

ประวัติของตรรกวิทยาโมดัล



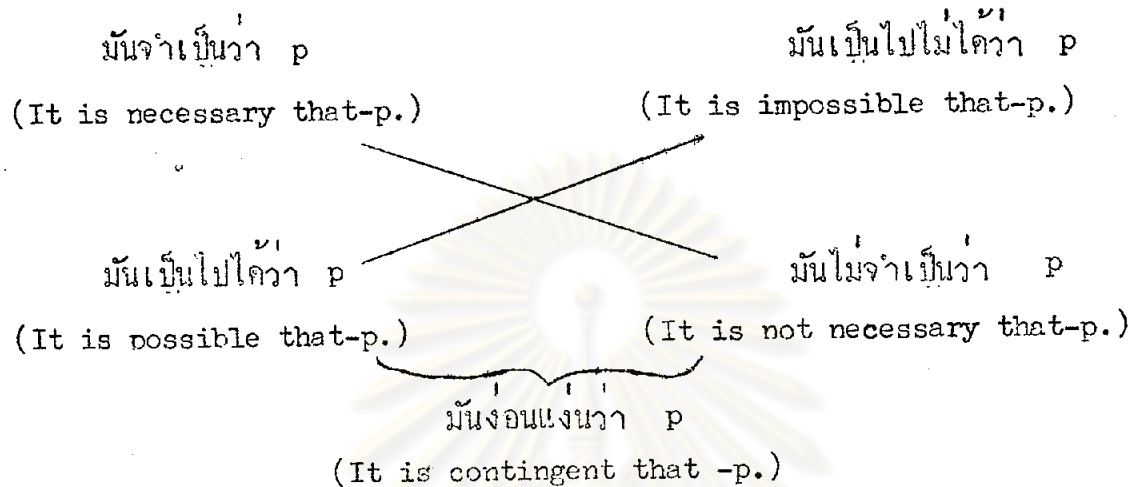
1. สมัยโบราณ

1.1 อริสโตเติล (Aristotle)

อริสโตเติล เป็นคนแรกที่คิดค้นและรวบรวมแบบแผนของตรรกวิทยาทั่วไปอย่างเป็นระเบียบวิธี และเขาเป็นคนแรกเช่นเดียวกันที่ริเริ่มตรรกวิทยาโมดัล คำว่าโมดัล (modal) เป็นคำที่นักตรรกวิทยาสมัยกลางใช้เพื่อเรียกตรรกวิทยาที่มีคำเหล่านี้เข้าไปเกี่ยวข้อง คือ "ความจำเป็น" (necessity) กับ "ความเป็นไปได้" (possibility) และคำอื่นๆที่เกี่ยวข้องเนื่องจากสองคำนี้ สำหรับตรรกวิทยาของอริสโตเติลนั้น เขาได้เขียนไว้อย่างละเอียดพอสมควรใน 2 เรื่อง คือ (1) ทฤษฎีของประโยคโมดัล (modal statement) และ (2) รูปนิรนัยโมดัล (modal syllogism) คำว่าประโยคโมดัลหมายถึงประโยคที่มีคำเหล่านี้อยู่ด้วยคือ "จำเป็น" (necessary) หรือ "เป็นไปได้" (possible) หรือคำอื่นที่มีความหมายเหมือนกัน สำหรับรูปนิรนัยโมดัลคือรูปนิรนัยซึ่งอย่างน้อยมี 1 ประโยคอ้าง (premise) ที่เป็นประโยคโมดัล

สำหรับเรื่องแรก คือทฤษฎีของประโยคโมดัล มีกล่าวไว้ในงานเขียนของเขาเรื่อง De Interpretatione และเรื่อง Prior Analytics สำหรับความหมายของ "ความจำเป็น" และ "ความเป็นไปได้" ตามทัศนะของอริสโตเติลนั้น แต่ละคำสามารถนิยามในรูปของอีกคำหนึ่งโดยใช้การปฏิเสธรวมด้วยดังนี้ "เป็นไปได้" มีความหมายเหมือนกับ "ไม่จำเป็นว่าไม่" (not-necessary-not) "จำเป็น" มีความหมายเหมือนกับ "เป็นไปได้ไม่ไควว่าไม่" (not-possible-not) "ง่อนแง่น" (contingent) มีความหมายเหมือนกับ "เป็นไปได้ แต่ไม่จำเป็น" (possible and not necessary) ความสัมพันธ์ระหว่างคำเหล่านี้ แสดงด้วยจัตุรัสแห่งความตรงข้าม (square of opp-

osition)* ดังนี้ (เมื่อ p แทนประพจน์ใดๆ)



ในทฤษฎีของประโยคโมดัลนั้น อริสโตเกิดพูดถึงใน 2 ประเด็นคือ

(1) ประโยคโมดัลที่ขัดแย้งกัน (contradictory) คือ

มันเป็นไปได้ว่า p (It is possible that-p.)	ขัดแย้งกับ	มันไม่เป็นไปได้ว่า p (It is not possible that-p.)
มันจำเป็นว่า p (It is necessary that-p.)	"	มันไม่จำเป็นว่า p (It is not necessary that-p.)
มันงอนแง่ว่า p (It is contingent that-p.)	"	มันไม่งอนแง่ว่า p (It is not contingent that-p.)
มันเป็นไปได้ว่า p (It is impossible that-p.)	"	มันไม่เป็นไปได้ว่า p (It is not impossible that-p.)

*ประโยคที่มุมของจัตุรัสในแนวเส้นทแยงมุมเป็นประโยคขัดแย้งกัน

(2) ศัพท์โมดัลนั้นไขบายความทั้งประโยค ไม่ใช่ขยายคำหนึ่งหรือวลีหนึ่ง
ในประโยค

นอกจากนี้เขายังบอกว่า (1) ประโยค "มันเป็นไปได้ว่า p " (It is possible that-p.)
กับประโยค "มันน่าจะว่า p " (It is contingent that-p.) ว่า เอ็นเทล* (entail) ซึ่งกันและกัน (2) ประโยค "มันเป็นไปได้ว่า p " (It is possible that-p.)
กับประโยค "มันไม่จำเป็นว่าไม่ p " (It is not necessary that not p.) ว่าสมภาคกัน

สำหรับเรื่องที่ 2 คือรูปนิรนัยโมดัล พุทธิถึงการสรุปผลจากประโยคอ้าง โดย
ที่มีศัพท์โมดัลอยู่ในประโยคอ้าง ว่าสรุปผลอย่างไรจึงจะสมเหตุสมผล (valid)

และอริสโตเติลยังกล่าวประเด็นสำคัญ 2 ประเด็นอีกคือ "สิ่งที่ได้มาจากสิ่งที่
จำเป็น จะจำเป็น และสิ่งที่ได้มาจากสิ่งที่เป็นไปได้ จะเป็นไปได้" (That what fol-
lows from the necessary is necessary and that what follows from the
possible is possible.)

1.2 สำนักเมกาเรียน (Megarian) และสโตอิก (Stoic)

ไดโอดอโรส (Diodorus Cronus) ให้นิยามสิ่งที่เป็นไปได้ว่าเป็นสิ่งที่เป็นอย่าง
หรือจะเป็นอย่าง (That which either is or will be.) นิยามสิ่งที่เป็นไปได้
ว่าเป็นสิ่งที่เท็จ จะไม่เป็นจริง (That which being false, will not be true.)
นิยามสิ่งที่จำเป็นว่าเป็นสิ่งที่จริง จะไม่เป็นเท็จ (That which, being true, will
not be false.) นิยามสิ่งที่ไม่จำเป็นว่าเป็นสิ่งที่เป็นอย่างแล้ว หรือจะเป็นเท็จ
(That which either is already or will be false.)

* A เอ็นเทล B หมายความว่า B เป็นผลตามมาจาก A อย่างจำเป็น คือไม่มี
หนทางจะเป็นอย่างอื่นได้

จากรูปแบบการนิยามของไดโอโครุส เขาไม่ได้พยายามความจำเป็นในตัวเอง (simpliciter) แต่เป็นความจำเป็นเฉพาะเวลา (necessity-at-a-time) คำอื่นๆก็เช่นเดียวกัน คือถ้าประโยคหนึ่งเปลี่ยนค่าความจริงไป ประโยคนั้นจะต้อง - เปลี่ยนศัพท์โมดัลด้วย เช่น ประโยค "ได้มีการปฏิวัติในฝรั่งเศส" (There was a France revolution.) เป็นประโยคที่จำเป็นตามนิยามของเขา แต่ประโยคนั้นไม่จำเป็นถ้าหากก่อน ค.ศ. 1789

005351

ประเด็นสำคัญของไดโอโครุสอีกอย่างหนึ่ง คือประโยคที่บอกเหตุการณ์ในอดีต และเป็นจริงนั้น จำเป็น เพราะว่าสิ่งในอดีตไม่อาจเปลี่ยนแปลงได้อีกแล้ว มันจำเป็น เพราะมันไม่สามารถเป็นอย่างอื่นได้ในขณะนี้ เช่นเดียวกับประโยคที่เกี่ยวกับอดีตที่เป็นเท็จ เป็นไปไม่ได้ เพราะมันไม่สามารถจะเป็นจริงได้อีก

ฟีโล (Philo) ได้ให้นิยามศัพท์โมดัลดังนี้ "สิ่งที่เป็นไปได้ คือสิ่งที่โดยธรรมชาติของการกล่าวยืนยันเองยอมให้เป็นจริงได้" (The possible is that which by the intrinsic nature of the assertion admits of truth.) - เช่น ถ้าพูดว่า "ฉันจะอ่านหนังสือบุดิถีซึ่งแต่งโดยซีโอรุสอีกครั้งหนึ่งในวันนี้" ถ้าไม่มีสถานการณ์ภายนอกมาขัดขวางแล้วโดยตัวมันเองสามารถยอมให้เป็นจริงได้ ในทำนองเดียวกันเขานิยามสิ่งที่จำเป็นว่า คือสิ่งซึ่งเป็นจริง เมื่อพิจารณาโดยตัวมันเองไม่สามารถยอมให้มันเป็นเท็จได้ สิ่งที่ไม่จำเป็น คือสิ่งที่โดยตัวมันเองยอมให้เป็นเท็จได้ และสิ่งที่เป็นไปได้ คือสิ่งที่โดยธรรมชาติภายในของมันไม่สามารถยอมรับว่าจริงได้เลย แต่หาเสียสยขยที่ไม่มียาละเอียดเกี่ยวกับทัศนะของเขา

สำหรับฝ่ายสำนักสโตอิกนั้น ไดโอจีนีส (Diogenes Laertius) ได้ให้นิยามศัพท์โมดัลของสโตอิกไว้ดังนี้ "สิ่งที่เป็นไปได้ คือสิ่งที่ยอมให้เป็นจริงได้ โดยมีข้อแม้ว่าสถานการณ์ภายนอกต้องไม่ขัดขวางการที่มันจะเป็นจริงเอาไว้" เช่น "ไดโอเคลดสมิ่วชีวิตอยู่" : "สิ่งที่เป็นไปได้ คือสิ่งที่ไม่สามารถยอมให้เป็นจริงได้" เช่น "โลกกำลังบิน" (The earth is flying.) "สิ่งที่จำเป็น คือสิ่งซึ่งเป็นจริงและไม่ยอมให้เป็นเท็จได้" หรือการยอมรับให้เป็นเท็จนั้นถูกขัดขวางโดยสถานการณ์ภายนอก"

เช่น "คุณธรรมมีประโยชน์" (Virtue is beneficial.) "สิ่งที่ไม่จำเป็น คือสิ่ง
ซึ่งเป็นจริงและอาจเป็นเท็จได้" ถ้าสถานการณ์ภายนอกไม่ขัดขวางไว้" เช่น "ไดออน
กำลังเดิน" (Dion is walking.)

2. สมัยกลาง

2.1 อเบลาร์ต (Abelard)

อเบลาร์ตพูดถึงกรูของเขาคณะหนึ่งได้บอกไว้ว่า ประพจน์โมดัล* (modal pro-
position) ทุกประพจน์เป็นเรื่องเกี่ยวกับความหมายของประพจน์อื่นๆ เช่นการพูดว่า
"มันเป็นไปได้อาสาโคราติสกำลังวิ่ง" (It is possible that Socrates is runni -
ng.) ก็คือการให้ค่าเป็นไปได้อันเป็นภาคแสดงแก่ความหมายของประพจน์ "โคราติส
กำลังวิ่ง" อเบลาร์ตไม่ได้ปฏิเสธการอธิบายความหมายทำนองนี้ของข้อความที่มีค่า-
"เป็นไปได้" และศัพท์โมดัลอื่นๆ ยิ่งกว่านั้นเขายังให้เห็นว่าการอธิบายความหมายเช่นนี้
เข้ากันได้กับความจริงในลักษณะที่เป็นคุณสมบัติของประพจน์ของเขาเอง ดูเหมือนว่า
เขาเข้าใจความหมายแบบนี้อยู่ในใจแล้ว เมื่อเขาพูดว่า "จริง" เอ็นเทล "เป็นไปได้"
("true" entails "possible") และ "จริง" เป็นผลตามมาจาก "จำเป็น" แต่
"เท็จ" เป็นแค่เพียงผลตามมาจาก "เป็นไปได้"*** และนอกจากนี้ อเบลาร์ตบอกว่า
"เป็นไปได้" สมภาคกับ "อ่อนแอ"

* ประพจน์ที่มีศัพท์โมดัล เช่น "จำเป็น" "เป็นไปได้" เป็นต้น

** เขียนเป็นสัญลักษณ์จะได้ $p \implies Mp$ แทน "true" entails "possible"
 $Lp \implies p$ แทน "จริง" เป็นผลตามมาจาก "จำเป็น" และ $\sim Mp \implies \sim p$ แทน "เท็จ
เป็นผลตามมาจาก "เป็นไปได้"

2.2 อไควนัส (Thomas Aquinas)

ทักษะเกี่ยวกับศัพท์โมดัลของอไควนัสมีดังนี้ เขากล่าวว่า ประพจน์โมดัลเป็น คี ดิคโต (de dicto) หรือ คี เร (de re) อย่างใดอย่างหนึ่ง ประพจน์โมดัล คี ดิคโต เขาหมายถึงประโยคอันดับสอง (second-order) เช่นที่เราอาจแสดงใน รูป "มันเป็นไปได้ว่าโซกราตีสกำลังวิ่ง" (It is possible that Socrates is running.) สำหรับประพจน์โมดัล คี เร เขาหมายถึงประพจน์ซึ่งมีเครื่องหมายแสดง โมดัลอยู่ภายในประโยค เครื่องหมายเช่นนี้อาจแสดงในรูปคำวิเศษณ์ (adverb) เช่น "โซกราตีสเป็นไปได้ว่ากำลังวิ่ง" (Socrates is possibly running.) แต่เขาไม่ ได้บอกว่าประโยคแบบไหนเหมาะในการ เป็นโมดัลมากกว่า

3. สมัยปัจจุบัน

นัมคังแกเฟรเก (Frege) เขาบอกว่าคำว่า "ต้อง" (must) "อาจจะ" (may) "จำเป็น" และ "เป็นไปได้" เป็นคำที่ไร้อำนาจถึงความรู้ของมนุษย์ในรูปแฝง เช่นการพูดว่า บางสิ่ง "ต้อง" เป็นอย่างนั้น แสดงว่าเขามีความรู้ถึงความจริงสากลของ สิ่งนั้น เป็นคน เมื่อเป็นเช่นนี้ คำเหล่านี้ก็ไม่เกี่ยวข้องกับตรรกวิทยา มีหลายคนเห็น ค่ายกับเฟรเกในเรื่องนี้ แต่บางคนก็เห็นว่าคำเหล่านี้ใช้เสริมความรู้ ไม่ใช่สิ่งที่เป็นความ รู้ จึงควรอยู่ในตรรกวิทยา

เลวีส์ (Lewis) เป็นคนแรกที่สนใจอย่างจริงจังเกี่ยวกับตรรกวิทยาโมดัล ใน หนังสือ Survey of Symbolic Logic (1918) เขาได้เสนอทฤษฎีของเงื่อนไข เขมงวด (strict implication) เนื่องจากเขาเห็นความบกพร่องของประพจน์เงื่อนไข (implication) ในรูป $p, p \longrightarrow q, \therefore q$ ซึ่งนักตรรกวิทยาโดยทั่วไปเห็นว่า เป็นรูปแบบการอนุมานที่สมเหตุสมผลทีเดียว การอ้างเหตุผลในรูปนี้ทำให้หลงผิดได้ว่า เครื่องหมาย \longrightarrow แสดงถึงความเกี่ยวเนื่อง (connexion) ของความหมายของตัว เงื่อนไขและตัวตาม * ทำให้ผู้ที่ใช้เกิดความขัดแย้ง (paradox) คือประพจน์ที่เป็นเท็จ

ประพจน์เงื่อนไขในรูป $p \longrightarrow q$, p เรียกว่าตัวเงื่อนไข q เรียกว่า ตัวตาม

(แต่เพราะว่ามันเป็นเท็จ) จึงบังคับให้เกิด (imply) ประพจน์ใดๆก็ได้ และประพจน์ที่เป็นจริง (แต่เพราะว่ามันเป็นจริง) จึงถูกบังคับให้เกิดจากประพจน์ใดๆก็ได้ แต่เดวิสไม่เห็นด้วย เขาบอกว่าประพจน์หนึ่งจะบังคับให้เกิดอีกประพจน์หนึ่งในความหมายที่เข้มงวด (strict sense) ความหมายของคำ(ความหมายของคำ imply) เมื่อมันเป็นไปไม่ได้ที่ประพจน์แรกจะเป็นจริง โดยที่ประพจน์หลังเป็นเท็จ ใช้เครื่องหมาย $p \implies q$ * แทนความหมายว่า p บังคับอย่างเข้มงวดให้เกิด q (p strictly implies q)

ในหนังสือเล่มหลังสุดของเดวิส คือหนังสือ Symbolic Logic (1932) ใช้เครื่องหมาย M^{**} เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่นิยาม และ $p \implies q$ ใช้เขียนย่อแทน $\sim M(p, \sim q)$ และใช้เครื่องหมายอื่นที่เขาไม่นิยามคือ \sim กับ \cdot ด้วย เขาใช้สัจพจน์เหล่านี้ในการนิรนัย(deduction) ในตรรกวิทยาโมดัลของเขา

- 1) $p, q \implies q, p$
- 2) $p, q \implies q$
- 3) $p \implies p, p$
- 4) $(p, q), r \implies p, (q, r)$
- 5) $p \implies \sim \sim p$
- 6) $[(p \implies q), (q \implies r)] \implies (p \implies r)$
- 7) $[p, (p \implies q)] \implies q$
- 8) $M(p, q) \implies Mp$
- 9) $(\exists p, q) [\sim(p \implies q), \sim(p \implies \sim q)]$

สัจพจน์ 7 ขอบแรกเป็นสัจพจน์พื้นฐานสำหรับตรรกวิทยาโมดัลของเดวิส ซึ่งเป็นระบบ S1

* เขาใช้เครื่องหมาย $p \implies q$

** เขาใช้เครื่องหมาย \diamond

แต่ยังไม่เป็นระบบที่สมบูรณ์ตามความหมายของกัทท์ แต่นำไปยังระบบที่ซับซ้อนหรือที่เรียกว่าตรรกวิทยาโมดัลอันดับสูง (higher-order) เช่น "ความเป็นไปได้ของความจำเป็น" (The possibility of necessity) และ "ความจำเป็นของความเป็นไปได้" (The necessity of possibility) เป็นต้น ซึ่งต่อมาเบคเกอร์ (O. Becker) และคนอื่นๆ ได้เพิ่มเติมสัจพจน์ที่น่าสนใจได้แก่

$$10) \quad \sim M \sim p \implies \sim M \sim \sim M \sim p \quad \text{หรือ} \quad MMp \implies Mp$$

$$11) \quad Mp \implies \sim M \sim Mp \quad \text{หรือ} \quad M \sim Mp \implies \sim Mp$$

เมื่อใช้ L เขียนย่อแทน $\sim M \sim$ (ในความหมาย "มันจำเป็นว่า") และใช้หลักการปฏิเสธซ้อน (double negation) และปฏิเสธกลับหลัง (contraposition) ของประพจน์เงื่อนไขแบบเข้มงวด จะเขียนสัจพจน์ 10, 11 ได้ใหม่โดยไม่มีเครื่องหมายตัวเชื่อมปฏิเสธดังนี้

$$10) \quad Lp \implies LLp$$

$$11) \quad Mp \implies LMp$$

และคอนเวิร์ส* (converse) ของสัจพจน์ 2 ข้อนี้ก็สามารถพิสูจน์ได้ ดังนั้นจึงได้ว่าความจำเป็นของประพจน์ใดก็ตามภาคกับความจำเป็นของความจำเป็นของประพจน์นั้น นั่นคือ

$$Lp \iff LLp^{**} \quad \text{และจากอีกข้อหนึ่งได้ว่าความเป็นไปได้ของประพจน์ใดก็ตามภาคกับความจำเป็นของความจำเป็นไปได้อันของมัน นั่นคือ} \quad Mp \iff LMp$$

ตามข้อสมมุติฐานนี้ ตรรกวิทยาอันดับสอง (second order) ทั้งหมดจะกลายเป็นอันดับหนึ่ง (first order) เช่นเรามี $MLp \iff Lp$ ซึ่งเบคเกอร์พบว่ามีความขัดแย้งในตัวเองอยู่เล็กน้อย แม้เดวิดเองก็มีแนวโน้มที่จะยกเลิกหลักการทอนลง (reduction law) ทั้งสองนี้ และยอมให้ตรรกวิทยาอันดับสูงๆ ขึ้นไป

*คอนเวิร์สของ $p \implies q$ คือ $q \implies p$ และคอนเวิร์สของ $p \iff q$ คือ $q \iff p$

** $p \iff q$ หมายถึง $p \implies q$ และ $q \implies p$

ในระบบ S5 ของเลวิส ซึ่งใช้ตัวอักษร 1 - 7 และ 11 เขาพบว่า ไม่ว่าระบบ S5 หรือระบบอื่นๆ ไม่ได้แสดงถึงลักษณะของเงื่อนไขเข้มงวด (strict implication) ที่สมบูรณ์ เพราะว่าตัวอักษรทุกข้อยังคงเป็นจริงถ้าถือว่า Mp สมภาคกับ p และเครื่องหมาย \implies เพียงแค่ไรแทน \longrightarrow เพื่อหลีกเลี่ยงการอธิบายที่ไม่จำเป็นสำหรับเครื่องหมายใหม่ของเขา เลวิสจึงเสนอตัวอักษรใหม่ดังนี้

$$(\exists p, q) [\sim(p \implies q) \cdot \sim(p \implies \sim q)]$$

ซึ่งหมายความว่ามียังน้อย 2 ประพจน์ ที่ประพจน์แรกไม่ได้บังคับให้เกิด (imply) อะไรเกี่ยวกับความจริงหรือความเท็จของอีกประพจน์หนึ่ง และมันเป็นเงื่อนไขเข้มงวด แต่มันมีลักษณะแตกต่างจากตัวอักษรอื่นๆ และนำไปสู่การปฏิเสธสูตรนี้ $(p \implies q) \vee (p \implies \sim q)$ จุดประสงค์ของเลวิสเมื่อแสดงในรูปง่ายที่สุดอย่างตรงไปตรงมาคือ โครงสร้าง

$$\begin{array}{l} p \implies q \\ \therefore p \implies q \end{array} \quad \text{ไม่สมเหตุสมผล (invalid)}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่าในการเสนอระบบของเขานั้น เลวิสเขียนเครื่องหมาย \implies ระหว่างนิพจน์ของประพจน์ เหมือนกันว่ามีลักษณะทางไวยากรณ์เหมือนกับเครื่องหมาย \longrightarrow และทำนองเดียวกันเขาเขียนเครื่องหมาย M ข้างหน้านิพจน์ของประพจน์ เช่นเดียวกับที่เขาเขียนเครื่องหมาย \sim

เมื่อรัสเซลล์ (Russell) และไวท์เฮด (Whitehead) พุทธิถึง $p \longrightarrow q$ ในฐานะเป็นประพจน์เงื่อนไข ดูเหมือนเขาทั้งสองจะสัมพันธ์ระหว่างคำถาม 2 ข้อคือ (1) อะไรที่ทำให้การอ้างจากประพจน์ p ไปสู่ประพจน์ q ถูกต้อง และ (2) อะไรคือประโยคอ้างอย่างอ่อนที่สุด (weakest) ซึ่งเมื่อเพิ่มเข้าไปรวมกับประโยคอ้าง p แล้วทำให้เพียงพอที่จะสรุปผลว่า q จากการอ้างจากประพจน์ p ไปสู่ประพจน์ q ถูกต้อง จะตอบคำถามแรกได้ว่าเป็นความสัมพันธ์ของเงื่อนไขระหว่างสองประพจน์นั้น แต่ถาต้องเพิ่มประโยคอ้างอื่นเข้าไปรวมกับ p ก็จะไม่มีความหมายเข้มงวดระหว่างสองประพจน์นั้น จะตอบคำถามที่สองได้ก็แค่ใช้สูตร $p \longrightarrow q$ อีกอย่างหนึ่งสูตร $p \implies q$ ของเลวิส เขาต้องการให้เป็นคำตอบที่เหมาะสมของคำถามที่หนึ่ง เลวิสต้องการแยกความแตกต่างระหว่างประพจน์เงื่อนไข และประพจน์เงื่อนไขเข้มงวด และเพื่อที่ประพจน์ -

เงื่อนไขเชิงควมทนประพจน์เงื่อนไข ในกฎการยืนยันเงื่อนไข (modus ponens) เห็น
 ได้ดีกว่าไม่มีใครคิดที่จะใช้การอนุมานในรูปแบบนี้
$$\frac{p, \quad p \longrightarrow q}{\therefore q}$$

ถ้าเขาได้พิสูจน์ว่าประโยคอ้างประโยคที่สองเป็นจริง ไม่ว่าจะโดยการพบว่า ประโยคอ้าง
 อีกประโยคหนึ่งเป็นเท็จ หรือโดยพบว่าผลสรุปเป็นจริง เพราะว่าในกรณีแรกเราไม่สามารถ
 มารดจะยืนยันประโยคอ้างอีกประโยคหนึ่งได้ และในกรณีที่สอง เขาก็ไม่จำเป็นต้องใช้การ
 อนุมานที่จะนำไปสู่ผลสรุปว่าเป็นจริง เมื่อประพจน์เงื่อนไขในรูปแบบ $p \longrightarrow q$ ปรากฏ
 เป็นประโยคอ้างในหนังสือ Principia Mathematica ผู้แต่งหนังสือเล่มนี้ยอมรับ
 ประพจน์เงื่อนไขในฐานะที่จำเป็นทางตรรกะ และอันนี้เองเป็นพื้นฐานที่เด่นชัดซึ่งทำให้
 เป็นไปได้ที่จะยืนยัน $p \implies q$ ซึ่งตามนิยามของเลวิสคือ

$$(p \implies q) \iff L(p \longrightarrow q)$$

เมื่อ L แทนความจำเป็นทางตรรกะ และเลวิสยืนยันว่าในระบบของเขา $p \implies q$
 ใช้ได้ก็ต่อเมื่อ $p \longrightarrow q$ เป็นสัจประพจน์เท่านั้น ลักษณะของตรรกวิทยาโมดัลของเลวิส
 ไม่ได้ให้วิธีใหม่ในการอ้างเหตุผล แต่ระบบของเขาได้แสดงแนวความคิด (idea) ของ
 "ความจำเป็น" อย่างเด่นชัด ซึ่งทำให้นักตรรกวิทยาคณอนายอมรับ

เพื่อที่จะให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างตรรกวิทยาของเลวิสและของเพเรเก หรือ
 Principia Mathematica ผู้เขียนตำราหลายท่านได้เสนอระบบของเลวิสหนึ่งระบบ
 หรือมากกว่าในฐานะเป็นสิ่งที่ได้มาจาก (derivative from) Principia Mathematica
 - และสัจพจน์บางอย่างอื่น หรือกฎการอนุมานที่เพิ่มเติมเข้ามา เช่น การที่ได้ระบบ
 ของเลวิสที่มีกฎการทอนลงอย่างอ่อน* (weak reduction law) (ซึ่งคือระบบ S4)
 โกเดล (Gödel) ได้เพิ่มสัจพจน์ใหม่ 3 ข้อเข้ากับตรรกวิทยาเบื้องต้น (primary log-
 ic) ของ Principia Mathematica - คือ

$$*Lp \iff LLp$$

- 1) $Lp \longrightarrow p$
- 2) $Lp \longrightarrow L(p \longrightarrow q) \longrightarrow Lq$
- 3) $Lp \longrightarrow LLp$

ซึ่งใช้ L เป็นสัญลักษณ์พื้นฐาน และกฎการอนุมานใหม่ที่ว่า ถ้า p เป็นทฤษฎีบทของระบบ จะได้ว่า Lp เป็นทฤษฎีบทของระบบ นั้นๆ ด้วย และเมื่อใช้เครื่องหมายอย่างเดียวกัน กฎการทอนลงอย่างเข้มงวด *(strong reduction principle) ของระบบ $S5$ จะอยู่ในรูป

$$4) \sim Lp \longrightarrow L \sim Lp$$

เดวิดได้เสนอระบบตรรกวิทยาโมดัล 5 ระบบคือ ระบบ $S1, S2, S3, S4$ และ $S5$ โดยใช้ความหมายของ "ความจำเป็น" และ "ความเป็นไปได้" ในระดับ (degree) ต่างๆ กัน นักตรรกวิทยาค้นมาได้เสนอสำพจน์และกฎในแนวอื่น ๆ สำหรับระบบเหล่านี้ รวมทั้งเสนอระบบอื่นที่ไม่สมภาคกับระบบใดของเดวิด เช่น เฟย์ส (Robert Feys) ได้เสนอระบบที่ง่ายเป็นลักษณะซึ่งเรียกว่า ระบบ T ไรท์ (G.H. Von Wright) ได้เสนอระบบที่สมภาคกับระบบ T ซึ่งเขาเรียกว่าระบบ M โดยนิยาม "เป็นไปได้ว่า p " (necessarily p) ว่า "ไม่เป็นไปได้ว่าไม่ p " (not possibly not- p) โดยใช้ "เป็นไปได้" เป็นเทอมที่ไม่นิยาม

ในจำนวนระบบตรรกวิทยาโมดัลเหล่านี้ มีระบบที่สำคัญที่แตกต่างจากกันอย่างเด่นชัดคือระบบ T ระบบ $S4$ และระบบ $S5$ ส่วนระบบอื่นๆ อยู่ระหว่างหรือใกล้เคียงกับ 3 ระบบนี้ ในวิทยานิพนธ์นี้จึงพิจารณา 3 ระบบนี้

* $Mp \iff LMp$