ว $P(H_0\,\text{เป็นจริง}|x) = 1$ และ $P(H_1\,\text{เป็นจริง}|x) = 0$ แต่ถ้า $\theta \in \Theta_0^c$ จะได้ $P(H_0\,\text{เป็นจริง}|x) = 0$ และ $P(H_1\,\text{เป็นจริง}|x) = 1$ ค่าความน่าจะเป็นเหล่านี้ไม่ทราบค่า เพราะไม่ทราบค่า θ ที่แท้จริง และตัวอย่าง x ที่สุ่มมาได้ไม่มีส่วนในการกำหนดค่า θ แต่ใช้สำหรับตัดสินว่าสมมติฐานเป็นจริงหรือเท็จ ซึ่งแตกต่างจากแนวคิดแบบเบส์ค่าความน่าจะเป็นเหล่านี้จะมีค่าเท่าใดนั้นขึ้นอยู่กับค่า x ที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง ดังนั้นตัวอย่างสุ่ม x จะให้ข้อมูลที่สำคัญในการกำหนดว่าสมมติฐานจะเป็นจริงหรือเท็จ

ทางหนึ่งที่สามารถทำได้ในการทดสอบสมมติฐานแบบเบส์ นั้นคือผู้วิจัยสามารถเลือกการแจกแจงหลังเพื่อที่ใช้ในการตัดสินใจยอมรับสมมติฐาน H_0 ถ้า $P(\theta \in \Theta_0|x) \geq P(\theta \in \Theta_0^c|x)$ และจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ถ้า $P(\theta \in \Theta_0|x) < P(\theta \in \Theta_0^c|x)$ ดังนั้นค่าที่ใช้ในการตัดสินว่าจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 คือ $P(\theta \in \Theta_0^c|x)$ และเขตวิกฤติคือ $\{x : P(\theta \in \Theta_0^c|x) > 0.5\}$ แต่หากผู้วิจัยต้องการป้องกันไม่ให้เกิดข้อโต้แย้งความผิดพลาดในการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ที่ผิดพลาดได้ยากขึ้นอาจกำหนดให้ $P(\theta \in \Theta_0^c|x)$ มีค่ามากกว่า 0.5 ได้ เช่น .95 หรือ .99 เป็นต้น

8. การแจกแจงที่เป็นอิสระต่อกัน

กำหนดตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันการแจกแจงร่วม $f(x,y)$ แล้ว X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(y)$ ซึ่งทำให้

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

เป็นจริงสำหรับ $x\in R$ และ $y\in R$

9. อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปร

9.1 บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยผืนผ้า

ให้ Q เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x=a$, $x=b, y=c$ และ $y=d$

$f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน Q แล้วปริมาตรที่อยู่ใต้ฟังก์ชัน f บนโดเมน Q คือ $\iint_Q f=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$

9.2 บนโดเมนทั่วไป

ให้ $S=\{(x,y)|a\le x\le b; g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$

g_1 และ g_2 มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$

$f:S\to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน S แล้วปริมาตรที่อยู่ใต้ฟังก์ชัน f บนโดเมน S คือ $\iint_S f=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$ แต่ในบางครั้งการสลับลำดับตัวแปรการอินทิเกรตทำให้การอินทิเกรตทำได้ง่ายขึ้นดังนั้นอาจเขียนบริเวณ S ใหม่ให้สะดวกในการสลับลำดับในการอินทิเกรตดังนี้

$$S=\{(x,y)|c\le y\le d; h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$$

แล้ว $\iint_S f=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$

10. <u>คุณสมบัติของลอการิทึม</u>

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ แล้วเรียก $f(x)$ ว่าฟังก์ชันลอการิทึม และ $f^{-1}(x) = e^x$ เมื่อ e มีค่าประมาณ 2.71828… และคุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมมีดังนี้

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln x^r = r \ln x$$

$$\ln uv = \ln u + \ln v$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

11. <u>การประมาณการแจกแจงเบตาด้วยการแจกแจงปกติ</u>

กำหนดให้ $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ เมื่อ $\alpha = \beta \to \infty$ แล้ว X จะมีการแจกเข้าใกล้การแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และค่าแปรปรวน σ^2 โดยที่ $\mu = E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$ และ $\sigma^2 = Var(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

<u>H.I. Patel and G.D. Gupta (2527)</u>, ได้นำเสนอการทดสอบความสมมูลทางชีวภาพ (bioequivalent test) ของตัวแปรสุ่มสองตัวที่เป็นอิสระกันและแจกแจงแบบปกติ โดยกำหนดให้ $x_{1_j}(j = 1,2,\Lambda\ ,n_1)$ และ $x_{2_j}(j = 1,2,\Lambda\ ,n_2)$ เป็นตัวอย่างที่สุ่มอย่างอิสระจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และ μ_2 ตามลำดับ และมีค่าแปรปรวนเท่ากับ σ^2 เท่ากันโดยมีสมมติฐานในการทดสอบดังนี้

$$H_0 : |\mu_1 - \mu_2| = \Delta$$
$$H_1 : |\mu_1 - \mu_2| < \Delta$$

ภายใต้ H_0 ค่าสถิติทดสอบ $V=\{n_1(\bar{x}_1-\bar{x})^2+n_2(\bar{x}_1-\bar{x})^2\}/s^2$ มีการแจกแจงแบบ non-central F ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 และ $n-2$ และมี NC(non-centrality) parameter เท่ากับ $h\Delta^2/\sigma^2$ เมื่อ $\bar{x}=(\bar{x}_1+\bar{x}_2)/(n_1+n_2)$, $s^2=\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)/(n-2)$, $n=n_1+n_2$ และ $h=n_1n_2/(n_1+n_2)$ ซึ่งกำหนดให้ $V\sim F_{\nu_1,\nu_2,\vartheta}$ เมื่อ ν_1,ν_2 คือองศาความเป็นอิสระ และ ϑ คือ NC parameter แล้วการทดสอบนี้จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $F_{1,n-2,\gamma}\le c$ เมื่อ $P\left(F_{1,n-2,\gamma}\le c|H_0\right)=\alpha$ และ $\gamma=h\Delta^2/\sigma^2$ หรือจะ

ปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ถ้า $\alpha^*\le\alpha$

เมื่อ $\alpha^*=P(F_{1,n-2,\gamma}\le V|H_0)$ เมื่อใช้การประมาณของ Patnaik (พ.ศ.2492) จะได้ว่า α^* สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\alpha^*=P\left\{F_{\nu,n-2}<\frac{V}{(1+\gamma)}\right\}$$

เมื่อ $F_{\nu,n-2}$ มีการแจกแจงแบบ central F ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu=(1+\gamma)^2/(1+2\gamma)$ และ $n-2$

L. Barker, H. Rolka, D. Rolka, C. Brown (พ.ศ. 2544), ได้ทำการเปรียบเทียบการทดสอบสมมูลของตัวแปรสุ่มทวินามสองตัวที่แตกต่างกัน 8 วิธีได้แก่

1. Simple asymptotic interval (SAI)

2. Continuity corrected simple asymptotic interval (SAIC)

3. Pooled variance simple asymptotic interval (SAIP)

4. Score method (SC)

5. Continuity corrected score method (SCC)

6. Profile likelihood method (PROF)

7. Modified Patal-Gupta test (MPG)

8. Likelihood ratio test (LRT)

ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ตัดสินว่าการทดสอบใดเหมาะสมในการใช้งานมากกว่านั้น ถูกพิจารณาในสามด้าน ด้านแรกคือค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง (α) ด้านที่สองค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นเท็จ หรืออำนาจการทดสอบ ($1-\beta$) และด้านสุดท้ายความซับซ้อนของการทดสอบ และผลของการเปรียบเทียบเป็นดังนี้

ในแง่ของความซับซ้อนในการคำนวณ LRT มีความยุ่งยากในการคำนวณมากที่สุด และต้องใช้คอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูง ส่วน MPG และ PROF มีความยุ่งยากน้อยกว่าแต่ก็ยังคงต้องใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณเช่นกัน สำหรับการทดสอบ SC SCC และ SAIP มีความยุ่งยากในการคำนวณน้อยลงไปแต่ก็ยังคงต้องใช้เครื่องคิดเลขในการคำนวนอยู่ สำหรับการทดสอบที่ง่ายต่อการใช้ที่สุด และสามารถคำนวณค่าสถิติได้ด้วยมือคือการทดสอบ SAI และ SAIC ดังนั้นถ้าเรียงลำดับความยุ่งยากของทั้ง 8 การทดสอบแล้วอาจได้ผลดังนี้ LRT, MPG=PROF, SC=SCC, SAIP, SAI=SAIC

ในแง่ของความแม่นยำในการทดสอบ จะพิจารณาค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง และค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นเท็จ ร่วมกัน ถ้าค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง มีค่าน้อยจะถือว่าการทดสอบนั้นเป็นการทดสอบที่น่าจะมีความแม่นยำในการทดสอบสูง ส่วนถ้าค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นเท็จ ของการทดสอบใดมีค่ามากน่าจะเป็นการทดสอบที่ให้ผลการทดสอบที่แม่นยำสูง และจากผลการเปรียบเทียบปรากฏว่า การทดสอบ MPG เป็นการทดสอบที่ผู้วิจัยให้คำแนะนำว่าเหมาะสมแก่การใช้งานมากที่สุด เนื่องจากให้ค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นเท็จ หรืออำนาจการทดสอบสูงที่สุดในเกือบทุกสถานการณ์ แม้ว่าค่าสัดส่วนจำลองการปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริงของการทดสอบ MPG จะไม่ต่ำที่สุด แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่ามากค่าสัดส่วนดังกล่าวจะมีค่าเข้าใกล้ α เช่นเดียวกับทุกการแจกแจง นอกจากนั้นการทดสอบ MGP ยังมีความไวต่อการปฏิเสธสมมติฐานที่ผิดพลาด (anti conservativeness) สูงกว่าอีกด้วย

สำหรับการทดสอบ MPG เป็นดังนี้

ให้ $X_1 \sim B(n_1,\theta_1)$ และ $X_2 \sim B(n_2,\theta_2)$ สมมติฐานในการทดสอบคือ $H_0:|\theta_1-\theta_2| \geq \Delta$ เทียบกับ $H_1:|\theta_1-\theta_2| < \Delta$ เมื่อ Δ คือ ความต่างของพารามิเตอร์ θ ที่ยอมรับได้ และถือว่าประชากรทั้งสองสมมูลกันถ้า$|\theta_1-\theta_2| < \Delta$ การปฏิเสธสมมติฐาน H_0 หมายถึงประชากรทั้งสองสมมูลกัน และการทดสอบจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ถ้า $\alpha^* \leq \alpha$ เมื่อ α คือ

ระดับนัยสำคัญ, $\alpha^{*} = F(V/1+\gamma)$ และ F คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงแบบ F ด้วยองศาอิสระ $(1+\gamma^{2})/(1+2\gamma)$ และ $n_1 + n_2 - 2$ เมื่อกำหนดให้

$$V = \left\{ n_1(\hat{\theta}_1 - \hat{\tau})^2 + n_2(\hat{\theta}_2 - \hat{\tau})^2 \right\} / s^2$$

$$\hat{\tau} = (n_1\hat{\theta}_1 + n_2\hat{\theta}_2)/(n_1 + n_2)$$

$$s^2 = \left\{ n_1\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1) + n_2\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2) \right\} / (n_1 + n_2)$$

$$\gamma = \left\{ n_1 n_2 / (n_1 + n_2) \right\} \left\{ \Delta^2 / s^2 \right\}$$