

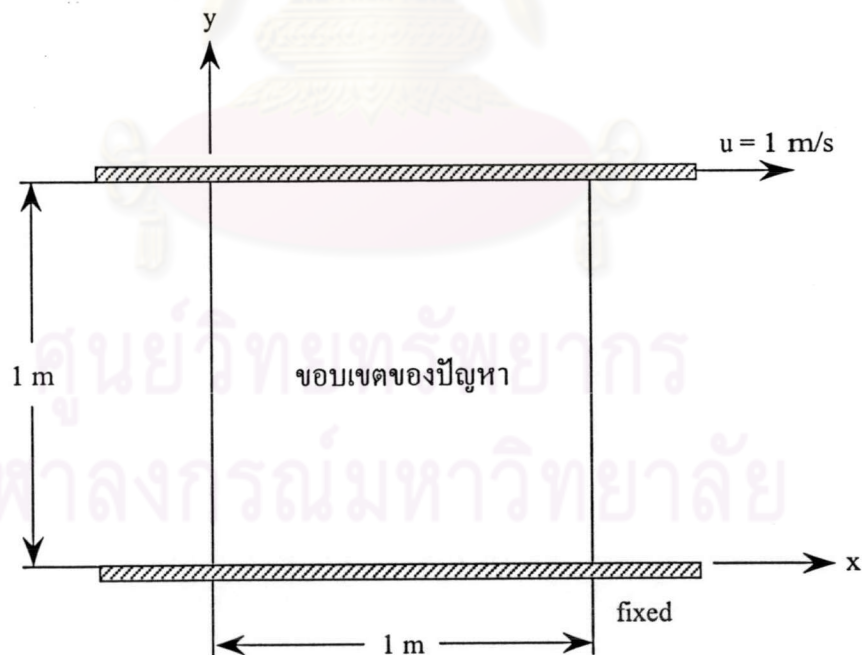
บทที่ 5

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

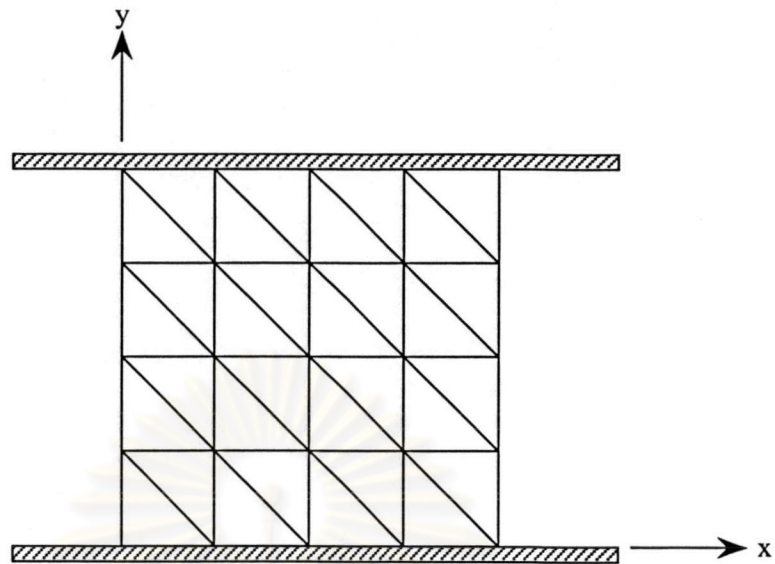
ในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำโปรแกรม NVNL มาวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดในสองมิติ ปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ประกอบด้วย 1. ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานอันเนื่องมาจากความหนืด (Couette flow) 2. ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว (developing flow) 3. ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบร์ริง 4. ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม (cavity flow) และ 5. ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (backward facing step)

5.1 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานอันเนื่องมาจากความหนืด (Couette flow)

ปัญหานี้เป็นการไหลระหว่างแผ่นเรียบ 2 แผ่นที่มีความเร็วแตกต่างกันดังรูปที่ 5.1 โดยที่แผ่นบนมีความเร็วในแนวแกน x เท่ากับ 1 m/s ในขณะที่แผ่นล่างอยู่นิ่ง และระยะห่างระหว่างคู่ขนานเท่ากับ 1 m



รูปที่ 5.1 ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน



รูปที่ 5.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของ
ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน

รูปแบบการกระจายของความเร็วยุ่สำหรับปัญหานี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ [14] โดยกำหนดให้ลักษณะของการไหลไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x ซึ่งจะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนต์ในแนวแกน x สามารถลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

หากทำการอินทิเกรตสมการ (5.1) สองครั้ง จะได้

$$u(y) = Ay + B \quad (5.2)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาดังต่อไปนี้

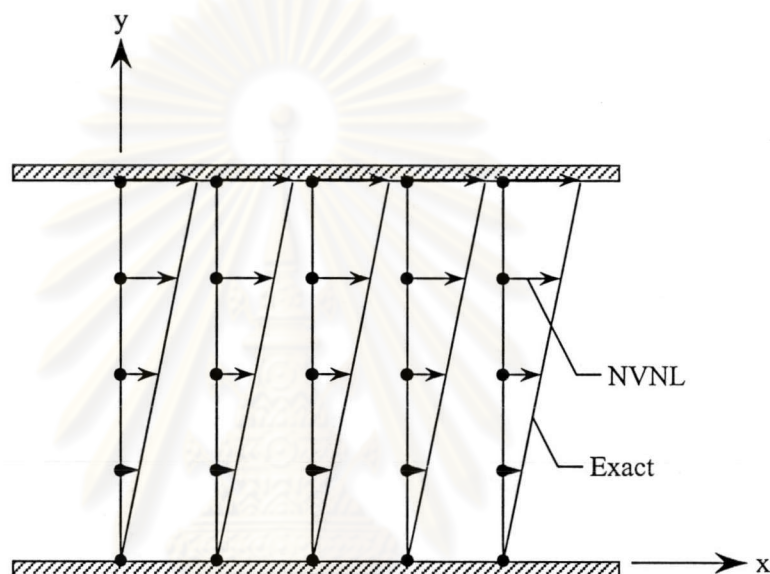
$$u(y=0) = 0 \quad (5.3ก)$$

และ
$$u(y=1) = 1 \quad (5.3ข)$$

ซึ่งจะได้ $A = 1$ และ $B = 0$ ดังนั้นผลเฉลยแม่นยำตรงของความเร็วในแนวแกน x ณ ตำแหน่ง y ใดๆ จะอยู่ในรูป

$$u(y) = y \quad (5.4)$$

เมื่อใช้โปรแกรม NVNL ทำการวิเคราะห์ปัญหานี้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง จะได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 5.3

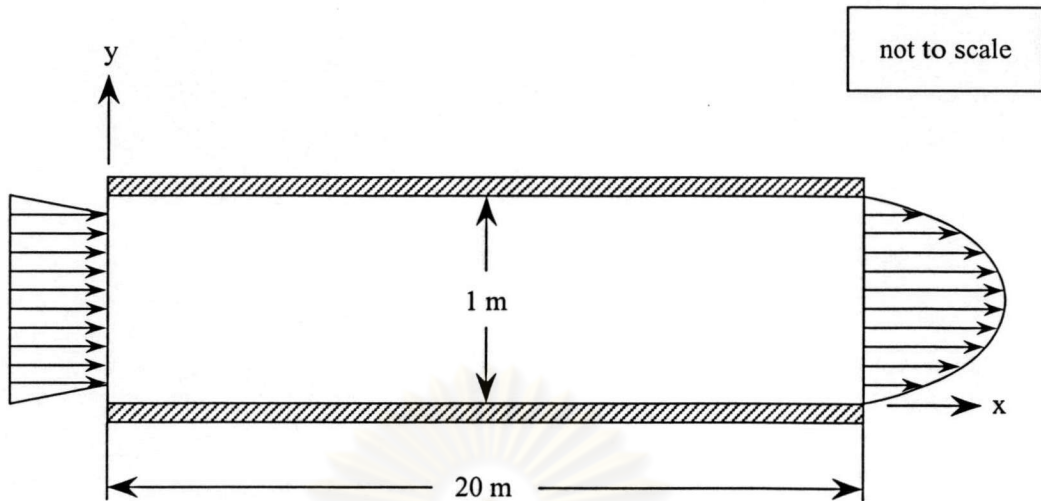


รูปที่ 5.3 ค่าความเร็วในแนวแกน x ที่ได้จาก
โปรแกรม NVNL กับผลเฉลยแม่นยำตรง

5.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว (developing flow)

ปัญหานี้จะพิจารณาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน โดยกำหนดให้บริเวณขอบด้านซ้ายมือ นั้น ของไหลมีลักษณะคงตัว (uniform) ในขณะที่ขอบทางขวามือ ของไหลมีการพัฒนาเต็มรูปแบบ (fully developed) ซึ่งรูปร่างลักษณะของปัญหานี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.4

ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สามารถทำได้โดยวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวด้วยโปรแกรม NVNL แล้วเปรียบเทียบผลที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นยำตรง



รูปที่ 5.4 ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

สมมติฐานที่ใช้ในการหาผลเฉลยแม่นยำมีดังต่อไปนี้

1. ของไหลที่พิจารณาคือของไหลแบบอัดตัวไม่ได้
2. เป็นการไหลแบบราบเรียบใน 2 มิติ
3. เป็นการไหลภายใต้สถานะอยู่ตัว
4. การไหลเข้าสู่การพัฒนาเต็มรูปแบบแล้ว

เมื่อพิจารณาที่ขอบด้านขวามือ จากสมการเชิงอนุพันธ์มวล

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

ของไหลที่ใช้เป็นแบบอัดตัวไม่ได้ ทำให้สามารถลดรูปสมการด้านบนมาเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

และเนื่องจากเป็นการไหลที่มีการพัฒนาเต็มรูปแบบแล้ว จะได้ว่า $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

ดังนั้น

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.5)$$

ซึ่งหมายความว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว v ตลอดแนวแกน y และเนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง ซึ่งความเร็ว v มีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สรุปได้ว่าค่าความเร็ว v มีค่าเป็นศูนย์ตลอดขอบด้านขวามือ

จากสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมในแนวแกน x

$$\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.6)$$

อินทิเกรตสมการ (5.6) สองครั้ง ทำให้ได้

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad (5.7)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านบนและด้านล่าง

$$y = 0, u = 0$$

จะได้ว่า $C_1 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$ และ $C_2 = 0$

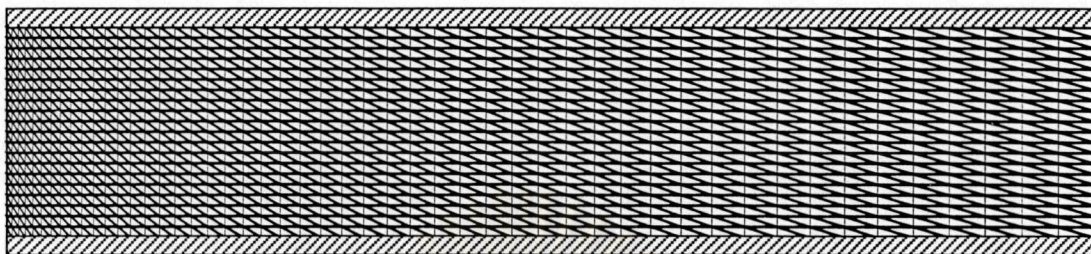
และผลเฉลยแม่นยำตรงของความเร็วในแนวแกน x ที่ตำแหน่ง y ใดๆ จะอยู่ในรูป

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - y) \quad (5.8)$$

ในการวิเคราะห์ปัญหา จะเริ่มจากแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งประกอบไปด้วย 1071 จุดต่อและ 2000 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.5

จากนั้นทำการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาโดยใช้โปรแกรม NVNL ซึ่งจะได้ลักษณะการกระจายตัวของความดันดังรูปที่ 5.6

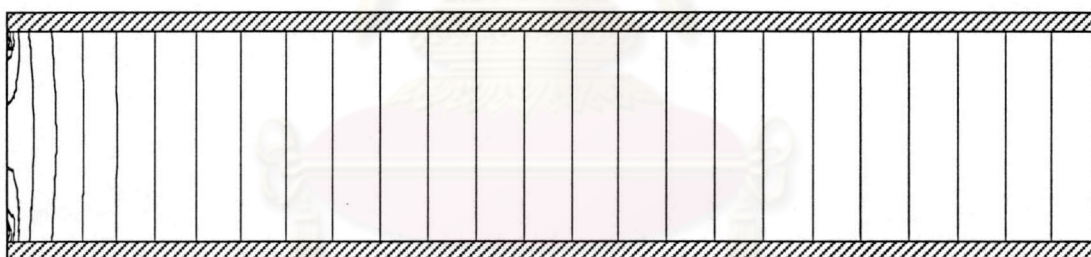
not to scale



รูปที่ 5.5 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของ
ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

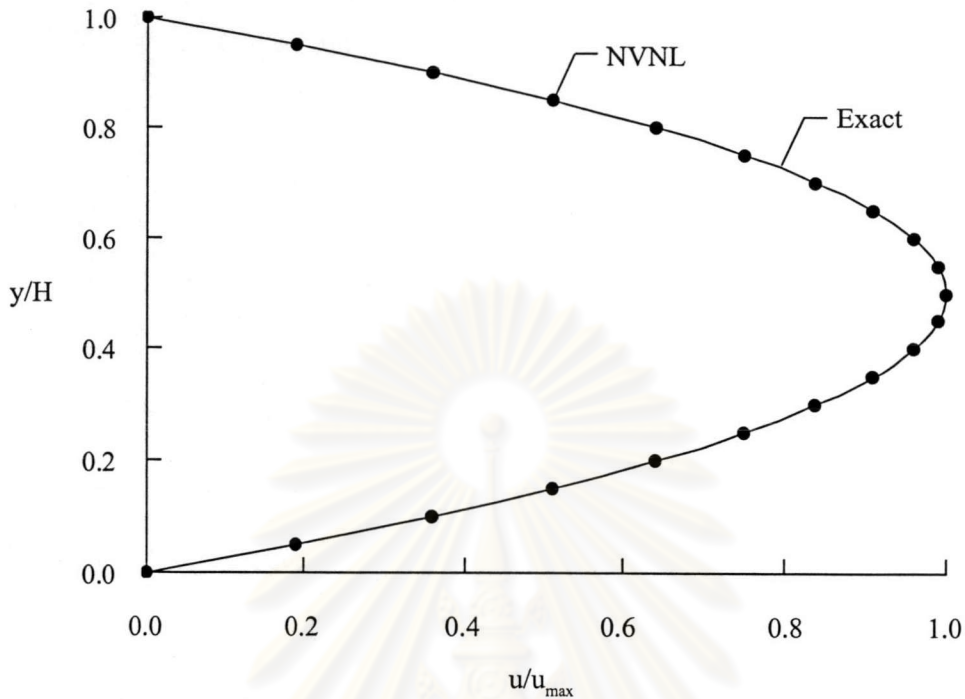
เมื่อทำการเปรียบเทียบความเร็วที่ขอบทางออกด้านขวามือกับผลเฉลยแม่นยำตรง จะ
ได้ผลลัพธ์ดังที่แสดงในรูปที่ 5.7

not to scale



รูปที่ 5.6 ลักษณะการกระจายตัวของความดันสำหรับปัญหา
การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

จากรูปที่ 5.7 จะเห็นได้ว่าค่าความเร็วที่คำนวณได้จากโปรแกรม NVNL มีความ
สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง นอกจากนั้น เมื่อทำการคำนวณหาอัตราการไหลของของไหล พบว่า
ที่ขอบทางเข้าด้านซ้ายมือ อัตราการไหลของของไหลมีค่าเท่ากับ $0.95 \text{ m}^3/\text{s}$ และที่ขอบทางออกด้าน
ขวามือมีอัตราการไหลเท่ากับ $0.949533 \text{ m}^3/\text{s}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า โปรแกรม NVNL ที่ประดิษฐ์ขึ้น
สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวล



รูปที่ 5.7 ความเร็วที่ขอบทางออกด้านขวามีระหว่างผลที่ได้
จากโปรแกรม NVNL กับผลเฉลยแม่นยำตรง

5.3 ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบร์ริง

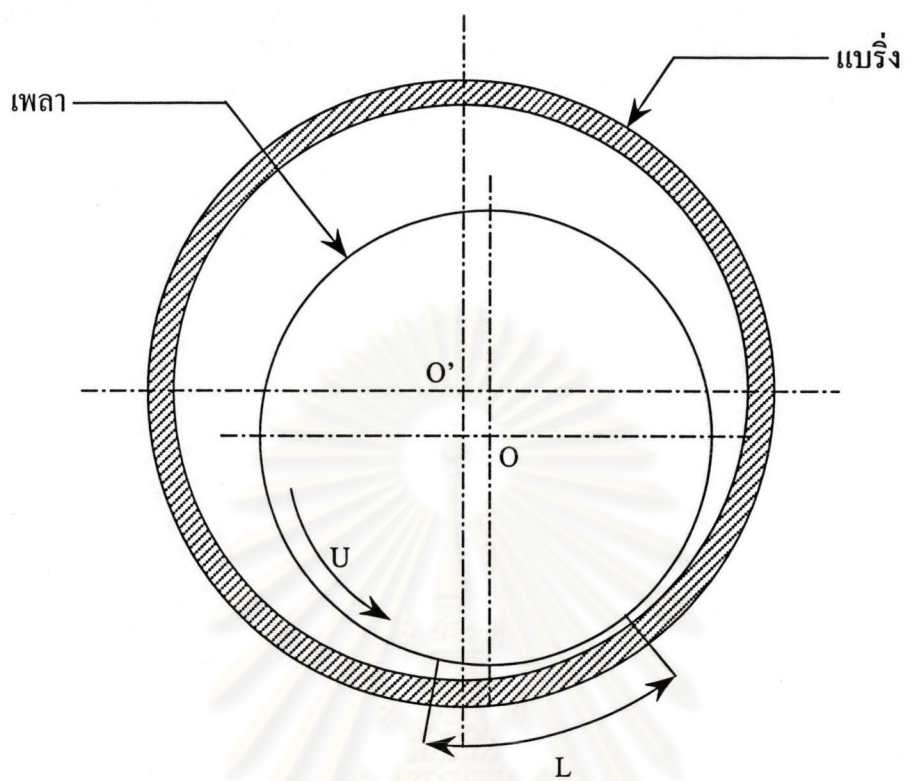
ปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบร์ริงดังแสดงในรูปที่ 5.8 หากระยะ L ของโดเมนของปัญหาการไหลในรูปที่ 5.8 นั้นมีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างเพลากับแบร์ริงมากแล้ว อาจสมมุติให้ขอบเขตของปัญหาเป็นเส้นตรงได้ดังรูปที่ 5.9 ซึ่งผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับความเร็วในแนวแกน x ของน้ำมันสำหรับปัญหานี้ [15] คือ

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + U \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (5.9)$$

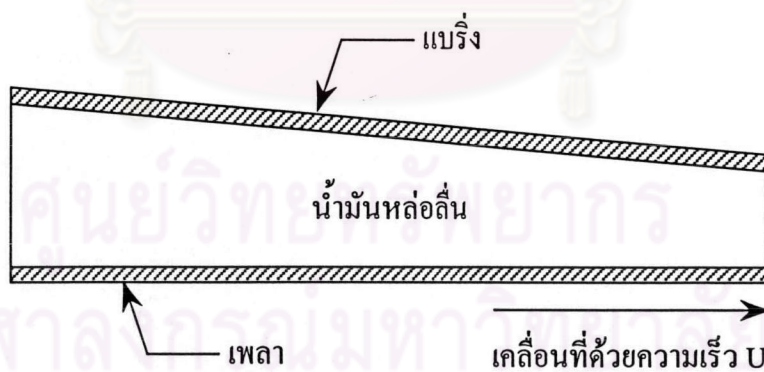
โดยที่
$$h = h_0 + (h_L - h_0) \frac{x}{L} \quad (5.10)$$

และผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับความดันของปัญหานี้ คือ

$$\frac{p}{\mu UL/h_0^2} = \frac{6(x/L)(1-x/L)(1-h_L/h_0)}{(1+h_L/h_0)[1-(1-h_L/h_0)x/L]^2} \quad (5.11)$$

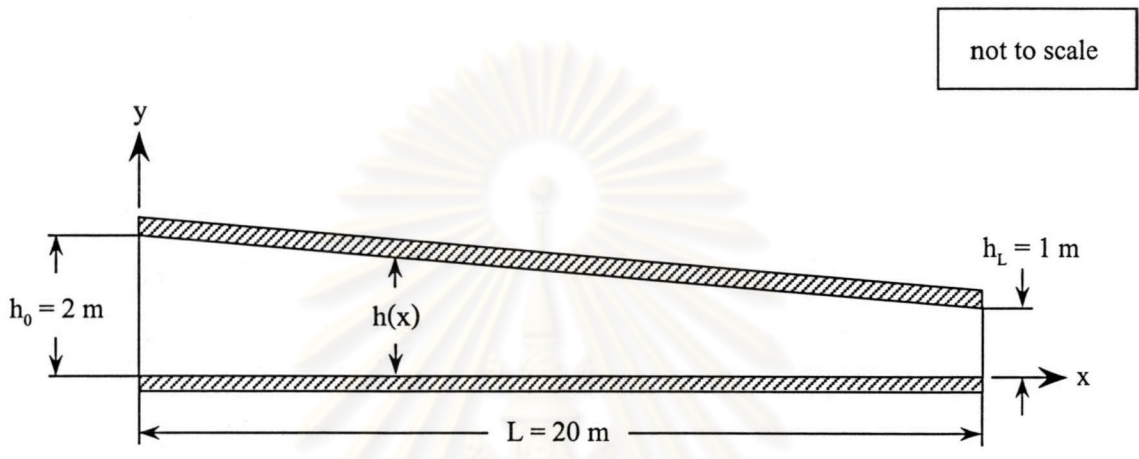


รูปที่ 5.8 ลักษณะของปัญหาการไหลของน้ำมันระหว่างเพลลากับแบร์ริง

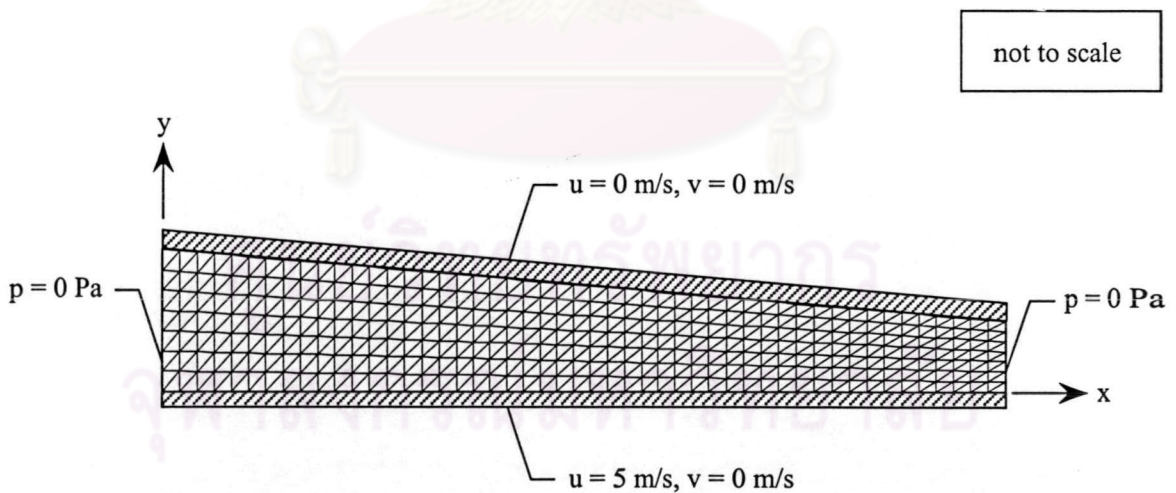


รูปที่ 5.9 รูปแบบจำลองของปัญหาการไหลของน้ำมันระหว่างเพลลากับแบร์ริง

ในการคำนวณ กำหนดให้ค่า $h_0 = 2 \text{ m}$, $h_L = 1 \text{ m}$, $L = 20 \text{ m}$, $\mu = 10 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ และให้ค่าความเร็ว $U = 5 \text{ m/s}$ ดังรูปที่ 5.10 จากนั้น ทำการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งประกอบไปด้วย 686 เอลิเมนต์และ 400 จุดต่อ ดังรูปที่ 5.11 โดยมีเงื่อนไขขอบเขตคือ ที่ขอบด้านซ้ายและขวา กำหนดให้ความดันมีค่าเป็น 0 Pa ที่ขอบด้านบน กำหนดให้ความเร็วมีค่าเป็น 0 m/s ส่วนที่ขอบด้านล่าง กำหนดให้มีความเร็วในแนวแกน x เท่ากับ 5 m/s

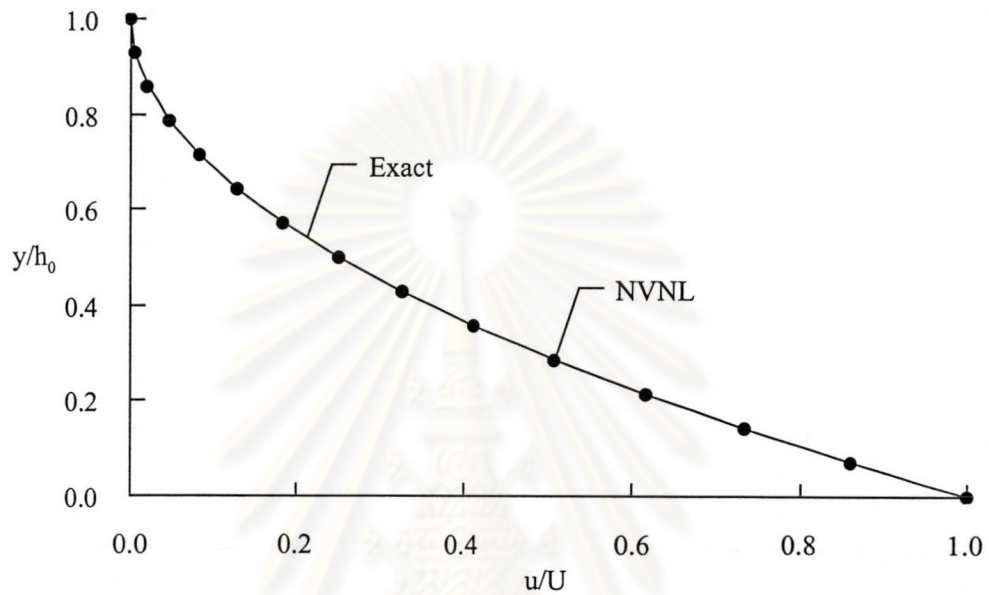


รูปที่ 5.10 ขอบเขตรูปร่างของปัญหาการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบร์ริง

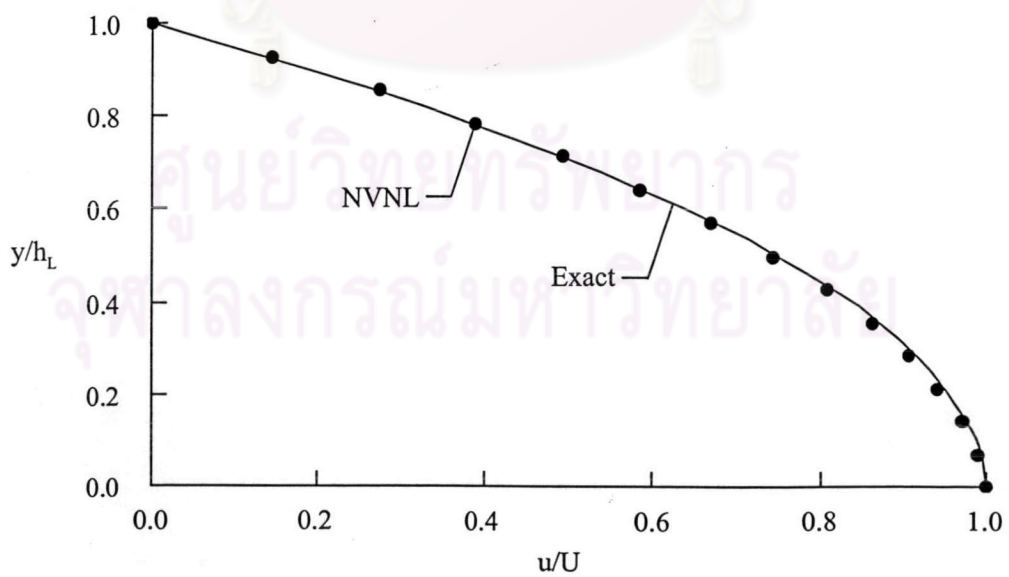


รูปที่ 5.11 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการไหลของน้ำมันระหว่างเพลากับแบร์ริง

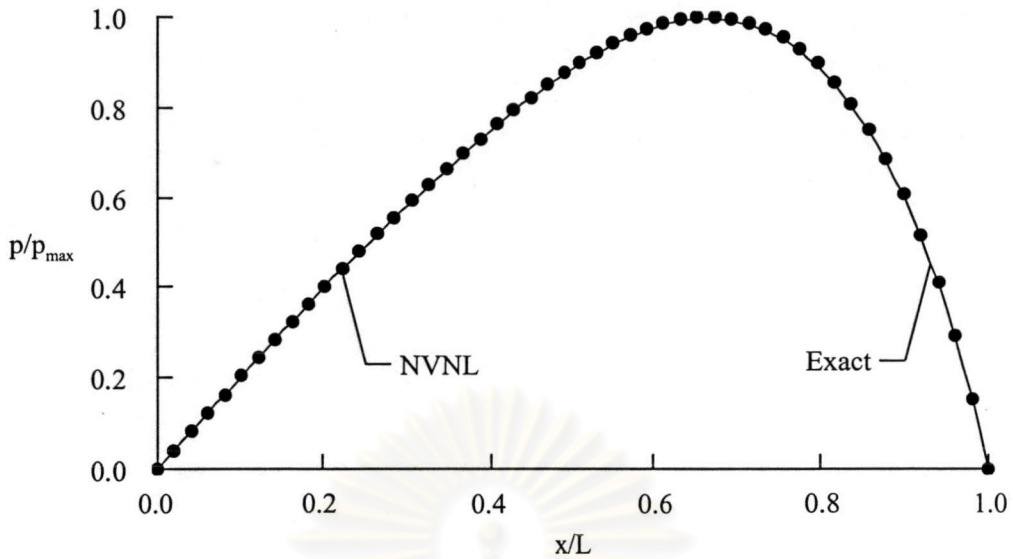
ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ โดยในรูปที่ 5.12 และ 5.13 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วในแนวแกน x ที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=L$ ตามลำดับ ส่วนในรูปที่ 5.14 แสดงการเปรียบเทียบค่าของความดันทำตำแหน่ง x ต่างๆ ซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำ



รูปที่ 5.12 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง $x=0$



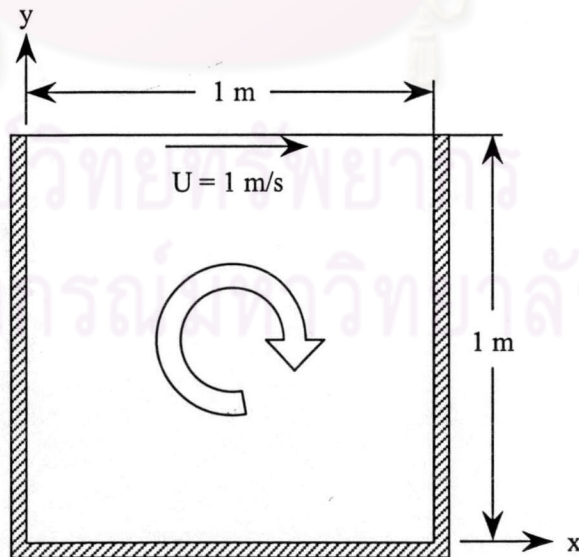
รูปที่ 5.13 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง $x=L$



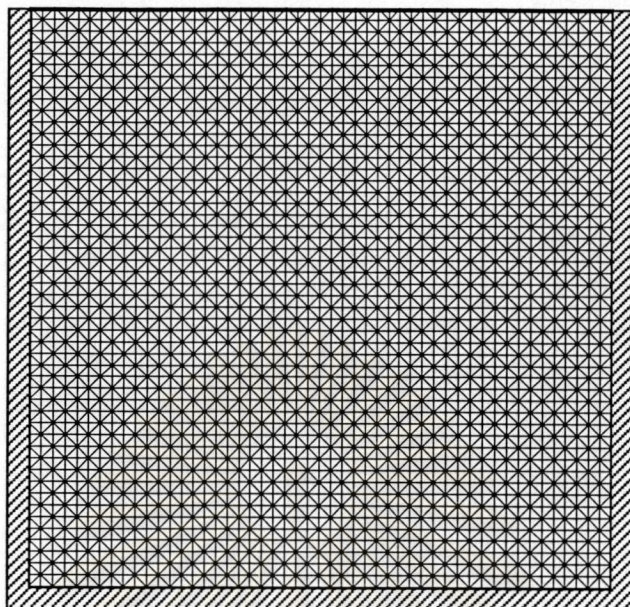
รูปที่ 5.14 ลักษณะการกระจายตัวของความดัน p

5.4 ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม (cavity flow)

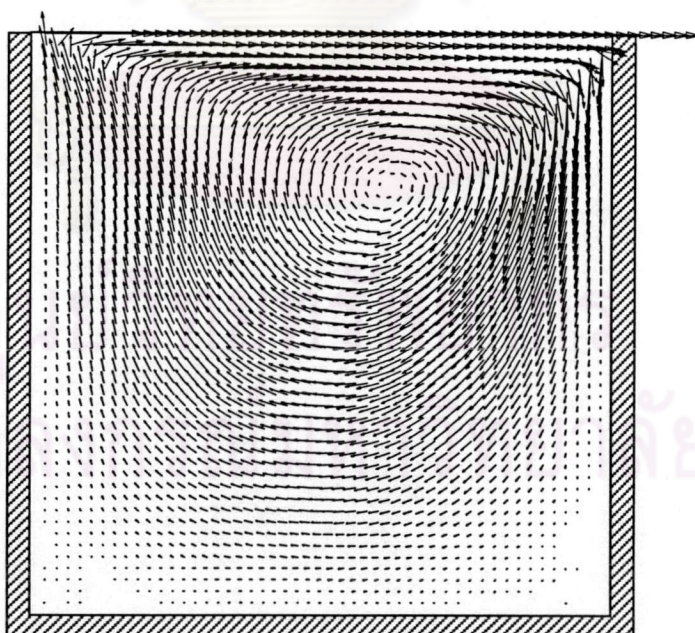
ปัญหานี้เป็นการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมซึ่งเกิดจากของไหลที่ขอบด้านบนมีการเคลื่อนที่ สำหรับปัญหานี้กำหนดให้รูปร่างของปัญหาเป็นช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดกว้าง 1 เมตร และยาว 1 เมตร โดยที่ความเร็วของของไหลที่ขอบด้านบนกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 m/s ลักษณะรูปร่างของปัญหาและรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.15 และ 5.16 ตามลำดับ



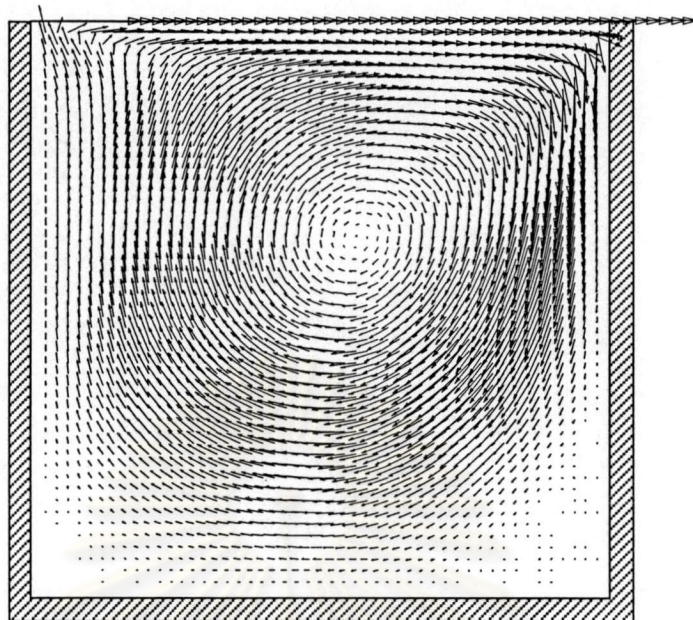
รูปที่ 5.15 ลักษณะของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม



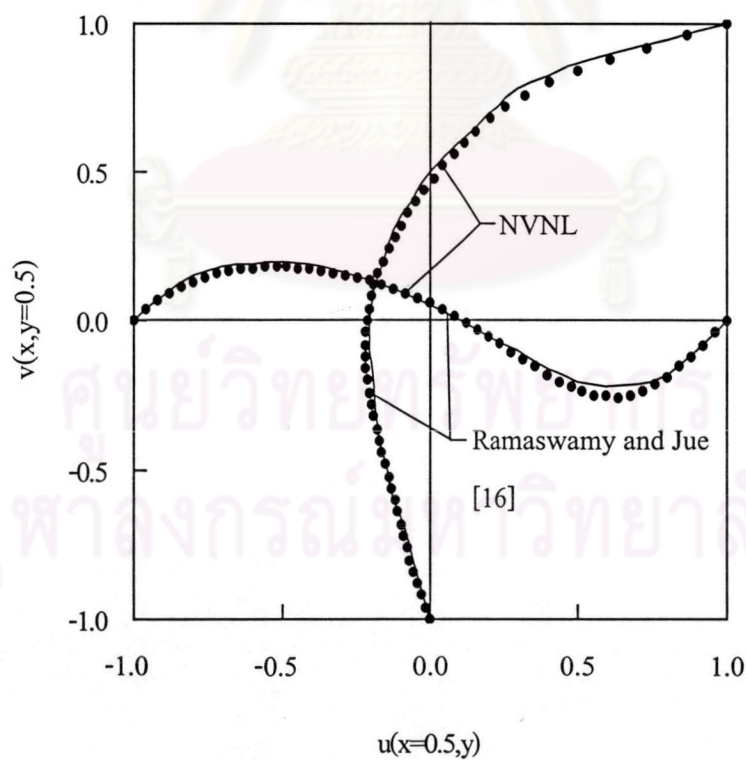
รูปที่ 5.16 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณ
ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม



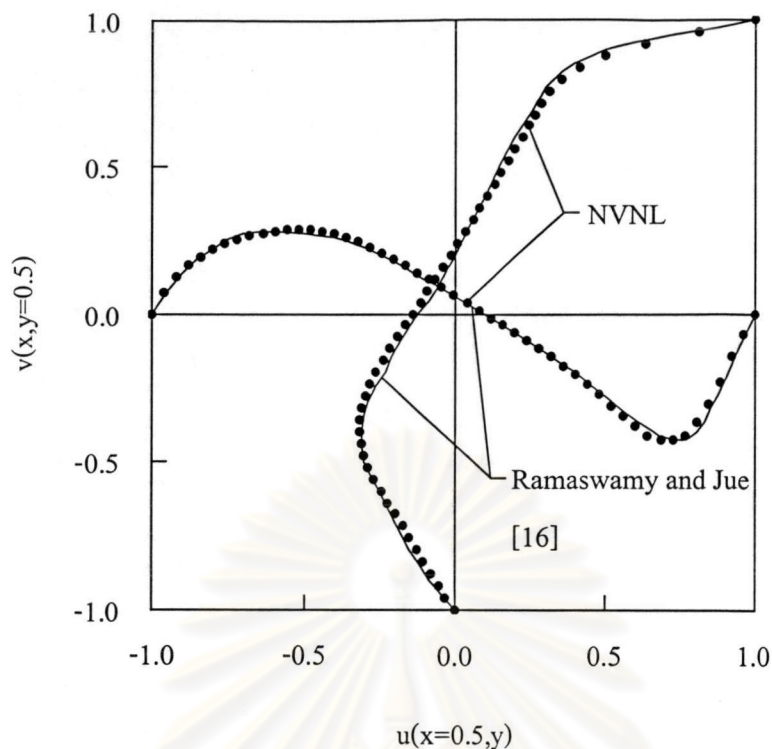
รูปที่ 5.17 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหล
หมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมเมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100



รูปที่ 5.18 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหล
หมวนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมเมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400



รูปที่ 5.19 ความเร็วที่หน้าตัด $x = 0.5$ และ $y = 0.5$ สำหรับปัญหาการไหล
หมวนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมเมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100



รูปที่ 5.20 ความเร็วที่หน้าตัด $x = 0.5$ และ $y = 0.5$ สำหรับปัญหาการไหล
หมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมเมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400

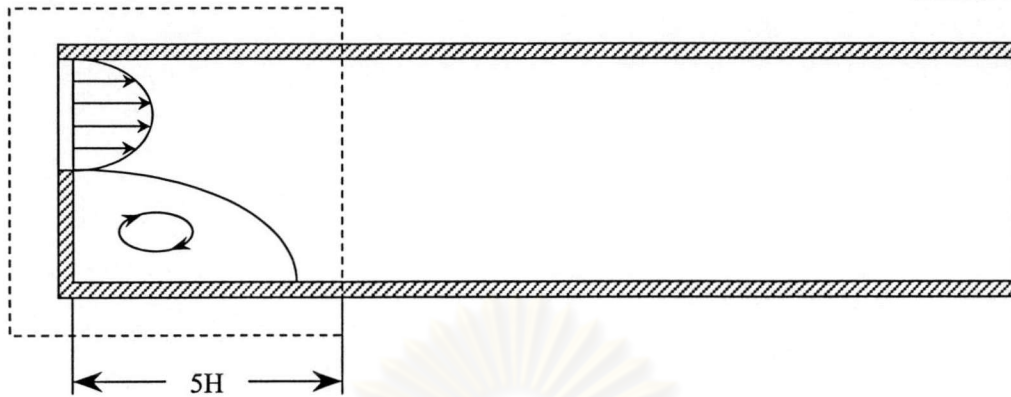
จากนั้นทำการเปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากโปรแกรม NVNL กับผลการคำนวณโดยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมในบทความของ Ramaswamy and Jue [16] ดังแสดงในรูปที่ 5.19 และ 5.20 ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้สอดคล้องกันทั้งสองกรณี

5.5 ปัญหาการไหลภายในช่องกุ่มานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (backward facing step)

ปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลผ่านช่องกุ่มานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างทันทีทันใด โดยของไหลที่มีการพัฒนาเต็มรูปแบบไหลเข้าทางขอบด้านซ้ายมือซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงขนาดของช่องกุ่มานอย่างทันทีทันใด ทำให้เกิดการไหลหมุนวนบริเวณด้านหลังของหน้าตัดที่มีการขยายตัวนั้น โดยได้แสดงลักษณะของปัญหานี้และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาไว้ในรูปที่ 5.21 และ 5.22 ตามลำดับ

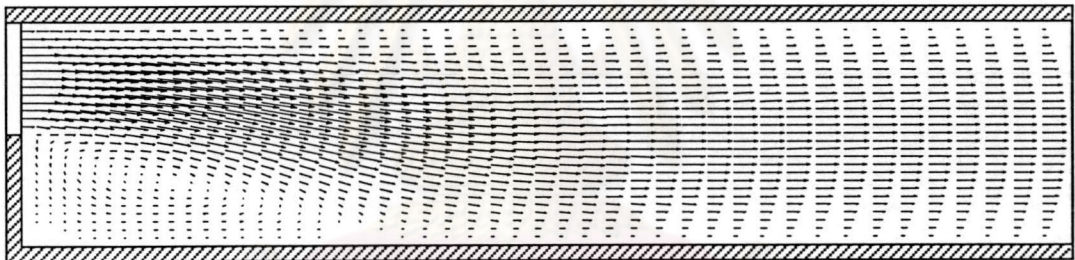
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณปัญหานี้ประกอบไปด้วย 2601 จุดต่อและ 5000 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5.23 โดยจะทำการคำนวณปัญหานี้ที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100, 150, 200, 250, 300, 350 และ 400 ซึ่งผลการคำนวณได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.25 – 5.28 สำหรับปัญหาการไหลที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100, 200, 300 และ 400 ตามลำดับ

not to scale



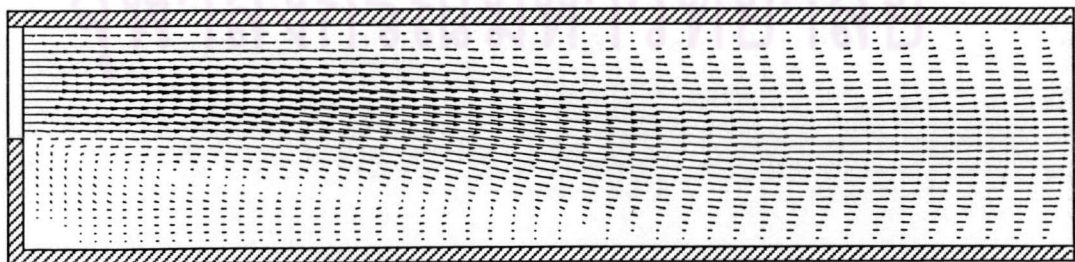
รูปที่ 5.24 บริเวณที่ทำการพิจารณาลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหา
การไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด

not to scale



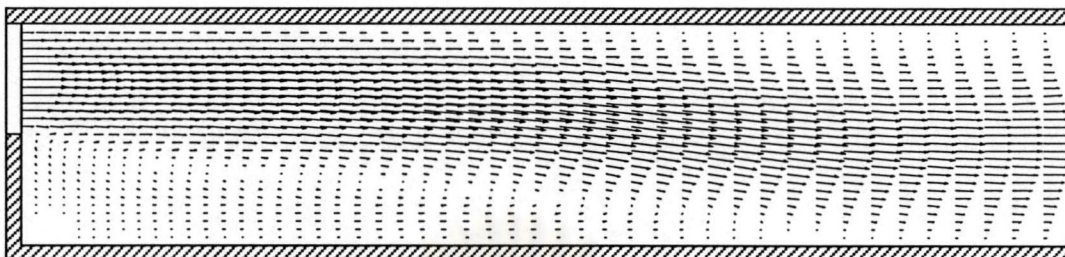
รูปที่ 5.25 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประ
ของรูปที่ 5.24 เมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100

not to scale



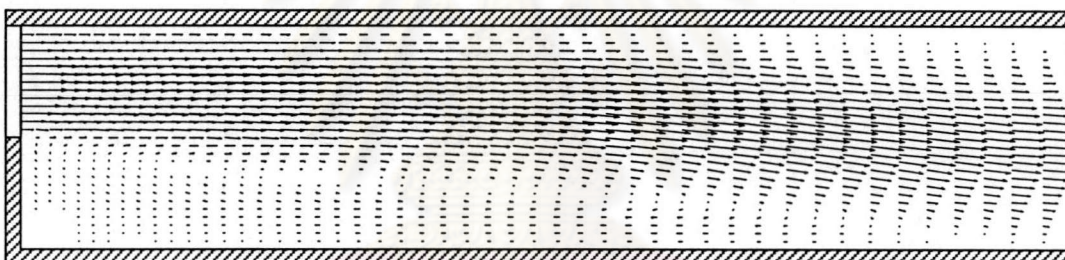
รูปที่ 5.26 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประ
ของรูปที่ 5.24 เมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 200

not to scale



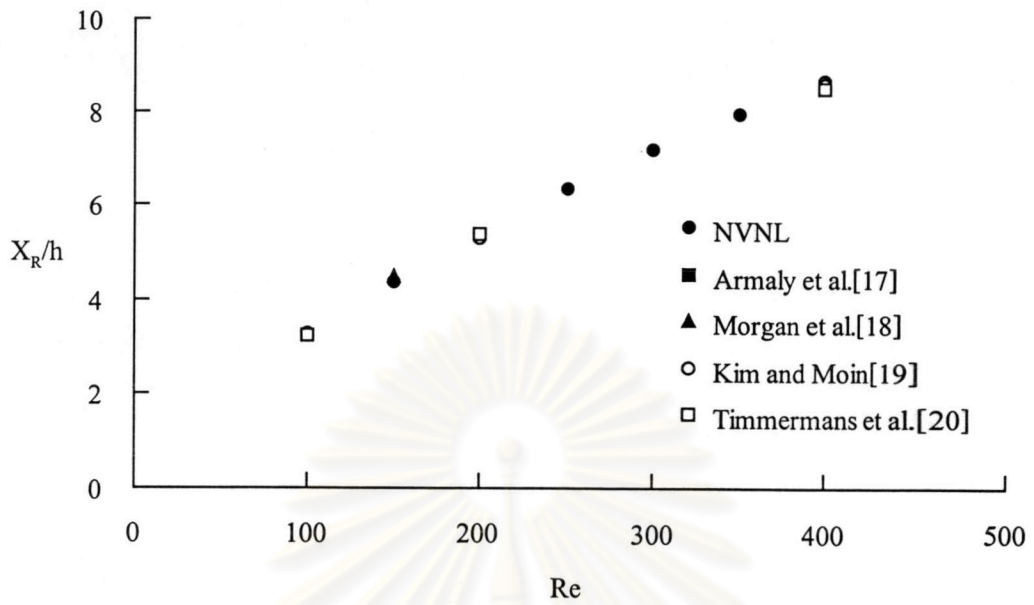
รูปที่ 5.27 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประ
ของรูปที่ 5.24 เมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 300

not to scale



รูปที่ 5.28 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประ
ของรูปที่ 5.24 เมื่อค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400

จากนั้นนำค่า reattachment length, X_r ที่ได้จากคำนวณโดยใช้โปรแกรม NVNL ที่ค่าเรย์โนลด์ต่างๆมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Armaly et al. [17] และ Morgan, Periaux, and Thomasset. [18] รวมทั้งผลการคำนวณของ Kim and Moin [19] และ Timmermans, Mineev, and Van de Vosse. [20] พบว่าผลที่ได้จากโปรแกรม NVNL สอดคล้องกับผลการทดลองและผลการคำนวณที่นำมาเปรียบเทียบเป็นอย่างดี



รูปที่ 5.29 ความสัมพันธ์ระหว่างค่า reattachment length และค่าเรย์โนลด์สำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย