บทที่ 5

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์และปรับปรุงขึ้น มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบศักย์ใน 2 และ 3 มิติ และการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวใน 2 มิติ โดยได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง สำหรับการไหลแบบศักย์นั้นจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมด้วยปัญหาทั้งสิ้น 3 ปัญหาได้แก่ การไหลในท่อสำหรับการไหลแบบศักย์ การไหลผ่านท่อทรงกระบอก และการไหลผ่านทรงกระบอกรูปวงรี และสำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยนั้นจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมด้วยปัญหาทั้งสิ้น 4 ปัญหาได้แก่ การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความหนืด การไหลในท่อสำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย การหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม และการไหลระหว่างเพลากับเบริง โดยมีรายละเอียดดังนี้

5.1 การไหลในท่อสำหรับการไหลแบบศักย์ [3, 13]

ปัญหาการไหลในท่อเป็นปัญหาที่ใช้ตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบศักย์ดังรูปที่ 5.1 เป็นการวิเคราะห์การไหลแบบศักย์ใน 2 มิติ โดยมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตตลอดแนว y เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันการไหลเท่ากับ 0 และตลอดแนว y เท่ากับ 5 มีค่าฟังก์ชันการไหลเท่ากับ 5 ซึ่งเป็นผลให้ความเร็วของของไหลในแนวแกน x ที่ไหลในท่อดังกล่าวจะเท่ากับ 1 ในการวิเคราะห์นั้นจะสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 231 จุดต่อและ 400 เอลิเมนต์ โดยปัญหาดังกล่าวสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ดังนี้

รูปแบบการกระจายของฟังก์ชันการไหล สามารถแสดงได้ดังนี้

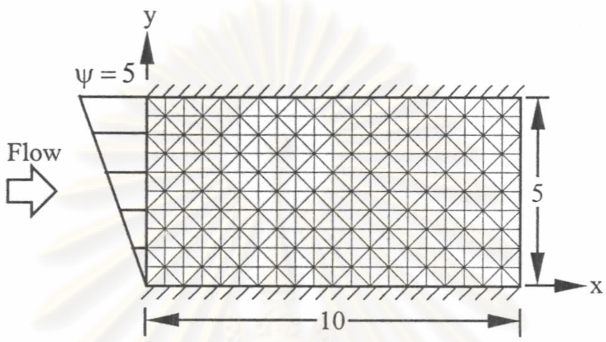
$$\psi(y) = uy + c \tag{5.1}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

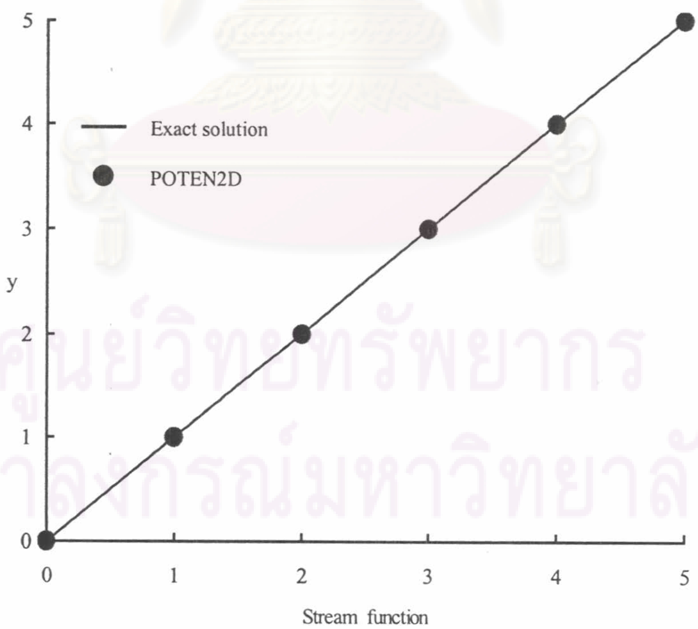
$$\psi(x, y = 0) = 0 \tag{5.2}$$

โดยจะสามารถหาค่าคงที่ดังกล่าวได้คือ c = 0 ดังนั้นรูปแบบการกระจายฟังก์ชันการไหลตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ เมื่อความเร็วตามแนวแกน x มีค่าเท่ากับ 1 คือ

$$\psi(y) = y \tag{5.3}$$



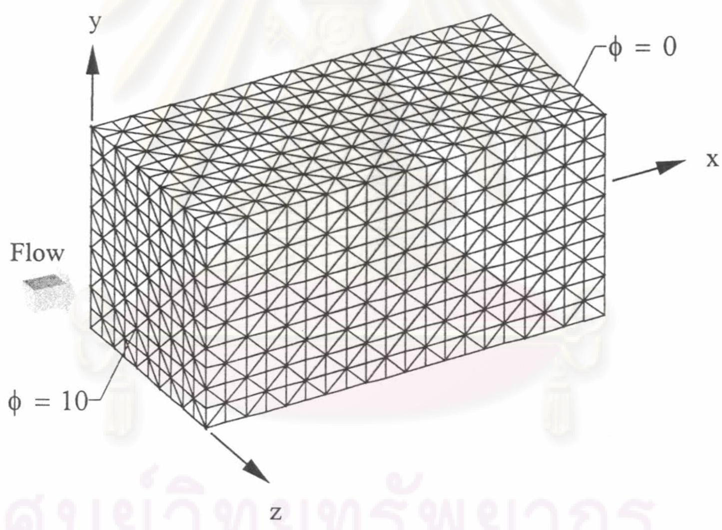
รูปที่ 5.1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อใน 2 มิติ



รูปที่ 5.2 การเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันการไหลที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลในท่อ ณ ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ใน 2 มิติ

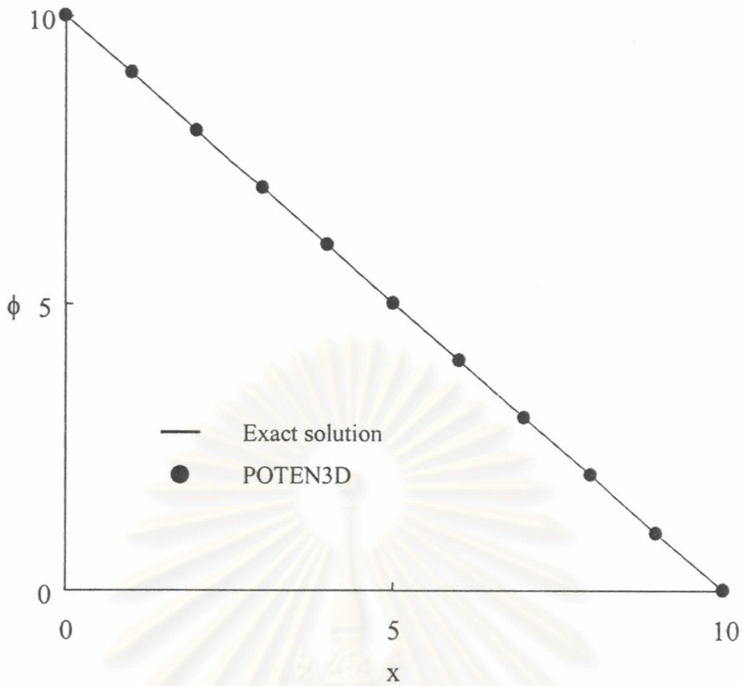
จากรูปที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันการไหลที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลในท่อ ณ ตำแหน่ง x ต่าง ๆ จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในท่อแบบศักย์ใน 3 มิตินั้นได้มีลักษณะของปัญหาเหมือนกับการวิเคราะห์ใน 2 มิติแต่ลักษณะของปัญหาจะเพิ่มความสูงในแนวแกน z ขนาดเท่ากับ 5 ซึ่งเป็นการไหลในท่อที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 1,490 จุดต่อและ 5,673 เอลิเมนต์ และมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตลอดระนาบ y-z เมื่อ x เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ 10 และตลอดระนาบ y-z เมื่อ x เท่ากับ 10 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ 0 ซึ่งเป็นผลให้ความเร็วของของไหลในแนวแกน x ที่ไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังกล่าวจะเท่ากับ 1 ดังรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสใน 3 มิติ

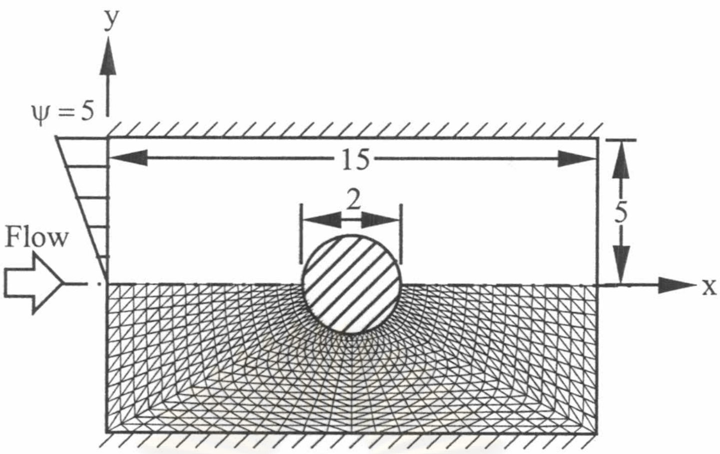
จากรูปที่ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสใน 3 มิติ ณ ตำแหน่ง y ต่าง ๆ ที่ระดับความสูง (z) เท่ากับ 2.5 ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าที่ได้จากการคำนวณใน 3 มิตินั้นยังให้ผลที่มีความถูกแม่นยำ



รูปที่ 5.4 การเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลในท่อ ณ ตำแหน่ง y ต่าง ๆ ใน 3 มิติ

5.2 การไหลผ่านท่อทรงกระบอก [3, 13]

ลักษณะของปัญหาจะมีการไหลแบบคงตัวไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของขอบเขตของปัญหา โดยมีท่อทรงกระบอกยาวขวางการไหลไว้ดังรูปที่ 5.5 เนื่องจากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบศักย์ผ่านท่อทรงกระบอกด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ใน 2 มิตินั้นมีความสมมาตรตามแนวแกน x ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาโดยใช้เพียงครึ่งบนของขอบเขตทั้งหมด โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 656 จุดต่อและ 1,200 เอลิเมนต์ และมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตลอดแนว y เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันการไหลเท่ากับ 0 และตลอดแนว y เท่ากับ 5 มีค่าฟังก์ชันการไหลเท่ากับ 5 หรือที่ตลอดแนว x เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ 7.5 และตลอดแนว x เท่ากับ 15 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ –7.5 ซึ่งเป็นผลให้ความเร็วของของไหลในแนวแกน x (U_∞) ที่ไหลผ่านท่อทรงกระบอกดังกล่าวจะเท่ากับ 1



รูปที่ 5.5 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขต
ของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 2 มิติ

โดยปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายของฟังก์ชันศักย์ดังนี้

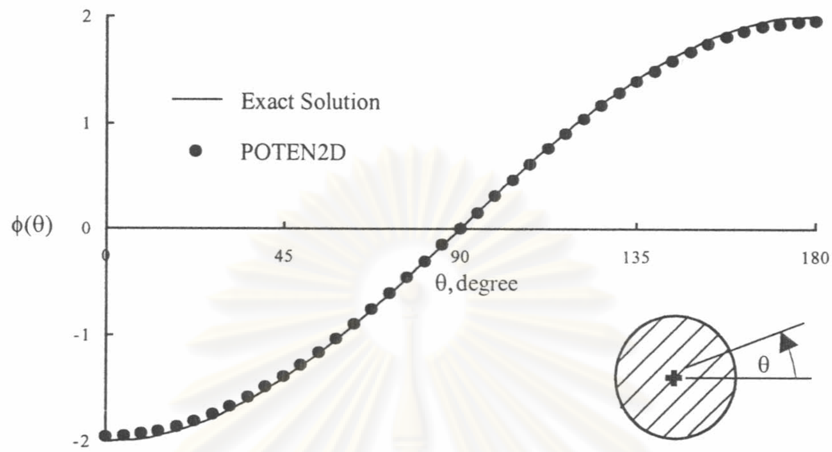
$$\phi = U_{\infty}\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \tag{5.4}$$

เมื่อกำหนดให้รัศมีของท่อทรงกระบอก (r) มีค่าเท่ากับ 1 และความเร็วตามแนวแกน x มีค่าเท่ากับ 1 และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบผลการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลในท่อ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ รอบท่อทรงกระบอก โดยที่ ระยะที่พิจารณา (a) มีค่าเท่ากับรัศมีของท่อทรงกระบอก (r) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้น

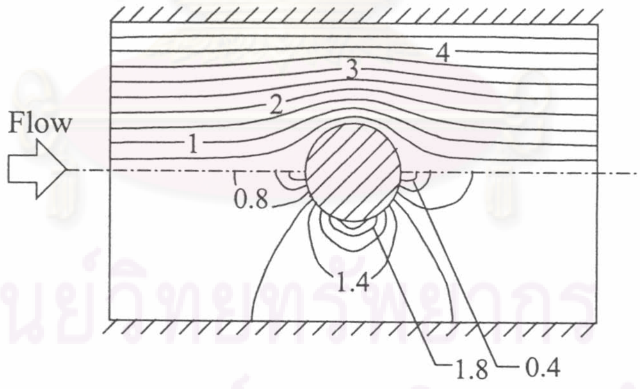
$$\phi = 2\cos\theta \tag{5.5}$$

จากรูปที่ 5.6 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก ณ ตำแหน่งต่าง ๆ รอบท่อทรงกระบอกใน 2 มิติ โดยมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 1.93% และจากการเปรียบเทียบความเร็วสูงสุดที่

ได้จากการคำนวณดังรูปที่ 5.7 กับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 1.30%



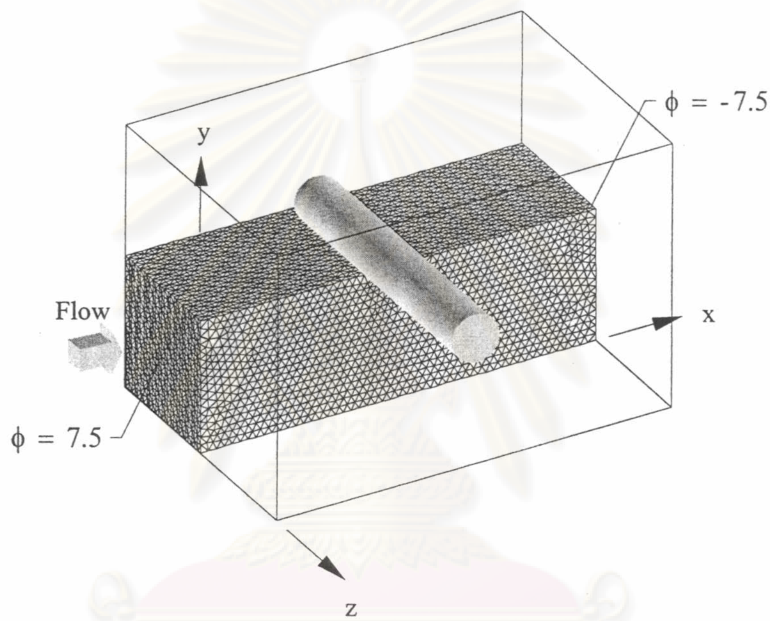
รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงรอบท่อทรงกระบอกของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 2 มิติ



รูปที่ 5.7 การกระจายฟังก์ชันการไหลและความเร็วสำหรับปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 2 มิติ

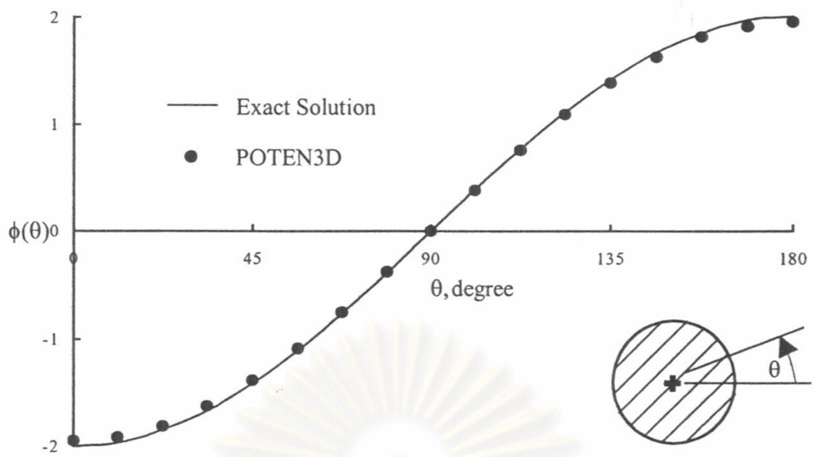
สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกแบบศักย์ใน 3 มิตินั้นได้มีลักษณะของปัญหาเหมือนกับการวิเคราะห์ใน 2 มิติแต่ลักษณะของปัญหาจะเพิ่มความสูงในแนวแกน z ขนาดเท่ากับ 10 เนื่องจากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบศักย์ผ่านท่อทรงกระบอกด้วย

ไฟไนต์เอลิเมนต์ใน 3 มิตินั้นมีความสมมาตรบนระนาบ x-y เมื่อ z เท่ากับ 0 และระนาบ x-z เมื่อ y เท่ากับ 5 ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาโดยใช้เพียงหนึ่งในสี่ของขอบเขตทั้งหมด โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 13,289 จุดต่อและ 63,226 เอลิเมนต์ และมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตลอดระนาบ y-z เมื่อ x เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ 7.5 และตลอดระนาบ y-z เมื่อ x เท่ากับ 15 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ –7.5 ซึ่งเป็นผลให้ความเร็วของของไหลในแนวแกน x (U_∞) ที่ไหลผ่านท่อทรงกระบอกดังกล่าวจะเท่ากับ 1 ดังรูป 5.8



รูปที่ 5.8 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 3 มิติ

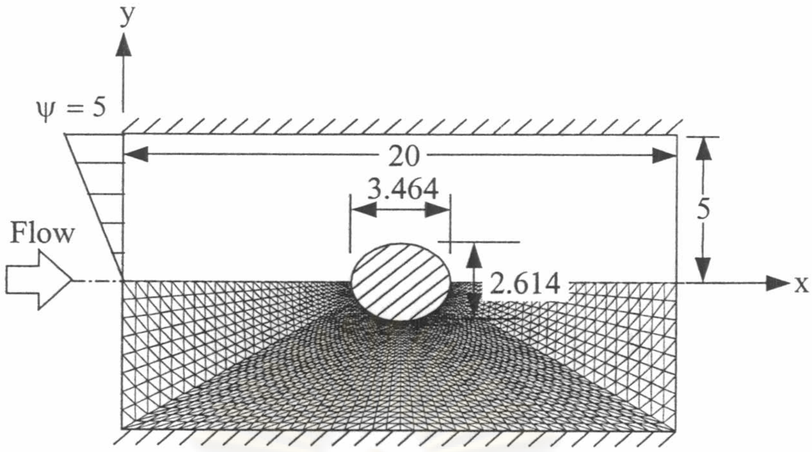
จากรูปที่ 5.9 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 3 มิติ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ รอบท่อทรงกระบอกที่ระดับความสูง (z) เท่ากับ 0 โดยมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 2.32% และจากการเปรียบเทียบความเร็วสูงสุดที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 3 มิติที่ระดับความสูง (z) เท่ากับ 0 โดยมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 0.85%



รูปที่ 5.9 การเปรียบเทียบการกระจายฟังก์ชันศักย์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรง รอบท่อทรงกระบอกของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 3 มิติ

5.3 การไหลผ่านทรงกระบอกรูปวงรี [3, 13]

ปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีเป็นอีกปัญหาหนึ่งที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมการวิเคราะห์การไหลแบบศักย์ ลักษณะของปัญหาจะมีการไหลแบบคงตัวไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของขอบเขตของปัญหา โดยมีท่อทรงกระบอกรูปวงรียาวขวางการไหลไว้ดังรูปที่ 5.10 เนื่องจากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบศักย์ผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นมีความสมมาตรตามแนวแกน x ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาโดยใช้เพียงครึ่งบนของขอบเขตทั้งหมด โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 1,767 จุดต่อและ 3,360 เอลิเมนต์ และมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตลอดแนว y เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันการไหลเท่ากับ 0 และตลอดแนว y เท่ากับ 5 มีค่าฟังก์ชันการไหลเท่ากับ 5 หรือที่ตลอดแนว x เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ 10 และตลอดแนว x เท่ากับ 20 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ –10 ซึ่งเป็นผลให้ความเร็วของของไหลในแนวแกน x (U_∞) ที่ไหลผ่านท่อทรงกระบอกดังกล่าวจะเท่ากับ 1

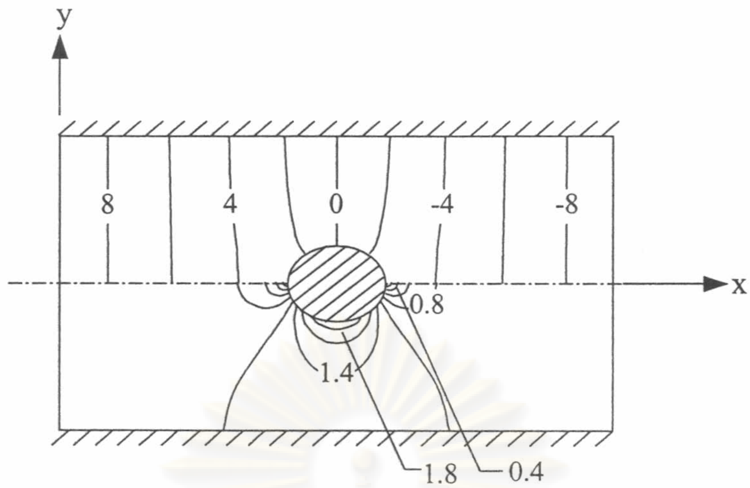


รูปที่ 5.10 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีใน 2 มิติ

โดยปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นตรงของความเร็วสูงสุดดังนี้

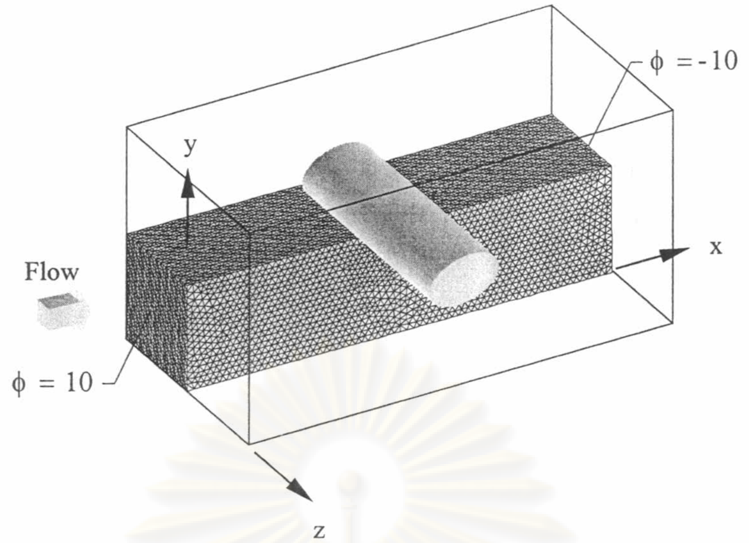
$$\frac{u_{max}}{U_\infty} = 1 + \frac{2/U_\infty}{1+h^2} \tag{5.6}$$

หากกำหนดให้ขนาดของวงรีมีขนาดความยาวรัศมีของแกนหลัก (L) เท่ากับ 1.732 และมีขนาดความยาวรัศมีของแกนรอง (h) เท่ากับ 1.307 ซึ่งจะได้ค่าความเร็วสูงสุดจากผลเฉลยแม่นตรงเท่ากับ 1.739 จากการเปรียบเทียบความเร็วสูงสุด (u_{max}) ที่ได้จากการคำนวณดังรูปที่ 5.11 กับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 0.23%



รูปที่ 5.11 การกระจายฟังก์ชันศักย์และความเร็วสำหรับการไหลผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีใน 2 มิติ

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีแบบศักย์ใน 3 มิตินั้นได้มีลักษณะของปัญหาเหมือนกับการวิเคราะห์ใน 2 มิติแต่ลักษณะของปัญหาจะเพิ่มความสูงในแนวแกน z ขนาดเท่ากับ 10 เนื่องจากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบศักย์ผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ใน 3 มิตินั้นมีความสมมาตรบนระนาบ x-y เมื่อ z เท่ากับ 0 และระนาบ x-z เมื่อ y เท่ากับ 5 ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาโดยใช้เพียงหนึ่งในสี่ของขอบเขตทั้งหมด โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 16,306 จุดต่อและ 76,419 เอลิเมนต์ และมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตลอดระนาบ y-z เมื่อ x เท่ากับ 0 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ 10 และตลอดระนาบ y-z เมื่อ x เท่ากับ 20 มีค่าฟังก์ชันศักย์เท่ากับ –10 ซึ่งเป็นผลให้ความเร็วของของไหลในแนวแกน x (U_∞) ที่ไหลผ่านท่อทรงกระบอกดังกล่าวจะเท่ากับ 1 ดังรูป 5.12



รูปที่ 5.12 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกรูปวงรีใน 3 มิติ

จากการเปรียบเทียบความเร็วสูงสุดที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกใน 3 มิติที่ระดับความสูง (z) เท่ากับ 0 โดยมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 1.55%

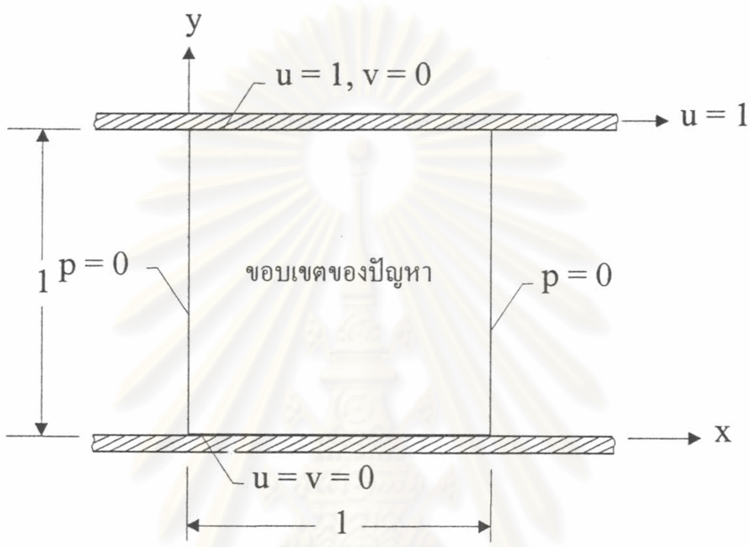
5.4 การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความหนืด [3, 6]

เป็นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยแต่ไม่อัดตัวระหว่างแผ่นเรียบ 2 แผ่น การไหลเกิดขึ้นจากความหนืดเนื่องจากแผ่นบนเคลื่อนที่ไปทางขวามือตามแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับ 1 ในขณะที่แผ่นล่างนั้นถูกตรึงให้อยู่กับที่ และกำหนดระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ 1 เมื่อพิจารณาลักษณะการไหลให้เป็นการไหลแบบหนึ่งมิติ และมีเงื่อนไขขอบเขต คือ กำหนดให้ $u = u(y)$ และ $v = 0$ รวมทั้งกำหนดค่าความดัน $p = 0$ ตลอดแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ เป็นผลทำให้สมการนาเวียร์-สโตกส์ในแกน x จะลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.7)$$

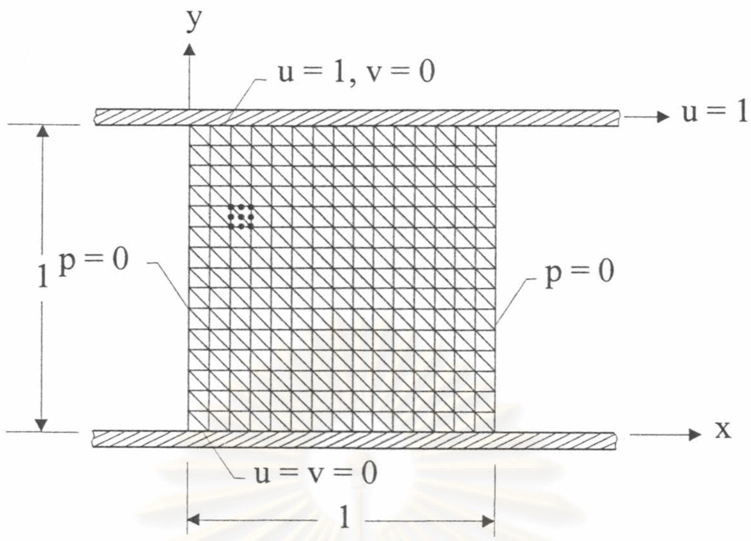
จากนั้นทำการอินทิเกรตสองครั้งและประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต u(y=0) = 0 และ u(y=1) = 1 แล้วก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นตรงของลักษณะการกระจายของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ ดังนี้

$$u(y) \quad = \quad y \tag{5.8}$$

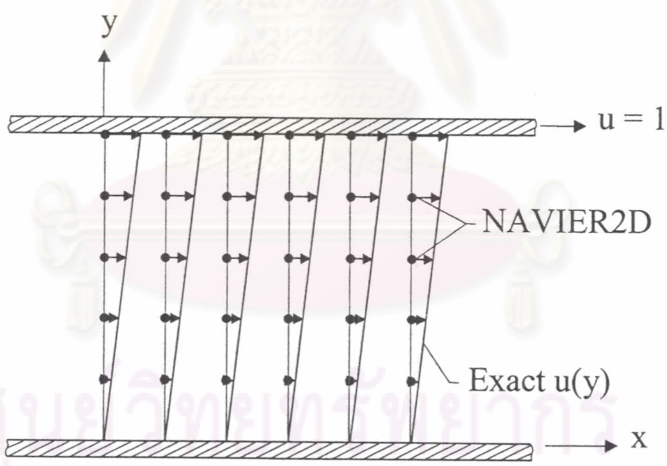


รูปที่ 5.13 ปัญหาการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยระหว่างแผ่นคู่ขนาน

ปัญหาดังกล่าวถูกไปนำวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER2D โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังรูปที่ 5.14 ซึ่งประกอบด้วย 961 จุดต่อ และ 450 เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ความเร็ว u = 1 และ v = 0 ที่จุดต่อตลอดขอบด้านบนของปัญหา ส่วนตลอดด้านล่างกำหนดให้มีความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ และกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดของในแนวดิ่งทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 5.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด
โดยรวมความเฉื่อยระหว่างแผ่นคู่ขนาน



รูปที่ 5.15 ความเร็วที่จุดต่อที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

จากการเปรียบเทียบค่าความเร็วที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม NAVIER2D กับผลเฉลยแม่นตรง จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ

5.5 ปัญหาการไหลในท่อสำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย [14]

เป็นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยแต่ไม่อัดตัวภายในท่อ ซึ่งลักษณะของปัญหาดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 5.16 โดยขนาดของท่อมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 2 และมีความยาวเท่ากับ 3 โดยจะกำหนดความเร็ว $u = u(y)$ ในรูปแบบของการกระจายแบบพาราโบลา (parabola) ที่บริเวณขาเข้าของท่อ โดยมีความเร็วสูงสุดเท่ากับหนึ่งที่เส้นผ่าศูนย์กลางท่อ ผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายของความเร็ว สำหรับปัญหานี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้หากพิจารณาการไหลให้เป็นการไหลแบบหนึ่งมิติในแนวแกน x โดย $u = u(y)$ ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ รวมทั้งกำหนดให้ $v = 0$ ซึ่งจะพบว่าเมื่อใช้ข้อสมมุติฐานดังกล่าวแทนลงในสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งแนวแกน x และ y จะได้สมการใหม่เพื่อใช้หาผลเฉลยแม่นตรงดังนี้

สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x คือ

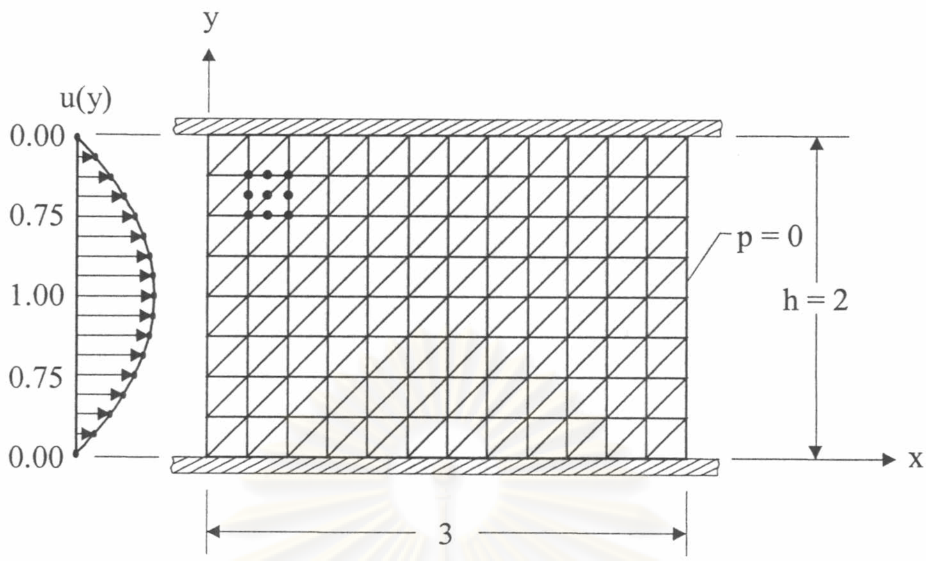
$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{5.9}$$

สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y คือ

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{5.10}$$

ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตสมการ (5.9) สองครั้งแล้วประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต $u(y=0) = u(y=h) = 0$ แล้ว ลักษณะการกระจายของความเร็ว $u(y)$ คือ

$$u(y) = \frac{y}{2\mu}(y - h)\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.11}$$



รูปที่ 5.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลในท่อ

หากกำหนดเงื่อนไขการไหลเข้าแบบเต็มรูปแบบ (fully developed flow) ที่มีการกระจายของความเร็วแบบพาราโบลาดังแสดงในรูปที่ 5.16 ซึ่งคือ

$$u(y) \quad = \quad \frac{4y}{h^2}(h - y) \qquad (5.12)$$

และเนื่องจากอัตราการไหลของมวลจำเป็นต้องต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\int_0^h \frac{4y}{h^2}(h - y)\,dy \quad = \quad \int_0^h \frac{y}{2\mu}(y - h)\frac{\partial p}{\partial x}\,dy \qquad (5.13)$$

ซึ่งหลังจากทำการอินทิเกรตแล้ว จะได้

$$\frac{\partial p}{\partial x} \quad = \quad -\frac{8\mu}{h^2} \qquad (5.14)$$

โดยกำหนดให้ค่า $h = 2$ และ $\mu = 1$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2 \qquad (5.15)$$

และถ้าความดัน p ตลอดแนวทางออกที่ x = 3 มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นลักษณะการกระจายของความดันแม่นตรง p(x) ในแนวแกน x คือ

$$p(x) = 6 - 2x \qquad (5.16)$$

และลักษณะการกระจายของความเร็วแม่นตรง u(y) หลังจากแทนสมการ (5.14) ลงในสมการ (5.11) คือ

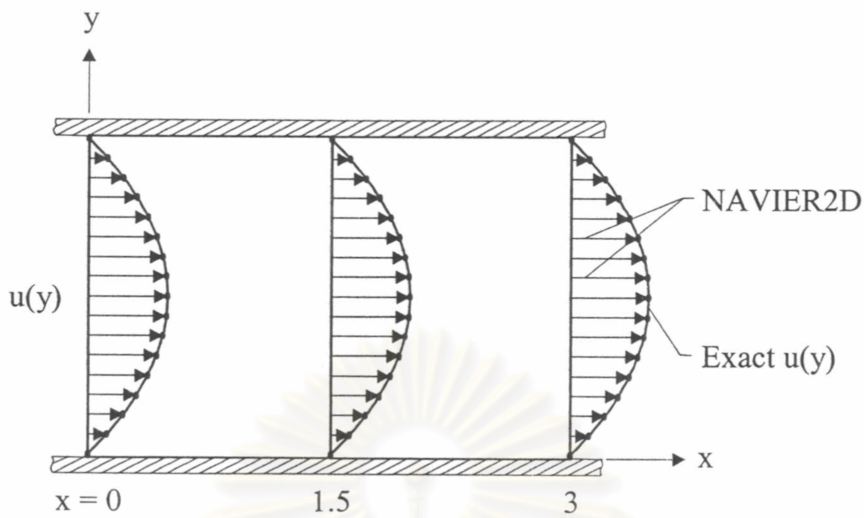
$$u(y) = \frac{4y}{h^2}(h - y) \qquad (5.17)$$

ซึ่งเท่ากับลักษณะการกระจายแบบเต็มรูปแบบตรงปากทางเข้าที่กำหนดให้ในสมการ (5.12) และสำหรับตัวอย่างนี้เมื่อค่า h = 2 ดังนั้น

$$u(y) = y(2 - y) \qquad (5.18)$$

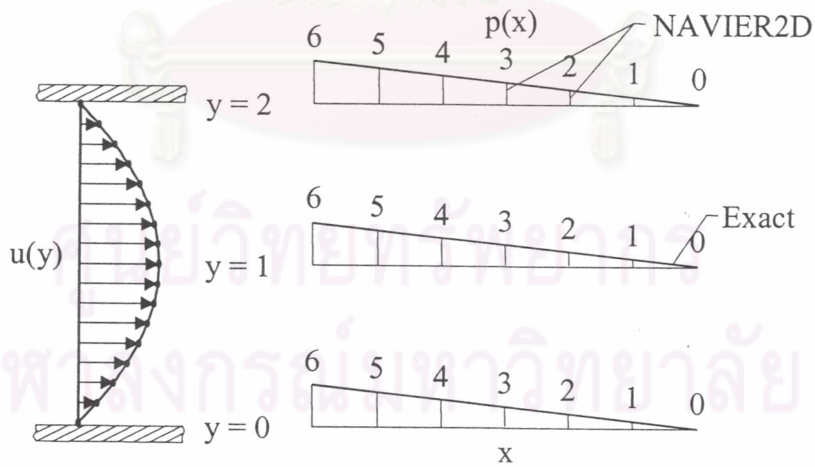
ปัญหาดังกล่าวได้ถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม NAVIER2D โดยที่แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมจำนวน 192 เอลิเมนต์ และ 425 จุดต่อ และได้มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังรูปที่ 5.16

รูปที่ 5.17 แสดงผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็ว u(y) ที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ กัน ซึ่งคำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER2D กับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง x = 0.0, 1.5 และ 3.0 จะเห็นได้ว่าค่าความเร็วที่คำนวณได้มีความถูกต้องแม่นยำทุก ๆ ตำแหน่งของค่า y



รูปที่ 5.17 ความเร็วที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง

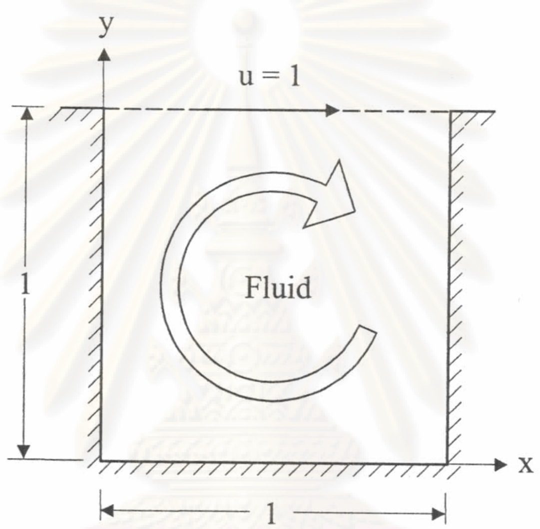
รูปที่ 5.18 แสดงลักษณะการกระจายของความดัน p(x) ที่ระดับ y = 0, 1 และ 2 ผลลัพธ์การกระจายของความดัน p(x) ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรงในสมการ (5.16)



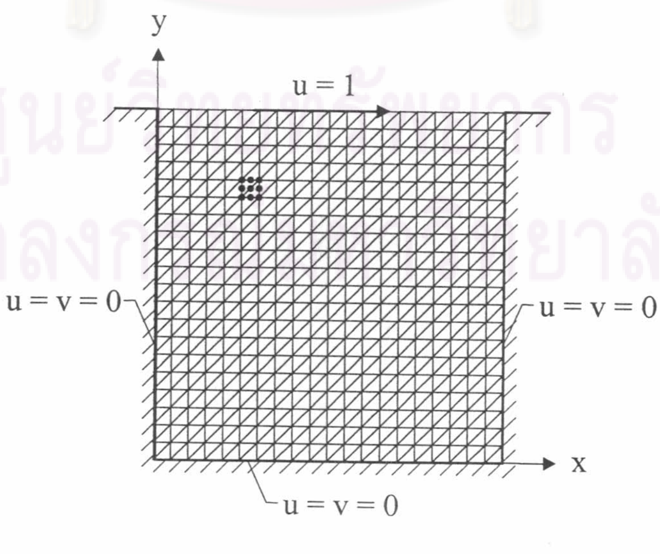
รูปที่ 5.18 การกระจายของความดันที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
ซึ่งมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง

5.6 การไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม

เป็นปัญหาการไหลหมุนวนแบบสองมิติในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1x1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 5.19 ในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสของปัญหานี้จะถูกบรรจุด้วยของเหลว โดยตลอดแนวขอบบนช่องว่างนี้ของเหลวถูกกำหนดให้เคลื่อนตัวด้วยความเร็ว u = 1 ไปในทิศทางขวามือ ส่วนอีกสามด้านที่เหลือนั้นกำหนดให้มีความเร็วในแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมจำนวน 800 เอลิเมนต์และ 1,681 จุดต่อ ดังรูปที่ 5.20

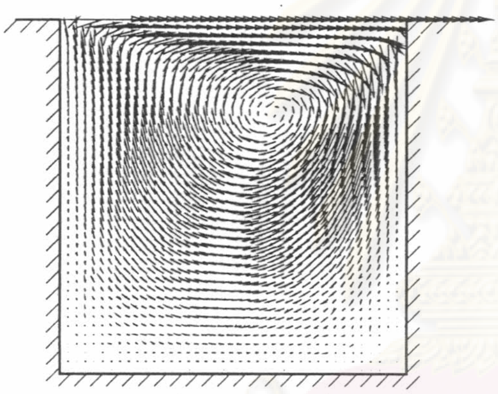


รูปที่ 5.19 ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม

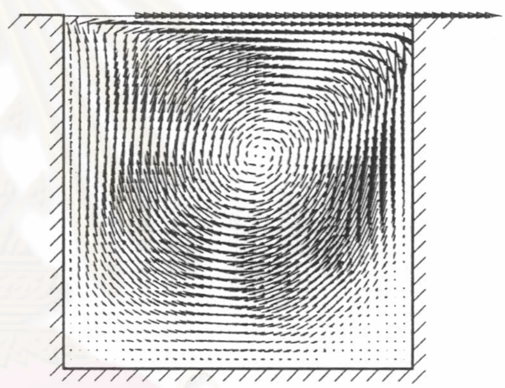


รูปที่ 5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขต

สำหรับการไหลในกรณีแรกจะกำหนดให้ค่า Re = 100 โดยการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER2D พร้อมข้อมูลนำเข้าซึ่งประกอบด้วย ρ = 100 และ u = L = μ = 1 สำหรับการไหลในกรณีที่สองจะกำหนดให้ค่า Re = 400 โดยเปลี่ยนค่า ρ จากค่าเท่ากับ 100 ให้เป็น 400 ส่วนเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 กรณีประกอบด้วยการกำหนดให้ u = v = 0 ทุก ๆ จุดต่อบนผนังของช่องสี่เหลี่ยม และ u = 1, v = 0 ทุกจุดต่อตลอดขอบบนของของเหลวในช่องสี่เหลี่ยมนี้ และกำหนดความดัน p = 0 ที่จุดต่อที่ x =0.5 และ y = 0 เพื่อใช้เป็นความดันอ้างอิงของทั้งปัญหา รูปที่ 5.21 แสดงลักษณะการกระจายของความเร็วที่จุดต่อต่าง ๆ ที่คำนวณได้ ที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ



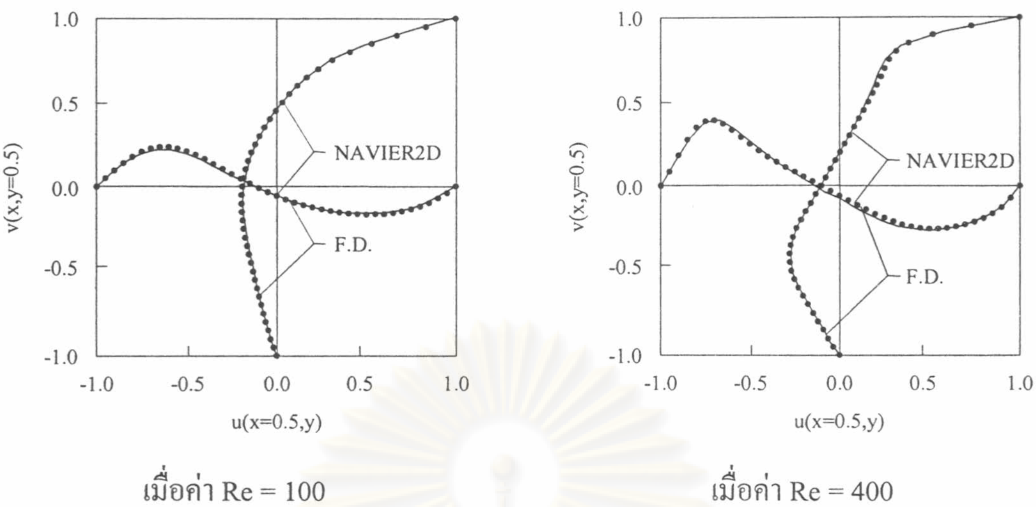
เมื่อค่า Re = 100



เมื่อค่า Re = 400

รูปที่ 5.21 เวกเตอร์ความเร็ว

จากรูปที่ 5.22 แสดงลักษณะการกระจายของความเร็ว u(y) ที่ตำแหน่ง x = 0.5 และความเร็ว v (x) ที่ตำแหน่ง y = 0.5 ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง [15, 16] จะเห็นได้ว่าการเปรียบเทียบดังกล่าวให้ผลการคำนวณที่มีความสอดคล้องกัน

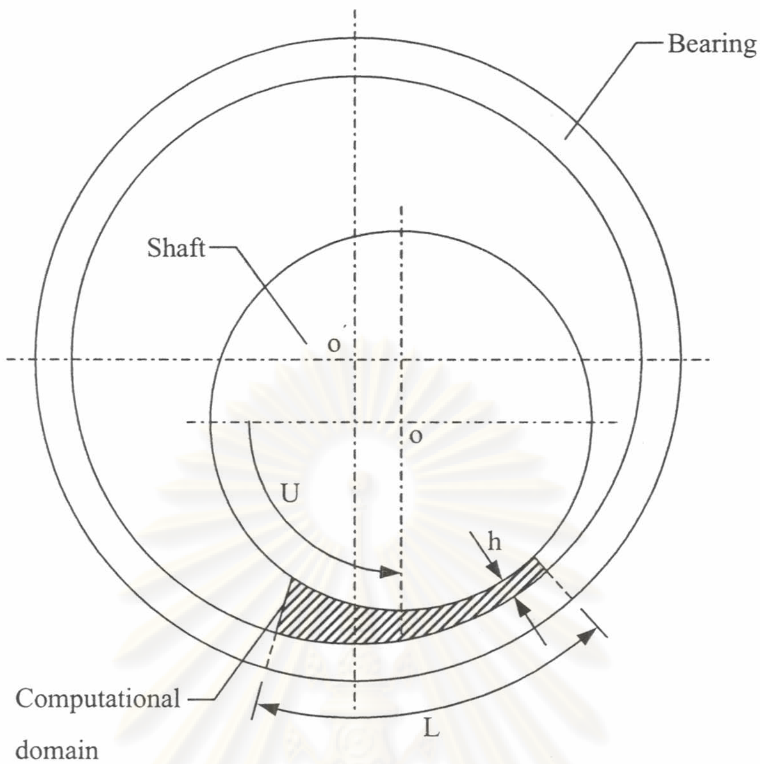


รูปที่ 5.22 การเปรียบเทียบความเร็วที่คำนวณได้กับผลลัพธ์จากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

5.7 การไหลระหว่างเพลากับแบริง

การไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบริงซึ่งน้ำมันจะทำหน้าที่หล่อลื่นหรือลดความเสียดทานระหว่างผิววัตถุที่มีการเคลื่อนที่สัมพันธ์กัน โดยมีกลไกการหล่อลื่นดังแสดงในรูปที่ 5.23 สำหรับปัญหาดังกล่าว ถ้าสมมติว่าระยะ L ของโดเมนการไหลในรูปที่ 5.23 ที่พิจารณานั้นมีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างเพลากับแบริงมากแล้ว ขอบโดเมนของเพลาและแบริงอาจสมมุติให้อยู่ในแนวตรงดังแสดงในรูปที่ 5.24 ได้ ซึ่งผลเฉลยแม่นตรง [4, 14] สำหรับความเร็ว u ของน้ำมันในแนวแกน x ในรูปนี้คือ

$$u(x, y) \quad = \quad \left(U_0 - \frac{1}{2\mu} h^2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{h}\right)\left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{5.19}$$

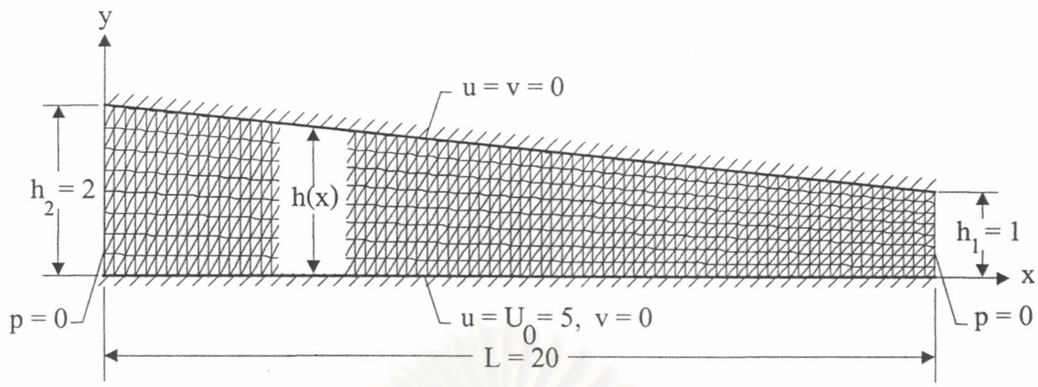


รูปที่ 5.23 โดเมนการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบริง

โดย $$h = h(x) = h_2 + (h_1 - h_2)\frac{x}{L} \tag{5.20}$$

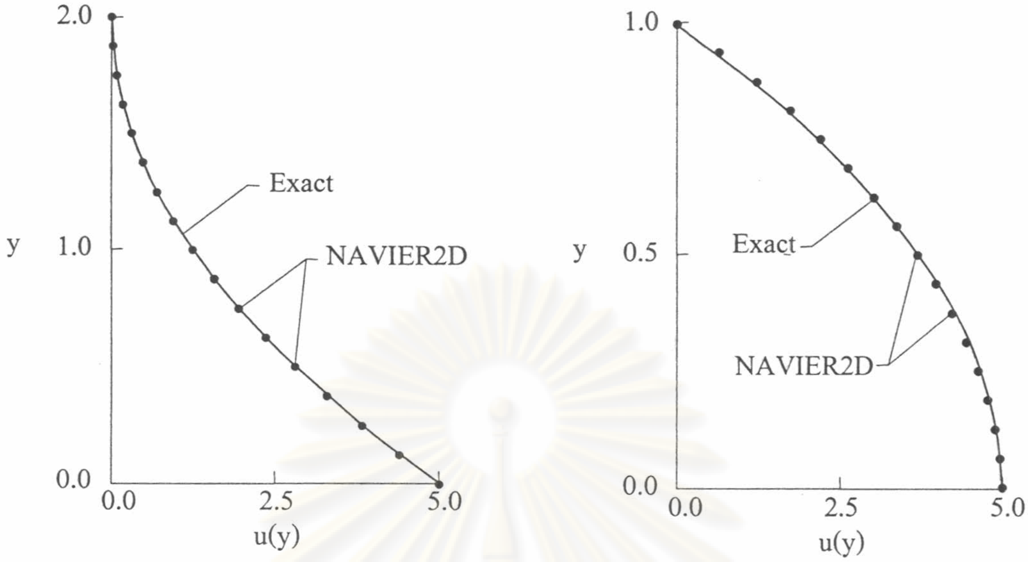
และ $$p = p(x) = \frac{6\mu L U_0 (h_2 - h)(h - h_1)}{h^2 (h_1^2 - h_2^2)} \tag{5.21}$$

จากรูปที่ 5.24 กำหนดขนาด $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $L = 20$, $\mu = 2$ และ $U_0 = 5$ ซึ่งนำไปสู่ผลเฉลยแม่นตรงของความเร็ว u และความดัน p ตามสมการ (5.19) และ (5.21) ตามลำดับ นอกจากนั้นรูปที่ 5.24 ยังได้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,280 เอลิเมนต์ และ 2,737 จุดต่อ



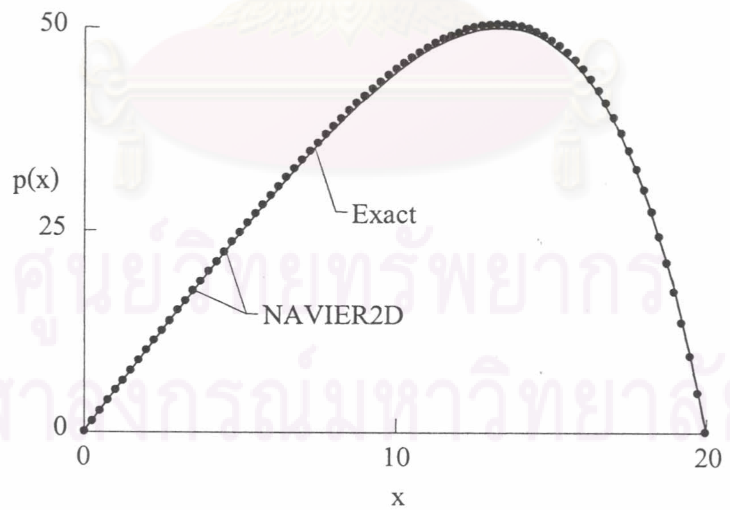
รูปที่ 5.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับ
โดเมนการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบริง
(ภาพแสดงสเกลที่ต่างกันในแนวแกน x และ y)

ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากการใช้โปรแกรม NAVIER2D ได้นำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ดังแสดงในรูปที่ 5.25 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบของความเร็ว u ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับผลเฉลยแม่นตรงตามแนวแกน y ตลอดขอบด้านซ้ายที่ x = 0 และตลอดขอบด้านขวาที่ x = L ของโดเมนการไหล โดยที่ค่าความผิดพลาดมีค่าเท่ากับ 0.53% และ 1.03% ตามลำดับ รูปที่ 5.26 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายของความดันที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรงในสมการ (5.21) ตลอดแนวการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบริง ซึ่งมีค่าความผิดพลาดมีค่าเท่ากับ 1.59%



(ก) ความเร็วที่ขอบด้านซ้าย (ข) ความเร็วที่ขอบด้านขวา

รูปที่ 5.25 การเปรียบเทียบความเร็วที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรง สำหรับปัญหาการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบริ่ง



รูปที่ 5.26 การเปรียบเทียบการกระจายของความดันที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรง ตลอดแนวการไหลของน้ำมันระหว่างเพลาและแบริ่ง