บทที่ 1
บทนำ

ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (linear programming problem) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (optimization problem) ประเภทหนึ่งที่มีฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขบังคับเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรอิสระ วัตถุประสงค์ของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นคือการหาค่าของตัวแปรอิสระทั้งหมดในระบบที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเหมาะที่สุด ค่าเหมาะที่สุดอาจหมายถึงค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ตัวอย่างของปัญหากำหนดการเชิงเส้น เช่นปัญหาการผลิตสินค้าเพื่อขายเอากำไร ซึ่งสิ่งที่ต้องการทราบคือจำนวนสินค้าที่ผลิตถ้าผลิตตามปริมาณดังกล่าวแล้วขายต้องได้กำไรสูงสุด โดยมีเงื่อนไขว่าต้องผลิตภายใต้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

ถึงแม้ว่าปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติเป็นปัญหาที่สามารถใช้เทคนิคเชิงกราฟ[1] โดยการอาศัยการวาดบริเวณที่เป็นไปได้ แต่ถ้ามีเงื่อนไขบังคับเป็นจำนวนมากจะทำให้ไม่สะดวกในการเขียนกราฟของบริเวณที่เป็นไปได้ และนอกจากนี้เทคนิคเชิงกราฟนั้นไม่เหมาะในการนำมาสร้างเป็นชุดคำสั่งสำหรับประมวลผลด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ สำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีจุดยอดของบริเวณที่เป็นไปได้จำนวนมาก เมื่อใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาแล้วจะใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยค่อนข้างมาก ซึ่งมีงานวิจัยออกมาแล้วว่าวิธีซิมเพล็กซ์ใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยเป็นแบบ exponential time[5] ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอวิธีการซึ่งสามารถนำไปสร้างเป็นชุดคำสั่งสำหรับประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ และใช้เวลาในการคำนวณเป็นแบบกำลังสอง โดยเน้นการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอซึ่งมีรูปแบบดัง (1.1)

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = c_1x_1 + c_2x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \le & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & \le & b_i \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \le & b_m \end{array} \qquad \text{..........................(1.1)}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \cdots, m$

การใช้วิธีซิมเพล็กซ์นั้นแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบมาตรฐานดังรูปแบบ (1.2)

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\ & & & & & & x_1, x_2, \cdots, x_n & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{.........................(1.2)}$$

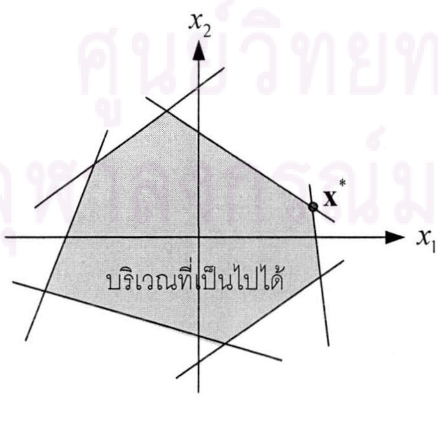
เมื่อ $i = 1, 2, \cdots, m$

ปัญหาที่อยู่ในรูปแบบมาตรฐานต้องมีเงื่อนไขบังคับเป็นสมการเชิงเส้น และค่าของตัวแปรอิสระต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นปัญหาในรูปแบบ (1.1) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้ด้วยการเปลี่ยนตัวแปร x_1 และ x_2 ดังนี้ $x_1 = x_1' - x_1''$ และ $x_2 = x_2' - x_2''$ และใช้ตัวแปรช่วย(slack variables) $s_1, s_2, \cdots, s_m$ เมื่อ $x_1', x_2', x_1'', x_2'', s_1, s_2, \cdots, s_m \geq 0$

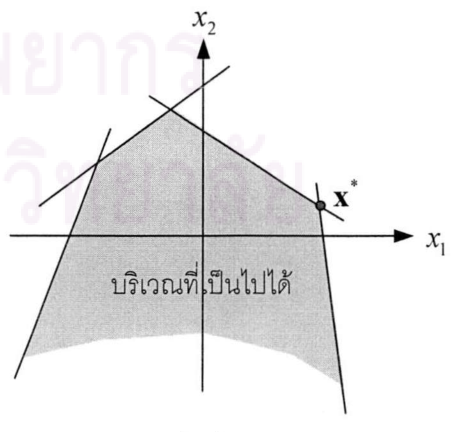
ก่อนอื่นจะจำแนกปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่เป็นไปได้ดังนี้

1. บริเวณที่เป็นไปได้มีขอบเขต และไม่มีขอบเขตให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดจุดเดียว

ปัญหาในสองมิติที่มีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดจุดเดียวคือปัญหาที่มี $\mathbf{x}^*$ เพียงจุดเดียวเท่านั้นในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ซึ่ง $\mathbf{x}^*$ จะปรากฏเป็นจุดมุมของบริเวณที่เป็นไปได้ดังรูปที่ 1.1 ซึ่งบริเวณที่เป็นไปได้อาจจะมีขอบเขตดังรูปที่ 1.1 (ก) หรือไม่มีขอบเขตดังรูปที่ 1.1 (ข)



(ก)



(ข)

รูปที่ 1.1 ปัญหาที่มีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดจุดเดียว

(ก) บริเวณที่เป็นไปได้มีขอบเขต (ข) บริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 1.1

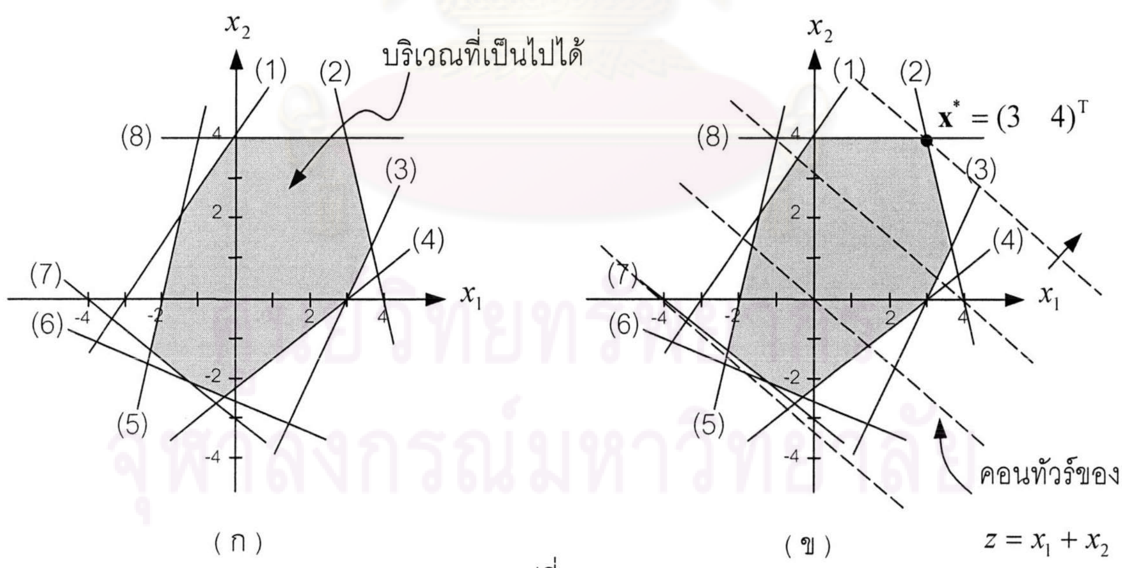
กำหนดปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = x_1 + x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{array}{rcrcrl} -4x_1 & + & 3x_2 & \le & 12 & \text{............................(1)} \\ 4x_1 & + & x_2 & \le & 16 & \text{............................(2)} \\ 2x_1 & - & x_2 & \le & 6 & \text{............................(3)} \\ 3x_1 & - & 4x_2 & \le & 9 & \text{............................(4)} \\ -4x_1 & + & x_2 & \le & 8 & \text{............................(5)} \\ -2x_1 & - & 5x_2 & \le & 13 & \text{............................(6)} \\ -3x_1 & - & 4x_2 & \le & 12 & \text{............................(7)} \\ & & x_2 & \le & 4 & \text{............................(8)} \end{array}$$

จากเงื่อนไขบังคับของปัญหาทำให้ได้บริเวณที่เป็นไปได้แสดงดังรูปที่ 1.2 (ก) และด้วยเทคนิคเชิงกราฟแสดงดังรูปที่ 1.1 (ข) ได้ว่ามีจุด $\mathbf{x}^* = (x_1^* \quad x_2^*)^{\mathrm{T}} = (3 \quad 4)^{\mathrm{T}}$ เพียงจุดเดียวในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มากที่สุดคือ $z^* = x_1^* + x_2^* = 7$ □



(ก) (ข)

รูปที่ 1.2

ตัวอย่าง 1.2

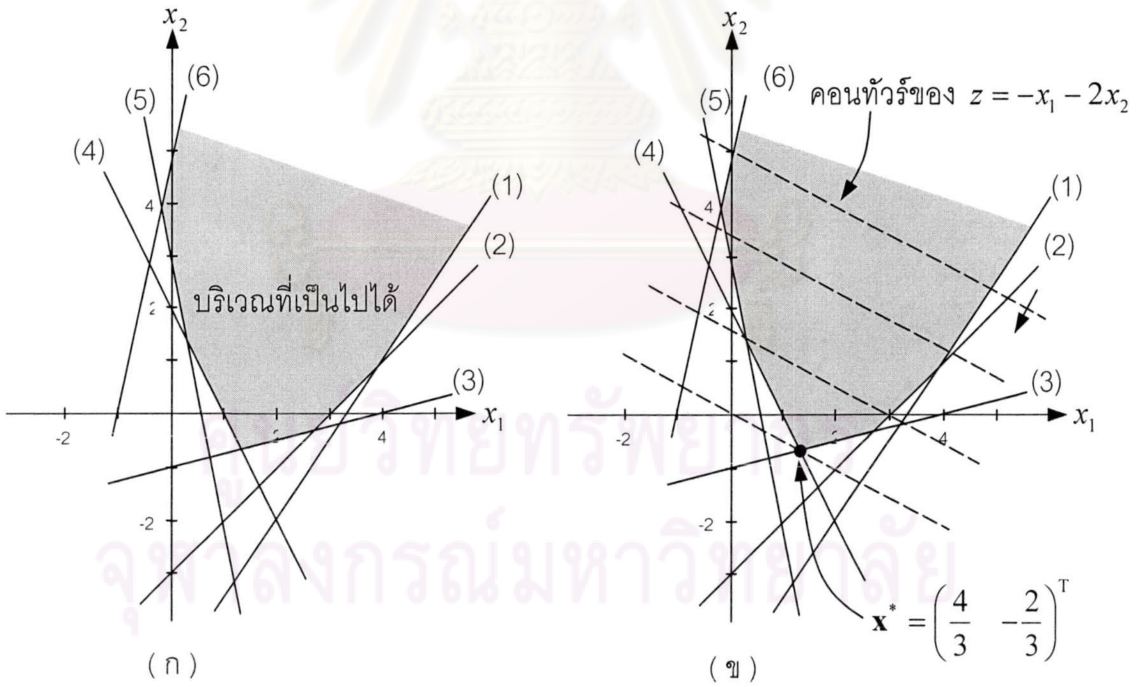
กำหนดปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = -x_1 - 2x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{array}{rcrcrl}
3x_1 & - & 2x_2 & \le & 10 & \text{............................(1)} \\
x_1 & - & x_2 & \le & 3 & \text{............................(2)} \\
x_1 & - & 4x_2 & \le & 4 & \text{............................(3)} \\
-2x_1 & - & x_2 & \le & -2 & \text{............................(4)} \\
-5x_1 & - & x_2 & \le & -3 & \text{............................(5)} \\
-5x_1 & + & x_2 & \le & 5 & \text{............................(6)}
\end{array}
$$

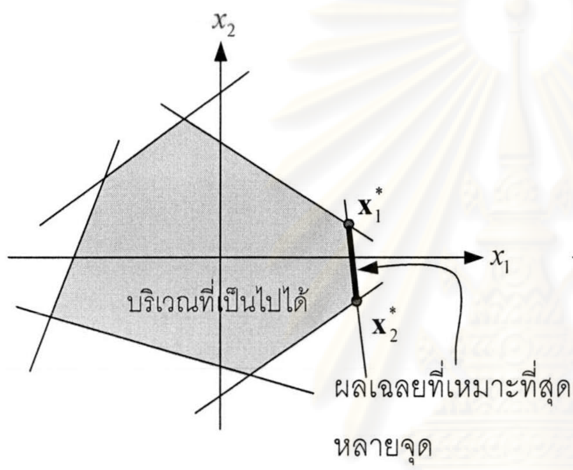
จากเงื่อนไขบังคับของปัญหาทำให้ได้บริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขตแสดงดังรูปที่ 1.3 (ก) และด้วยเทคนิคเชิงกราฟแสดงดังรูปที่ 1.3 (ข) ได้ว่ามีจุด $\mathbf{x}^* = (x_1^* \quad x_2^*)^{\mathrm{T}} = (\frac{4}{3} \quad -\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$ เพียงจุดเดียวในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มากที่สุดคือ $z^* = -x_1^* - 2x_2^* = 0$ □



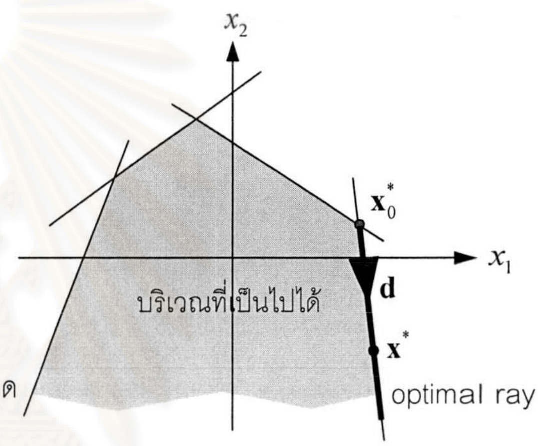
รูปที่ 1.3

2. บริเวณที่เป็นไปได้มีขอบเขตหรือไม่มีขอบเขต และให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุด

ปัญหาในสองมิติที่มีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุด คือปัญหาที่มีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุด ปัญหาดังกล่าวจะมีบริเวณที่เป็นไปได้แสดงดังรูปที่ 1.4 โดยรูปที่ 1.4 (ก) แสดงบริเวณที่เป็นไปได้มีขอบเขต และมีจุด $\mathbf{x}_1^*$ และ $\mathbf{x}_2^*$ เป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $\mathbf{x}_1^*$ และ $\mathbf{x}_2^*$ ก็เป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดด้วยเช่นกัน และในรูปที่ 1.4 (ข) แสดงบริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขต และมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุดอยู่บน optimal ray ซึ่งมีจุด $\mathbf{x}_0^*$ เป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเป็นจุดเริ่มต้น และมีเวกเตอร์แสดงทิศทางคือ $\mathbf{d}$ สำหรับจุด $\mathbf{x}^*$ ที่อยู่บน optimal ray คือจุดที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้ได้ $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0^* + \lambda\mathbf{d}$ เมื่อ $\lambda \ge 0$



(ก)



(ข)

รูปที่ 1.4 ปัญหาที่มีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุด
(ก) บริเวณที่เป็นไปได้มีขอบเขต (ข) บริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 1.3

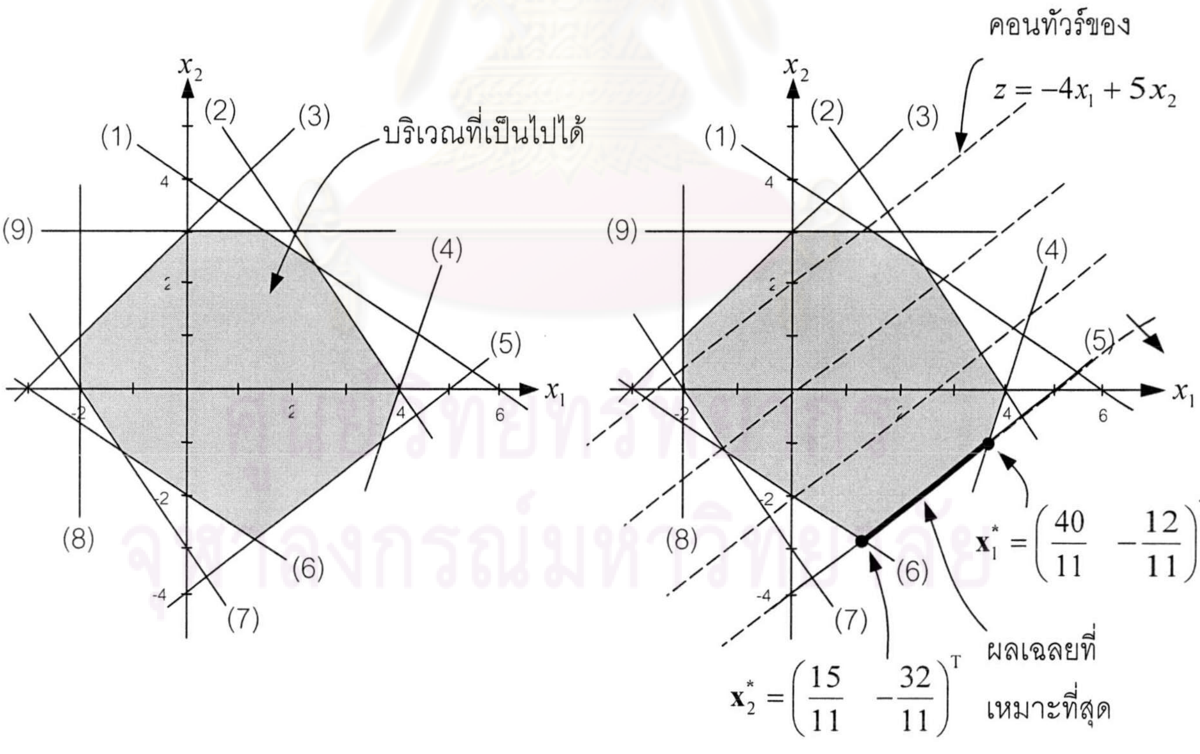
พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 4x_1 - 5x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{array}{rcrcrl}
4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 24 & \text{............................(1)} \\
3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & \text{............................(2)} \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & \text{............................(3)} \\
3x_1 & - & x_2 & \leq & 12 & \text{............................(4)} \\
4x_1 & - & 5x_2 & \leq & 20 & \text{............................(5)} \\
-2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 & \text{............................(6)} \\
-3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 & \text{............................(7)} \\
-x_1 & & & \leq & 2 & \text{............................(8)} \\
 & & x_2 & \leq & 3 & \text{............................(9)}
\end{array}
$$

จากเงื่อนไขบังคับของปัญหาทำให้ได้บริเวณที่เป็นไปได้มีขอบเขตแสดงดังรูปที่ 1.5 (ก) ด้วยเทคนิคเชิงกราฟแสดงดังรูปที่ 1.5 (ข) ได้ว่ามีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุดซึ่งจุดเหล่านั้นคือ $\mathbf{x}_1^* = \begin{pmatrix} \frac{40}{11} & -\frac{12}{11} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2^* = \begin{pmatrix} \frac{15}{11} & -\frac{32}{11} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ และจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $\mathbf{x}_1^*$ และ $\mathbf{x}_2^*$ โดยที่จุดเหล่านั้นให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเท่ากันคือ $z^* = 20$ □



(ก) (ข)

รูปที่ 1.5

ตัวอย่าง 1.4

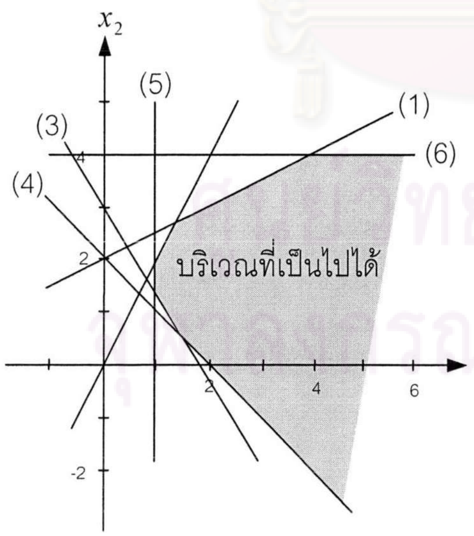
พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$

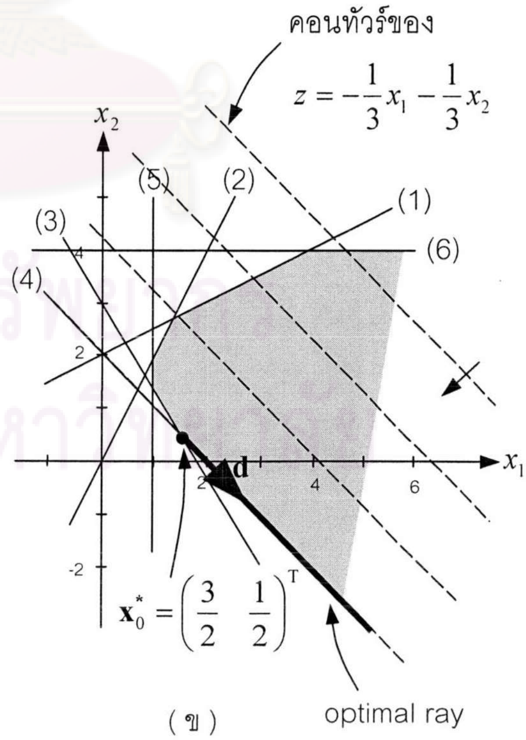
ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{array}{rcrcr l}
-x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 & \text{.............................(1)} \\
2x_1 & - & x_2 & \leq & 0 & \text{.............................(2)} \\
-5x_1 & - & 3x_2 & \leq & -9 & \text{.............................(3)} \\
-x_1 & - & x_2 & \leq & -1 & \text{.............................(4)} \\
-x_1 & & & \leq & -1 & \text{.............................(5)} \\
 & & x_2 & \leq & 4 & \text{.............................(6)}
\end{array}
$$

จากเงื่อนไขบังคับของปัญหาทำให้ได้บริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขตแสดงดังรูปที่ 1.6 (ก) และด้วยเทคนิคเชิงกราฟแสดงดังรูปที่ 1.6 (ข) ได้ว่ามีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหลายจุดซึ่งจุดเหล่านั้นคือจุด $\mathbf{x}_0^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ และจุดที่อยู่บน optimal ray ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $\mathbf{x}_0^*$ และเวกเตอร์แสดงทิศทางคือ $\mathbf{d} = (1 \quad -1)^{\mathrm{T}}$ โดยที่จุดเหล่านั้นเป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเท่ากันคือ $z^* = -\frac{2}{3}$ □



(ก)

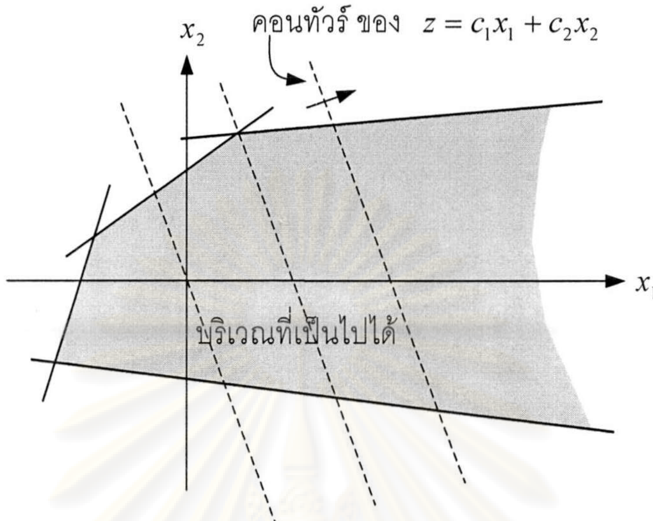


(ข)

รูปที่ 1.6

3. **บริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขต และไม่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด** (unbounded problem)

ปัญหาที่ไม่มีขอบเขต หรือเรียกว่า unbounded problem คือปัญหาที่มีบริเวณที่เป็นไปได้แต่ไม่มีขอบเขตดังรูปที่ 1.7 และไม่สามารถระบุจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดได้



รูปที่ 1.7 ปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 1.5

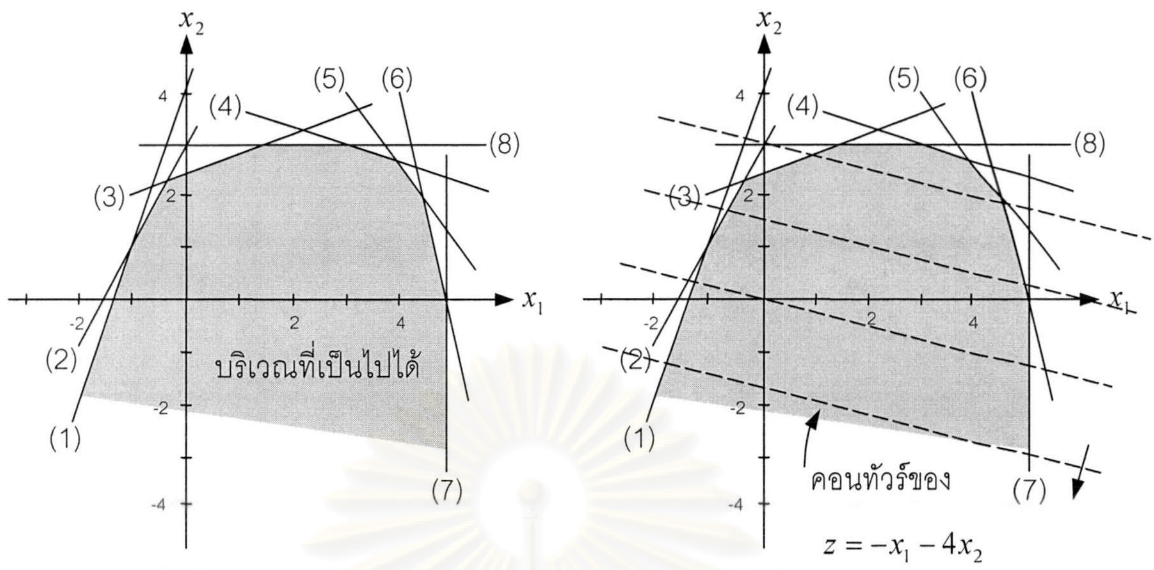
พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = -x_1 - 4x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{array}{rcrcrl}
-3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 & \text{..........................(1)} \\
-2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & \text{..........................(2)} \\
-2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 12 & \text{..........................(3)} \\
x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 & \text{..........................(4)} \\
4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 & \text{..........................(5)} \\
4x_1 & + & x_2 & \leq & 20 & \text{..........................(6)} \\
x_1 & & & \leq & 5 & \text{..........................(7)} \\
 & & x_2 & \leq & 3 & \text{..........................(8)}
\end{array}
$$

จากเงื่อนไขบังคับของปัญหาทำให้ได้บริเวณที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขตแสดงดังรูปที่ 1.8 (ก) และด้วยเทคนิคเชิงกราฟแสดงดังรูปที่ 1.8 (ข) จะได้ว่าไม่สามารถระบุจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาไม่มีขอบเขต □



รูปที่ 1.8

4. **ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้** (infeasible problem)

เรียกปัญหาในสองมิติที่ไม่มีจุดที่สอดคล้องทุกเงื่อนไขบังคับว่าเป็นปัญหาที่ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.6

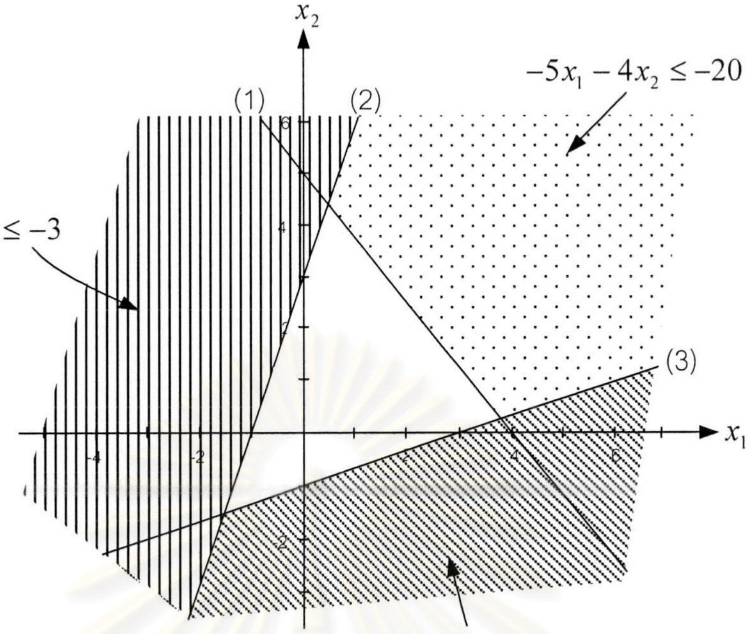
พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = -x_1 - 4x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
-5x_1 - 4x_2 &\le -20 \quad \text{....................(1)}\\
3x_1 - x_2 &\le -3 \quad \text{....................(2)}\\
-x_1 + 3x_2 &\le -3 \quad \text{....................(3)}
\end{aligned}
$$

จากเงื่อนไขบังคับของปัญหาได้ว่าไม่มีจุดที่สอดคล้องทั้งสามเงื่อนไข ดังนั้นจึงไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ดังรูปที่ 1.9 □



รูปที่ 1.9

ในงานวิจัยนี้สนใจเฉพาะปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้ และมีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดอย่างน้อยหนึ่งจุดเท่านั้น

แนวความคิดในการพัฒนาขั้นตอนวิธีใหม่ได้จากการสังเกตว่าในปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีบริเวณที่เป็นไปได้ ซึ่งเป็นปัญหาแบบค่าสูงสุด และไม่มี redundant constraint (ดูภาคผนวก ข) ทิศทางของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์[1] จะมีความสัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับสองเงื่อนไขที่เป็นตัวแทนจากสองกลุ่มที่แตกต่างกัน(การแบ่งกลุ่มจะกล่าวในบทที่ 2) และเป็นสองเงื่อนไขที่ก่อให้เกิดผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา ความสัมพันธ์นั้นคือการทำมุมน้อยที่สุดระหว่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์กับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับ[2] เมื่อเปรียบเทียบในกลุ่มเดียวกัน

---

[1] เวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = c_1x_1 + c_2x_2$ คือเวกเตอร์ $(c_1 \;\; c_2)^{\mathrm{T}}$ ที่ชี้ไปยังทิศทางการเพิ่มค่าของ z และตั้งฉากกับเส้นตรง $z = c_1x_1 + c_2x_2$

[2] เวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ คือเวกเตอร์ $(a_{i1} \;\; a_{i2})^{\mathrm{T}}$ ที่ชี้ไปยังทิศทางการเพิ่มค่าของ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ และตั้งฉากกับกราฟเส้นตรงของ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$

การแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับอาศัยเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ( ) และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับ ( ) ด้วยการพิจารณาแนวของเวกเตอร์เกรเดียนต์ ของฟังก์ชันจุดประสงค์ (เส้นประ) เป็นเส้นแบ่งกลุ่มของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับทั้งหมดออกเป็นสองกลุ่ม

เพื่อให้เห็นถึงความเป็นไปได้ของแนวความคิดที่กล่าวมาข้างต้นพิจารณาเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับของปัญหาในตัวอย่าง 1.7

ตัวอย่าง 1.7

กำหนดปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = x_1 + x_2$

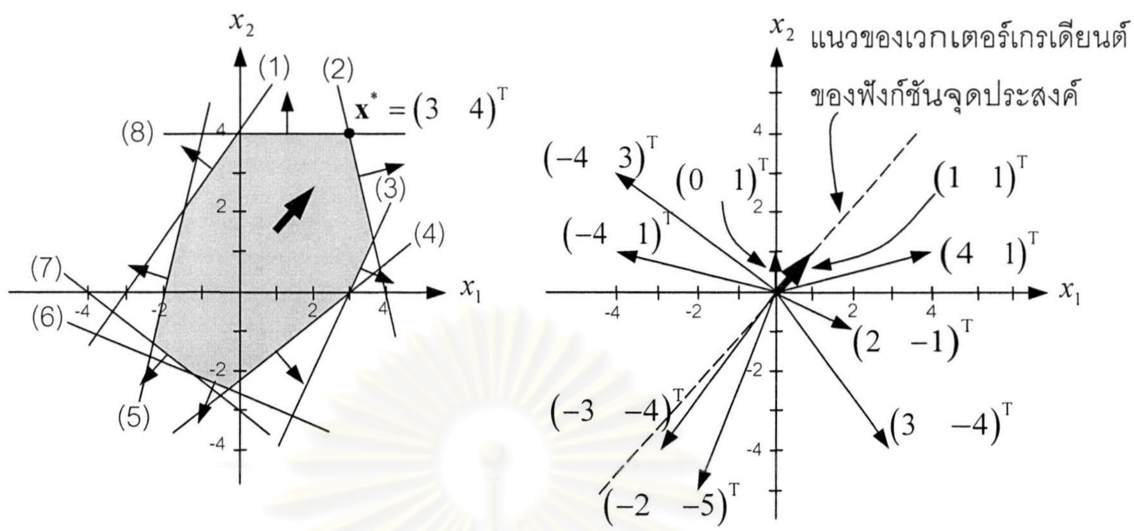
ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{array}{rcrcrl}
-4x_1 & + & 3x_2 & \le & 12 & \text{..........................(1)} \\
4x_1 & + & x_2 & \le & 16 & \text{..........................(2)} \\
2x_1 & - & x_2 & \le & 6 & \text{..........................(3)} \\
3x_1 & - & 4x_2 & \le & 9 & \text{..........................(4)} \\
-4x_1 & + & x_2 & \le & 8 & \text{..........................(5)} \\
-2x_1 & - & 5x_2 & \le & 13 & \text{..........................(6)} \\
-3x_1 & - & 4x_2 & \le & 12 & \text{..........................(7)} \\
 & & x_2 & \le & 4 & \text{..........................(8)}
\end{array}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะทิศทางของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับของปัญหาบนบริเวณที่เป็นไปได้จะได้ดังรูปที่ 1.10 (ก) และเมื่อพิจารณาทั้งขนาดและทิศทางจริงของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับจะได้ดังรูปที่ 1.10 (ข)

พิจารณาการแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับโดยอาศัยแนวของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $(1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ เป็นแนวการแบ่งแสดงดังรูปที่ 1.10 (ข) ได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (1), (5) และ (8) อยู่ในกลุ่มแรก ขณะที่เงื่อนไขบังคับ (2), (3), (4), (6) และ (7) อยู่ในกลุ่มที่สอง

พิจารณาในกลุ่มแรกได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (8) เป็นตัวแทนกลุ่มเนื่องจากมีเวกเตอร์เกรเดียนต์เท่ากับ $(0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $(1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ น้อยที่สุด และพิจารณาในกลุ่มที่สองได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (2) เป็นตัวแทนกลุ่มเนื่องจากมีเวกเตอร์เกรเดียนต์เท่ากับ $(4 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $(1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ น้อยที่สุด ดังนั้นเงื่อนไขบังคับ (8) และ (2) เป็นเงื่อนไขที่ทำให้เกิดจุด $\mathbf{x}^* = (3 \quad 4)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้เกิดผลเฉลยที่เหมาะที่สุด □



(ก) (ข)

รูปที่ 1.10

ตัวอย่าง 1.8

พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 4x_1 - 5x_2$

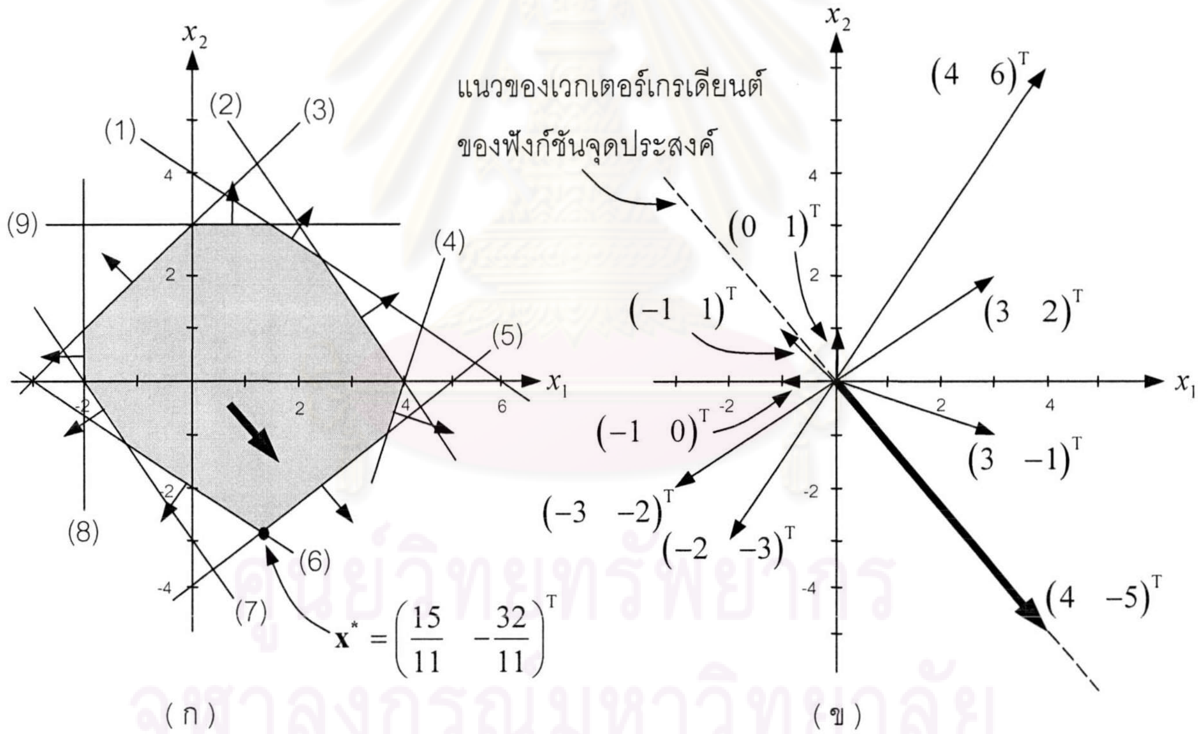
ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{array}{rcrcrl}
4x_1 & + & 6x_2 & \le & 24 & \text{.............................(1)} \\
3x_1 & + & 2x_2 & \le & 12 & \text{.............................(2)} \\
-x_1 & + & x_2 & \le & 3 & \text{.............................(3)} \\
3x_1 & - & x_2 & \le & 12 & \text{.............................(4)} \\
4x_1 & - & 5x_2 & \le & 20 & \text{.............................(5)} \\
-2x_1 & - & 3x_2 & \le & 6 & \text{.............................(6)} \\
-3x_1 & - & 2x_2 & \le & 6 & \text{.............................(7)} \\
-x_1 & & & \le & 2 & \text{.............................(8)} \\
 & & x_2 & \le & 3 & \text{.............................(9)}
\end{array}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะทิศทางของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับของปัญหาบนบริเวณที่เป็นไปได้จะได้ดังรูปที่ 1.11 (ก) และเมื่อพิจารณาทั้งขนาดและทิศทางจริงของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับจะได้ดังรูปที่ 1.11 (ข)

พิจารณาการแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับโดยอาศัยแนวของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $(4 \quad -5)^T$ เป็นแนวการแบ่งแสดงดังรูปที่ 1.11 (ข) ได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (1), (2), (4), (5) และ (9) อยู่ในกลุ่มแรก ขณะที่เงื่อนไขบังคับ (3), (6), (7) และ (8) อยู่ในกลุ่มที่สอง

พิจารณาในกลุ่มแรกได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (5) เป็นตัวแทนกลุ่มเนื่องจากมีเวกเตอร์เกรเดียนต์เท่ากับ $(4 \quad -5)^T$ ซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $(4 \quad -5)^T$ น้อยที่สุด และพิจารณาในกลุ่มที่สองได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (6) เป็นตัวแทนกลุ่มเนื่องจากมีเวกเตอร์เกรเดียนต์เท่ากับ $(-2 \quad -3)^T$ ซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $(4 \quad -5)^T$ น้อยที่สุด ดังนั้นเงื่อนไขบังคับ (5) และ (6) เป็นเงื่อนไขที่ทำให้เกิดจุด $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{15}{11} & -\frac{32}{11} \end{pmatrix}^T$ ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้เกิดผลเฉลยที่เหมาะที่สุด □



รูปที่ 1.11

แนวความคิดดังกล่าวนั้นเป็นการพิจารณาเฉพาะปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้และไม่มี redundant constraint ถ้าปัญหามีบริเวณที่เป็นไปได้และมี redundant constraint แล้วจะเห็นว่าถ้าตัวแทนกลุ่มเป็น redundant constraint แล้วการทำมุมน้อยที่สุดระหว่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์กับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับนั้นไม่ได้นำไปสู่จุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ดังตัวอย่างที่ 1.9 การแก้ปัญหาดังกล่าวคือเลือกตัวแทนของกลุ่มขึ้นมาใหม่ โดยที่เงื่อนไขที่จะถูกเลือกขึ้นมาใหม่คือเงื่อนไขที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ที่ทำมุมกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์น้อยที่สุดในลำดับถัดไป

ตัวอย่าง 1.9

พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = -x_1 - 2x_2$

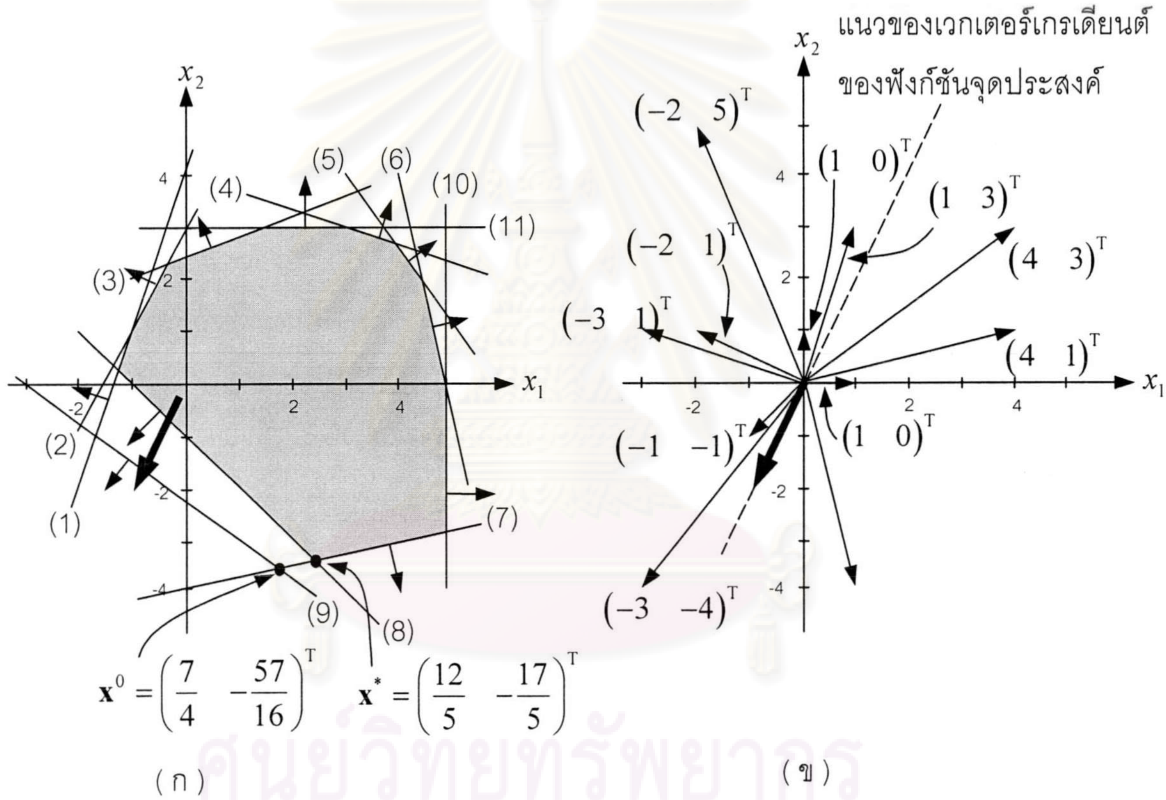
ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{array}{rcrcrl}
-3x_1 & + & x_2 & \le & 4 & \text{..........................(1)} \\
-2x_1 & + & x_2 & \le & 3 & \text{..........................(2)} \\
-2x & + & 5x_2 & \le & 12 & \text{..........................(3)} \\
x_1 & + & 3x_2 & \le & 12 & \text{..........................(4)} \\
4x_1 & + & 3x_2 & \le & 24 & \text{..........................(5)} \\
4x_1 & + & x_2 & \le & 20 & \text{..........................(6)} \\
x_1 & - & 4x_2 & \le & 16 & \text{..........................(7)} \\
-x_1 & - & x_2 & \le & 1 & \text{..........................(8)} \\
-3x_1 & - & 4x_2 & \le & 9 & \text{..........................(9)} \\
x_1 & & & \le & 5 & \text{..........................(10)} \\
 & & x_2 & \le & 3 & \text{..........................(11)}
\end{array}
$$

พิจารณาการแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับโดยอาศัยแนวของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $(-1 \quad -2)^{\mathrm{T}}$ เป็นแนวการแบ่งแสดงดังรูปที่ 1.12 (ข) ได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (5), (6), (7) และ (10) อยู่ในกลุ่มแรก ขณะที่เงื่อนไขบังคับ (1), (2), (3), (4), (8), (9) และ (11) อยู่ในกลุ่มที่สอง

พิจารณาในกลุ่มแรกได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (7) เป็นตัวแทนกลุ่มเนื่องจากมีเวกเตอร์เกรเดียนต์เท่ากับ $(1 \quad -4)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $(-1 \quad -2)^{\mathrm{T}}$ น้อยที่สุด และพิจารณาในกลุ่มที่สองได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (9) เป็นตัวแทนกลุ่มเนื่องจากมีเวกเตอร์เกรเดียนต์เท่ากับ $(-3 \quad -4)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งทำมุมกับ

เวกเตอร์ $(-1 \quad -2)^{\mathrm{T}}$ น้อยที่สุด แต่เงื่อนไขบังคับ (7) และ (9) ทำให้ได้จุด $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{57}{16} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งไม่ใช่จุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ ทั้งนี้เนื่องจากว่าเงื่อนไขบังคับ (9) เป็น redundant constraint ดังนั้นเลือกตัวแทนของกลุ่มที่สองใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ทำมุมกับเวกเตอร์ $(-1 \quad -2)^{\mathrm{T}}$ น้อยที่สุดที่อยู่ในลำดับถัดจากเงื่อนไขบังคับ (9) ซึ่งคือเงื่อนไขบังคับ (8) และได้ว่าเงื่อนไขบังคับ (7) และ (8) ทำให้เกิดจุด $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & -\frac{17}{5} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งเป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด $\square$



รูปที่ 1.12

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงข้อตกลงเกี่ยวกับเมทริกซ์ บทนิยามสำหรับจำแนกเงื่อนไขบังคับออกเป็นสองกลุ่ม และทฤษฎีบทที่ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการพัฒนาขั้นตอนวิธีใหม่ โดยเฉพาะทฤษฎีบท 2.1 เป็นทฤษฎีบทที่บอกว่าการทำมุมน้อยที่สุดระหว่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์กับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับจากสองกลุ่มที่แตกต่างกันนำไปสู่ผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาที่มีบริเวณที่เป็นไปได้และไม่มี redundant constraint ขณะที่ทฤษฎีบท 2.2 เป็นทฤษฎีที่บอกว่าปัญหาประเภทใดมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และทฤษฎีบท 2.3 ใช้ลด redundant constraint ที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ขนานกันและทิศทางเดียวกัน และบทที่ 3 เป็นบทที่จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีใหม่ (novel algorithm) โดยจะแสดงขั้นตอนการทำงาน และอธิบายขั้นตอนวิธีในลักษณะที่เป็น pseudo code และจะกล่าวถึงบทวิเคราะห์การทำงานของขั้นตอนวิธีใหม่ และในบทที่ 4 จะเป็นบทแสดงผลการทดสอบขั้นตอนวิธีใหม่หลังจากได้นำไปสร้างเป็นชุดคำสั่งเรียบร้อยแล้ว และสุดท้ายจะกล่าวถึงข้อสรุป ปัญหาและงานวิจัยที่น่าสนใจในอนาคต