บทที่ 2

คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงคณิตศาสตร์ที่ใช้เป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ความไม่แน่นอน การวิเคราะห์สมรรถนะและการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน เนื้อหาประกอบด้วย §2.1 กล่าวถึงพีชคณิตเชิงเส้น [12, 13] ที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบจำลองที่มีความไม่แน่นอน, §2.2 แนะนำอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequality : LMI) , §2.3 แนะนำอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (Bilinear Matrix Inequality : BMI) จากนั้นจะกล่าวถึงนิยามของ $\mathcal{H}_2$ นอร์ม ในรูปแบบต่างๆ ที่ใช้ในการวัดสมรรถนะของระบบ, §2.5 นำเสนอบทตั้งทางพีชคณิต 2 บทที่ใช้ในการสังเคราะห์ตัวควบคุม และ §2.6 เป็นบทสรุป

2.1 พีชคณิตเชิงเส้น

2.1.1 พีชคณิตพื้นฐาน

กำหนดให้ $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^m$ หากเรานำเวกเตอร์ดังกล่าวมาเขียนให้อยู่ในรูปแบบ $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$ เมื่อ $\alpha_i \in \mathbf{R}$ เราเรียกรูปแบบนี้ว่าผลบวกเชิงเส้น (linear combination) และถ้าเรานำเซตของผลบวกเชิงเส้นทั้งหมดมาสร้างเป็นปริภูมิย่อย (subspace) เราจะเรียกปริภูมิย่อย นี้ว่าผลการแผ่ (span) ของ $a_1, \ldots, a_k$ เขียนแทนด้วย

$$\text{span}\{a_1, \ldots, a_k\} \triangleq \{a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k,\ \alpha_i \in \mathbf{R}\} \tag{2.1}$$

ถ้าพิสูจน์ได้ว่า $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ เป็นศูนย์ทุกตัวเราจะเรียกเวกเตอร์ $a_1, \ldots, a_k$ ว่าเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (linear independent) หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า เวกเตอร์เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันก็ต่อเมื่อไม่สามารถแสดงเวกเตอร์ a_i ใดๆ ให้อยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้น ของเวกเตอร์อื่นๆ ในปริภูมิย่อยนั้นได้

เมื่อกำหนดให้ $x_1, \ldots, x_k$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และให้ $S = \text{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ เราเรียก $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ว่าเป็นฐานหลัก (basis) ชุดหนึ่งของ S และเรียกจำนวนเวกเตอร์ในฐานหลักนี้ว่า มิติ (dimension) ของ S หรือเขียนแทนด้วย $\dim S$ โดยนิยามส่วนเติมเต็มตั้งฉาก (orthogonal complement) ของปริภูมิย่อย S เป็นดังนี้

$$S^{\perp} \triangleq \{y \in \mathbf{R}^m : y^T x = 0,\ \text{for all } x \in S\} \tag{2.2}$$

กำหนดให้เมทริกซ์ $A \in \mathbf{R}^{l \times m}$ มีภาพ (image) หรือ พิสัย (range) ของ A ที่เขียนแทนได้ด้วย $\mathbf{Im}\, A$ และ $\mathcal{R}(A)$ ตามลำดับ ดังนี้

$$\text{Im}\, A = \mathcal{R}(A) = \{Ax \ : \ x \in \mathbf{R}^m\}$$

โดยเมทริกซ์มีมิติของ $\mathcal{R}(A)$ เท่ากับ rank(A) ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$\text{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) \tag{2.3}$$

นอกจากนี้เราสามารถหา rank (A) ได้จากค่าสูงสุดระหว่างจำนวนสดมภ์หรือจำนวนแถวที่เป็นอิสระต่อกัน และความหมายของ $B \in \operatorname{Im} A$ จะหมายถึง เมทริกซ์ B เป็นปริภูมิของเวกเตอร์ที่สามารถอธิบายได้ด้วยผลการแผ่ของสดมภ์เมทริกซ์ A

2.1.2 การแยกย่อยค่าเอกฐาน

การแยกย่อยค่าเอกฐานเป็นรูปแบบการแยกตัวประกอบของเมทริกซ์แบบหนึ่ง ซึ่งให้ผลลัพธ์อยู่ในรูปของผลคูณของ 3 เมทริกซ์ ประกอบด้วย เมทริกซ์ของเวกเตอร์เอกฐานขาเข้า (V) เมทริกซ์ค่าเอกฐาน (Σ) และ เมทริกซ์ของเวกเตอร์เอกฐานขาออก (U) ในที่นี้จะกล่าวนำเนื้อหาในส่วนของค่าเอกฐานและเวกเตอร์เอกฐาน ดังนี้

ค่าเอกฐาน (singular value) ของ A เขียนแทนด้วย $\sigma(A)$ เป็นค่าที่ได้จากการคำนวณรากที่สองของค่าเจาะจง (eigenvalue) ของ A^TA หรือ AA^T ที่เป็นบวก เขียนได้เป็น

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^TA)} = \sqrt{\lambda_i(AA^T)} \tag{2.4}$$

นำค่าเอกฐานที่ได้มาหาเวกเตอร์เอกฐานขาออก u_i และเวกเตอร์เอกฐานขาเข้า v_i ได้ดังนี้

$$(AA^T)\,u_i = \sigma_i u_i \tag{2.5}$$

$$(A^TA)\,v_i = \sigma_i v_i \tag{2.6}$$

นั่นคือ u_i เป็นเวกเตอร์เจาะจงของของ AA^T และ v_i เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ A^TA

พิจารณาการแยกย่อยเอกฐานของ $A \in \mathbf{R}^{l\times m}$ จะให้ตัวประกอบของเมทริกซ์ ดังนี้

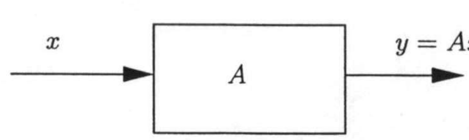
$$A = U\Sigma V^T \tag{2.7}$$

เมื่อ $U = [u_1, \ldots,\ u_l] \quad \in \mathbf{R}^{l\times l}$ คือ เมทริกซ์ของเวกเตอร์เอกฐานขาออก

$\Sigma = \operatorname{diag}[\sigma_1, \ldots, \sigma_p] \quad \in \mathbf{R}^{l\times m}$ คือ เมทริกซ์ที่มีค่าเอกฐานบนแนวทแยงมุมหลักเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย $(\sigma_1 \geq\ \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p)$ เมื่อ $p = \min\{l, m\}$

$V = [u_1, \ldots,\ u_m] \quad \in \mathbf{R}^{m\times m}$ คือ เมทริกซ์ของเวกเตอร์เอกฐานขาเข้า

การแยกย่อยเอกฐานเป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์อัตราขยายและทิศทางของสัญญาณเข้าสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกได้ดี เนื่องจากค่าเอกฐานเป็นตัวเลขที่บอกถึงอัตราขยายสูงสุดและต่ำสุดของระบบได้ ถ้ากำหนดให้เมทริกซ์ $A \in \mathbf{R}^{l\times m}$ มีเวกเตอร์ขาเข้าเป็น $x \in \mathbf{R}^m$ และเวกเตอร์ขาออกเป็น $y \in \mathbf{R}^l$ ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1: โครงสร้างระบบสำหรับนิยามนอร์มของเมทริกซ์

เราจะได้อัตราขยายสูงสุดของ A หรือ $||A||_\infty$ สำหรับทุกๆเวกเตอร์ขาเข้า x ใดๆ มีค่าเท่ากับค่าเอกฐานสูงสุดของ A

$$\bar{\sigma}(A) \equiv \sigma_1(A) = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}$$

และในทำนองกลับกันอัตราขยายต่ำสุดของ A มีค่าเท่ากับค่าเอกฐานต่ำสุดของ A

$$\underline{\sigma}(A) \equiv \sigma_p(A) = \min_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}$$

นอกจากนี้เราสามารถบอกค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ได้จากจำนวนของค่าเอกฐานที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์นั้น และในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เรานำคุณสมบัติของค่าลำดับชั้นไปใช้ในการวิเคราะห์ความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ในบทที่ 3 ต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.1 หาค่าแยกย่อยเอกฐานของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}$$

หาค่าเอกฐานของ A จาก

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\lambda_i \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}}$$

ได้ค่าเอกฐานของ A คือ $\sigma_1 = 9.53, \sigma_2 = 0.51$ และ $\sigma_3 = 0$ เมื่อนำค่าเอกฐานทั้งหมดมาหาเวกเตอร์เอกฐานขาออก u_i ด้วยการแทนค่าในสมการ (2.5) และ v_i ด้วยการแทนค่าในสมการ (2.6) จะได้

$$U = [u_1 \; u_2 \; u_3] = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.88 & 0.41 \\ 0.53 & 0.24 & -0.81 \\ 0.81 & -0.40 & 0.41 \end{bmatrix}, \quad V = [v_1 \; v_2] = \begin{bmatrix} 0.62 & -0.78 \\ 0.78 & 0.62 \end{bmatrix}$$

นำเมทริกซ์เวกเตอร์เอกฐานขาออก เมทริกซ์ค่าเอกฐาน และเมทริกซ์เวกเตอร์เอกฐานขาเข้ามาเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ A ได้เป็น

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.23 & 0.88 & 0.41 \\ 0.53 & 0.24 & -0.81 \\ 0.81 & -0.40 & 0.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.53 & 0 \\ 0 & 0.51 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.62 & -0.78 \\ 0.78 & 0.62 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ A มีค่าเอกฐานที่ไม่เท่ากับศูนย์อยู่ 2 จำนวนดังนั้นค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ A เท่ากับ 2 โดยเราสามารถนำค่าลำดับชั้นนี้มาลดขนาดของเมทริกซ์ย่อยของ A ให้ทุกเมทริกซ์มีค่าลำดับชั้นเท่ากับ 2 ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.88 \\ 0.53 & 0.24 \\ 0.81 & -0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.53 & 0 \\ 0 & 0.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.62 & -0.78 \\ 0.78 & 0.62 \end{bmatrix}^T$$

นอกจากนี้ การแยกย่อยเอกฐานสามารถหาได้โดยใช้คำสั่ง `svd(A)` ในโปรแกรม Matlab

2.2 อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

สมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีรูปแบบ ดังนี้

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \geq 0 \tag{2.8}$$

เมื่อ $x \in \mathbf{R}^n$ เป็นตัวแปรที่สอดคล้องกับอสมการ และ F_i เป็นเมทริกซ์สมมาตร $F_i = F_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n},\ i = 1, \ldots, m$ เมื่อ $m = n(n+1)/2$ และเมทริกซ์ค่าคงตัว อสมการ (2.8) มีความหมายว่า $F(x)$ เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (positive semidefinite) หมายถึง $z^T F(x) z \geq 0$ สำหรับทุกค่า $z \in \mathbf{R}^n$ และสมมูลกับการที่ $F(x)$ มีค่าเจาะจงทุกตัวมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เงื่อนไข LMI เป็นเงื่อนไขที่ไม่เป็นเชิงเส้น และไม่ปรับเรียบ (nonsmooth) แต่เป็นเงื่อนไขคอนเวกซ์ในตัวแปร x กล่าวคือ ถ้า $F(x) \geq 0$ และ $F(y) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ว่า

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) \geq 0 \tag{2.9}$$

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่เราพบบ่อย คือ อสมการเลียปูโนฟ (Lyapunov inequality)

$$A^T P + PA < 0 \tag{2.10}$$

เมื่อ $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์คงตัวที่กำหนดให้ และ $P = P^T$ เป็นตัวแปรเมทริกซ์ หรืออาจกล่าวได้ว่า $A^T P + PA < 0$ เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร P กำหนดให้ $P_1, \ldots, P_m$ เป็นฐานหลัก (basis) ของเมทริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ เมื่อ $m = n(n+1)/2$ จาก (2.10) สามารถเขียนอยู่ในรูป (2.8) ได้โดยมี $F_0 = 0$ และ $F_i = -A^T P_i - P_i A$ แต่โดยมากเรามักจะพบอสมการ เลียปูโนฟในรูปแบบ (2.10) มากกว่า สำหรับปัญหาอสมการไม่เชิงเส้นที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้โดยใช้ ส่วนเติมเต็มของชูร์ (Schur complement) เมื่อมีอสมการไม่เชิงเส้นในรูปแบบ

$$R(x) > 0 \quad \text{และ} \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \tag{2.11}$$

ซึ่ง $Q(x) = Q(x)^T,\ R(x) = R(x)^T$ และ $S(x)$ ขึ้นอยู่กับตัวแปร x เท่านั้น เทียบเท่ากับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในรูป

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.12}$$

เช่น เมื่อพิจารณาอสมการเมทริกซ์กำลังสอง

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0 \tag{2.13}$$

ซึ่ง $A,\ B,\ Q = Q^T,\ R = R^T > 0$ เป็นเมทริกซ์คงตัวที่กำหนดให้ และ $P = P^T$ เป็นตัวแปรเมทริกซ์ โดยที่อสมการเมทริกซ์กำลังสองดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0 \tag{2.14}$$

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นรูปแบบมาตรฐานมีอยู่หลายรูปแบบ แต่รูปแบบที่นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้มี 2 รูปแบบ คือ

1. ปัญหาโปรแกรมกึ่งแน่นอน (Semidefinite programming) ซึ่งถือว่าเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ เนื่องจากเป็นการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เป็นเชิงเส้น ภายใต้เงื่อนไขบังคับที่ประกอบด้วยเมทริกซ์ สมมาตรที่เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน ในรูปแบบ

$$\text{minimize} \quad c^T x \tag{2.15}$$

$$\text{subject to} \quad F(x) \geq 0 \tag{2.16}$$

   เมื่อ $c \in \mathbf{R}^m$ และ $F_i,\ i = 1, \ldots, m$ เป็นอสมการเงื่อนไขบังคับทั้งหมดที่กำหนดให้

2. ปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI feasibility problem) เป็นกรณีเฉพาะของ ปัญหาโปรแกรมกึ่งแน่นอน คือ การหาค่า x ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$F(x) \geq 0 \tag{2.17}$$

2.3 อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$F(x,y) \triangleq F_{0,0} + \sum_{i=1}^{m} x_i F_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} y_j F_{0,j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j F_{i,j} \geq 0 \tag{2.18}$$

โดยที่เมทริกซ์สมมาตร $F_{i,j} = F_{i,j}^T \in \mathbf{R}^{p \times p},\ i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, n$ เป็นเมทริกซ์คงตัว และ $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ เป็นตัวแปร

กำหนดให้ $c \in \mathbf{R}^m$, $d \in \mathbf{R}^n$ และกำหนดค่า $F_{i,j}$ เมื่อ $i = 0, 1, \ldots, m$ และ $j = 0, 1, \ldots, n$ ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่จะกำหนดโดย

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + d^T y \\ \text{subject to} & F(x,y) \geq 0 \end{array} \tag{2.19}$$

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่เป็นปัญหา NP แบบยาก [14], มีวิธีฮิวริสติก (heuristic) หลายวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบเฉพาะที่ (local) ของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ เช่น [15, 16] หลักการของวิธีดังกล่าวคือ สำหรับปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (2.19) กำหนดให้ x มีค่าคงที่และหา y ที่สอดคล้องกับ (2.19) ก็จะเป็นปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนอันหนึ่ง, กำหนดให้ y มีค่าคงที่และหา x ที่สอดคล้องกับ (2.19) ก็จะเป็นปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนอีกอันหนึ่ง การแก้ปัญหาด้วยวิธีฮิวริสติกทำได้โดยแก้ปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนสองปัญหาสลับกันจนกว่าคำตอบจะลู่เข้าสู่คำตอบเฉพาะที่

2.4 นอร์ม $\mathcal{H}_2$

สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา เราสามารถนิยามนอร์ม $\mathcal{H}_2$ ได้หลายรูปแบบ [17] แบบแรกกำหนดให้ $G(s)$ ที่เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนของระบบ $\mathcal{G}$ นั่นคือ $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ โดยสมมติให้ $G(s)$ มีเสถียรภาพ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบ $\mathcal{G}$ นิยามได้โดย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \triangleq \int_0^\infty \mathbf{Tr} G(j\omega)G^T(-j\omega)d\omega \tag{2.20}$$

นอกจากนี้นอร์ม $\mathcal{H}_2$ ยังสามารถนิยามได้โดยใช้ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล (Parseval's theorem) โดยกำหนดให้ $e_1, \ldots, e_{n_w}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ของปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathbf{R}^{n_w}$ (สมาชิกตัวที่ i^{th} ของ e_i มีค่าเป็น 1 นอกนั้นเป็น 0) และ $z_i(t)$ เป็นสัญญาณออกของระบบที่มีเสถียรภาพ เมื่อเราป้อนสัญญาณอิมพัลส์ δe_i (ฟังก์ชันอิมพัลส์ที่เวลา 0 ในทิศทางของเวกเตอร์ e_i) เข้าสู่ระบบโดยกำหนดให้ภาวะเริ่มต้น (initial condition) เป็นศูนย์ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบนิยามได้โดย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \triangleq \sum_{i=1}^{n_w} \|z_i\|_2^2 \tag{2.21}$$

ในบางครั้งเราอาจพิจารณานอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบโดยให้ w เป็นสัญญาณรบกวนขาวแบบเกาส์ (white Gaussian noise) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (zero mean) ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็นหนึ่งหน่วย (unit covariance) โดยที่ z เป็น กระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process) ดังนี้

$$z(t) \triangleq \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau$$

นอร์ม $\mathcal{H}_2$ สำหรับระบบดังกล่าวนิยามได้ด้วย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \triangleq \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\{\frac{1}{T}\int_0^T z(t)^T z(t)dt\} \tag{2.22}$$

เราทราบว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ใน (2.20), (2.21) และ (2.22) สมมูลกัน [17] และสามารถคำนวณได้โดยตรง นอร์ม $\mathcal{H}_2$ จะมีค่าจำกัด (finite) ถ้า A มีเสถียรภาพ และ $D = 0$ เราจะได้ว่า

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \mathbf{Tr} B^T P B$$

เมื่อ P เป็นเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน (positive symmetric) ที่สอดคล้องกับ

$$A^T P + PA + C^T C = 0$$

แต่สำหรับระบบไม่เชิงเส้นหรือระบบที่แปรผันตามเวลา จะนิยามนอร์ม $\mathcal{H}_2$ ด้วย (2.20) และ (2.22) ไม่ได้เนื่องจาก (2.20) เป็นนิยามสำหรับระบบเชิงเส้น และสำหรับ (2.22) ลิมิตอาจจะไม่มีอยู่จริง และคุณสมบัติของสัญญาณรบกวนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และเป็นแบบเกาส์ไม่นิยามสำหรับระบบไม่เชิงเส้น มีเพียงนิยาม (2.21) เท่านั้นที่สามารถขยายไปสู่ระบบไม่เชิงเส้นได้ [17] พิจารณาระบบ LTI ที่ป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_p p + B_w w \\ q = C_q x, \quad z = C_z x \\ p = \phi(q) \end{cases} \tag{2.23}$$

เนื่องจากการป้อนสัญญาณเข้าเป็นอิมพัลส์ (impulse) เข้าสู่ระบบโดยกำหนดให้ภาวะเริ่มต้นเป็นศูนย์มีความสัมพันธ์กับการกำหนดค่าเริ่มต้นเมื่อไม่มีสัญญาณเข้า ซึ่งเราจะความสัมพันธ์นี้กับนิยาม (2.21) ในการพิจารณาขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบ (2.23) โดยกำหนดให้ $x_{0,i} = B_w e_i,\ i = 1, \ldots, n_w$ เป็นฐานหลักชุดหนึ่งของค่าเริ่มต้น โดยที่ e_i เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathbf{R}^{n_w}$ กำหนดให้ $z_{0,i}$ แทนสัญญาณออกสำหรับระบบที่ไม่มีสัญญาณเข้า ($w = 0$) และมีค่าเริ่มต้นเป็น $x_{0,i}$ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ สำหรับระบบไม่เชิงเส้นนิยามได้ด้วย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \triangleq \sum_{i=1}^{n_w} \|z_{0,i}\|_2^2 \tag{2.24}$$

2.5 บทตั้งสำหรับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ในตอนนี้จะนำเสนอบทตั้งที่เป็นประโยชน์ในการออกแบบตัวควบคุม โดยบทตั้งทั้งสองจะใช้ในการกำจัดตัวแปรในปัญหาอสมการเมทิกซ์เชิงเส้นและสร้างตัวควบคุมขึ้นมาใหม่

Lemma 2.1 (Elimination Lemma [8]) *กำหนดให้ $G \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $U \in \mathbf{R}^{n\times p}$ และ $V \in \mathbf{R}^{n\times q}$ กำหนดให้ $U_\perp$ และ $V_\perp$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ U และ V ตามลำดับ จะมีเมทริกซ์ $X \in \mathbf{R}^{p\times q}$ ที่ทำให้*

$$G + VX^TU^T + UXV^T < 0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$V_\perp^T G V_\perp < 0 \quad \text{และ} \quad U_\perp^T G U_\perp < 0$$

พิสูจน์ ดูใน [8, หน้า 32–33] □

Lemma 2.2 (Completion Lemma [18]) *กำหนดให้ P และ $Q \in \mathbf{R}^{m\times m}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน จะมีเมทริกซ์บวกแน่นอน $\tilde{P} \in \mathbf{R}^{2m\times 2m}$ ซึ่งเมทริกซ์ย่อยขนาด $m \times m$ ด้านบนซ้ายของ $\tilde{P}$ คือ P และเมทริกซ์ย่อยขนาด $m \times m$ ด้านบนซ้ายของ $\tilde{P}^{-1}$ คือ Q ก็ต่อเมื่อ*

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.25}$$

พิสูจน์ ดูใน [18] □

สำหรับเมทริกซ์ P และ Q แต่ละคู่ที่สอดคล้องกับอสมการ (2.25) เมทริกซ์ $\tilde{P}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในบทตั้ง 2.2 (Completion Lemma) สามารถเขียนได้เป็น

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & I \\ I & (P - Q^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

เมื่อ $M \in \mathbf{R}^{m\times m}$ คือเมทริกซ์ใดๆ ที่หาตัวผกผันได้ (invertible) ดังนั้น

$$\tilde{Q} = \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & I \\ I & (Q - P^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

เมื่อ $N = (I - QP)M^{-1}$

2.6 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนและการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนในวิทยานิพนธ์นี้ โดยปัญหาที่เราพิจารณาอยู่ในรูปของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ และพิจารณาสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบ โดยนิยามสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบไม่เชิงเส้นจากการขยายนิยามของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา และในตอนท้ายเราได้นำเสนอบทตั้งทางพีชคณิตที่ใช้ในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็ว