บทที่ 3

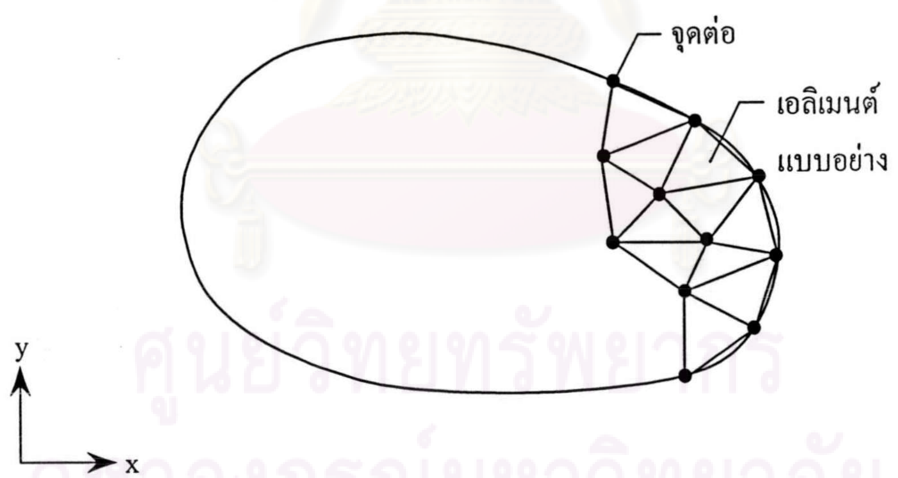
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืด

ในบทนี้จะเป็นการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบตัวแปรไร้จุดต่อ (nodeless variables) มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวภายใต้สถานะอยู่ตัว โดยจะเริ่มจากขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจะอธิบายรายละเอียดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบตัวแปรไร้จุดต่อ และสุดท้ายจะเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนืด

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 6 ขั้นตอน [10] คือ

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ เช่น แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ ดังรูปที่ 3.1



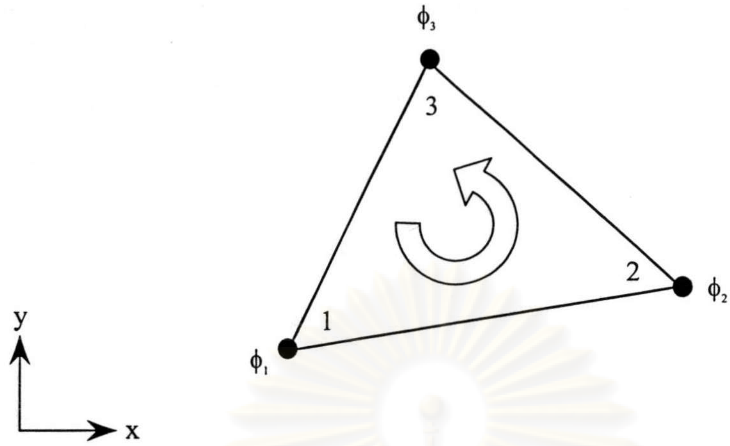
รูปที่ 3.1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

จากนั้นก็ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการแก้นั้น โดยสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$D(\phi) = 0 \tag{3.1}$$

โดยที่ D คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ ϕ' คือตัวแปรตามแม่นตรง

ขั้นตอนที่ 2 เลือกลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

ยกตัวอย่างเช่น สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยสามจุดต่อดังรูปที่ 3.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 นั้น สามารถสร้างสมการที่อธิบายลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าที่ตำแหน่งใดๆบนเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \tag{3.2}$$

โดย $N_i(x,y)$, $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ซึ่งสมการ (3.2) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(1x3)}{\lfloor N(x,y) \rfloor} \underset{(3x1)}{\{\phi\}} \tag{3.3}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations) โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

หากแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.3) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.1) เราจะพบว่า $D(\phi)$ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับเศษตกค้าง R ซึ่งหมายถึง

$$R = D(\phi) = D\left(\lfloor N \rfloor \{\phi\}\right) = D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) \tag{3.4}$$

โดย m คือจำนวนจุดต่อบนเอลิเมนต์นั้น

จากวิธีของกาเลอร์คิน [11] จะเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function), W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์นั้นและกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R \, d\Omega = 0 \tag{3.5}$$

โดยปกติเราจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 ทำการอินทิเกรตทีละส่วน (integrate by part) เพื่อก่อให้เกิดพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ ซึ่งหากแทนสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.5) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i L\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega^{(e)}} \left(W_i, N_i, L_i\right) d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} \left(W_i, N_i, L_i\right) d\Gamma = 0 \tag{3.6}$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, $\Gamma^{(e)}$, ด้วยสภาวะขอบเขตอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 6 จากนั้นจึงเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ นั่นคือ

$$\underset{(m\times m)}{[K]} \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \tag{3.7}$$

โดย [K] คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix), $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์และ {F} คือ โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.7) แล้วลำดับขั้นตอนต่อไปก็จะเป็นการรวมสมการของแต่ละเอลิเมนต์เข้าเป็นระบบสมการรวม จากนั้นกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่างๆ

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบตัวแปรไร้จุดต่อสำหรับปัญหาการไหล

ในสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (2.20ก-ข) นั้น จะเห็นว่าพจน์ของความเร็วจะมีอันดับของอนุพันธ์ที่สูงกว่าพจน์ของความดันอยู่หนึ่งอันดับ ทำให้ต้องเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วให้มีอันดับสูงกว่าฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความดันอยู่หนึ่งอันดับเช่นเดียวกัน [12] ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกำหนดให้ลักษณะการกระจายตัวของความดันบนเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ส่วนลักษณะการกระจายตัวของความเร็วบนเอลิเมนต์เป็นแบบควอดราติก

แต่เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ทำให้ต้องใช้ตัวแปรไร้จุดต่อมาช่วยในการประมาณค่าความเร็ว ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$u(x,y) = \underbrace{N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3}_{\text{nodal velocities}} + \underbrace{N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6}_{\text{nodeless velocities}} \qquad (3.8\text{ก})$$

และ

$$v(x,y) = \underbrace{N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3}_{\text{nodal velocities}} + \underbrace{N_4v_4 + N_5v_5 + N_6v_6}_{\text{nodeless velocities}} \qquad (3.8\text{ข})$$

ส่วนการประมาณค่าความดันบนเอลิเมนต์จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$p(x,y) = \underbrace{H_1p_1 + H_2p_2 + H_3p_3}_{\text{nodal pressures}} \qquad (3.8\text{ค})$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ได้เป็น

$$u(x,y) = N_\alpha u_\alpha \tag{3.9ก}$$

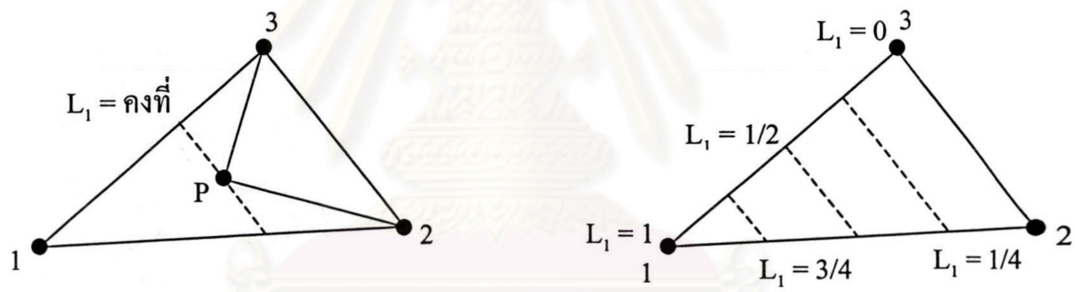
$$v(x,y) = N_\alpha v_\alpha \tag{3.9ข}$$

$$p(x,y) = H_\mu p_\mu \tag{3.9ค}$$

โดย $\alpha = 1, 2, ..., 6$; $\mu = 1, 2, 3$; N_α และ H_μ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็วและความดันตามลำดับ

3.2.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็ว

ฟังก์ชันการประมาณภายสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดพื้นที่ (area coordinates) ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 พิกัดพื้นที่สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

สามารถเขียน L_i ให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$L_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad i = 1,2,3 \tag{3.10}$$

เมื่อ A = พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{3.11}$$

$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2$	$b_1 = y_2 - y_3$	$c_1 = x_3 - x_2$
$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3$	$b_2 = y_3 - y_1$	$c_2 = x_1 - x_3$
$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1$	$b_3 = y_1 - y_2$	$c_3 = x_2 - x_1$

สำหรับการประมาณความเร็วบนเอลิเมนต์นั้น จะประกอบไปด้วยพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความเร็วที่จุดต่อและความเร็วไร้จุดต่อ เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วที่จุดต่อบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อจะมีลักษณะเชิงเส้นดังรูปที่ 3.4 จึงจำเป็นต้องเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรไร้จุดต่อซึ่งมีลักษณะการกระจายตัวดังในรูปที่ 3.5 เพื่อที่จะสามารถประมาณความเร็วบนเอลิเมนต์ด้วยฟังก์ชันควอดราติก ดังรูปที่ 3.6 ได้ โดยฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็ว จะอยู่ในรูปดังนี้

สำหรับความเร็วที่จุดต่อ

$$N_1 = L_1 \tag{3.12ก}$$

$$N_2 = L_2 \tag{3.12ข}$$

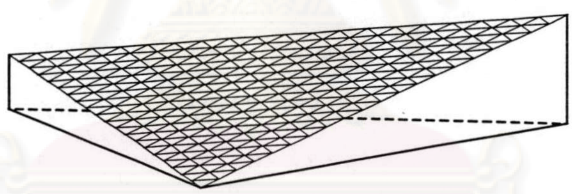
$$N_3 = L_3 \tag{3.12ค}$$

สำหรับความเร็วไร้จุดต่อ

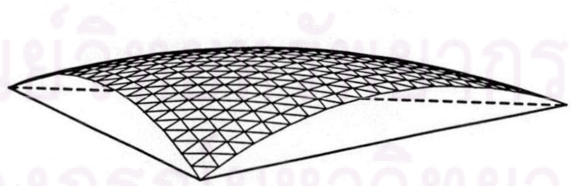
$$N_4 = 4L_2L_3 \tag{3.12ง}$$

$$N_5 = 4L_1L_3 \tag{3.12จ}$$

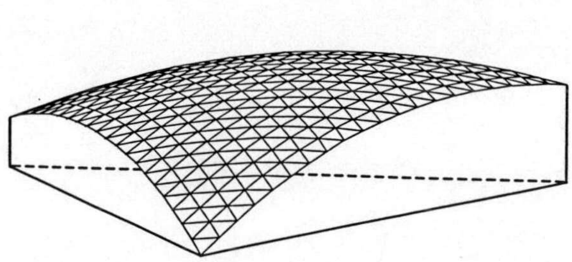
$$N_6 = 4L_1L_2 \tag{3.12ฉ}$$



รูปที่ 3.4 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่จุดต่อ



รูปที่ 3.5 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วไร้จุดต่อ



รูปที่ 3.6 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วรวม

3.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความดัน

ในการประมาณความดันที่ตำแหน่งใดๆบนเอลิเมนต์จะเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้น ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$H_1 = L_1 \tag{3.13ก}$$

$$H_2 = L_2 \tag{3.13ข}$$

$$H_3 = L_3 \tag{3.13ค}$$

3.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด

ในส่วนนี้จะอธิบายการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดโดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบตัวแปรไร้จุดต่อซึ่งมีขั้นตอนเช่นเดียวกับที่ได้อธิบายไว้ในส่วนที่ 3.1

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องประกอบไปด้วย

$$\rho\left(uu_{,x} + vu_{,y}\right) - \overline{\sigma}_{x,x} - \tau_{yx,y} = 0 \tag{3.14ก}$$

$$\rho\left(uv_{,x} + vv_{,y}\right) - \tau_{xy,x} - \overline{\sigma}_{y,y} = 0 \tag{3.14ข}$$

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \tag{3.14ค}$$

โดยที่ ค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนคือ

$$\overline{\sigma}_x = -p + 2\mu u_{,x} \tag{3.15ก}$$

$$\overline{\sigma}_y = -p + 2\mu v_{,y} \tag{3.15ข}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu\left(u_{,y} + v_{,x}\right) \tag{3.15ค}$$

จากสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x (3.14ก) เมื่อประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง จะได้

$$\int_{\Omega} N_i \left[\rho\left(uu_{,x} + vu_{,y}\right) - \left(\overline{\sigma}_{x,x} + \tau_{yx,y}\right)\right] d\Omega = 0 \tag{3.16}$$

เมื่อแยกพจน์ที่สอดคล้องกับการพาและความเค้นออกจากกัน จะได้

$$\int_{\Omega} N_i \rho \left(uu,_x + vu,_y\right) d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\overline{\sigma}_{x,x} + \tau_{yx,y}\right) d\Omega = 0 \tag{3.17}$$

จากนั้นทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) เข้ากับพจน์ทางขวามือเพื่อก่อให้เกิดพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบของเอลิเมนต์ จะได้

$$\int_{\Omega} N_i \rho \left(uu,_x + vu,_y\right) d\Omega + \int_{\Omega} N_{i,x} \overline{\sigma}_x \, d\Omega + \int_{\Omega} N_{i,y} \tau_{yx} \, d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \left(\overline{\sigma}_x l + \tau_{yx} m\right) d\Gamma \tag{3.18}$$

พจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.18) คือ แรงที่กระทำบนขอบในแนวแกน x ซึ่งสามารถแทนด้วยสมการ

$$T_x = \overline{\sigma}_x l + \tau_{yx} m \tag{3.19}$$

เมื่อแทนสมการ (3.15ก,ค) ลงในสมการ (3.18) จะได้

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} N_i \rho \left(uu,_x + vu,_y\right) d\Omega - \int_{\Omega} N_{i,x} \, p \, d\Omega + \int_{\Omega} N_{i,x} \, 2\mu u,_x \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} N_{i,y} \, \mu u,_y \, d\Omega + \int_{\Omega} N_{i,y} \, \mu v,_x \, d\Omega = \int_{\Gamma} N_i T_x \, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.20}$$

จากนั้นหารสมการ (3.20) ด้วย ρ แล้วกำหนดให้ ν แทนค่าความหนืดจลนศาสตร์ (kinematic viscosity) จะกลายมาเป็น

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} N_i \, uu,_x \, d\Omega + \int_{\Omega} N_i \, vu,_y \, d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} N_{i,x} \, p \, d\Omega + 2\nu \int_{\Omega} N_{i,x} \, u,_x \, d\Omega \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} N_{i,y} \, u,_y \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} N_{i,y} \, v,_x \, d\Omega = \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} N_i \, T_x \, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.21ก}$$

เช่นเดียวกัน เมื่อประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y (3.14ข) จะได้

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} N_i \, uv,_x \, d\Omega + \int_{\Omega} N_i \, vv,_y \, d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} N_{i,y} \, p \, d\Omega + 2\nu \int_{\Omega} N_{i,y} \, v,_y \, d\Omega \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} N_{i,x} \, u,_y \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} N_{i,x} \, v,_x \, d\Omega = \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} N_i \, T_y \, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.21ข}$$

และเมื่อประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการเชิงอนุรักษ์มวล (3.14ค) จะได้

$$\int_{\Omega} H_i \left(u_{,x} + v_{,y} \right) d\Omega = 0 \qquad (3.21ค)$$

จากการประมาณลักษณะการกระจายตัวของความเร็วและความดันที่ตำแหน่งใดๆบนเอลิเมนต์ด้วยฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการ (3.9ก-ค) เมื่อนำมาแทนลงในสมการ (3.21ก-ค) จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุรักษ์มวลและสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\mu^x} p_\mu + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta = Q_{\alpha^x} \qquad (3.22ก)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\mu^y} p_\mu + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta = Q_{\alpha^y} \qquad (3.22ข)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \qquad (3.22ค)$$

โดยที่

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_{\Omega} N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} \, d\Omega \qquad (3.23ก)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_{\Omega} N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} \, d\Omega \qquad (3.23ข)$$

$$H_{\alpha\mu^x} = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} N_{\alpha,x} H_\mu \, d\Omega \qquad (3.23ค)$$

$$H_{\alpha\mu^y} = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} N_{\alpha,y} H_\mu \, d\Omega \qquad (3.23ง)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu \int_{\Omega} N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, d\Omega \qquad (3.23จ)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu \int_{\Omega} N_{\alpha,y} N_{\beta,x} \, d\Omega \qquad (3.23ฉ)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \nu \int_{\Omega} N_{\alpha,x} N_{\beta,y} \, d\Omega \qquad (3.23ช)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu \int_{\Omega} N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, d\Omega + 2\nu \int_{\Omega} N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, d\Omega \qquad (3.23ซ)$$

$$Q_{\alpha^x} = \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} N_\alpha T_x \, d\Gamma \qquad (3.23ฌ)$$

$$Q_{\alpha^y} = \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} N_\alpha T_y \, d\Gamma \qquad (3.23ญ)$$

รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

3.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสัน

เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในสมการ (3.22ก-ค) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นจึงจำเป็นต้องนำระเบียบวิธีการทำซ้ำ (iterative method) มาช่วยในการหาคำตอบ โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสัน (Newton-Raphson iterative method) [13] ซึ่งสำหรับระบบสมการไม่เชิงเส้นที่ประกอบไปด้วย n สมการ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปดังนี้

$$[K(x)]\{x\} = \{R\} \tag{3.24}$$

โดยที่ x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ คือ ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ หากค่า x_i เหล่านี้ไม่ใช่ค่าที่ถูกต้องของระบบสมการ จะก่อให้เกิดเศษตกค้างขึ้นในระบบสมการนั้นๆ โดยเศษตกค้างสำหรับสมการที่ i คือ

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_j - R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.25}$$

แนวคิดพื้นฐานของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสันเป็นการนำอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) มาประยุกต์ใช้ โดยอนุกรมเทย์เลอร์ของเศษตกค้าง F_i ที่ประกอบด้วย n ตัวแปรสามารถเขียนได้ดังนี้

$$F_i(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_j + \ldots$$

$$\text{โดย } i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.26}$$

เมื่อค่า x_i เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องจะทำให้เศษตกค้างซึ่งก็คือพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.26) มีค่าเท่ากับศูนย์และจะละทิ้งพจน์ที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์อันดับสูง ทำให้สมการ (3.26) กลายมาเป็น

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_j = -F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.27}$$

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสันจะถูกประยุกต์เข้ากับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น (3.22ก-ค) โดยจะเริ่มจากการเขียนสมการดังกล่าวในรูปของเศษตกค้างดังต่อไปนี้

$$F_{\alpha^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\mu^x} p_\mu + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta + Q_{\alpha^x} \tag{3.28ก}$$

$$F_{\alpha^y} \;\; = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\mu^y} p_\mu + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta + Q_{\alpha^y} \qquad (3.28ข)$$

$$F_\mu \;\; = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \qquad (3.28ค)$$

และเมื่อประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสันเข้ากับสมการ (3.28ก-ค) ก่อให้เกิดระบบสมการใหม่เพื่อใช้คำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆซึ่งสามารถขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x3)}{-H_{\alpha\mu^x}} \\ \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-H_{\alpha\mu^y}} \\ \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^x}} & \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^y}} & \underset{(3x3)}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{(6x1)}{\Delta u_\beta} \\ \underset{(6x1)}{\Delta v_\beta} \\ \underset{(3x1)}{\Delta p_\mu} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \underset{(6x1)}{F_{\alpha^x}} \\ \underset{(6x1)}{F_{\alpha^y}} \\ \underset{(3x1)}{F_\mu} \end{Bmatrix} \qquad (3.29)$$

โดยที่

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \qquad (3.30ก)$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \qquad (3.30ข)$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \qquad (3.30ค)$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \qquad (3.30ง)$$

ค่าความเร็ว u_γ , v_γ ในสมการ (3.28ก-ค) และ (3.30ก-ง) คือค่าของความเร็วในแนวแกน x และ y ที่ได้จากการคำนวณในรอบที่แล้วซึ่งถูกนำมาใช้ในการคำนวณหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆในรอบนี้ กระบวนการทำซ้ำจะเสร็จสิ้นก็ต่อเมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของรอบปัจจุบันมีค่าน้อยกว่าค่าของความคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้ โดยหาได้จาก

$$\text{Overall error} = \frac{\text{Error}}{\text{Sum}} \times 100\% \qquad (3.31)$$

และ

$$\text{Error} = \sum_{i=1}^{NV} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{NP} (\Delta p_j) \qquad (3.32ก)$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{NV} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{NP} (p_j) \qquad (3.32ข)$$

โดยที่ NV และ NP คือจำนวนของตัวไม่ทราบค่าที่เกี่ยวข้องกับความเร็วและความดันตามลำดับ