บทที่ 4

ตรรกวิทยาโมดัลของประพจน์ (Modal Propositional Logic)

1. <u>ไวยากรณภาค</u> (syntax)

1.1 <u>ระบบ T</u>

1) <u>สัญลักษณ์พื้นฐาน</u>

p, q, r, . . .	[ตัวแปรประพจน์]
$\sim$	[ตัวเชื่อมปฏิเสธ]
$\vee$	[ตัวเชื่อมให้เลือก]
L	[ตัวเชื่อมจำเป็น]
(,)	[วงเล็บ]

2) <u>กฎการสร้างสูตร</u>

(1) ตัวแปรประพจน์แต่ละตัวเป็นสูตรมาตรฐาน

(2) ถ้า ϕ เป็นสูตรมาตรฐาน แล้ว ϕ, $L\phi$ เป็นสูตรมาตรฐาน

(3) ถ้าϕ, ψ เป็นสูตรมาตรฐาน แล้ว$(\phi \vee \psi)$ เป็นสูตรมาตรฐาน

3) <u>นิยาม</u>

นิยามสำหรับ . , $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ เหมือนในPC และเพิ่ม

[Def M] $M\phi =_{df} \sim L \sim \phi$

[Def$\Rightarrow$] $(\phi \Longrightarrow \psi) =_{df} L(\phi \longrightarrow \psi)$

[Def$\Leftrightarrow$] $(\phi \Longleftrightarrow \psi) =_{df} ((\phi \Longrightarrow \psi).(\psi \Longrightarrow \phi))$

จากนิยามนี้ สูตรมาตรฐานทุกสูตรของ PC เป็นสูตรมาตรฐานของระบบT

4) สัจพจน์

A1 - A4 เหมือนระบบ PM

A5. $\sim Lp \vee p$

A6. $\sim(L(\sim p \vee q)) \vee (\sim Lp \vee Lq)$

หมายเหตุ สัจพจน์ A5 และ A6 อาจเขียนใหม่โดยใช้นิยามได้ดังนี้

A5'. $Lp \longrightarrow p$

A6'. $L(p \longrightarrow q) \longrightarrow (Lp \longrightarrow Lq)$

5) กฎการอนุมาน

(1) กฎการแทนที่
(2) กฎการยืนยันเงื่อนไข } เหมือนในระบบ PM

(3) กฎแห่งความจำเป็น (the rule of necessitation)

ถ้า ϕ เป็นทฤษฎีบท แล้ว $L\phi$ เป็นทฤษฎีบท

6) การพิสูจน์ทฤษฎีบท

การพิสูจน์ทฤษฎีบทในระบบ T จะมีการอ้างถึงทฤษฎีบทของระบบPM ด้วย นี่คือตัวอย่างการพิสูจน์ทฤษฎีบทของระบบ T

$p \longrightarrow Mp$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

A5′	: $Lp \longrightarrow p$	(1)
(1)($\sim p/p$)	: $L\sim p \longrightarrow \sim p$	(2)
(2)$\times$ Trans.*	: $\sim\sim p \longrightarrow \sim L\sim p$	(3)
Double Negation**	: $p \longrightarrow \sim\sim p$	(4)
(4),(3)$\times$Syll.***	: $p \longrightarrow \sim L\sim p$	(5)
(5)$\times$Def M	: $p \longrightarrow Mp$	(6)

โดยวิธีนี้ จะได้ทฤษฎีบทจำนวนหนึ่ง

1.2 <u>ระบบ S4</u>

ทุกอย่างเหมือนระบบ T และเพิ่มสัจพจน์หนึ่งข้อคือ

A7. $\sim Lp \vee LLp$

<u>หมายเหตุ</u> สัจพจน์นี้เขียนอีกแบบหนึ่งโดยใช้นิยามได้ดังนี้

A7′. $Lp \longrightarrow LLp$

---

*จาก(2) และใช้กฎ transposition เช่น จาก $a \longrightarrow b$ เมื่อใช้กฎนี้ จะได้ $\sim b \longrightarrow \sim a$

** กฎการปฏิเสธซ้อน คือเมื่อ $p \longleftrightarrow \sim\sim p$ จะแยกได้เป็น $p \longrightarrow \sim\sim p$ สูตรหนึ่งด้วย

*** จาก (4) กับ (3) ใช้กฎ syllogism คือถ้ามี $a \longrightarrow b$ และ $b \longrightarrow c$ จะได้ $a \longrightarrow c$

ตัวอย่างการพิสูจน์ในระบบ S4

$$Lp \longleftrightarrow LLp$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

A5′	:	$Lp \longrightarrow p$	(1)
(1)(Lp/p)	:	$LLp \longrightarrow Lp$	(2)
A7′	:	$Lp \longrightarrow LLp$	(3)
(2),(3)×Conj.*	:	$(LLp \longrightarrow Lp).(Lp \longrightarrow LLp)$	(4)
(4)×Def $\longleftrightarrow$	:	$Lp \longleftrightarrow LLp$	(5)

1.3 <u>ระบบS5</u>

ทุกอย่างเหมือนระบบ T และเพิ่มสัจพจน์เข้าไปหนึ่งข้อคือ

A8. $\sim Mp \vee LMp$

<u>หมายเหตุ</u> สัจพจน์นี้สามารถเขียนอีกแบบหนึ่งโดยใช้นิยามได้ดังนี้

A8′. $Mp \longrightarrow LMp$

ตัวอย่างการพิสูจน์ในระบบ S5

$$LMp \longleftrightarrow Mp$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

A5′	:	$Lp \longrightarrow p$	(1)
(1)(Mp/p)	:	$LLp \longrightarrow Lp$	(2)
A8′	:	$Mp \longrightarrow LMp$	(3)
(2),(3)×Conj.	:	$(LMp \longrightarrow Mp).(Mp \longrightarrow LMp)$	(4)
(4)×Def $\longleftrightarrow$	:	$LMp \longleftrightarrow Mp$	(5)

---

*กฎ conjunction ว่าเมื่อมี a กับ b จะได้ a.b

2. <u>อรรถภาค</u> (semantics)

2.1 <u>อรรถการ</u> (interpretation)

ประพจน์ (proposition) คือประโยคบอกเล่าที่สามารถกำหนดค่า จริง หรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ไม่เป็นทั้งสองอย่างพร้อมกัน

p, q, r, . . . แทนประพจน์ใดๆ

ประพจน์จำเป็น (necessary proposition) คือประพจน์ที่เป็นจริงโดยที่ไม่มีทางที่จะเป็นเท็จได้เลยไม่ว่าสถานการณ์จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

L แทน จำเป็น (necessary)

Lp แทน มันจำเป็นว่า p (It is necessary that-p.) หรือ p จำเป็น (p is necessary)

ประพจน์เป็นไปไม่ได้ (impossible proposition) คือประพจน์ที่เป็นเท็จโดยที่ไม่มีทางที่จะเป็นจริงได้เลย ไม่ว่าจะอยู่ในสถานการณ์เช่นไร

ประพจน์เป็นไปได้ (possible proposition) คือประพจน์ที่ไม่เป็นไปไม่ได้ (not impossible proposition) เป็นประพจน์ที่สามารถเป็นจริงได้ แต่ไม่ได้หมายความว่า "แค่เป็นจริงได้" (merely possible) เพราะถ้าเราพูดว่า ประพจน์ p แค่เป็นจริงได้ นั่นเราหมายถึงว่าที่จริงแล้ว p เป็นเท็จ แม้ว่ามันสามารถเป็นจริงได้ แต่ประพจน์เป็นไปได้ในที่นี้หมายรวมถึงประพจน์ที่เป็นจริงทุกประพจน์ นั่นคือกินความรวมถึงประพจน์จำเป็นด้วย คือรวมประพจน์ทุกชนิด ยกเว้นประพจน์เป็นไปไม่ได้

M แทน เป็นไปได้ (possible)

Mp แทน มันเป็นไปได้ว่า p (It is possible-that p)หรือ p เป็นไปได้ (p is possible)

สำหรับความหมายของ "จำเป็น" ในที่นี้หมายถึง "จำเป็นทางตรรกะ" (logcally necessary) ซึ่งหมายถึงว่า เมื่อเราพูดว่า ประพจน์หนึ่งจำเป็น เราไม่ได้หมายความว่า มันเป็นอย่างที่มันเป็นอยู่ หรือในลักษณะที่โลกเป็นอย่างนี้มันไม่สามารถจะไม่เป็นจริงได้(it cannot fail to be true) แต่หมายถึงว่า มันไม่สามารถที่

จะไม่เป็นจริงได้ไม่ว่าสถานการณ์จะเป็นอย่างไร(no matter how things were) หรือไม่ว่าโลกจะเปลี่ยนไปในรูปใด ตัวอย่างเช่นประโยคว่า "วัตถุไม่สามารถเคลื่อนที่ได้เร็วกว่าแสง" แม้หลักฐานทางวิทยาศาสตร์สนับสนุนเช่นนั้น จนเรากล่าวว่า เป็นไปไม่ได้ที่วัตถุจะเคลื่อนที่ได้เร็วกว่าแสง ประโยคเช่นนี้ยังไม่จัดเป็นประโยคที่ "จำเป็น" เพราะเหตุผลที่สนับสนุนคือข้อเท็จจริงในจักรวาลทางฟิสิกส์อย่างที่มันเป็นอยู่นี้ และจักรวาลทางฟิสิกส์อาจสมมุติว่าเป็นอย่างอื่นได้ ประโยคเช่น "ชายโสดทุกคนไม่แต่งงาน" (All bachelors are unmarried.) ประโยคว่า "ไม่มีจัตุรัสกลม" (There are no round squares.) หรือประโยค "มันเป็นวันพฤหัสหรือมิฉะนั้นก็ไม่เป็นวันพฤหัส" (Either it is Thursday or it is not Thursday.) นับว่าเป็นประโยคที่จำเป็น ตามความหมายของ "จำเป็นทางตรรกะ"

เช่นเดียวกัน "เป็นไปไม่ได้" หมายถึง "เป็นไปไม่ได้ทางตรรกะ"(logically impossible)และ "เป็นไปได้" หมายถึง "เป็นไปได้ทางตรรกะ"(logically possible)

ศัพท์โมดัลเหล่านี้มีความสัมพันธ์กัน ความสัมพันธ์ที่สำคัญคือความสัมพันธ์ระหว่าง "จำเป็น" กับ "เป็นไปได้" การพูดว่า " p จำเป็นต้องจริง"(p is necessarily true) สมภาคกับพูดว่า "มันไม่เป็นไปได้ที่ p จะเป็นเท็จ" (It is not possible that p is false.) และประโยคว่า " p เป็นไปได้" (p is possible) สมภาคกับ "มันไม่จำเป็นว่า p เป็นเท็จ" (It is not necessary that p is false.)

สังกัปในตรรกวิทยาโมดัลที่สำคัญอีกอันหนึ่งคือ การ "เอ็นเทล" การพูดว่า " p เอ็นเทล q " หมายถึง q เป็นผลตามมาทางตรรกะจาก p (q follows logically from p) ใช้เครื่องหมาย $\Longrightarrow$ แทน "เอ็นเทล" เช่น p เอ็นเทล q เขียนเป็น $p \Longrightarrow q$ ซึ่งหมายถึงว่า เป็นไปไม่ได้ที่ p จะเป็นจริง โดยที่ q ไม่เป็นจริงด้วย นั่นคือ $(p \Longrightarrow q) \longrightarrow \sim M(p.\sim q)$

2.2 ความจริง (truth)

สำหรับประพจน์ที่ไม่มีศัพท์โมดัลเข้าไปเกี่ยวข้องนั้น ค่าความจริงของมันเหมือนใน PC สำหรับประพจน์ที่มีศัพท์โมดัล ค่าความจริงของมันเป็นดังนี้

Lp หรือ " p จำเป็น" หรือ "มันจำเป็นว่า p " เป็นจริงเมื่อ p เอง จำเป็น เป็นเท็จเมื่อ p ไม่จำเป็น ถ้าเพียงแต่เรารู้ว่า p เป็นจริง เราไม่สามารถบอกได้ว่า p จำเป็นหรือไม่ นั่นคือจากการรู้ว่า p เป็นจริง เราไม่สามารถจะบอกค่าความจริงของ Lp ได้

Mp หรือ "p เป็นไปได้" หรือ "มันเป็นไปได้ว่า p " เป็นจริงเมื่อ p เป็นไปได้ และเป็นเท็จเมื่อ p เป็นไปไม่ได้

สำหรับประพจน์เชิงซ้อนที่ประกอบด้วยตัวเชื่อมใน PC กับLp หรือ Mp เมื่อรู้ค่าความจริงของ Lp หรือMp แล้ว เราก็สามารถหาค่าความจริงของประพจน์เชิง - ซ้อนนั้นได้ โดยใช้ตารางความจริงของ PC

2.3 ความจริงสมบูรณ์ (validity)

2.3.1 ความจริงสมบูรณ์ของสัจพจน์

1) ความจริงสมบูรณ์ของสัจพจน์ระบบ T

เห็นได้ชัดว่าสัจพจน์ A1′-A4′ เป็นสัจพจน์ที่จริงสมบูรณ์ในระบบ T S4 และ S5 เพราะ A1′-A4′ เป็นสัจพจน์ที่จริงสมบูรณ์ในระบบ PM และระบบตรรกวิทยาโมดัล T, S4, S5 ต่างก็มีระบบ PM เป็นส่วนหนึ่งของมัน A1′-A4′ ของระบบ PM จึงจริงสมบูรณ์ในระบบ T, S4 และ S5 ด้วย

สำหรับความจริงสมบูรณ์ของสัจพจน์ A5′, A6′, A7′, A8′ ความหมายของจริงสมบูรณ์ต่างจากใน PC เพราะมันไม่เกี่ยวกับจริง หรือเท็จโดยการเทียบกับโลกที่เราอาศัยอยู่ แต่ขึ้นอยู่กับความหมายของ "จำเป็น" และ "เป็นไปได้" จึงไม่เกี่ยวกับโลกที่เราอาศัยอยู่ ซึ่งจะนำมาเทียบว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใน PC นั้นไม่สามารถจะทำได้ แต่อาศัยพลังสหัชญาณของมนัสของเราในการเข้าใจสถานการณ์ที่ใช้ตัดสินว่าจริงสมบูรณ์หรือไม่ แล้วเลือกสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ตามที่สหัชญาณของเราเข้าใจมาเป็นสัจพจน์ -

การเลือกสัจพจน์เหล่านี้ ใช้หลักดังนี้

(1) จากความหมายของ "จำเป็น" เมื่อ p เป็นประพจน์ที่จำเป็น หมายความว่า p เป็นจริงเสมอ ไม่ว่าจะอยู่ในสถานการณ์เช่นไร หรือไม่ว่าโลกจะเปลี่ยนไปในรูปใด p ก็ยังคงเป็นจริงตลอดเวลา นั่นคือหมายความว่า เป็นไปไม่ได้เลยที่ p จะเป็นเท็จ เพราะฉะนั้น " p จำเป็นต้องจริง" มีความหมายเหมือนกับ "มันเป็นไปไม่ได้ที่ p จะเป็นเท็จ" เช่นเดียวกันการพูดว่า " p เป็นไปได้" มีความหมายเหมือนกับ "มันไม่จำเป็นว่า p เป็นเท็จ" ดังนั้น สมประพจน์ (equivalence) 2 สูตรนี้ควรจัดควรจัดเป็นสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ คือ

$$Lp \longleftrightarrow \sim M \sim p$$
$$Mp \longleftrightarrow \sim L \sim p$$

ระบบที่มีสมประพจน์เช่นนี้ ไม่จำเป็นต้องมีทั้ง L และ M เป็นสัญลักษณ์พื้นฐาน อาจ - เลือกตัวใดตัวหนึ่งเป็นสัญลักษณ์พื้นฐาน และนิยามอีกตัวหนึ่งในรูปของสัญลักษณ์พื้นฐานนั้น ในที่นี้ใช้ L เป็นสัญลักษณ์พื้นฐาน และให้นิยาม M ดังนี้

$$M\phi \ =_{df} \sim L \sim \phi$$

(2) สำหรับความหมายของ "เอ็นเทล" ($\Longrightarrow$) ในที่นี้จะใช้ในความหมายว่า เมื่อไรก็ตามที่ $p \Longrightarrow q$ (p เอ็นเทล q) เป็นไปไม่ได้ที่ p จะเป็นจริงโดยที่ q ไม่ได้เป็นจริงด้วย(whenever p entails q it is impossible that p should be true without q's being true too.) . ดังนั้นเราจึงถือว่าสูตรมาตรฐานนี้จริงสมบูรณ์ คือ

$$(p \Longrightarrow q) \longrightarrow \sim M(p.\sim q)$$

สำหรับกรณีที่ว่าคอนเวิสของสูตรนี้จะจริงสมบูรณ์ด้วยหรือไม่ ก็เป็นประเด็นที่ยังเป็นปัญหาอยู่ คือว่าในทุกกรณีที่มันเป็นไปไม่ได้ที่ p เป็นจริงโดยที่ q ไม่เป็นจริงนั้น เราควรพูดว่า " p เอ็นเทล q " หรือไม่ ในที่นี้จะถือว่าคอนเวิสของมันจริงสมบูรณ์ด้วย ซึ่งจะทำให้ระบบตรรกวิทยาโมดัลมีความยุ่งยากน้อยลง ดังนั้นเราจึงนับว่าสมประพจน์นี้จริงสมบูรณ์ด้วย คือ

$$(p \Longrightarrow q) \longleftrightarrow \sim M(p.\sim q)$$

ในระบบโมดัลในที่นี้จะใช้ $\Longrightarrow$ เป็นสัญลักษณ์พื้นฐาน และให้นิยามดังนี้

$$(\phi \Longrightarrow \psi) =_{df} \sim M(\phi . \sim \psi)$$

นอกจากนี้ยังสามารถให้นิยาม $\phi \Longrightarrow \psi$ ได้อีกอย่างหนึ่งคือ $L(\phi \longrightarrow \psi)$ ซึ่งทำได้โดยใช้ $Mp \longleftrightarrow \sim L \sim p$ และ De Morgan's Law เปลี่ยน $\sim M(p. \sim q)$ เมื่อให้นิยาม $(\phi \Longrightarrow \psi) =_{df} \sim M(\phi . \sim \psi)$ จะเรียกชื่อใหม่ว่าเงื่อนไขเข้มงวดแทน การ "เอ็น - เทล" (และ $\phi \Longrightarrow \psi$ อ่านว่า ϕ strictly implies ψ)

เมื่อ 2 ประพจน์เป็นเงื่อนไขเข้มงวด (strictly imply) ซึ่งกันและกัน เราเรียกว่าแต่ละประพจน์สมภาคเข้มงวด (strictly equivalent) กับอีกประพจน์หนึ่ง ใช้ $\Longleftrightarrow$ แทนสมประพจน์เข้มงวด (strict equivalence) จะได้นิยามดังนี้

$$(\phi \Longleftrightarrow \psi) =_{df} ((\phi \Longrightarrow \psi).(\psi \Longrightarrow \phi))$$

ซึ่งอาจให้นิยามในอีกรูปหนึ่งได้เช่นเดียวกับตัวอย่างก่อนดังนี้

$$(\phi \Longleftrightarrow \psi) =_{df} L(\phi \longleftrightarrow \psi)$$

(3) ตัวเชื่อมโมดัล เช่น L ไม่เป็นทรูธฟังก์ชั่นนัล*(truth-functional) อย่างใน PC ดังนั้น Lp จึงไม่สมภาคกับทรูธฟังก์ชั่น (truth-function) ใดๆของ p (เนื่องจากตัวเชื่อมโมดัลอื่นๆ สามารถนิยามให้อยู่ในเทอมของ L ได้ จึงเป็นการเพียงพอที่จะกล่าวถึงแต่สิ่งที่เกี่ยวข้องกับ L) ทรูธฟังก์ชั่นของ p มี 4 กรณีที่ต่างกันคือ (ก) ประพจน์ปฏิเสธของ p ซึ่งเป็นจริงเมื่อ p เป็นเท็จ (ข) p ซึ่งเป็นจริงเมื่อ

---

*ตัวเชื่อมทรูธฟังก์ชั่นนัล คือตัวเชื่อมที่ประกอบประพจน์ย่อยแล้ว ค่าความจริงของประพจน์ที่ได้ใหม่นั้นขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์ย่อยเพียงอย่างเดียว (เช่นค่าความจริงของ $\sim p$ ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของ p เพียงอย่างเดียว)

ประพจน์ที่สร้างขึ้นด้วยตัวเชื่อมทรูธฟังก์ชั่นนัล เรียกว่าทรูธฟังก์ชั่นของประพจน์ย่อย เช่น $\sim p$ เป็นทรูธฟังก์ชั่นของ p

เป็นจริงเท่านั้น (ค) ทรุธฟังก์ชั่นที่เป็นจริงทั้งเมื่อ p เป็นจริง และ p เป็นเท็จ (ง) ทรุธฟังก์ชั่นที่เป็นเท็จเมื่อ p เป็นจริงและเมื่อ p เป็นเท็จ ดังนั้นจึงไม่นับว่าสูตรต่อไปนี้จริงสมบูรณ์ คือ

$$Lp \longleftrightarrow \sim p$$

$$Lp \longleftrightarrow p$$

$$Lp \longleftrightarrow p \vee \sim p$$

$$Lp \longleftrightarrow p . \sim p$$

(4) แม้ว่า $Lp \longleftrightarrow p$ ไม่จริงสมบูรณ์ แต่เห็นได้ชัดว่าประพจน์เงื่อนไขอันหนึ่งของมันคือ $Lp \longrightarrow p$ เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ เพราะมันแสดงถึงหลักการว่า อะไรก็ตามที่จำเป็นต้องจริงนั้น เป็นจริง (whatever is necessarily true is true.) เรียกสูตรนี้ว่าสัจพจน์แห่งความจำเป็น (axiom of necessity) หลักการอีกอันหนึ่งที่คล้ายกันคือ อะไรที่เป็นจริง ย่อมเป็นไปได้ (whatever is true is possible) ซึ่งเขียนได้เป็น $p \longrightarrow Mp$ เรียกว่าสัจพจน์แห่งความเป็นไปได้ (axiom of possibility) ซึ่งถือว่าจริงสมบูรณ์

(5) หลักการอีกอันหนึ่ง ซึ่งดูเหมือนน่าจะยอมรับได้ทางสหัชญาณ(intuitively acceptable)คือประพจน์ใดๆที่อยู่ในรูปของสูตรที่จริงสมบูรณ์นั้น ไม่เพียงแต่เป็นจริงเท่านั้น แต่มันจำเป็นต้องเป็นจริง นั่นคือถ้าสูตร ϕ ใดๆจริงสมบูรณ์แล้ว ไม่เพียงแต่ทุกสูตรที่อยู่ในรูปเดียวกับ ϕ เป็นจริงเท่านั้น แต่ทุกสูตรที่อยู่ในรูป $L\phi$ เป็นจริงด้วย นั่นคือ $L\phi$ จริงสมบูรณ์ ดังนั้นในระบบโมดัล เราจะมีกฎการอนุมานว่า ถ้า ϕ เป็นทฤษฎีบท แล้ว $L\phi$ เป็นทฤษฎีบทด้วย

(6) หลักการอันสุดท้ายซึ่งสอดคล้องสหัชญาณ (intuitively sound) คือ อะไรก็ตามที่เป็นผลตามมาทางตรรกะจากความจริงที่จำเป็น สิ่งนั้นจำเป็นต้องจริงด้วย (whatever follow logically from a necessary truth is itself necessarily true.) เราจะได้ว่า เมื่อไรก็ตามที่ p จำเป็น และ p บังคับอย่าง

เข้มงวดให้เกิด q (p strictly implies q) แล้ว q จะต้องจำเป็นด้วย นั่นคือ

$$(Lp.(p \Longrightarrow q)) \longrightarrow Lq$$

เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ สูตรนี้อาจเปลี่ยนให้อยู่ในรูปอื่นได้โดยง่าย เพื่อสะดวกในการใช้ คือเปลี่ยนเป็น

$$L(p \longrightarrow q) \longrightarrow (Lp \longrightarrow Lq)$$

2) ความจริงสมบูรณ์ของสัจพจน์ของระบบ S4, S5

สำหรับสูตร $Lp \longrightarrow LLp$ ซึ่งเป็นสัจพจน์ของระบบ S4 และ $Mp \longrightarrow LMp$ ซึ่งเป็นสัจพจน์ของระบบ S5 นั้น ไม่จริงสมบูรณ์ในระบบ T การพิจารณาความจริงสมบูรณ์ของ $Lp \longrightarrow LLp$ ค่อนข้างจะมีปัญหา ไม่เหมือนในระบบ T ซึ่งใช้พลังสหัชญาณของมนัสของคนทั่วๆไปพอจะเข้าใจ และยอมรับความจริงสมบูรณ์ของมันได้ แต่ความจริงสมบูรณ์ของสัจพจน์ 2 ข้อนี้ ค่อนข้างจะเข้าใจยากและมืดมน (obscure) สำหรับคนทั่วไป แม้แต่นักปรัชญาเองบางคนก็ไม่ยอมรับ

เมื่อเราจะพิจารณา $Lp \longrightarrow LLp$ ว่าจริงสมบูรณ์หรือไม่ อาจตั้งคำถามว่าอะไรก็ตามที่จำเป็นนั้น จำเป็นไหมว่ามันจำเป็น? (Is whatever is necessary, necessarily necessary) นั่นคือเมื่อ p เป็นความจริงที่จำเป็ (necessary truth)แล้วความจริงที่ว่า " p เป็นความจริงที่จำเป็น" นั้น ความจริงอันนี้เองนั้นเป็นความจริงที่จำเป็นหรือเปล่า ซึ่งคำถามนี้เป็นปัญหาและมืดมน เพราะว่าเราไม่สามารถเห็นได้อย่างชัดเจนว่าภายใต้เงื่อนไขเช่นไร ที่เราควรจะพูดว่า ประพจน์ใดเป็นประพจน์ที่จำเป็นว่าจำเป็น (necessarily necessary) สำหรับผู้ที่ยอมรับก็จะตอบว่า เมื่อไรก็ตามที่ประพจน์ใดก็ตาม เป็นจริงโดยความจำเป็นทางตรรกะ(by logical necessity) นั้น ไม่ใช่เรื่องบังเอิญแน่นอน แต่มีอะไรบางอย่างที่ผูกมัด(bound) ทางตรรกะให้เป็นเช่นนั้น ดังนั้นจึงควรถือว่า $Lp \longrightarrow LLp$ จริงสมบูรณ์ และเช่นเดียวกันสำหรับ $Mp \longrightarrow LMp$

นอกจากนี้ยังมีเหตุผลอื่นอีกในการยอมรับสูตรทั้งสองนี้ว่า จริงสมบูรณ์ คือนักปรัชญา

บางท่านถือว่าไม่เพียงแต่ประพจน์ที่จำเป็นเท่านั้น ที่จำเป็นว่าจำเป็น(not merely that all necessary propositions are necessarily necessary) แต่ว่าประพจน์ใดมีคุณสมบัติทางโมดัล(modal characteristic) ใดๆ เช่นความจำเป็น ความเป็นไปได้ ความเป็นไปไม่ได้ ความง่อนแง่น แล้วประพจน์เหล่านั้น มีคุณสมบัติเช่นนั้นโดยจำเป็น (It possesses that characteristic by necessity) นั่นคือ แม้ประพจน์ที่เป็นไปได้ มันก็จำเป็นว่าประพจน์นั้นต้องเป็นไปได้(a possible proposition is necessarily possible) นั่นคือ $Mp \longrightarrow LMp$ ควรถือว่าจริงสมบูรณ์ด้วย นักตรรกวิทยาบางคนอาจยอมรับแต่ $Lp \longrightarrow LLp$ แต่ไม่ยอมรับ $Mp \longrightarrow LMp$ ซึ่งจะได้ระบบ S4 ผู้ที่ยอมรับ $Mp \longrightarrow LMp$ เป็นสัจพจน์ จะได้ระบบ S5

2.3.2 <u>ความจริงสมบูรณ์ของระบบ T, S4 และ S5</u>

ความจริงสมบูรณ์ของระบบตรรกวิทยาโมดัล แตกต่างจากความจริงสมบูรณ์ของ PC มาก และค่อนข้างจะยากที่จะเข้าใจ เนื่องจากระบบตรรกวิทยาโมดัลนั้นยอมรับความหมายของ "ความจำเป็น" และ "ความเป็นไปได้" ต่างกันหลายแบบ จึงทำให้ความหมายของความจริงสมบูรณ์แตกต่างกันไปด้วยในแต่ละระบบ ดังนั้นเพื่อที่จะให้ง่ายแก่การเข้าใจ จะเสนอในรูปเกมส์(game) และนิยามความจริงสมบูรณ์ในรูปของเกมส์ก่อน

<u>เกมส์ PC</u>

การหาความจริงสมบูรณ์ของสูตรมาตรฐานใน PC นั้นทำได้ง่ายโดยใช้ตารางความจริงของแต่ละตัวเชื่อม เกมส์PC จะมีพื้นฐานอยู่บนตารางความจริงดังนี้

เกมส์ PC ประกอบด้วย

1) ผู้เล่นเกมส์ 1 คน
2) แผ่นกระดาษ 1 แผ่น ซึ่งเขียนตัวอักษรตัวแปรประพจน์ p, q, r, . . . ไว้จำนวนหนึ่ง

เราจะเรียกผู้เล่นและแผ่นกระดาษที่เขียนตัวอักษรว่า ชุดการเล่น PC (PC-setting) ในชุดการเล่นPC ชุดหนึ่งๆนั้น จะต่างกันที่แผ่นกระดาษซึ่งเขียนตัวอักษรแตกต่างกัน

<u>วิธีเล่น</u> เล่นโดยเราขานชื่อตัวอักษรของสูตรมาตรฐานของ PC และให้ผู้เล่นยกมือ หรือไม่ยกมือ แต่การขานชื่อนี้ต้องมีการเตรียมไว้อย่างดีก่อนแล้ว และก่อนที่จะขานสูตร ϕ เราจะขานสูตรย่อยๆของ ϕ เสียก่อน โดยเริ่มจากตัวแปรประพจน์ เช่น ถ้าจะขานชื่อ $(\sim p \vee p)$ เราจะขานชื่อ p ก่อน แล้ว $\sim p$ แล้วก็ $(\sim p \vee p)$ ตามลำดับ ในการขานชื่อนี้จะต้องเปลี่ยนสูตรที่จะขานชื่อให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์พื้นฐานเสียก่อน และมีกติกาสำหรับผู้เล่นดังนี้

1) เมื่อเขาขานชื่อตัวอักษร ให้ผู้เล่นยกมือ ในกรณีที่ตัวอักษรนั้นมีในแผ่นกระดาษของตน กรณีอื่นๆไม่ต้องยกมือ

2) เมื่อเขาขานชื่อ $\sim\phi$ (ϕ เป็นสูตรมาตรฐาน) ให้ผู้เล่นยกมือ ในกรณีที่เมื่อเขาขานชื่อ ϕ แล้วไม่ยกมือ (คือเมื่อขานชื่อ ϕ แล้วไม่ยกมือ เมื่อขานชื่อ $\sim\phi$ ให้ยกมือ) และไม่ยกมือในกรณีที่ผู้เล่นยกมือเมื่อขานชื่อ ϕ (คือเมื่อขานชื่อ ϕ ผู้เล่นยกมือ ดังนั้นเมื่อขานชื่อ$\sim\phi$ ไม่ต้องยกมือ)

3) เมื่อเขาขานชื่อ $(\phi \vee \psi)$ ให้ผู้เล่นยกมือ ในกรณีที่ได้ยกมือเมื่อเขาขานชื่อ ϕ หรือเมื่อเขาขานชื่อ ψ ไม่ต้องยกมือ ในกรณีที่เขาขานชื่อ ϕ แล้วไม่ได้ยกมือ และเมื่อเขาขานชื่อ ψ แล้วไม่ได้ยกมือ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

ให้ ϕ คือ $p \longrightarrow p$

เปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์พื้นฐานได้ $\sim p \vee p$

มีผู้เล่น 1 คน ซึ่งถือแผ่นกระดาษที่มีตัวอักษร p ดังนี้ $\boxed{p}$ อยู่ 1 แผ่น

<u>วิธีเล่น</u>

ขานครั้งที่ 1	: p	
ผู้เล่น	: ยกมือ	(กติกาข้อ 1)
ขานครั้งที่ 2	: $\sim p$	
ผู้เล่น	: ไม่ยกมือ	(กติกาข้อ 2)

ขานครั้งที่ 3 : $\sim p \vee p$
ผู้เล่น : ยกมือ (กติกาข้อ 3)

ในกรณีที่ผู้เล่นยกมือเมื่อขานชื่อสูตรมาตรฐาน ϕ เรียก ϕ ว่า "ได้ผล" (successful) ในชุดการเล่น(setting) นั้นๆ บางสูตร ϕ อาจ "ได้ผล" ในชุดการเล่นบางชุด และบางสูตร ϕ "ได้ผล"ในทุกๆชุดการเล่น เราจะเรียกสูตรที่ "ได้ผล"ในทุกๆชุดการเล่นว่า "ได้ผล-PC " (PC-sucessful)

ในกรณีที่ ϕ มีตัวแปร n ตัว จะมีชุดการเล่นที่ต่างกันได้ 2^n ชุด (หรือมีกระดาษ 2^n แผ่น ซึ่งเขียนตัวอักษรบ้าง ไม่เขียนบ้าง) ในตัวอย่างข้างบนนี้มีตัวแปรตัวเดียวคือ p จึงมีชุดการเล่นที่ต่างกันได้ 2 ชุด (คือมีแผ่นกระดาษที่มีตัวอักษรครั้งหนึ่ง และมีแผ่นกระดาษเปล่าอีกครั้งหนึ่ง)

<u>นิยาม</u> สูตรมาตรฐาน ϕ ที่"ได้ผล-PC "เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์

สำหรับเกมส์ PC ถ้าให้ V แทนชุดการเล่นใดๆ และ $V(\phi)=1$ แทนผู้เล่นยกมือในชุดการเล่น V เมื่อเขาขานชื่อ ϕ และ$V(\phi)=0$ แทนผู้เล่นไม่ยกมือในชุดการเล่น V เมื่อขานชื่อ ϕ จะเห็นได้ชัดว่า ชุดการเล่นของแต่ละสูตร ϕ ใน PC จะมี 2^n กรณี นั่นคือเท่ากับจำนวนกรณีที่ใช้ตารางความจริงวิเคราะห์ค่าความจริงของสูตร ϕ ใดๆ

<u>เกมส์ T</u>

สำหรับเกมส์ T นั้นต่างจากเกมส์ PC คือเกมส์ PC ใช้ผู้เล่น 1 คน แต่เกมส์ T ใช้ผู้เล่นตั้งแต่ 1 คนขึ้นไป แต่ละคนก็มีแผ่นกระดาษคนละ 1 แผ่นเหมือนเกมส์ PC แต่ตัวอักษรบนแผ่นกระดาษควรแตกต่างกันไป และตำแหน่งของผู้เล่นเกมส์จะถูกกำหนดให้อยู่ในตำแหน่งซึ่งให้ผู้เล่นแต่ละคนสามารถเห็นหรือไม่เห็นคนอื่นๆในระหว่างการเล่น อาจโดยใช้ฉากกั้นก็ได้ การจัดลำดับการเห็นไม่จำเป็นต้องให้มีการย้อนกลับ เช่น ถ้าผู้เล่น A สามารถเห็นผู้เล่น B แล้วผู้เล่น B อาจไม่เห็นหรือเห็น A ก็ได้

ดังนั้น

เกมส์ T ประกอบด้วย

1) ผู้เล่น 1 ชุด (ผู้เล่นตั้งแต่ 1 คนขึ้นไป)

2) แต่ละคนมีแผ่นกระดาษคนละ 1 แผ่น (ซึ่งตระเตรียมไว้ก่อน)

3) ความสัมพันธ์ทางการเห็น(seeing relation) ดังนี้ ให้ถือว่าผู้เล่นแต่ละคนเห็นตัวเอง และสำหรับผู้เล่นแต่ละคนอาจไม่ให้เห็นคนอื่นๆเลย(ไม่เห็นใครเลยนอกจากตัวเอง) หรือให้เห็นคนอื่นๆตั้งแต่ 1 คนขึ้นไป จนถึงกรณีที่ผู้เล่นแต่ละคนสามารถเห็นผู้เล่นคนอื่นๆทุกคน(ต่างคนต่างเห็นกันหมด)ก็ได้

กติกา กติกาสำหรับผู้เล่นเพิ่มเติมจากกติกาในเกมส์ PC อีกคือ

4) เมื่อเขาขานชื่อ Lϕ (ϕ เป็นสูตรมาตรฐานของระบบ T) ให้ยกมือในกรณีที่ผู้เล่นทุกๆคนที่ท่านสามารถเห็นได้(รวมทั้งตัวท่านเองด้วย)ยกมือ เมื่อเขาขานชื่อ ϕ' นอกจากนี้ไม่ต้องยกมือ

5) เมื่อเขาขานชื่อ Mϕ ให้ยกมือ ในกรณีที่ผู้เล่นอย่างน้อย 1 คนที่ท่านสามารถเห็น(รวมทั้งตัวท่านด้วย)ยกมือเมื่อเขาขานชื่อ ϕ นอกจากนี้ไม่ต้องยกมือ

ข้อแตกต่างระหว่างเกมส์ PC กับเกมส์ T อีกอันหนึ่งคือ เกมส์ PC นั้นมีผู้เล่นคนเดียว จึงไม่ต้องดูคนอื่นๆ ดูการยกมือของคนคนเดียว แต่ในเกมส์ T ผู้เล่นแต่ละคนต้องดูการยกมือของผู้เล่นคนอื่นๆที่เขาสามารถเห็นด้วย ว่ายกมือกันอย่างไรในการขานครั้งก่อน ดังนั้นในชุดการเล่น PC จึงมีการยกมือ หรือไม่ยกมือ แต่ในชุดการเล่น-T ต้องพิจารณารูปแบบของการยกมือ (pattern of hand raising) ด้วย ในชุดการเล่น T ชุดหนึ่งๆอาจมีผู้ยกมือมากบ้างน้อยบ้าง ในบางชุดการเล่น อาจมีผู้ยกมือทุกคน ในกรณีเช่นนี้เรียกว่า "ได้ผล" (successful) ในชุดการเล่นนั้นๆ ในการขานชื่อสูตรบางสูตร อาจ "ได้ผล"ในทุกๆชุดการเล่น ไม่ว่าจะมีผู้เล่นกี่คน ไม่ว่าจะสลับตัวอักษรบนแผ่นกระดาษของผู้เล่นอย่างไร และไม่ว่าจะจัดลำดับการเห็นอย่างไร เราเรียกการขานชื่อในกรณีเช่นนี้ว่า "ได้ผล-T " (T-successful)

<u>นิยาม</u> สูตรมาตรฐาน ϕ ที่ "ได้ผล-T" เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ในระบบ T

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 ϕ : $Lp \longrightarrow p$

เปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์พื้นฐานได้ $\sim Lp \vee p$

พิจารณาผู้เล่นคนใดคนหนึ่ง

<u>กรณีที่</u> 1 ในแผ่นกระดาษของผู้เล่นมี p เขียนอยู่ ดังนี้ $\boxed{p}$

ขานครั้งที่ 1 : p

ผู้เล่น : ยกมือ (กติกาข้อ 1)

ขานครั้งที่ 2 : $\sim Lp \vee p$

ผู้เล่น : ยกมือ (กติกาข้อ 3)

ดังนั้น $\sim Lp \vee p$ "ได้ผล" ในชุดการเล่นนี้

<u>กรณีที่</u> 2 ในแผ่นกระดาษของผู้เล่นไม่มี p ดังนี้ $\boxed{}$

ขานครั้งที่ 1 : p

ผู้เล่น : ไม่ยกมือ (กติกาข้อ 1)

ขานครั้งที่ 2 : Lp

ผู้เล่น : ไม่ยกมือ (กติกาข้อ 4)

ขานครั้งที่ 3 : $\sim Lp$

ผู้เล่น : ยกมือ (กติกาข้อ 2)

ขานครั้งที่ 4 : $\sim Lp \vee p$

ผู้เล่น : ยกมือ (กติกาข้อ 3)

ดังนั้น $\sim Lp \vee p$ "ได้ผล" ในชุดการเล่นนี้

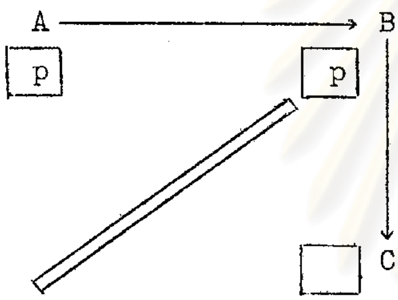
เพราะฉะนั้นผู้เล่นทุกคนยกมือเมื่อขาน $\sim Lp \vee p$ จะได้ว่า $Lp \longrightarrow p$ "ได้ผล-T" หรือเป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ในระบบ T

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 $\phi : Lp \longrightarrow LLp$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์พื้นฐาน ได้ $\sim Lp \vee LLp$

ในบางชุดการเล่น-T สูตรนี้ "ได้ผล" แต่ในบางชุดการเล่นไม่ "ได้ผล" ต่อไปนี้จะแสดงกรณีที่ชุดการเล่น-T ไม่ "ได้ผล" ดังนี้

ให้มีผู้เล่น 3 คนคือ A, B และ C มีแผ่นกระดาษ $\boxed{p}$, $\boxed{p}$ และ $\boxed{}$ ตามลำดับ และให้ A สามารถเห็น B B สามารถเห็น C แต่ A ไม่สามารถเห็น C แสดงโดยแผนภาพดังนี้



ทิศทางของลูกศร แสดงลำดับการเห็น

การเล่นเริ่มดังนี้

ขานครั้งที่ 1 : p

ผู้เล่น : A ยกมือ, B ยกมือ , C ไม่ยกมือ

ขานครั้งที่ 2 : Lp

ผู้เล่น : A ยกมือ(เพราะทุกคนที่ A สามารถเห็น รวมทั้ง A เอง ด้วย ยกมือเมื่อขานชื่อ p), B ไม่ยกมือ, C ไม่ยกมือ

ขานครั้งที่ 3 : LLp

ผู้เล่น : ไม่มีใครยกมือ(แม้แต่ A ก็ไม่ยกมือ เพราะคนที่เขาเห็นคือ B ไม่ยกมือเมื่อขานชื่อ Lp)

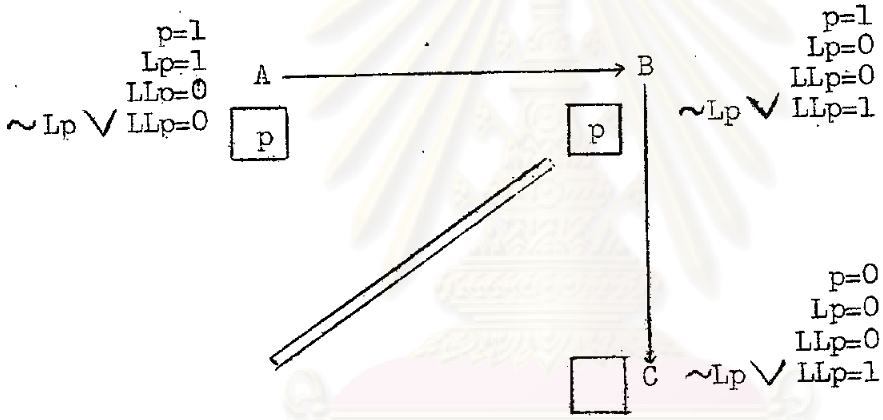
ขานครั้งที่ 4 : $\sim Lp$

ผู้เล่น : A ไม่ยกมือ(เพราะ A ยกมือเมื่อขาน Lp ดังนั้นเมื่อขาน $\sim Lp$ จึงไม่ยกมือ) B และ C ยกมือ(เพราะเมื่อขาน Lp เขาไม่ยกมือ จึงยกมือเมื่อขาน $\sim Lp$)

ขานครั้งที่ 5 : $\sim Lp \vee LLp$

ผู้เล่น : A ไม่ยกมือ, B และ C ยกมือ(B และ C ยกมือเพราะว่าเขายกมือเมื่อขาน $\sim Lp$)

ถ้าให้ 1 แทน ผู้เล่นยกมือ 0 แทนผู้เล่นไม่ยกมือ จะได้ดังนี้



ดังนั้น $\sim Lp \vee LLp$ หรือ $Lp \longrightarrow LLp$ จึงไม่ "ได้ผล-T" เพราะว่ามีอย่างน้อย 1 คนคือ A ไม่ยกมือในอย่างน้อย 1 ชุดการเล่น(คือชุดการเล่นชุดนี้) จึงได้ว่า $Lp \longrightarrow LLp$ ไม่จริงสมบูรณ์ในระบบ T

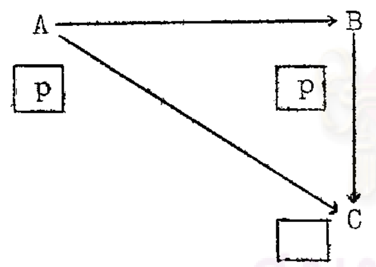
<u>เกมส์ S4</u>

เกมส์ S4 เหมือนกับเกมส์ T เกือบทั้งหมด นอกจากความสัมพันธ์ทางการ

เห็นต้องเป็นทรานซิทีฟ *(transitive) (คือในจำนวนผู้เล่น 3 คน A, B, C ใดๆ ถ้า A สามารถเห็น B และB สามารถเห็น C แล้ว A ต้องสามารถเห็น C ด้วย และถ้ามีผู้เล่นน้อยกว่า 3 คนก็ถือว่าเป็นทรานซิทีฟแล้ว) ชุดการเล่นที่ประกอบด้วยเงื่อนไขเช่นนี้ เรียกว่า ชุดการเล่น-S4 (ทุกชุดการเล่น-S4 เป็นชุดการเล่น T แต่ไม่ใช่ว่าทุกชุดการเล่น-T จะเป็นชุดการเล่น-S4) ในชุดการเล่น-S4 ใดๆ ถ้าผู้เล่นทุกคนยกมือ เรียกชุดการเล่นนั้นว่า "ได้ผล" ในกรณีที่ "ได้ผล" ทุกชุดการเล่น-S4 เรียกว่า "ได้ผล-S4 "(S4-successful)

<u>นิยาม</u> สูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆที่ "ได้ผล-S4 " เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ในระบบ S4

<u>ตัวอย่างที่</u>1 จากตัวอย่างที่ 2 ในเกมส์ T เมื่อต้องการให้ A เห็น C ก็เอาฉากกั้นออก



จากสูตร $Lp \longrightarrow LLp$ หรือ $\sim Lp \vee LLp$

เมื่อขานชื่อp	:	A,B ยกมือ, C ไม่ยกมือ
" Lp	:	ทุกคนไม่ยกมือ
" $\sim Lp$	:	ทุกคนยกมือ
" $\sim Lp \vee LLp$	:	ทุกคนยกมือ

และไม่ว่าจะเปลี่ยนชุดการเล่นใหม่ โดยเปลี่ยนแผนกระดาษชุดใหม่ระหว่าง A, B และC อย่างไร จะได้ว่า เมื่อขาน $\sim Lp \vee LLp$ แล้วทุกคนยกมือในทุกชุดการเล่น นั่นคือ$\sim Lp \vee LLp$ หรือ $Lp \longrightarrow LLp$ เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ในระบบ S4

---

*ให้ R เป็นความสัมพันธ์ใดๆ aRb (a สัมพันธ์กับ b) และ bRc จะได้ว่า aRc

ตัวอย่างที่ 2 ϕ : $Mp \longrightarrow LMp$

เปลี่ยนเป็น $\sim Mp \vee LMp$

ให้มีผู้เล่น 2 คน คือ A กับ B ให้ A สามารถเห็น B แต่ B ไม่สามารถเห็น A และ A มีแผ่นกระดาษ $\boxed{p}$ B มีแผ่นกระดาษเปล่า $\boxed{}$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \boxed{p} & & \boxed{} \end{array}$$

ขานครั้งที่ 1 : p

ผู้เล่น : A ยกมือ, B ไม่ยกมือ

ขานครั้งที่ 2 : Mp

ผู้เล่น : A ยกมือ(∵ มีอย่างน้อย1 คนคือตัวเขาเองที่ยกมือเมื่อขานชื่อ p) B ไม่ยกมือ (∵ B ไม่เห็นใครยกมือเลย เมื่อขานชื่อ p)

ขานครั้งที่ 3 : LMp

ผู้เล่น : A ไม่ยกมือ, B ไม่ยกมือ

ขานครั้งที่ 4 : $\sim Mp$

ผู้เล่น : A ไม่ยกมือ , B ยกมือ

ขานครั้งที่ 5 : $\sim Mp \vee LMp$

ผู้เล่น : A ไม่ยกมือ, B ยกมือ

จะเห็นว่าในชุดการเล่นชุดนี้มีบางคนไม่ยกมือ ∴ $Mp \longrightarrow LMp$ จึงไม่เป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ในระบบ S4

เกมส์ S5

เกมส์ S5 ต่างไปจากเกมส์ S4 และเกมส์T คือในเกมส์ S5 นั้น ผู้เล่นทุกคนต้องสามารถเห็นผู้เล่นคนอื่นๆทุกคน(และผู้เล่นสามารถเห็นตัวเองด้วย) ชุดการเล่นใดที่ผู้เล่นทุกคนยกมือ เรียกชุดการเล่นนั้นว่า "ได้ผล" กรณีที่ทุกๆชุดการเล่นใน S5 "ได้ผล" เรียกว่า "ได้ผล -S5 " (S5-successful)

<u>นิยาม</u> สูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ "ได้ผล-S5 " สูตรนั้นเป็นสูตรที่จริงสมบูรณ์ในระบบ S5

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จากตัวอย่างที่ 2 ในเกมส์S4 เมื่อให้ A สามารถเห็น B และ B สามารถเห็น A ด้วย

เมื่อขาน	p	:	A ยกมือ ,B ไม่ยกมือ
"	Mp	:	A ยกมือ, B ยกมือ
"	LMp	:	A ยกมือ B ยกมือ
"	$\sim$Mp	:	A,B ไม่ยกมือ
"	$\sim$Mp$\vee$LMp	:	A,B ยกมือ

ดังนั้น $Mp \longrightarrow LMp$ ซึ่งไม่จริงสมบูรณ์ในระบบ S4 แต่จริงสมบูรณ์ในระบบ S5

<u>นิยามของความจริงสมบูรณ์อย่างเป็นแบบแผน</u> (formal definition)

<u>ระบบ T</u>

ในชุดการเล่นของเกมส์ T ประกอบด้วย 3 ส่วนคือ

1) กลุ่มผู้เล่น

2) การจัดระเบียบการเห็น(a seeing arrangement)

3) ชุดของกติกาสำหรับปฏิบัติต่อการขานชื่อสูตรมาตรฐานสำหรับแผ่นกระดาษที่เขียนตัวอักษร จัดไว้ในข้อ 3 เพราะเป็นการทำตามกติกา ในการปฏิบัติต่อการขานชื่อตัวอักษร

จะให้นิยามความจริงสมบูรณ์อย่างเป็นแบบแผนที่มีโครงสร้างอย่างเกมส์ T ดังนี้ แทนที่จะพูดว่ามีกลุ่มของผู้เล่น เราจะเรียกว่า เรามี เซท* (set)W ซึ่งเป็นเซทของสิ่งของบางอย่าง(สิ่งของนี้มักเรียกกันว่า โลก(world))

---

*ในความหมายว่า กลุ่ม หรือ ชุด

ใช้ตัวอักษร $w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots$ แทนสมาชิก (member) ของ W สำหรับลักษณะความสัมพันธ์ทางการเห็นในเกมส์ T มีลักษณะ (1) เป็นความสัมพันธ์ยมก(dyadic) คือเป็นความสัมพันธ์ระหว่างของสองสิ่ง (2) ในชุดการเล่น T ใดๆเป็นการจัดระเบียบต่อผู้เล่น คือบอกว่าในระหว่างผู้เล่น A กับ B นั้น A สามารถเห็น B หรือ A ไม่สามารถเห็น B (3) เป็นความสัมพันธ์สะท้อนกลับ (reflexive) คือผู้เล่นแต่ละคนสัมพันธ์ทางการเห็นกับตัวเอง คือตัวเองสามารถเห็นตัวเอง เราจะแทนความสัมพันธ์สะท้อนกลับด้วย R ซึ่งกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของ W และในเกมส์ PC ชุดการเล่นของสูตรใดๆมีได้ 2^n กรณีที่ต่างกันซึ่งเหมือนกันกับการกำหนดค่าของแต่ละสูตรในการวิเคราะห์ค่าความจริง เมื่อให้การยกมือแทนการกำหนดค่า 1 แก่สูตร และการไม่ยกมือแทนการกำหนดค่า 0 แก่สูตร ในเกมส์ T ก็เช่นเดียวกัน แต่การยกมือในเกมส์ T นั้นเป็นการยกมือของผู้เล่นหลายคน ฉะนั้น เมื่อให้ $V(\phi) = 1$ หรือ 0 นั้นต้องบอกว่าเมื่อเทียบกับ(with respect to) สมาชิกใดใน W (เพราะว่าสมาชิกของ W นั่นเอง คือผู้เล่น) นั่นคือ เมื่อ w_i เป็นสมาชิกของ W ดังนั้นเมื่อเราได้ว่า $V(\phi) = 1$ (หรือ 0) เมื่อเทียบกับ w_i จึงเขียนแทนด้วย $V(\phi,w_i) = 1$ หรือ $V(\phi,w_i) = 0$

สำหรับกฎการคำนวณค่าสูตรมาตรฐานใดๆนั้น มีดังนี้

1) ให้ V เป็นตัวกำหนดค่าให้แก่ตัวแปรในสูตร แต่ต้องระบุว่าเมื่อเทียบกับสมาชิกใดใน W เช่น จะคำนวณค่าของ $Lp \longrightarrow p$ ใน 3 โลกคือ w_1, w_2, w_3 เราต้องบอกว่า V กำหนดค่า 1 หรือ 0 แก่สูตรเมื่อเทียบกับ w_1 หรือ w_2 หรือ w_3 เป็นต้น (อันนี้ตรงกับการมีหรือไม่มีตัวอักษรบนแผ่นกระดาษของผู้เล่นเกมส์ T)

2) สำหรับสูตรมาตรฐานที่ซับซ้อน(complex formula) เช่นเดียวกันที่ผู้เล่นปฏิบัติต่อการขานชื่อ $\sim\phi$, $\phi\vee\psi$, $L\phi$ หรือ $M\phi$ โดยขึ้นอยู่กับการยกมือเมื่อขานชื่อ ϕ หรือ ψ เช่นเดียวกัน การกำหนดค่าของ $\sim\phi$, $\phi\vee\psi$, $L\phi$ หรือ $M\phi$ ในแต่ละสมาชิกของ W ก็ขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าของ ϕ และ ψ ในแต่ละสมาชิกของ W

เราจะเรียกเซทของสิ่งของ W ความสัมพันธ์ R และตัวกำหนดค่า V เมื่อสอดคล้องเงื่อนไขที่กล่าวแล้วร่วมกันว่า เป็น "โมเดล -T "(T-model) เห็นได้ชัดว่าโมเดล-T เป็นการแสดงถึงโครงสร้างของเกมส์ T นั่นเอง นิยามของความจริงสมบูรณ์ของ T ที่ว่าต้อง "ได้ผล" ในทุกๆจุดการเล่น-T เขียนใหม่เป็นว่า สูตรมาตรฐาน ϕ จริงสมบูรณ์ในระบบ T ก็ต่อเมื่อ (if and only if) ในทุกๆโมเดล -T $V(\phi,w_i) = 1$ สำหรับทุกๆ w_i ใน W

เราจะกำหนดที่กล่าวมาแล้วเป็นข้อๆได้ดังนี้

เรานิยามโมเดล-T เป็น "ตรีลำดับ"(ordered triple) $\langle W,R,V\rangle$ เมื่อ W เป็นเซทของสิ่งของ(โลก) R เป็นความสัมพันธ์สะท้อนกลับที่กำหนดต่อสมาชิกใน W และ V เป็นตัวกำหนดค่าที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1) สำหรับตัวแปรประพจน์ใดๆ p_j และสำหรับ w_i ใดๆ ซึ่งเป็นสมาชิกของ W จะได้ว่า $V(p_j,w_i) = 1$ หรือ $V(p_j,w_i) = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

2)[V~] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ และสำหรับ $w_i \in$ *W, $V(\sim\phi,w_i)=1$ ถ้า $V(\phi,w_i) = 0$ นอกจากนี้ $V(\sim\phi,w_i) = 0$

3)[V∨] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ และ ψ ใดๆ และสำหรับ $w_i \in W$, $V((\phi\vee\psi),w_i) = 1$ ถ้า $V(\phi,w_i) = 1$ หรือ $V(\psi,w_i) = 1$ อย่างใดอย่างหนึ่ง นอกจากนี้ $V((\phi\vee\psi),w_i) = 0$

4)[VL] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ และสำหรับ $w_i \in W$, $V(L\phi,w_i) = 1$ ถ้าสำหรับทุก $w_j \in W$ ซึ่ง w_iRw_j, $V(\phi,w_j) = 1$ นอกจากนี้ $V(L\phi,w_i) = 0$**

---

*แทนคำว่า "เป็นสมาชิกของ"

** $M\phi =_{df} \sim L\sim\phi$ จึงไม่จำเป็นต้องกำหนดกฎสำหรับ M ถ้าจะนิยามจะได้ดังนี้[VM] สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ และสำหรับ $w_i \in W$, $V(M\phi,w_i) = 1$ ถ้ามีอย่างน้อยหนึ่ง $w_j \in W$ ซึ่ง w_iRw_j , $V(\phi,w_j) = 1$ นอกจากนี้ $V(M\phi,w_j) = 0$

ดังนั้นจึงนิยามความจริงสมบูรณ์ของสูตรมาตรฐานในระบบ T ดังนี้

<u>นิยาม</u> สำหรับสูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ จะจริงสมบูรณ์ในระบบ T ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆโมเดล-T $\langle W,R,V\rangle$ และสำหรับทุก $w_i \in W$, $V(\phi,w_i)=1$

<u>ระบบ S4</u>

ความแตกต่างระหว่างเกมส์ T และเกมส์ S4 ก็คือในเกมส์ S4 นั้นความสัมพันธ์ทางการเห็นต้องเป็นทรานซิทีฟด้วย (ความสัมพันธ์ R ใดๆจะเรียกว่าเป็นความสัม - พันธ์ทรานซิทีฟ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ x, y, z ถ้า xRy และ yRz แล้วจะได้ xRz) ดังนั้นโมเดล-S4 (S4-model) ก็คือ ตรีลำดับ $\langle W,R,V\rangle$ เมื่อ W และ V มีความหมายแบบเดียวกับในโมเดล-T และ R เป็นความสัมพันธ์ทั้งสะท้อนกลับและทรานซิทีฟที่กำหนดต่อสมาชิกใน W

<u>นิยาม</u> สูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ จะจริงสมบูรณ์ในระบบ S4 ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆโมเดล-S4 $\langle W,R,V\rangle$ และสำหรับทุก $w_i \in W$, $V(\phi,w_i) = 1$

<u>ระบบ S5</u>

ความแตกต่างระหว่างเกมส์ S4 กับเกมส์ S5 คือในเกมส์ S5 นั้นความสัมพันธ์ทางการเห็นต้องเป็นความสัมพันธ์ย้อนกลับ (symmetrical) ด้วย (ความสัมพันธ์ R เรียกว่าเป็นความสัมพันธ์ย้อนกลับ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ x, y ถ้า xRy จะได้ yRx ด้วย) ดังนั้นโมเดล-S5 คือ ตรีลำดับ $\langle W,R,V\rangle$ เมื่อ W และ V มีความหมายเหมือนที่กล่าวแล้ว และ R เป็นความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับทุกๆ w_i, $w_j \in W$, w_iRw_j

<u>นิยาม</u> สูตรมาตรฐาน ϕ ใดๆ จะจริงสมบูรณ์ในระบบS5 ก็ต่อเมื่อทุกโมเดล-S5 $\langle W,R,V\rangle$ และสำหรับทุก $w_i \in W$, $V(\phi,w_i) = 1$

<u>อรรถการทางสัญญาณของความจริงสมบูรณ์ของระบบโมดัล</u>

การให้ความจริงสมบูรณ์ของสูตรใดๆ ที่กล่าวมาแล้วในเกมส์โมดัลนั้น ใช้วิธีกำหนดค่า 1 กับ 0 แก่ประพจน์ย่อยในสูตร แล้วคำนวณค่าของสูตรนั้นออกมาตามวิธีการวิธีการเช่นนี้คือการให้ความหมายแก่สูตร โดยที่ค่า 1 กับ 0 ไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของระบบเราอาจนึกว่ามันแทน "จริง" และ "เท็จ" ตามลำดับ อย่างในตรรกวิทยาคลาสสิค ซึ่งถ้าเราใช้ความหมายเช่นนี้ เราอาจให้นิยามของความจริงสมบูรณ์อย่างง่ายๆว่า ความจริงสมบูรณ์ คือความจริงของสูตรในทุกโลกและในทุกโมเดล (โมเดลที่เหมาะสมของแต่ละระบบ)

คำว่า "โลก"(world) เป็นคำที่นักตรรกวิทยานิยมใช้กันมากเมื่อนักตรรกวิทยาต้องการนิยามความหมายของ "ความจริงสมบูรณ์" คำนี้รู้สึกว่าเหมาะสมดีแล้วแต่ยังมีคำอื่นที่ได้ความหมายดีกว่า เช่น "สถานภาพที่สามารถเข้าใจได้" (conceivable state of affairs) คำนี้มีความหมายดังนี้ ประพจน์หนึ่งๆ เช่น p เป็นข้อความที่บอกสถานภาพไม่ว่าจะเป็นจริงหรือเท็จก็ตาม เมื่อเรามีประพจน์เช่นนี้หลายๆประพจน์ และบอกได้ว่าประพจน์ไหนจริง ประพจน์ไหนเท็จ เราก็จะเข้าใจสถานภาพเหล่านั้นได้ และโดยการแปรเปลี่ยน(vary) ประพจน์เหล่านี้ให้แตกต่างไปจากเดิม เราก็สามารถจะระบุสถานภาพได้หลายอย่าง ไม่ว่าจะเป็นสถานภาพที่เป็นจริง หรือสถานภาพที่เป็นเท็จก็ตามต่างก็จัดเป็นสถานภาพที่สามารถ"เข้าใจ" (conceive) ได้ทั้งสิ้น สถานภาพเหล่านี้นั่นเองที่นักตรรกวิทยาเรียกว่า"โลก"

ในการเล่นเกมส์โมดัล ตัวอักษร(ประพจน์)บนกระดาษของผู้เล่นเกมส์ คือสถานภาพที่สามารถ"เข้าใจ"ได้ หรือ "โลก" คือเป็นโลกที่ประพจน์(ที่ปรากฏบนแผ่นกระดาษของเขา)นั้นเป็นจริง และประพจน์ที่ไม่ปรากฏบนแผ่นกระดาษของเขาเป็นเท็จ และผู้เล่นเกมส์คนหนึ่งจะคิดว่า ตัวอักษรบนแผ่นกระดาษของผู้อื่นที่เขาสามารถเห็น (เห็นการยกมือ ซึ่งทำให้รู้ว่าประพจน์ใดจริงหรือเท็จ)นั้น คือสถานภาพที่สามารถ"เข้าใจได้หลายๆแบบ แม้ว่าจะไม่ใช่สถานภาพที่เป็นจริง/และเขาจะสมมุติว่าตัวอักษรบนแผ่นกระดาษของผู้อื่นทั้งหมด(ที่เขาสามารถเห็นได้)เหล่านั้น แทนสถานภาพที่เขาสามารถ

"เข้าใจ"ได้ทั้งหมด

ความจริงสมบูรณ์ของระบบ S5

ในการเล่นเกมส์โมดัล เมื่อผู้เล่นคนหนึ่งจะพิจารณาว่า ประพจน์อันหนึ่ง p เป็นจริงหรือไม่ เขาเพียงแต่หาว่า p เป็นจริงหรือไม่ในโลกของเขา(คือหาว่า p ปรากฏบนแผ่นกระดาษของเขาหรือไม่) เมื่อเขาต้องการหาว่า p เป็นไปได้หรือไม่ (หาว่าMp เป็นจริงหรือไม่) เขาก็จะดูว่า p เป็นจริงในโลกใดโลกหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งโลก(p ปรากฏบนแผ่นกระดาษของผู้เล่นคนใดคนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งคน)หรือไม่ เพราะว่าประพจน์นั้นคือสถานภาพที่สามารถ"เข้าใจ"ได้ หรือเป็นประพจน์ที่เป็นไปได้ นั่นคือ การพิจารณาว่า p เป็นไปได้หรือไม่ ต้องดูว่า p เป็นจริงในโลกใดโลกหนึ่ง(โลกหรือสถานภาพที่บอกด้วยประพจน์จำนวนหนึ่ง)อย่างน้อย 1 โลกหรือไม่ ถ้า p เป็นจริงในอย่างน้อย 1 โลก เรียกว่า p เป็นประพจน์ที่เป็นไปได้

เมื่อเขาจะหาว่าประพจน์ p จำเป็นหรือไม่(หาว่า Lp เป็นจริงหรือไม่) เขาต้องหาว่า p ไม่เพียงแต่เป็นจริงในโลกของเขาเอง (P ปรากฏบนแผ่นกระดาษของเขา)เท่านั้น แต่เป็นจริงในโลกอื่นๆทุกโลกด้วย (p ปรากฏบนแผ่นกระดาษของคนอื่นๆทุกคนด้วย) จึงบอกได้ว่า p จำเป็น เพราะถ้ามันไม่เป็นจริงในบางโลก (P ไม่ปรากฏบนแผ่นกระดาษของผู้เล่นบางคน) มันหมายถึงว่า แม้ p จะเป็นจริงในโลกของเขา แต่อาจเป็นเท็จได้(ในโลกอื่นๆ หรือในสถานภาพอย่างอื่น) ไลบ์นิซ (Leibniz) ได้ให้นิยามประพจน์จำเป็นว่า คือประพจน์ที่เป็นจริงไม่เพียงแต่ในโลกที่เราอาศัยอยู่จริงๆเท่านั้น แต่เป็นจริงในทุกๆโลกที่เป็นไปได้ (possible world) ด้วย คำว่าโลกที่เป็นไปได้ ก็คือสถานภาพที่สามารถ" เข้าใจ" ได้นั่นเอง

ความจริงสมบูรณ์ของระบบ T

สำหรับในระบบ T ยังมีความสัมพันธ์ R (ซึ่งในเกมส์เรียกว่าความสัมพันธ์ทาง

การเห็น) ซึ่งเรียกว่า ความสัมพันธ์ของการ "เข้าถึง"* (the accessibility relation) ซึ่งมีความหมายดังนี้ คือเมื่อบุคคลในโลก w_0 สามารถ"เข้าใจ"ถึงโลกในแบบต่างๆซึ่งแตกต่างไปจากโลกจริงๆที่เขาอาศัยอยู่บ้าง(เช่นโลกที่ไม่มีโทรศัพท์) สมมุติ w_1 เป็นโลกที่เขาสามารถ"เข้าใจ"ได้ เรียกว่าโลก w_1 "เข้าถึง" (accessible to) โลก w_0 ทำให้"เข้าถึง"เป็นความสัมพันธ์ระหว่างโลกต่างๆ

แต่เนื่องจากความสามารถของเราในการ"เข้าใจ"นั้น อย่างน้อยก็มีบางส่วนที่อยู่ในขอบเขตการควบคุมของโลกที่เราอาศัยอยู่จริงๆ เช่นโครงสร้างของมนัสและร่างกายของเรา ภาษาที่มีใช้หรือไม่มีใช้ และสิ่งอื่นๆอีกมาก เป็นตัวกำหนดขีดความสามารถในการ"เข้าใจ"ของเรา สมมุติว่าเราไปอยู่ในโลกใดโลกหนึ่งซึ่งเราสามารถ"เข้าใจ"ได้ แล้วความสามารถในการ"เข้าใจ"ของเราในโลกเช่นนั้นอาจยังคงเดิมหรือไม่คงเดิมก็ได้ เราอาจจะหรือไม่อาจจะแม้แต่จะ"เข้าใจ"ถึงโลกที่ตัวเองเคยอยู่มาก่อน ดังนั้นโลกที่"เข้าถึง"โลก w_1 ไม่จำเป็นต้องเหมือนโลกที่"เข้าถึง"โลก w_0 (โลกที่เขาอาศัยอยู่จริงๆ)

เมื่อบุคคลหนึ่งจะพิจารณาว่า ประพจน์ p เป็นไปได้หรือไม่(หาว่า p อาจเป็นจริงได้หรือไม่) เขาจะพิจารณาว่าในโลกที่เขาอาศัยอยู่(w_0) และโลกที่เขาสามารถ"เข้าใจ"ได้นั้น p จะเป็นจริงหรือไม่ ถ้ามีโลกซึ่งไม่มีใครในโลก w_0 สามารถ"เข้าใจ"ได้ เขาก็จะไม่นำ(เพราะเขาไม่สามารถที่จะนำ)โลกเช่นนั้นมาเกี่ยวข้องด้วย ในทำนองเดียวกัน เมื่อเขาจะพิจารณาว่า p จำเป็นหรือไม่ (คือ p จำเป็นต้องจริงหรือไม่) เขาจะพิจารณาว่าในทุกโลกที่"เข้าถึง"โลกของเขานั้น p ยังคงเป็นจริงหรือไม่ ถ้ามีโลกที่ไม่สามารถ"เข้าถึง"โลกของเขา เขาจะไม่นำโลกเช่นนั้นมาเกี่ยวด้วย นั่นคือเมื่อ p เป็นจริงในโลกใดโลกหนึ่งอย่างน้อย 1 โลกในจำนวนโลกเหล่านั้น

---

*โลก w_j จะเรียกว่า"เข้าถึง"(accessible to) โลก w_i ก็ต่อเมื่อ w_iRw_j

(โลกที่"เข้าถึง"โลกของเขา) เรียกว่าประพจน์ p เป็นไปได้ (หรือ Mp เป็นจริง) และในกรณีที่ประพจน์ p เป็นจริงในทุกโลก(โลกที่"เข้าถึง"โลกของเขา) เรียกว่าประพจน์ p จำเป็น (Lp เป็นจริง)

ความจริงสมบูรณ์ของระบบ S4

ในระบบ S4 ใช้ความหมายของ"เข้าใจ"แบบเข้มข้น (strong sense of 'conceive') ดังนี้ บุคคลหนึ่ง"เข้าใจ"(แบบเข้มข้น)ถึงโลกแบบหนึ่ง เมื่อเขาสามารถเห็นแจ้งชัด (insight) อย่างสมบูรณ์ว่า สถานการณ์จะเป็นอย่างไร ถ้าเขาไปอยู่ในโลกเช่นนั้น และอันนี้ให้กินความหมายรวมถึงการรู้ถึงความสามารถในการ **"เข้าใจ"** ของบุคคลในโลกนั้นๆด้วย ถ้าให้ความหมายของ"เข้าถึง"ในแง่ของสามารถ **"เข้าใจ"** ได้ในลักษณะนี้ จะทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างโลกต่างๆ เป็นความสัมพันธ์ทรานซิทีฟ เพราะเมื่อบุคคลในโลก w_0 (โลกที่เขาอาศัยอยู่) สามารถ"เข้าใจ"ถึง w_1 ก็เท่ากับว่าเขาสามารถ**"เข้าใจ"**ถึงความสามารถของบุคคลใน w_1 ว่าเป็นอย่างไร นั่นคือเมื่อ - บุคคลใน w_1 สามารถ"เข้าใจ"ถึงโลก w_2 ก็เท่ากับว่า บุคคลในw_0 สามารถ**"เข้าใจ"** ถึง w_2 ด้วย ดังนั้นถ้า w_1 "เข้าถึง" w_0 แล้วทุกโลกที่ "เข้าถึง" w_1 ก็"เข้าถึง" w_0 ด้วย บุคคลใน w_0 ที่ถือ "เป็นไปได้"ในความหมายเข้มข้นของ"เข้าใจ"แบบนี้ จะถือว่า p เป็นไปได้ ถ้ามันเป็นจริงในโลกใดๆอย่างน้อย 1 โลกที่"เข้าถึง" w_0 ซึ่งเรียกว่า p เป็นไปได้(p is possible) และจะถือว่า p เป็นไปได้ เมื่อมันเป็นจริงในโลกใดๆอย่างน้อย 1 โลกที่"เข้าถึง"โลก w_1 ซึ่งเรียกว่า p เป็นไปได้ว่าเป็นไปได้ (p is possibly possible) แต่เนื่องจากโลก w_1 "เข้าถึง" w_0 และโลก w_2 ก็"เข้าถึง" w_0 ดังนั้นเขาจะให้ความหมายเหมือนกันระหว่าง "เป็นไปได้" กับ "เป็นไปได้ว่าเป็นไปได้" (หรือ$Mp \longleftrightarrow MMp$) และในทำนองเดียวกัน เขาจะให้ความหมายเหมือนกันระหว่าง "จำเป็น" กับ "จำเป็นว่าจำเป็น" (หรือ $Lp \longleftrightarrow LLp$) เพราะว่าสิ่งที่นับว่า "จำเป็นว่าจำเป็น" ใน w_0 คือสิ่งใดก็ตามที่เป็นจริงในทุกโลกที่"เข้าถึง"โลก w_1 ซึ่งโลกเหล่านั้นก็"เข้าถึง"โลก w_0 นั่นเอง จึงทำให้สิ่งนั้น "จำเป็น" จากโลก w_0

3. <u>ความสอดคล้องในระบบ และความสมบูรณ์</u>

1) <u>ความสอดคล้องในระบบ</u>

ระบบ T เป็นระบบที่สอดคล้องในระบบเมื่อเทียบกับ ~ คือถ้า ϕ เป็นทฤษฎีบทของระบบ T แล้ว ~ϕ จะไม่เป็นทฤษฎีบทของระบบ T

สำหรับระบบ S4 และระบบ S5 ก็สอดคล้องในระบบในความหมายนี้

2) <u>ความสมบูรณ์</u>

ระบบ T เป็นระบบที่สมบูรณ์ในความหมายว่า ทุกสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ในระบบ T จะเป็นทฤษฎีบทของระบบ T

ระบบ S4 และระบบ S5 ก็เป็นระบบที่สมบูรณ์ในความหมายนี้ คือทุกสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ในระบบ S4 จะเป็นทฤษฎีบทของระบบ S4 และทุกสูตรมาตรฐานที่จริงสมบูรณ์ในระบบ S5 จะเป็นทฤษฎีบทของระบบ S5*

---

*การพิสูจน์ความสอดคล้องในระบบ และความสมบูรณ์ของตรรกวิทยาโมดัลค่อนข้างยุ่งยาก และไม่อยู่ในขอบข่ายของวิทยานิพนธ์นี้ จึงไม่แสดงการพิสูจน์ ผู้สนใจโปรดดู Hughes and Cresswell. <u>An Introduction to Modal Logic</u>. (Great Britain : Methuen & Co., 1972) pp.41-59,96-121