รายการอ้างอิง

Alsunaidi, M.A., Masaoudi, H.M. and Arnold, J.M. A Time-Domain Algorithm for the Analysis of Second-Harmonic Generation in Nonlinear Optical Structures. IEEE PhotonicsTechnology Letters 12 (April 2000): 395-397

Bloembergen, N. Nonlinear Optics: Past, Present, and Future. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics 6 (November/December 2000): 876-880

Byer, R.L. Nonlinear Optics and Solid-State Lasers: 2000. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics 6 (November/December 2000): 911-930

Chari, M.V.K. and Salon, S.J. Numerical Methods in Electromagnetism. New York: Academic Press, 2000

Chiu, Y., Gopalan, V., Kawas, M.J., Schlesinger, T.E., Stancil, D.D. and Risk, W.P. Integrated Optical Device with Second-Harmonic Generator, Electrooptic Lens, andElectrooptic Scanner in LiTaO3 Journal of Lightwave Technology 17 (March 1999): 462-465

Chou, H.F., Lin, C.F., Wang, G.C. An Iterative Finite Difference Beam Propagation Method for Modeling Second-Order Nonlinear Effects in Optical Waveguides. IEEE Journal of Lightwave Technology 16 (September 1998): 1686-1693

Delacourt, D., Armani, F. and Pauchon, M. Second-Harmonic Generation Efficiency in Periodically Poled LiNbO3 Waveguides. IEEE Journal of Quantum Electronics 30 (April1994): 1090-1099

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Figueroa, H.E. Improved Split-Step Schemes for Nonlinear-Optical Propagation. Journal of Optical Society of America B 11 (May 1994): 798-803

Furati, K.M., Alsunaidi, M.A. and Masousi, H.M. An Explicit Finite-Difference Scheme for Wave Propagation in Nonlinear Optical Structures. Applied Mathematics Letters 14 (2001): 297-302

Hayata, K. and Koshiba, M. Numerical Study of Guided-Wave Sum-Frequency Generation Through Second-Order Nonlinear Parametric Processes. Journal of Optical Society of America B 8 (February 1991): 449-458

Helmy, A., Hutchings, D.C., Kleckner, J.H., Marsh, J.H., Bryce, A.C., Arnold, J.M., Stanley, C.R., Aitchison, J.S., Brown, C.T.A., Moutzouris, K. and Ebrahimzadeh, M. Quasi-Phase-Matching in GaAs-AlAs Superlattice Waveguides via Bandgap Tuning Quantum Well Intermixing. Nonlinear Optics: Materials, Fundamentals, and Applications Technical Digest , 6-10 (August 2000): 159-161

Hoekstra, H., Noordman, O., Krijnen, G., Varshney, R.K., and Henselmans, E. Beam-Propagation Method for Second-Harmonic Generation in Waveguides with Birefringent Materials. Journal ofOptical Society of America B 7 (July 1997): 1823-1830

Ironside, C.N., Aitchison, J.S. and Arnold, J.M. An All-Optical Switch Employing the Cascaded Second-Order Nonlinear Effect. IEEE Journal of Quantum Electronics 29 (October 1993): 2650-2654

Ito, H. and Inaba, H. Efficient Phase-Matched Second Harmonic Generation Method in Four-Layered Optical Waveguide Structure. Optics Letters 2 (1978): 139-1414

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Itoh, T., Pelosi, G. and Silvester, P. Finite Element Software for Microwave Engineering. New York: John Wiley & Sons, 1996

Katsriku, F.A., Rahmanm , B.M.A. and Grattan, K. Finite Element Analysis of Diffused Anisotropic Optical Waveguides. IEEE Journal of Lightwave Technology 14 (May 1996):780-786

Katsriku, F.A., Rahman, B.M.A. and Grattan, K. Numerical Modeling of Second Harmonic Generation in Optical Waveguides Using the Finite Element Method. IEEE Journal of Quantum Electronics 33 (October 1997): 1727-1733

Katsriku, F.A., Rahman, B.M.A. and Grattan, K. Finite-Element Analysis of Second-Harmonic Generation in AlGaAs Waveguide. IEEE Journal of Quantum Electronics 36 (March 2000): 282-289

Koshiba, M. Optical Waveguide Theory by The Finite Element Method. Tokyo : KTK Scientific Publishers, 1992.

Koshiba, M., Saitoh, H., Eguchi, M. and Hiriyama, K. A Simple Scalar Finite Element Approach to Optical Rib Waveguides. IEE Proceeding 139 (April 1992): 166-171

Koshiba, M. and Tsuji, Y. Curvilinear Hybrid Edge/Nodal Elements with Triangular Shape for Guided-Wave Problems. IEEE Journal of Lightwave Technology 18 (May 2000): 737-743

Krijnen, G., Torruellas, W., Stegeman, G.I., Hoekstra, H. and Lambeck, P. Optimization Second Harmonic Generation and Nonlinear Phase-Shift in Cerenkov Regime. IEEE Journalof Quantum Electronics 32 (April 1996): 729-738

Kwon, Y. and Bang, H. The Finite Element Method Using MATLAB. 2 nd ed. New York: CRC Press, 2000.

Levin, B.F., Bethea, C.G. and Logan, R.A. Phase-Matched Second-Harmonic Generation in Liquid-Filled Waveguides Applied Physics Letters 26 (1975): 375-377

Marz, R. Integrated Optics : Design and Modeling. MA : Artech House, 1995.

Masoudi, H.M., and Arnold, J.M. Modeling Second-Order Nonlineasr Effects in Optical Waveguides Using a Parallel-Processing Beam Propagation Method. IEEE Journal of Quantum Electronics 31 (December 1995): 2107-2113

Mizuuchi, K. and Yamamoto, K. Highly Efficient Quasi-Phase-Matched Second – Harmonic Generation Using a First-Order Periodically Domain-Inverted LiTaO3 Waveguide. Applied Physics Letters 60 (March 1992): 1283-1285

Nishihara, H., Haruna, M. and Suhara, T. Optical Integrated Circuits. New York : McGraw-Hill, 1989

Peterson, A., Ray, S. and Mittra, R. Computational Methods For Electromagnetics. New York: IEEE Press, 1998.

Peterson, A. Vector Finite Element Formulation for Scattering from Two-Dimensional Heterogeneous Bodies. IEEE Transactions on Antennas AND Propagation. 43 (March 1994): 357-365

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Rafailov, E.U., Loza-Alvarez, P., Brown, C,T.A., Sibbett, W., De La Rue, R.M., Millar, P., Yanson, D.A., Roberts, J.S. amd Houston, P.A. Second-Harmonic Generation from a First Order Quasi-Phase-Matched GaAs/AlGaAs Waveguide Crystals. Optics Letters 26 (December 2001):1984-1986

Schulz, D., Glingener, C., Bludszuweit, M. and Voges, E. Mixed Finite Elemenet Beam Propagation Method. IEEE Journal of Lightwave Technology 16 (July 1998): 1336-1341

Uesugi, N. and Kimura, T. Efficient Second-Harmonic Generation in Three Dimensional LiNbO3 Optical Waveguide. Applied Physics Letters 29 (1976): 572-574

Weitzmzn, P. and Osterberg, U. A Modified Beam Propagation Method to Model Second Harmonic Generation in Optical Fibers. IEEE Journal of Quantum Electronics 29 (May 1993): 1437-1443

Yamamoto, K., Mizuuchi, K., Takeshige, K., Sasai, Y. and Taniuchi, T. Characteristics of Periodically Domain-Inverted LiNbO3 and LiTaO3 Waveguides for Second Harmonic Generation. Journal of Applied Physics 70 (August 1991): 1947-1951

Yamamoto, K. and Taniuchi, T. Characteristics of Pyrophosphoric Acid Proton-Exchanged Waveguides in LiNbO3. . Journal of Applied Physics 70 (December 1991): 6663-6668

Yasui, T. and Koshiba, M. Three-Dimensional Beam Propagation Analysis of Quasi-Phase Matched Second Harmonic Generation Devices with Triangular and Semi-Circular Domain Inversion Profiles. IEICE Transactions on Electronics E83-C (May 2000): 697-704

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Yasui, T. and Koshiba, M. Beam Propagation Analysis of Quasi-Phase Matched Second Harmonic Generation Devices. IEEE Transactions on Magnetics 36 (July 2000): 1871-1875

Yasui, T. and Koshiba, M. Three-Dimensional Vector Beam-Propagation Method for Second Harmonic Generation Analysis. IEEE Journal of Lightwave Technology 19 (May 2001): 780-785

Zienkiewitz, O.C. The Finite Element Method. 3rd ed. London: McGraw-Hill, 1977.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

ความสัมพันธ์ระหว่าง สภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง กับ สัมประสิทธ์ความไม่เป็นเชิงเส้น

โพลาไรเซชันแบบไม่เชิงเส้นที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง สามารถแสดงด้วยปริมาณในระบบพิกัดฉากได้ดังนี้

$$(P_{NL})_l = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{lmn} : E_m E_n \qquad (l,m,n = 1,2,3) \qquad \text{(ก.1)}$$

โดยที่

$(P_{NL})_l$ คือ องค์ประกอบที่ l ของเวกเตอร์โพลาไรเซชันแบบไม่เชิงเส้น $\overline{P}_{NL}(x,y,z)$

$\chi^{(2)}_{lmn}$ คือ สมาชิกของซัสเซพติบิลิตี้ทางไฟฟ้าแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง

E_m และ E_n คือ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าอินพุต $\overline{E}(x,y,z)$

$l,m,n(=1,2,3)$ เป็นมอดุโล (modulo) ของ (x,y,z)

ซัสเซพติบิลิตี้ทางไฟฟ้าแบบไม่เชิงเส้นอันดับสอง $\chi^{(2)}_{lmn}$ ของตัวกลางทางแสงจะสัมพันธ์กับเทนเซอร์สัมประสิทธ์ความไม่เป็นเชิงเส้น d_{lmn} ดังนี้

$$\chi^{(2)}_{lmn} = 2d_{lmn} \qquad \text{(ก.2)}$$

เนื่องจากการสลับตำแหน่งขององค์ประกอบสนามไฟฟ้า E_m และ E_n ไม่ได้ก่อให้เกิดความเปลี่ยนแปลงใด ๆ แก่สมการ (ก.1) นั่นคือ

$$d_{\mathrm{lnm}} = d_{\mathrm{lnm}} \qquad \text{(ก.3)}$$

ดังนั้นจำนวนสมาชิกของสัมประสิทธิ์ความไม่เป็นเชิงเส้นอันดับสอง d_{lmn} จากจำนวนทั้งหมด 27 ตัว จึงมีสมาชิกที่เป็นอิสระอยู่จำนวน 18 ตัว และโดยการกำหนดรูปแบบของการเขียนตัวห้อย mn ให้มีรูปอย่างง่ายเป็น p ดัง ตาราง ก.1 จะทำให้เทนเซอร์ d_{lmn} แบบ 3 ชั้น กลายเป็นเมทริกซ์ขนาด 3 แถวและ 6 หลัก ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง ก.1 ความสัมพันธ์ของตัวห้อยระหว่าง mn กับ p

mn	11	22	33	23,32	31,13	12,21
p	1	2	3	4	5	6

ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์โพลาไรเซชัน $\overline{P}(x, y, z)$ กับสัมประสิทธิ์ความไม่เป็นเชิงเส้น d_{lmn} และสนามไฟฟ้า $\overline{E}(x, y, z)$ จะแสดงได้ในรูปของเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E_1)^2 \\ (E_2)^2 \\ (E_3)^2 \\ 2E_2E_3 \\ 2E_3E_1 \\ 2E_1E_2 \end{bmatrix} \qquad (ก.4)$$

โดยที่

$(1,2,3)$ เป็นมอดูโล (modulo) ของ (x, y, z)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

สมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับวิเคราะห์การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กภายในอุปกรณ์ QPM-SHG จะสอดคล้องกับสมการของแมกซ์เวลล์และความสัมพันธ์ปรุงแต่ง ดังนี้

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(x,y,z) = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}(x,y,z) \quad (ข.1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(x,y,z) = j\omega \boldsymbol{D}(x,y,z) \quad (ข.2)$$

$$\boldsymbol{D}(x,y,z) = \varepsilon_0[\varepsilon_r]\cdot \boldsymbol{E}(x,y,z) + \varepsilon_0[d] : \boldsymbol{E}(x,y,z)\boldsymbol{E}(x,y,z) \quad (ข.3)$$

การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสองในตัวกลางทางแสงแบบไม่เป็นเชิงเส้น จะเกี่ยวข้องกับแสงจำนวนสองความถี่ คือ แสงมูลฐาน (fundamental wave) ความถี่ ω_1 และ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง (second harmonic wave) ความถี่ ω_2 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของแสงทั้งสองสามารถเขียนได้ในรูปผลรวม ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{E}_{total}(x,y,z) = \boldsymbol{E}_1(x,y,z) + \boldsymbol{E}_2(x,y,z) \quad (ข.4)$$

$$\boldsymbol{H}_{total}(x,y,z) = \boldsymbol{H}_1(x,y,z) + \boldsymbol{H}_2(x,y,z) \quad (ข.5)$$

โดยที่

$\boldsymbol{E}_{total}(x,y,z)$ และ $\boldsymbol{H}_{total}(x,y,z)$ คือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กผลรวม

$\boldsymbol{E}_1(x,y,z)$ และ $\boldsymbol{H}_1(x,y,z)$ คือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของแสงมูลฐาน

$\boldsymbol{E}_2(x,y,z)$ และ $\boldsymbol{H}_2(x,y,z)$ คือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง

แทนสมการ (ข.4) ลงใน (ข.1) จะได้

$$\boldsymbol{H}_1(x,y,z) = (-j\omega_1\mu_0)^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{E}_1(x,y,z)) \quad (ข.6)$$

$$\boldsymbol{H}_2(x,y,z) = (-j\omega_2\mu_0)^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{E}_2(x,y,z)) \quad (ข.7)$$

สำหรับตัวกลางทางแสงแบบไม่เชิงเส้นที่ใช้เป็นตัวกลางใน การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กับสนามไฟฟ้า ภายในตัวกลางนี้จะมีความสัมพันธ์กันตาม ความสัมพันธ์ปรุงแต่ง (constitutive relation) ดังนี้

$$\boldsymbol{D}_1(x,y,z)=\varepsilon_0\left[\varepsilon_{r,1}\right]\boldsymbol{E}_1(x,y,z)+2\varepsilon_0[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z) \tag{ข.8}$$

$$\boldsymbol{D}_2(x,y,z)=\varepsilon_0\left[\varepsilon_{r,2}\right]\boldsymbol{E}_2(x,y,z)+\varepsilon_0[d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z) \tag{ข.9}$$

จากสมการ (ข.2) สนามแม่เหล็กของ แสงมูลฐาน และ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง จะเป็นดังนี้

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_1(x,y,z)=j\omega_1\boldsymbol{D}_1(x,y,z) \tag{ข.10}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_2(x,y,z)=j\omega_2\boldsymbol{D}_2(x,y,z) \tag{ข.11}$$

แทนสมการ (ข.6) และ (ข.8) ลงใน (ข.10) จะได้

$$\nabla\times\left\{(-j\omega_1\mu_0)^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\right\}=j\omega_1\left\{\varepsilon_0\left[\varepsilon_{r,1}\right]\boldsymbol{E}_1(x,y,z)+2\varepsilon_0[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z)\right\}$$

หรือ

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_1(x,y,z)=&(-j\omega_1\mu_0)(j\omega_1\varepsilon_0)\left[\varepsilon_{r,1}\right]\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\\&+2(-j\omega_1\mu_0)(j\omega_1\varepsilon_0)[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z)\end{aligned} \tag{ข.12}$$

นิยามให้ $k_{0,1}^2=\omega_1^2\mu_0\varepsilon_0$ คือ หมายเลขคลื่นในอวกาศว่าง (free space wave number) ของคลื่นมูลฐาน สมการ (ข.12) จะเขียนได้ดังนี้

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_1(x,y,z)=k_{0,1}^2\left[\varepsilon_{r,1}\right]\cdot\boldsymbol{E}_1(x,y,z)+2k_{0,1}^2[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z) \tag{ข.13}$$

สำหรับกรณีของคลื่นฮาร์มอนิกอันดับสองนั้น จะพิจารณาได้ในทำนองเดียวกันกับคลื่นมูลฐาน โดยแทนแทนสมการ (ข.7) และ (ข.9) ลงใน (ข.11) จะได้

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_2(x,y,z)=&(-j\omega_2\mu_0)(j\omega_2\varepsilon_0)\left[\varepsilon_{r,2}\right]\boldsymbol{E}_2(x,y,z)\\&+2(-j\omega_2\mu_0)(j\omega_2\varepsilon_0)[d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\end{aligned} \tag{ข.14}$$

นิยามให้ $k_{0,2}^2=\omega_2^2\mu_0\varepsilon_0$ คือ หมายเลขคลื่นในอวกาศว่าง (free space wave number) ของคลื่นฮาร์มอนิกอันดับ สมการ (ข.17) จะกลายเป็น

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_2(x,y,z)=k_{0,2}^2\left[\varepsilon_{r,2}\right]\cdot\boldsymbol{E}_2(x,y,z)+k_{0,2}^2[d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z) \tag{ข.15}$$

ดังนั้น สมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับสนามไฟฟ้าของคลื่นมูลฐานและคลื่นฮาร์มอนิกอันดับสอง จะเป็นดังนี้

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_1(x,y,z) - k_{0,1}^2[\varepsilon_{r,1}]\boldsymbol{E}_1(x,y,z) = 2k_{0,1}^2[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z) \tag{ข.16}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_2(x,y,z) - k_{0,2}^2[\varepsilon_{r,2}]\boldsymbol{E}_2(x,y,z) = k_{0,2}^2[d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z) \tag{ข.17}$$

จากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับสนามไฟฟ้าของคลื่นมูลฐานและคลื่นฮาร์มอนิกอันดับสอง (ข.16) และ (ข.17) เพื่อความสะดวกในการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในภายหลังจะกำหนดให้

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z) = 2[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z) \tag{ข.18}$$

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z) = [d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z) \tag{ข.19}$$

รูปชัดแจ้งของสมการ (ข.18) และ (ข.19) จะเป็นดังนี้

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z) = \begin{bmatrix} P_{x,1} \\ P_{y,1} \\ P_{z,1} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x,1}^* E_{x,2} \\ E_{y,1}^* E_{y,2} \\ E_{z,1}^* E_{z,2} \\ E_{y,1}^* E_{z,1} + E_{z,1}^* E_{y,2} \\ E_{z,1}^* E_{x,2} + E_{x,1}^* E_{z,2} \\ E_{x,1}^* E_{y,2} + E_{y,1}^* E_{x,2} \end{bmatrix} \tag{ข.20}$$

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z) = \begin{bmatrix} P_{x,2} \\ P_{y,2} \\ P_{z,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E_{x,1})^2 \\ (E_{y,1})^2 \\ (E_{z,1})^2 \\ 2E_{y,1}E_{z,1} \\ 2E_{z,1}E_{x,1} \\ 2E_{x,1}E_{y,1} \end{bmatrix} \tag{ข.21}$$

สมการ (ข.16) และ (ข.17) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_1(x,y,z) - k_{0,1}^2[\varepsilon_{r,1}]\cdot \boldsymbol{E}_1(x,y,z) = k_{0,1}^2\boldsymbol{P}_1(x,y,z) \tag{ข.22}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_2(x,y,z) - k_{0,2}^2[\varepsilon_{r,2}]\cdot \boldsymbol{E}_2(x,y,z) = k_{0,2}^2\boldsymbol{P}_2(x,y,z) \tag{ข.23}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิจารณาการสร้างสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับสนามแม่เหล็กบ้าง โดยเริ่มต้นจากการแทนสมการ (ข.8) และ (ข.9) ลงในสมการ (ข.10) และ (ข.11) ตามลำดับ จะได้

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_1(x,y,z) = j\omega_1\varepsilon_0\left(\left[\varepsilon_{r,1}\right]\boldsymbol{E}_1(x,y,z) + 2[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z)\right) \quad (ข.24)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_2(x,y,z) = j\omega_2\varepsilon_0\left(\left[\varepsilon_{r,2}\right]\boldsymbol{E}_2(x,y,z) + [d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\right) \quad (ข.25)$$

หรือ

$$\boldsymbol{E}_1(x,y,z) = (j\omega_1\varepsilon_0)^{-1}\left[\varepsilon_{r,1}\right]^{-1}\left(\nabla \times \boldsymbol{H}_1(x,y,z) - j\omega_1\varepsilon_0 2[d]:\boldsymbol{E}_1^*(x,y,z)\boldsymbol{E}_2(x,y,z)\right) \quad (ข.26)$$

$$\boldsymbol{E}_2(x,y,z) = (j\omega_2\varepsilon_0)^{-1}\left[\varepsilon_{r,2}\right]^{-1}\left(\nabla \times \boldsymbol{H}_2(x,y,z) - j\omega_2\varepsilon_0[d]:\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\boldsymbol{E}_1(x,y,z)\right) \quad (ข.27)$$

แทนสมการ (ข.26) ลงใน (ข.6) จะได้

$$\nabla \times \left[\varepsilon_{r,1}\right]^{-1}\nabla \times \boldsymbol{H}_1(x,y,z) - k_{0,1}^2\boldsymbol{H}_1(x,y,z) = j\omega_1\varepsilon_0\nabla \times \left[\varepsilon_{r,1}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_1(x,y,z) \quad (ข.28)$$

ในทำนองเดียวกัน แทนสมการ (ข.7) ลงใน (ข.9) จะได้

$$\nabla \times \left[\varepsilon_{r,2}\right]^{-1}\nabla \times \boldsymbol{H}_2(x,y,z) - k_{0,2}^2\boldsymbol{H}_2(x,y,z) = j\omega_2\varepsilon_0\nabla \times \left[\varepsilon_{r,2}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_2(x,y,z) \quad (ข.29)$$

สมการ (ข.22) และ (ข.23) สามารถเขียนได้รูปแบบหนึ่งเดียว ดังนี้

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_i(x,y,z) - k_{0,i}^2\left[\varepsilon_{r,i}\right]\cdot\boldsymbol{E}_i(x,y,z) = k_{0,i}^2\boldsymbol{P}_i(x,y,z) \quad (ข.30)$$

และสมการ (ข.28) และ (ข.29)

$$\nabla \times \left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\nabla \times \boldsymbol{H}_i(x,y,z) - k_{0,i}^2\boldsymbol{H}_i(x,y,z) = j\omega_i\varepsilon_0\nabla \times \left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_i(x,y,z) \quad (ข.31)$$

โดยที่ i เท่ากับ 1 และ 2 สำหรับแสงมูลฐานและแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง ตามลำดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

สมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับวิเคราะห์การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง

<u>สมการคลื่นแบบสเกลาร์ สำหรับองค์ประกอบสนามไฟฟ้า</u> $E_{x,i}$ <u>ของโมด</u> E_{mn}^{x} <u>ในท่อนำคลื่นแสงริบ</u>

จากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับสนามไฟฟ้า (ข.33) คือ

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_i(x,y,z) - k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right] \cdot \boldsymbol{E}_i(x,y,z) = k_{0,i}^2 \boldsymbol{P}_i(x,y,z) \qquad (\text{ค}.1)$$

แยกองค์ประกอบของสมการดังกล่าวได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \left(-\dfrac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial z^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 E_{y,i}}{\partial y^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 E_{z,i}}{\partial x \partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial x \partial y}\right) + \left(-\dfrac{\partial^2 E_{y,i}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_{y,i}}{\partial z^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 E_{z,i}}{\partial y \partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial x \partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 E_{y,i}}{\partial y \partial z}\right) + \left(-\dfrac{\partial^2 E_{z,i}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_{z,i}}{\partial y^2}\right) \end{bmatrix} = k_{0,i}^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx,i} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy,i} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x,i} \\ E_{y,i} \\ E_{z,i} \end{bmatrix} + k_{0,i}^2 \begin{bmatrix} P_{x,i} \\ P_{y,i} \\ P_{z,i} \end{bmatrix}$$

สมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับองค์ประกอบ $E_{x,i}$ จะเป็นดังนี้

$$-\frac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{y,i}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{z,i}}{\partial x \partial z} = k_{0,i}^2 \varepsilon_{xx,i} E_{x,i} + k_{0,i}^2 P_{x,i} \qquad (\text{ค}.2)$$

สำหรับโมด E_{mn}^{x} จะกำหนดให้

$$E_{y,i} \equiv 0 \qquad (\text{ค}.3)$$

และ $E_{z,i}$ สามารถเขียนได้ในรูปของ $E_{x,i}$ ดังนี้

$$E_{z,i} = \frac{\varepsilon_{xx,i}}{\varepsilon_{zz,i}} \frac{1}{j\beta_i} \frac{\partial E_{x,i}}{\partial x} \qquad (\text{ค}.4)$$

แทนสมการ (ค.3) และ (ค.4) ลงใน (ค.2) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,i}}{\varepsilon_{zz,i}} \frac{\partial E_{x,i}}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial z^2} + k_{0,i}^2 \varepsilon_{xx,i} E_{x,i} = -k_{0,i}^2 P_{x,i} \qquad (\text{ค}.5)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>สมการคลื่นแบบสเกลาร์ สำหรับองค์ประกอบสนามแม่เหล็ก $H_{x,i}$ ของโมด E_{mn}^{y} ในท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในแผ่นฐาน</u>

จากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับสนามแม่เหล็ก (ข.34) คือ

$$\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\nabla\times\boldsymbol{H}_i\left(x,y,z\right)-k_{0,i}^{2}\boldsymbol{H}_i\left(x,y,z\right)=j\omega_i\varepsilon_0\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_i\left(x,y,z\right) \qquad (ค.6)$$

พิจารณา พจน์แรกด้านซ้ายมือของสมการ (ค.6)

$$\begin{bmatrix}\left(\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\nabla\times\boldsymbol{H}_i\right)_x\\ \left(\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\nabla\times\boldsymbol{H}_i\right)_y\\ \left(\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\nabla\times\boldsymbol{H}_i\right)_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial z}\right)\end{bmatrix}$$

(ค.7)

พิจารณา พจน์แหล่งกำเนิดด้านขวามือของสมการ (ค.6)

$$j\omega_i\varepsilon_0\begin{bmatrix}\left(\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_i\right)_x\\ \left(\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_i\right)_y\\ \left(\nabla\times\left[\varepsilon_{r,i}\right]^{-1}\boldsymbol{P}_i\right)_z\end{bmatrix}=j\omega_i\varepsilon_0\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{x,i}}{\varepsilon_{xx,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{x,i}}{\varepsilon_{xx,i}}\right)\end{bmatrix} \qquad (ค.8)$$

แทนสมการ (ค.7) และ (ค.8) ลงใน (ค.6) จะได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial z}\right) \end{bmatrix} - k_{0,i}^2 \begin{bmatrix} H_{x,i} \\ H_{y,i} \\ H_{z,i} \end{bmatrix}$$

$$= j\omega_i\varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{x,i}}{\varepsilon_{xx,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{x,i}}{\varepsilon_{xx,i}}\right) \end{bmatrix}$$

สมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับองค์ประกอบ $H_{x,i}$ จะเป็นดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{y,i}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{z,i}}{\partial x}\right)-k_{0,i}^2 H_{x,i}$$
$$= j\omega_i\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right) \tag{ค.9}$$

สำหรับโมด E_{mn}^{y} จะกำหนดให้

$$H_{y,i} \equiv 0 \tag{ค.10}$$

และ $H_{z,i}$ สามารถเขียนได้ในรูปของ $H_{x,i}$ ดังนี้

$$H_{z,i} = \frac{1}{j\beta_i}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial x} \tag{ค.11}$$

แทนสมการ (ค.10) และ (ค.11) ลงใน (ค.9) จะได้

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial^2 H_{x,i}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial z}\right)+k_{0,i}^2 H_{x,i} = -j\omega_i\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right)\right) \tag{ค.12}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง

การพิสูจน์สมการของวิธีสเกลาร์ไฟไนต์อิลีเมนต์บีมพรอพาเกชัน

<u>สมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของสนามหลักในโมด</u> E^x

จากสมการคลื่นแบบสเกลาร์ (ค.5) สำหรับองค์ประกอบสนามไฟฟ้า E_x คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial E_{x,i}}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_{x,i}}{\partial z^2}+k_{0,i}^2\varepsilon_{xx,i}E_{x,i}=-k_{0,i}^2 P_{x,i} \qquad (ง.1)$$

เริ่มต้นจากการพิจารณาพจน์แหล่งกำเนิดของสมการ (ง.1) ก่อน จากรูปชัดแจ้งของโพลาไรเซชัน $\boldsymbol{P}_1(x,y,z)$ และ $\boldsymbol{P}_2(x,y,z)$ ในสมการ (ข.23) และ (ข.24) คือ

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z)=\begin{bmatrix}P_{x,1}\\P_{y,1}\\P_{z,1}\end{bmatrix}=2[d]\begin{bmatrix}E_{x,1}^*E_{x,2}\\E_{y,1}^*E_{y,2}\\E_{z,1}^*E_{z,2}\\E_{y,1}^*E_{z,1}+E_{z,1}^*E_{y,2}\\E_{z,1}^*E_{x,2}+E_{x,1}^*E_{z,2}\\E_{x,1}^*E_{y,2}+E_{y,1}^*E_{x,2}\end{bmatrix} \qquad (ง.2)$$

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z)=\begin{bmatrix}P_{x,2}\\P_{y,2}\\P_{z,2}\end{bmatrix}=[d]\begin{bmatrix}(E_{x,1})^2\\(E_{y,1})^2\\(E_{z,1})^2\\2E_{y,1}E_{z,1}\\2E_{z,1}E_{x,1}\\2E_{x,1}E_{y,1}\end{bmatrix} \qquad (ง.3)$$

ในการจำลองการเคลื่อนที่ของแสงที่เดินทางไปในตัวกลางทางแสงด้วยวิธีบีมพรอพาเกชันนั้น จะสมมติให้สนามไฟฟ้าของ แสงมูลฐาน และ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง อยู่ในรูปผลคูณระหว่าง ขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ (slowly varying amplitude) และ ปัจจัยทางเฟสที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ดังนี้

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}E_{x,1}\\E_{y,1}\\E_{z,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{x,1}\\e_{y,1}\\e_{z,1}\end{bmatrix}e^{-j\beta_1 z} \qquad (ง.4)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} E_{x,2} \\ E_{y,2} \\ E_{z,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{x,2} \\ e_{y,2} \\ e_{z,2} \end{bmatrix} e^{-j\beta_2 z} \qquad (ง.5)$$

แทนสมการ (ง.4) และ (ง.5) ลงใน (ง.2) และ (ง.3) จะได้

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z) = \begin{bmatrix} P_{x,1} \\ P_{y,1} \\ P_{z,1} \end{bmatrix} = 2[d] \begin{bmatrix} e_{x,1}^{*} e_{x,2} \\ e_{y,1}^{*} e_{y,2} \\ e_{z,1}^{*} e_{z,2} \\ e_{y,1}^{*} e_{z,1} + e_{z,1}^{*} e_{y,2} \\ e_{z,1}^{*} e_{x,2} + e_{x,1}^{*} e_{z,2} \\ e_{x,1}^{*} e_{y,2} + e_{y,1}^{*} e_{x,2} \end{bmatrix} e^{-j(\beta_2-\beta_1)z} = \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{z,1} \end{bmatrix} e^{-j(\beta_2-\beta_1)z} \qquad (ง.6)$$

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z) = \begin{bmatrix} P_{x,2} \\ P_{y,2} \\ P_{z,2} \end{bmatrix} = [d] \begin{bmatrix} (e_{x,1})^2 \\ (e_{y,1})^2 \\ (e_{z,1})^2 \\ 2e_{y,1}e_{z,1} \\ 2e_{z,1}e_{x,1} \\ 2e_{x,1}e_{y,1} \end{bmatrix} e^{-j2\beta_1 z} = \begin{bmatrix} p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{z,2} \end{bmatrix} e^{-j2\beta_1 z} \qquad (ง.7)$$

พิจารณากรณี แสงมูลฐาน $(i=1)$ ก่อน โดยแทนสมการ (ง.4) และ (ง.6) ลงใน (ง.1) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,i}}{\varepsilon_{zz,i}} \frac{\partial e_{x,1} e^{-j\beta_1 z}}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 e_{x,1} e^{-j\beta_1 z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{x,1} e^{-j\beta_1 z}}{\partial z^2} + k_{0,i}^2 \varepsilon_{xx,i} e_{x,1} e^{-j\beta_1 z} = -k_{0,i}^2 p_{x,1} e^{-j(\beta_2-\beta_1)z} \qquad (ง.8)$$

กำจัดปัจจัยทางเฟสที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ออกจากสมการ (ง.8) และจัดรูปสมการ จะได้สมการคลื่นสำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ขององค์ประกอบสนามไฟฟ้า $E_{x,1}$ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}} \frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial z^2} - j2\beta_1 \frac{\partial e_{x,1}}{\partial x} + \left(k_{0,1}^2 \varepsilon_{xx,1} - \beta_1^2\right) e_{x,1} = -k_{0,1}^2 p_{x,1} e^{-j\Delta\beta z} \qquad (ง.9)$$

โดยที่ $\Delta\beta$ คือ ปัจจัยการไม่แมตซ์กันทางเฟส (phase mismatch factor) ของแสงมูลฐานและแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง

ในทำนองเดียวกันสำหรับ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง แทนสมการ (ง.5) และ (ง.6) ลงใน (ง.1) จะได้สมการคลื่นสำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ขององค์ประกอบสนามไฟฟ้า $E_{x,2}$ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial e_{x,2}}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 e_{x,2}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{x,2}}{\partial z^2}-j2\beta_2\frac{\partial e_{x,2}}{\partial x}+\left(k_{0,2}^2\varepsilon_{xx,2}-\beta_2^2\right)e_{x,2}=-k_{0,2}^2 p_{x,2}e^{j\Delta\beta z}$$

(ง.10)

<u>สมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของสนามหลักในโมด</u> E^y

จากสมการคลื่นแบบสเกลาร์ (ค.12) สำหรับองค์ประกอบสนามแม่เหล็ก H_x คือ

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial^2 H_{x,i}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,i}}\frac{\partial H_{x,i}}{\partial z}\right)+k_{0,i}^2 H_{x,i}=-j\omega_i\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_{z,i}}{\varepsilon_{zz,i}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_{y,i}}{\varepsilon_{yy,i}}\right)\right)$$

(ง.11)

สมมติให้สนามแม่เหล็กของ แสงมูลฐาน และ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง อยู่ในรูปผลคูณระหว่าง ขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ และ ปัจจัยทางเฟสที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ดังนี้

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}H_{x,1}\\H_{y,1}\\H_{z,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{x,1}\\h_{y,1}\\h_{z,1}\end{bmatrix}e^{-j\beta_1 z} \qquad (ง.12)$$

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}E_{x,2}\\E_{y,2}\\E_{z,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{x,2}\\e_{y,2}\\e_{z,2}\end{bmatrix}e^{-j\beta_2 z} \qquad (ง.13)$$

พิจารณากรณี แสงมูลฐาน $(i=1)$ ก่อน โดยแทนสมการ (ง.13) และ (ง.6) ลงใน (ง.11) จะได้

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}e^{-j\beta_1 z}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial h_{x,1}e^{-j\beta_1 z}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial h_{x,1}e^{-j\beta_1 z}}{\partial z}\right)+k_{0,1}^2 h_{x,1}e^{-j\beta_1 z}$$
$$=-j\omega_1\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,1}e^{-j(\beta_2-\beta_1)z}}{\varepsilon_{zz,1}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p_{y,1}e^{-j(\beta_2-\beta_1)z}}{\varepsilon_{yy,1}}\right)\right)$$

(ง.14)

กำจัดปัจจัยทางเฟสที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วออกจากสมการ (ง.14) และจัดรูปสมการ จะได้สมการคลื่นสำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ขององค์ประกอบสนามแม่เหล็ก $H_{x,1}$ ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial z^2}+-j2\beta_1\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}+\left(k_{0,1}^2-\frac{\beta_1^2}{\varepsilon_{yy,1}}\right)h_{x,1}$$
$$=-\left(j\omega_1\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\right)-\frac{\omega_1\varepsilon_0(\beta_2-\beta_1)}{\varepsilon_{yy,1}}p_{y,1}\right)e^{-j\Delta\beta z} \quad (ง.15)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง $(i=2)$ แทนสมการ (ง.13) และ (ง.7) ลงใน (ง.11) จะได้สมการคลื่นสำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ขององค์ประกอบสนามแม่เหล็ก $H_{x,2}$ ดังนี้

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}e^{-j\beta_2 z}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial h_{x,2}e^{-j\beta_2 z}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial h_{x,2}e^{-j\beta_2 z}}{\partial z}\right)+k_{0,2}^2h_{x,2}e^{-j\beta_2 z}$$
$$=-j\omega_2\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,2}e^{-j2\beta_1 z}}{\varepsilon_{zz,2}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p_{y,2}e^{-j2\beta_1 z}}{\varepsilon_{yy,2}}\right)\right) \quad (ง.16)$$

กำจัด ปัจจัยทางเฟสที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ออกจากสมการ (ง.16) และจัดรูปสมการ จะได้สมการคลื่นสำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ขององค์ประกอบสนามแม่เหล็ก $H_{x,2}$ ดังนี้

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial z^2}+-j2\beta_2\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}+\left(k_{0,2}^2-\frac{\beta_2^2}{\varepsilon_{yy,2}}\right)h_{x,2}$$
$$=-\left(j\omega_2\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\right)-\frac{\omega_2\varepsilon_0 2\beta_1}{\varepsilon_{yy,2}}p_{y,2}\right)e^{j\Delta\beta z}$$

(ง.17)

<u>สรุป</u> สมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ สำหรับสนามหลักในโมด E^x และ E^y เป็นดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โมด E^x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial z^2}-j2\beta_1\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}+\left(k_{0,1}^2\varepsilon_{xx,1}-\beta_1^2\right)e_{x,1}=-k_{0,1}^2p_{x,1}e^{-j\Delta\beta z}$$

(ง.18)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial e_{x,2}}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 e_{x,2}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{x,2}}{\partial z^2}-j2\beta_2\frac{\partial e_{x,2}}{\partial x}+\left(k_{0,2}^2\varepsilon_{xx,2}-\beta_2^2\right)e_{x,2}=-k_{0,2}^2p_{x,2}e^{j\Delta\beta z}$$

(ง.19)

โมด E^y

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial z^2}-j2\beta_1\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}+\left(k_{0,1}^2-\frac{\beta_1^2}{\varepsilon_{yy,1}}\right)h_{x,1}$$
$$=-\left(j\omega_1\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\right)-\frac{\omega_1\varepsilon_0(\beta_2-\beta_1)}{\varepsilon_{yy,1}}p_{y,1}\right)e^{-j\Delta\beta z}$$

(ง.20)

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial z^2}-j2\beta_2\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}+\left(k_{0,2}^2-\frac{\beta_2^2}{\varepsilon_{yy,2}}\right)h_{x,2}$$
$$=-\left(j\omega_2\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\right)-\frac{\omega_2\varepsilon_0 2\beta_1}{\varepsilon_{yy,2}}p_{y,2}\right)e^{j\Delta\beta z}$$

(ง.21)

<u>การประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบระยะทางในภาคตัดขวางสำหรับท่อนำคลื่นแสงแบบดรรชนีลาด</u>

ท่อนำคลื่นแสงแบบดรรชนีลาดจะมีค่าดัชนีหักเหแสงแปรตามระยะทางในภาคตัดขวาง โดยทั่วไปค่าดัชนีหักเหแสงนี้มักจะแปรตามระยะทางอย่างช้าๆ โดยสอดคล้องกับสมมุติฐาน ดังต่อไปนี้

$$\frac{\nabla_t\left(n^2\right)}{n^2}\approx 0 \qquad (ง.22)$$

ดังนั้น พจน์อนุพันธ์ในสมการ (ง.18) ถึง (ง.21) จะประมาณได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}\right)=\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\right)\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}\approx\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial x^2} \qquad (ง.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}\right)=\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\right)\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}\approx\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial x^2} \qquad (ง.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}\right)=\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\right)\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}\approx\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial y^2} \qquad (ง.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}\right)=\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\right)\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}\approx\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial y^2} \qquad (ง.26)$$

แทนสมการ (ง.23) ถึง (ง.26) ลงใน (ง.18) ถึง (ง.21) จะได้

$$\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial z^2}-j2\beta_1\frac{\partial e_{x,1}}{\partial x}+\left(k_{0,1}^2\varepsilon_{xx,1}-\beta_1^2\right)e_{x,1}=-k_{0,1}^2 p_{x,1}e^{-j\Delta\beta z} \qquad (ง.27)$$

$$\frac{\varepsilon_{xx,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 e_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{x,2}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{x,2}}{\partial z^2}-j2\beta_2\frac{\partial e_{x,2}}{\partial x}+\left(k_{0,2}^2\varepsilon_{xx,2}-\beta_2^2\right)e_{x,2}=-k_{0,2}^2 p_{x,2}e^{j\Delta\beta z} \qquad (ง.28)$$

และ

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial x^2}+\frac{1}{\varepsilon_{zz,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial y^2}+\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial^2 h_{x,1}}{\partial z^2}-j2\beta_1\frac{1}{\varepsilon_{yy,1}}\frac{\partial h_{x,1}}{\partial y}+\left(k_{0,1}^2-\frac{\beta_1^2}{\varepsilon_{yy,1}}\right)h_{x,1}$$
$$=-\left(j\omega_1\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\right)-\frac{\omega_1\varepsilon_0\left(\beta_2-\beta_1\right)}{\varepsilon_{yy,1}}p_{y,1}\right)e^{-j\Delta\beta z}$$

(ง.29)

$$\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial x^2}+\frac{1}{\varepsilon_{zz,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial y^2}+\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial^2 h_{x,2}}{\partial z^2}-j2\beta_2\frac{1}{\varepsilon_{yy,2}}\frac{\partial h_{x,2}}{\partial y}+\left(k_{0,2}^2-\frac{\beta_2^2}{\varepsilon_{yy,2}}\right)h_{x,2}$$
$$=-\left(j\omega_2\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\right)-\frac{\omega_2\varepsilon_0 2\beta_1}{\varepsilon_{yy,2}}p_{y,2}\right)e^{j\Delta\beta z}$$

(ง.30)

<u>รูปแบบหนึ่งเดียวของสมการคลื่นแบบสเกลาร์สำหรับขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของสนามหลักในโมด</u> E^x <u>และ</u> E^y

สมการ (ง.27) ถึง (ง.30) สามารถเขียนได้ในรูป หนึ่งเดียวดังนี้

$$p_{x,i}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+p_{y,i}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}+p_{z,i}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2}-j2\beta_i p_{z,i}\frac{\partial\phi_i}{\partial z}+\left(k_{0,i}^2 q_i+\beta_i^2 p_{z,i}\right)\phi_i=-S_i \qquad (ง.31)$$

โดยที่ i เท่ากับ 1 และ 2 สำหรับแสงมูลฐานและแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง ตามลำดับ

สำหรับ โมด E^x

$$\phi_i=e_{x,i} \qquad (ง.32)$$

$$p_{x,i}=\frac{\varepsilon_{xx,i}}{\varepsilon_{zz,i}} \quad , \quad p_{y,i}=1 \quad , \quad p_{z,i}=1 \qquad (ง.33)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$q_i = \varepsilon_{xx,i} \tag{ง.34}$$

$$S_1 = k_{0,1}^2 p_{x,1} e^{-j\Delta\beta z} \tag{ง.35}$$

$$S_1 = k_{0,2}^2 p_{x,2} e^{j\Delta\beta z} \tag{ง.36}$$

สำหรับ โมด E^y

$$\phi_i = h_{x,i} \tag{ง.37}$$

$$p_{x,i} = \frac{1}{\varepsilon_{yy,i}} \quad , \quad p_{y,i} = \frac{1}{\varepsilon_{zz,i}} \quad , \quad p_{z,i} = \frac{1}{\varepsilon_{yy,i}} \tag{ง.38}$$

$$q_i = 1 \tag{ง.39}$$

$$S_1 = \left(j\omega_1 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,1}}{\varepsilon_{zz,1}}\right) - \frac{\omega_1 \varepsilon_0 (\beta_2 - \beta_1)}{\varepsilon_{yy,1}} p_{y,1} \right) e^{-j\Delta\beta z} \tag{ง.40}$$

$$S_1 = \left(j\omega_2 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{z,2}}{\varepsilon_{zz,2}}\right) - \frac{\omega_2 \varepsilon_0 2\beta_1}{\varepsilon_{yy,2}} p_{y,2} \right) e^{j\Delta\beta z} \tag{ง.41}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก จ

การพิสูจน์สมการของ วิธีเวกเตอร์ไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชัน

จากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับวิเคราะห์การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสองในภาคผนวก ค (ข.33) คือ

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_i(x,y,z) - k_{0,i}^2 [\varepsilon_{r,i}] \cdot \boldsymbol{E}_i(x,y,z) = 2k_{0,i}^2 \boldsymbol{P}_i(x,y,z) \tag{จ.1}$$

โดยที่ i เท่ากับ 1 และ 2 สำหรับแสงมูลฐานและแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง ตามลำดับ และ

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z) = [d] : \boldsymbol{E}_1^*(x,y,z) \boldsymbol{E}_2(x,y,z) \tag{จ.2}$$

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z) = [d] : \boldsymbol{E}_1(x,y,z) \boldsymbol{E}_1(x,y,z) \tag{จ.3}$$

<u>การสร้างสมการสำหรับวิเคราะห์การกำเนิดแสงฮาร์มอนิกอันดับสอง</u>

การหาผลเฉลยของสมการ (จ.1) โดย วิธีแยกตัวดำเนินการ (operator splitting method) ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> พิจารณาเฉพาะผลของคลื่นแสงเคลื่อนที่ (propagation effect)

ในขั้นตอนนี้จะกำหนดให้พจน์แหล่งกำเนิดทางด้านขวามือของสมการ (ง.1) มีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_i(x,y,z) - k_{0,i}^2 [\varepsilon_{r,i}] \cdot \boldsymbol{E}_i(x,y,z) = 0 \tag{จ.4}$$

จัดรูปสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ (จ.4) เพื่อให้เหมาะสมสำหรับการหาผลเฉลยโดยประมาณด้วย วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ในภายหลัง จากสมการ (จ.4) กำหนดให้

$$\nabla = \nabla_t + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{จ.5}$$

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_{t,i} + \boldsymbol{a}_z E_{z,i} \tag{จ.6}$$

แทนสมการ (จ.5) และ (จ.6) ลงใน (จ.4) จะได้

$$\left(\nabla_t + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left[\nabla_t \times \boldsymbol{E}_{t,i} + \nabla_t \times \boldsymbol{a}_z E_{z,i} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \boldsymbol{E}_{t,i} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \overline{a}_z E_{z,i}\right] - k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right] \left(\boldsymbol{E}_{t,i} + \boldsymbol{a}_z E_{z,i}\right) = 0$$

(จ.7)

สมการ (จ.7) สามารถแยกออกได้เป็นสองส่วน คือ สมการสำหรับองค์ประกอบในแนวขวางและแนวเคลื่อนที่ ดังนี้

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_{t,i} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_t E_{z,i}\right) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_{t,i}}{\partial z^2} - k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right] \boldsymbol{E}_{t,i} = 0 \qquad (\text{จ.8})$$

$$\nabla_t \cdot \left(\nabla_t E_{z,i}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_t \cdot \boldsymbol{E}_{t,i}\right) + k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right] E_{z,i} = 0 \qquad (\text{จ.9})$$

สมมติให้ผลเฉลยโดยประมาณของสนามไฟฟ้าในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของผลคูณของ ฟังก์ชันรูปร่าง กับ ตัวแปรไม่ทราบค่า ดังนี้

$$\boldsymbol{E}_{t,i} = \boldsymbol{a}_x \{U\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\} \qquad (\text{จ.10})$$

$$E_{z,i} = j\{N\}^T \left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\} \qquad (\text{จ.11})$$

เมื่อ $\left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรไม่ทราบค่าที่อยู่บนขอบของอีลีเมนต์ $\left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}$ คือ เวกเตอร์คอลัมน์ของตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดโนดของอีลีเมนต์ $\{U\}$ และ $\{V\}$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าในทิศ x และ y ตามลำดับ และ $\{N\}$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ของสนามไฟฟ้าในทิศ z

การแทนผลเฉลยโดยประมาณ คือ สมการ (จ.10) และ (จ.11) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (จ.8) และ (จ.9) จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง (residual) R นั่นคือ

$$\begin{aligned}\nabla_t \times \nabla_t \times \left(\boldsymbol{a}_x \{U\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_t j\{N\}^T \left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}\right) \\ - \frac{\partial^2 \left(\boldsymbol{a}_x \{U\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}\right)}{\partial z^2} - k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right] \left(\boldsymbol{a}_x \{U\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}\right) = R\end{aligned}$$

(จ.12)

$$\overline{\nabla}_t \cdot \left(\nabla_t j\{N\}^T \left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_t \cdot \overline{a}_x \{U\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\} + \overline{a}_y \{V\}^T \left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}\right) + k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right] j\{N\}^T \left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\} = R$$

(จ.13)

การถ่วงน้ำหนักสมการ (จ.12) ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ (vector shape function) $\boldsymbol{W}_t$ และถ่วงน้ำหนักสมการ (จ.13) ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ (scalar shape function) W_z จากนั้นอินทิเกรตสมการที่ได้ทั่วบริเวณอีลีเมนต์ Ω^e และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\iint_{\Omega^e} \boldsymbol{W}_t \cdot \nabla_t \times \nabla_t \times \left(\boldsymbol{a}_x \{U\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\}\right) dxdy + \iint_{\Omega^e} \boldsymbol{W}_t \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_t j \{N\}^T \{\widetilde{e}^e_{z,i}\}\right) dxdy$$
$$- \iint_{\Omega^e} \boldsymbol{W}_t \cdot \frac{\partial^2 \left(\boldsymbol{a}_x \{U\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\}\right)}{\partial z^2} dxdy - \iint_{\Omega^e} \boldsymbol{W}_t \cdot k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right]\left(\boldsymbol{a}_x \{U\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\} + \boldsymbol{a}_y \{V\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\}\right) dxdy = 0$$

(จ.14)

$$\iint_{\Omega^e} W_z \nabla_t \cdot \left(\nabla_t j \{N\}^T \{\widetilde{e}^e_{z,i}\}\right) dxdy - \iint_{\Omega^e} W_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_t \cdot \left(\overline{a}_x \{U\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\} + \overline{a}_y \{V\}^T \{\widetilde{e}^e_{t,i}\}\right)\right) dxdy$$
$$+ \iint_{\Omega^e} W_z k_{0,i}^2 \left[\varepsilon_{r,i}\right]\left(j \{N\}^T \{\widetilde{e}^e_{z,i}\}\right) dxdy = 0$$

(จ.15)

ดำเนินการตาม วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin's method) โดยเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักให้มีรูปแบบเดียวกันกับ ฟังก์ชันรูปร่าง ดังนี้

$$\boldsymbol{W}_t = \boldsymbol{a}_x \{U\} + \boldsymbol{a}_y \{V\} \quad \text{(จ.16)}$$

$$W_z = j\{N\} \quad \text{(จ.17)}$$

แทนสมการ (จ.16) และ (จ.17) ลงในสมการ (จ.14) และ (จ.15) และดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อจัดรูปพจน์ต่างๆ ของสมการดังกล่าว สุดท้ายจะได้

$$\iint_{\Omega^e} \left(\{U_y\}\{U_y\}^T + \{V_x\}\{V_x\}^T - \{U_y\}\{V_x\}^T - \{V_x\}\{U_y\}^T\right) dxdy \{\widetilde{e}^e_{t,i}\}$$
$$+ j \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Omega^e} \left(\{U\}\{N_x\}^T + \{V\}\{N_y\}^T\right) dxdy \{\widetilde{e}^e_{z,i}\} - \frac{\partial^2}{\partial z} \iint_{\Omega^e} \left(\{U\}\{U\}^T + \{V\}\{V\}^T\right) dxdy \{\widetilde{e}^e_{t,i}\}$$
$$- k_{0,i}^2 \iint_{\Omega^e} \left(\varepsilon_{x,i} \{U\}\{U\}^T + \varepsilon_{y,i} \{V\}\{V\}^T\right) dxdy \{\widetilde{e}^e_{t,i}\} = 0$$

(จ.18)

$$\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{N_x\}^T+\{N_y\}\{N_y\}^T\right)dxdy\left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}+j\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{U\}^T+\{N_y\}\{V\}^T\right)dxdy\left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}$$
$$-k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\varepsilon_{z,i}\{N\}\{N\}^T dxdy\left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}=0$$

(จ.19)

โดยที่ ตัวห้อย x และ y จะบ่งบอกถึงการหาค่าอนุพันธ์ย่อยเทียบตัวแปร x และ y ตามลำดับ

การนำสมการ (จ.18) และ (จ.19) ไปใช้ในการคำนวณนั้นจะมีปัญหาเกี่ยวกับเสถียรภาพของการคำนวณ (calculation stability) ซึ่งส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ลู่ออก Schulz et al. (1998) แนะนำให้แปลงตัวแปรองค์ประกอบสนามในแนวเคลื่อนที่ก่อนที่จะนำสมการทั้งสองไปใช้ในการคำนวณ โดยการกำหนดให้

$$E_{z,i}=j\frac{\partial E'_{z,i}}{\partial z} \tag{จ.20}$$

ดังนั้น องค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวเคลื่อนที่จะกลายเป็น

$$E_{z,i}=j\{N\}^T\left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}=j\left(j\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z}\right)\left\{\tilde{e}_{z,i}'^e\right\} \tag{จ.21}$$

จากสมการ (ง.21) จะเห็นได้ว่าการแปลงตัวแปรองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวจะสมมูลกับการแทน $\{N\}^T$ ด้วย $j\dfrac{\partial\{N\}^T}{\partial z}$ นั่นเอง แทนฟังก์ชันรูปร่าง $\{N\}^T$ ในสมการ (จ.18) และ (จ.19) ด้วย $j\dfrac{\partial\{N\}^T}{\partial z}$ จะได้

$$\iint_{\Omega^e}\left(\{U_y\}\{U_y\}^T+\{V_x\}\{V_x\}^T-\{U_y\}\{V_x\}^T-\{V_x\}\{U_y\}^T\right)dxdy\left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\frac{\partial\{N_x\}^T}{\partial z}+\{V\}\frac{\partial\{N_y\}^T}{\partial z}\right)dxdy\left\{\tilde{e}_{z,i}^e\right\}-\frac{\partial^2}{\partial z}\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{U\}^T+\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}$$
$$-k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\left(\varepsilon_{x,i}\{U\}\{U\}^T+\varepsilon_{y,i}\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\left\{\tilde{e}_{t,i}^e\right\}=0$$

(จ.22)

$$\iint_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\{N_x\}}{\partial z}\frac{\partial\{N_x\}^T}{\partial z}+\frac{\partial\{N_y\}}{\partial z}\frac{\partial\{N_y\}^T}{\partial z}\right)dxdy\{\tilde{e}^e_{z,i}\}+\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\{N_x\}}{\partial z}\{U\}^T+\{N_y\}\frac{\partial\{V\}^T}{\partial z}\right)dxdy\{\tilde{e}^e_{t,i}\}$$
$$-k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\varepsilon_{z,i}\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z}dxdy\{\tilde{e}^e_{z,i}\}=0$$

(จ.23)

สมมติให้สนามไฟฟ้าของแสงดังกล่าวอยู่ในรูปผลคูณระหว่าง ขนาดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ (slowly varying amplitude) และ ปัจจัยทางเฟสที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\{\tilde{e}_{t,i}\}\\ \{\tilde{e}'_{z,i}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}\\ \{e'^e_{z,i}\}e^{-j\beta_i z}\end{bmatrix} \tag{จ.24}$$

แทนสมการ (จ.24) ลงใน (จ.22) และ (จ.23) จะได้

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega^e}\left(\{U_y\}\{U_y\}^T+\{V_x\}\{V_x\}^T-\{U_y\}\{V_x\}^T-\{V_x\}\{U_y\}^T\right)dxdy\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}\\
&\qquad-\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{N_x\}^T+\{V\}\{N_y\}^T\right)dxdy\frac{\partial^2\left(\{e'^e_{z,i}\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z^2}\\
&\qquad-\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{U\}^T+\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\frac{\partial^2\left(\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z}\\
&\qquad-k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\left(\varepsilon_{x,i}\{U\}\{U\}^T+\varepsilon_{y,i}\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}=0\end{aligned} \tag{จ.25}$$

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{N_x\}^T+\{N_y\}\{N_y\}^T\right)dxdy\frac{\partial^2\left(\{e'^e_{z,i}\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z^2}\\
&\qquad+\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{U\}^T+\{N_y\}\{V\}^T\right)dxdy\frac{\partial^2\left(\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z^2}\\
&\qquad-k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\varepsilon_{z,i}\{N\}\{N\}^T dxdy\frac{\partial^2\left(\{e'^e_{z,i}\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z^2}=0\end{aligned} \tag{จ.26}$$

พิจารณาพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปร z

$$\frac{\partial\left(\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z}=-j\beta_i\{e^e_{t,i}\}e^{-j\beta_i z}+\frac{\partial\{e^e_{t,i}\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} \tag{จ.27}$$

$$\frac{\partial^2\left(\left\{e_{t,i}^e\right\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z^2} = -\beta_i^2\left\{e_{t,i}^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{t,i}^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{t,i}^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z} \qquad (จ.28)$$

$$\frac{\partial\left(\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z} = -j\beta_i\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} \qquad (จ.29)$$

$$\frac{\partial^2\left(\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z}\right)}{\partial z^2} = -\beta_i^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z} \qquad (จ.30)$$

แทนสมการ (จ.27) ถึง (จ.30) ลงใน (จ.25) และ (จ.26) จะได้

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^e}\left(\{U_y\}\{U_y\}^T + \{V_x\}\{V_x\}^T - \{U_y\}\{V_x\}^T - \{V_x\}\{U_y\}^T\right)dxdy\left\{e_{t,i}^e\right\}e^{-j\beta_i z} \\
&- \iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{N_x\}^T + \{V\}\{N_y\}^T\right)dxdy\left(-\beta_i^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z}\right) \\
&- \iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{U\}^T + \{V\}\{V\}^T\right)dxdy\left(-\beta_i^2\left\{e_{t,i}^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{t,i}^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{t,i}^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z}\right) \\
&\qquad\qquad - k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\left(\varepsilon_{x,i}\{U\}\{U\}^T + \varepsilon_{y,i}\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\left\{e_{t,i}^e\right\}e^{-j\beta_i z} = 0
\end{aligned}$$

(จ.31)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{N_x\}^T + \{N_y\}\{N_y\}^T\right)dxdy\left(-\beta_i^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z}\right) \\
&+ \iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{U\}^T + \{N_y\}\{V\}^T\right)dxdy\left(-\beta_i^2\left\{e_{t,i}^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{t,i}^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{t,i}^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z}\right) \\
&- k_{0,i}^2\iint_{\Omega^e}\varepsilon_{z,i}\{N\}\{N\}^T dxdy\left(-\beta_i^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}e^{-j\beta_i z} - 2j\beta_i\frac{\partial\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z}e^{-j\beta_i z} + \frac{\partial^2\left\{e_{z,i}'^e\right\}}{\partial z^2}e^{-j\beta_i z}\right) = 0
\end{aligned}$$

(จ.32)

จัดพจน์ต่างๆ ของสมการ (จ.31) และ (จ.32) จากนั้นหารทั้งสองข้างของสมการที่ได้ด้วย $e^{-j\beta_i z}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{U\}^T+\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\frac{d^2\{e_{t,i}^e\}}{dz^2}+\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{N_x\}^T+\{V\}\{N_y\}^T\right)dxdy\frac{d^2\{e_{z,i}'^e\}}{dz^2}\\
&-2j\beta_i\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{U\}^T+\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\frac{d\{e_{t,i}^e\}}{dz}-2j\beta_i\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{N_x\}^T+\{V\}\{N_y\}^T\right)dxdy\frac{d\{e_{z,i}'^e\}}{dz}\\
&+\iint_{\Omega^e}\left[k_{0,i}^2\left(\varepsilon_{x,i}\{U\}\{U\}^T+\varepsilon_{y,i}\{V\}\{V\}^T\right)-\{U_y\}\{U_y\}^T-\{V_x\}\{V_x\}^T+\{U_y\}\{V_x\}^T+\{V_x\}\{U_y\}^T\right]dxdy\{e_{t,i}^e\}\\
&-\beta_i^2\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{U\}^T+\{V\}\{V\}^T\right)dxdy\{e_{t,i}^e\}-\beta_i^2\iint_{\Omega^e}\left(\{U\}\{N_x\}^T+\{V\}\{N_y\}^T\right)dxdy\{e_{z,i}'^e\}=0
\end{aligned}
\tag{จ.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{U\}^T+\{N_y\}\{V\}^T\right)dxdy\frac{d^2\{e_{t,i}^e\}}{dz^2}-\iint_{\Omega^e}\left(k_{0,i}^2\varepsilon_{z,i}\{N\}\{N\}^T-\{N_x\}\{N_x\}^T-\{N_y\}\{N_y\}^T\right)dxdy\frac{d^2\{e_{z,i}'^e\}}{dz^2}\\
&-2j\beta_i\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{U\}^T+\{N_y\}\{V\}^T\right)dxdy\frac{d\{e_{t,i}^e\}}{dz}\\
&-2j\beta_i\iint_{\Omega^e}\left(k_{0,i}^2\varepsilon_{z,i}\{N\}\{N\}^T-\{N_x\}\{N_x\}^T-\{N_y\}\{N_y\}^T\right)dxdy\frac{d\{e_{z,i}'^e\}}{dz}\\
&-\beta_i^2\iint_{\Omega^e}\left(\{N_x\}\{U\}^T+\{N_y\}\{V\}^T\right)dxdy\{e_{t,i}^e\}\\
&+\beta_i^2\iint_{\Omega^e}\left(k_{0,i}^2\varepsilon_{z,i}\{N\}\{N\}^T-\{N_x\}\{N_x\}^T-\{N_y\}\{N_y\}^T\right)dxdy\{e_{z,i}'^e\}=0
\end{aligned}
$$

หรือ

$$
\begin{aligned}
&\left[M_{tt,i}^e\right]\frac{d^2\{e_{t,i}^e\}}{dz^2}+\left[K_{tz,i}^e\right]\frac{d^2\{e_{z,i}'^e\}}{dz^2}-2j\beta_i\left[M_{tt,i}^e\right]\frac{d\{e_{t,i}^e\}}{dz}-2j\beta_i\left[K_{tz,i}^e\right]\frac{d\{e_{z,i}'^e\}}{dz}\\
&\qquad+\left[K_{tt,i}^e\right]\{e_{t,i}^e\}-\beta_i^2\left[M_{tt,i}^e\right]\{e_{t,i}^e\}-\beta_i^2\left[K_{tz,i}^e\right]\{e_{z,i}'^e\}=0
\end{aligned}
\tag{จ.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[K_{zt,i}^e\right]\frac{d^2\{e_{t,i}^e\}}{dz^2}-\left[K_{zz,i}^e\right]\frac{d^2\{e_{z,i}'^e\}}{dz^2}-2j\beta_i\left[K_{zt,i}^e\right]\frac{d\{e_{t,i}^e\}}{dz}+2j\beta_i\left[K_{zz,i}^e\right]\frac{d\{e_{z,i}'^e\}}{dz}\\
&\qquad-\beta_i^2\left[K_{zt,i}^e\right]\{e_{t,i}^e\}+\beta_i^2\left[K_{zz,i}^e\right]\{e_{z,i}'^e\}=0
\end{aligned}
\tag{จ.35}
$$

หรือ

$$\begin{bmatrix}[M^e_{tt,i}] & [K^e_{tz,i}]\\ [K^e_{zt,i}] & -[K^e_{zz,i}]\end{bmatrix}\frac{d^2}{dz^2}\begin{bmatrix}\{e^e_{t,i}\}\\ \{e'^e_{z,i}\}\end{bmatrix}-2j\beta_i\begin{bmatrix}[M^e_{tt,i}] & [K^e_{tz,i}]\\ [K^e_{zt,i}] & -[K^e_{zz,i}]\end{bmatrix}\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}\{e^e_{t,i}\}\\ \{e'^e_{z,i}\}\end{bmatrix}$$
$$+\left(\begin{bmatrix}[K^e_{tt,i}] & [0]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}-\beta_i^2\begin{bmatrix}[M^e_{tt,i}] & [K^e_{tz,i}]\\ [K^e_{zt,i}] & -[K^e_{zz,i}]\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\{e^e_{t,i}\}\\ \{e'^e_{z,i}\}\end{bmatrix}=\{0\}$$

หรือ

$$[M_i^e]\frac{d^2\{e_i^e\}}{dz^2}-2j\beta_i[M_i^e]\frac{d\{e_i^e\}}{dz}+([K_i^e]-\beta_i^2[M_i^e])\{e_i^e\}=\{0\} \quad (จ.36)$$

รวมทุกอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของอุปกรณ์ QPM-SHG เข้าด้วยกัน จะได้

$$[M_i]\frac{d^2\{e_i\}}{dz^2}-2j\beta_i[M_i]\frac{d\{e_i\}}{dz}+([K_i]-\beta_i^2[M_i])\{e_i\}=\{0\} \quad (จ.37)$$

โดยที่

$$[M_i]=\sum_e[M_i^e]$$

$$[K_i]=\sum_e[K_i^e]$$

สมการ (จ.37) คือ สมการบีมพรอพาเกชัน สำหรับการพิจารณาการเคลื่อนที่ของ แสงมูลฐาน $(i=1)$ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง $(i=2)$ ภายในอุปกรณ์ QPM-SHG

สมการบีมพรอพาเกชัน (จ.37) ที่ได้ ยังไม่สามารถนำไปใช้คำนวณได้ เนื่องจากยังมีพจน์ที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ในแนวเคลื่อนที่ของแสง พจน์อนุพันธ์ดังกล่าวนี้จะถูกประมาณด้วย วิธีผลต่างสืบเนื่อง ก่อนจะดำเนินการประมาณดังกล่าว จะมีการจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ (จ.37) เพื่อลดอันดับสมการลงจากอันดับสองเป็นอันดับหนึ่ง โดยอาศัยการประมาณพาเด้ (Pade approximation) สมการ
(จ.37) สามารถเขียนได้ในรูป

$$-2j\beta_i[M_i]\frac{d\{e_i\}}{dz}=-\frac{([K_i]-\beta_i^2[M_i])\{e_i\}}{1-\dfrac{1}{2j\beta_i}\dfrac{d}{dz}} \quad (จ.38)$$

อาศัยความสัมพันธ์เวียงบังเกิด (recurrence relation) และแทนอนุพันธ์เทียบตัวแปร z ในตัวหารของสมการ (จ.38) ด้วย

$$\frac{d}{dz} \approx \frac{1}{2j\beta_i}\left[M_i\right]^{-1}\left(\left[K_i\right]-\beta_i^2\left[M_i\right]\right) \qquad (จ.39)$$

จะได้

$$-2j\beta_i\left[\widetilde{M}_i\right]\frac{d\{e_i\}}{dz}+\left(\left[K_i\right]-\beta_i^2\left[M_i\right]\right)\{e_i\}=\{0\} \qquad (จ.40)$$

กำหนดให้สนามไฟฟ้าที่คำนวณได้ใน ขั้นตอนที่ 1 นี้เป็น $\{e_i^L\}$ และประมาณพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (จ.40) ด้วย อัลกอริทึมแคลงนิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm) จะได้

$$\left[A_i\right]_m\{e_i^L\}_{m+1}=\left[B_i\right]_m\{e_i^L\}_m \qquad (จ.41)$$

โดยที่

$$\left[A_i\right]_m=-2j\beta_i\left[\widetilde{M}_i\right]_m+0.5\Delta z\left(\left[K_i\right]_m-\beta_i^2\left[M_i\right]_m\right) \qquad (จ.42)$$

$$\left[B_i\right]_m=-2j\beta_i\left[\widetilde{M}_i\right]_m-0.5\Delta z\left(\left[K_i\right]_m-\beta_i^2\left[M_i\right]_m\right) \qquad (จ.43)$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> ผลของความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear effect)

สนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จาก ขั้นตอนที่ 1 จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณหาผลของแหล่งกำเนิดเริ่มต้นจากการพิจารณาโพลาไรเซชัน $\boldsymbol{P}_1(x,y,z)$ และ $\boldsymbol{P}_2(x,y,z)$ ของพจน์เชื่อมโยงไม่เชิงเส้น ในสมการ (จ.1) ก่อน รูปชัดแจ้งของโพลาไรเซชันทั้งสองเป็นดังนี้

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z)=\begin{bmatrix}P_{x,1}\\P_{y,1}\\P_{z,1}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}&d_{14}&d_{15}&d_{16}\\d_{211}&d_{22}&d_{23}&d_{24}&d_{25}&d_{26}\\d_{31}&d_{32}&d_{33}&d_{34}&d_{35}&d_{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{x,1}^{*}E_{x,2}\\E_{y,1}^{*}E_{y,2}\\E_{z,1}^{*}E_{z,2}\\E_{y,1}^{*}E_{z,1}+E_{z,1}^{*}E_{y,2}\\E_{z,1}^{*}E_{x,2}+E_{x,1}^{*}E_{z,2}\\E_{x,1}^{*}E_{y,2}+E_{y,1}^{*}E_{x,2}\end{bmatrix} \qquad (จ.44)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z)=\begin{bmatrix}P_{x,2}\\P_{y,2}\\P_{z,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}&d_{14}&d_{15}&d_{16}\\d_{211}&d_{22}&d_{23}&d_{24}&d_{25}&d_{26}\\d_{31}&d_{32}&d_{33}&d_{34}&d_{35}&d_{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(E_{x,1})^2\\(E_{y,1})^2\\(E_{z,1})^2\\2E_{y,1}E_{z,1}\\2E_{z,1}E_{x,1}\\2E_{x,1}E_{y,1}\end{bmatrix} \qquad (จ.45)$$

สนามไฟฟ้าของ แสงมูลฐานความถี่ ω_1 และ แสงมูลฐานฮาร์มอนิกอันดับสองความถี่ ω_2 ที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 1 จะอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix}\{e_{t,1}\}\\\{e'_{z,1}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\{U\}^T\{e_{t,1}\}+\boldsymbol{a}_y\{V\}^T\{e_{t,1}\}\\j\{N\}^T\{e'_{z,1}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{x,1}\\e_{y,1}\\e_{z,1}\end{bmatrix}e^{-j\beta_1 z} \qquad (จ.46)$$

$$\begin{bmatrix}\{e_{t,2}\}\\\{e'_{z,2}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\{U\}^T\{e_{t,2}\}+\boldsymbol{a}_y\{V\}^T\{e_{t,2}\}\\j\{N\}^T\{e'_{z,2}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{x,2}\\e_{y,2}\\e_{z,2}\end{bmatrix}e^{-j\beta_2 z} \qquad (จ.47)$$

แทนสมการ (จ.46) และ (จ.47) ลงใน (จ.44) และ (จ.45) จะได้

$$\boldsymbol{P}_1(x,y,z)=\begin{bmatrix}P_{x,1}\\P_{y,1}\\P_{z,1}\end{bmatrix}=2[d]\begin{bmatrix}e^*_{x,1}e_{x,2}\\e^*_{y,1}e_{y,2}\\e^*_{z,1}e_{z,2}\\e^*_{y,1}e_{z,1}+e^*_{z,1}e_{y,2}\\e^*_{z,1}e_{x,2}+e^*_{x,1}e_{z,2}\\e^*_{x,1}e_{y,2}+e^*_{y,1}e_{x,2}\end{bmatrix}e^{-j(\beta_2-\beta_1)z}=\begin{bmatrix}p_{x,1}\\p_{y,1}\\p_{z,1}\end{bmatrix}e^{-j(\beta_2-\beta_1)z} \qquad (จ.48)$$

$$\boldsymbol{P}_2(x,y,z)=\begin{bmatrix}P_{x,2}\\P_{y,2}\\P_{z,2}\end{bmatrix}=[d]\begin{bmatrix}(e_{x,1})^2\\(e_{y,1})^2\\(e_{z,1})^2\\2e_{y,1}e_{z,1}\\2e_{z,1}e_{x,1}\\2e_{x,1}e_{y,1}\end{bmatrix}e^{-j2\beta_1 z}=\begin{bmatrix}p_{x,2}\\p_{y,2}\\p_{z,2}\end{bmatrix}e^{-j2\beta_1 z} \qquad (จ.49)$$

ผลของพจน์เชื่อมโยงไม่เชิงเส้นจะคำนวณหาได้จาก องค์ประกอบโพลาไรเซชัน $p_{x,i}$ $p_{y,i}$ และ $p_{z,i}$ ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\left\{e_i^{NL}\right\} = \int_{m\Delta z}^{(m+1)\Delta z} j \frac{1}{2\beta_i} \{p_i\}_m \exp\left(j(-1)^i \Delta\beta z\right) dz \qquad (\text{จ}.50)$$

เนื่องจาก การถ่ายเทกำลังงานระหว่าง แสงมูลฐาน กับ แสงฮาร์มอนิกอันดับสอง ที่เกิดขึ้นภายในระยะ Δz นี้มีค่าคงที่ จึงประมาณให้ขนาดของสนามบนระนาบที่ m มีค่าคงที่ได้ ดังนั้น โพลาไรเซชัน $\{p_i\}_m$ จึงไม่ขึ้นกับระยะทางตามแนวแกน z ผลการอินทิเกรตของสมการ (จ.50) จะเป็นดังนี้

$$\left\{e_i^{NL}\right\} = \frac{1}{2\beta_i \Delta\beta} \{p_i\}_m \left\{\exp\left(j(-1)^i \Delta\beta(m+1)\Delta z\right) - \exp\left(j(-1)^i \Delta\beta m \Delta z\right)\right\} \qquad (\text{ง}.59)$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> คำนวณหาสนามผลรวม (total effect field)

ขั้นตอนนี้จะเป็นการคำนวณหาสนามไฟฟ้าผลรวมที่เกิดจาก สนามไฟฟ้าเคลื่อนที่เชิงเส้น กับ สนามไฟฟ้าที่เกิดจากผลของความไม่เป็นเชิงเส้น สนามไฟฟ้าผลรวมจะเป็นดังนี้

$$\left\{e_i^{Total}\right\}_{m+1} = \left\{e_i^{L}\right\}_{m+1} + \left\{e_i^{NL}\right\}_{m+1} \qquad (\text{ง}.60)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

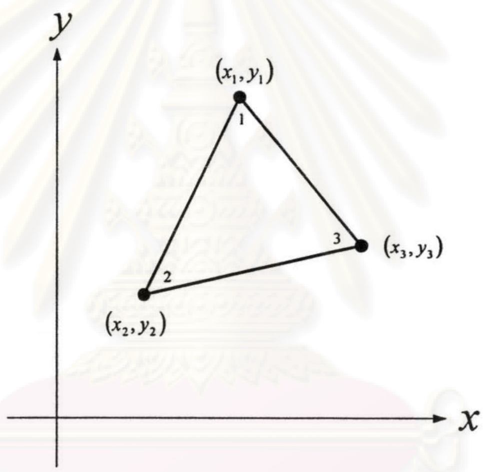
ภาคผนวก ฉ

ฟังก์ชันรูปร่างของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยม

การสร้างรูปร่างของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก

สำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก จะกำหนดให้อันดับของพหุนามที่ใช้ในการกำหนดรูปร่างของ อิลีเมนต์ มีอันดับเดียวกันกับฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าตัวแปรไม่ทราบค่าภายใน (interpolation function) (โดยทั่วไปนิยมเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function))

1. อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกอันดับหนึ่ง (linear isoparametric element)



รูปที่ ฉ 1 อิลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมอันดับหนึ่ง

อันดับของพหุนามที่ใช้ในการกำหนดรูปร่างของอิลีเมนต์นี้เท่ากับหนึ่ง ดังนั้น รูปร่างของอิลีเมนต์จึงมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมขอบตรงดังรูปที่ ฉ 1 พิกัด (x, y) ที่อยู่บนอิลีเมนต์นี้เป็นดังนี้

$$X = \sum_{i=1}^{3} N_i x_i \tag{ฉ.1}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{3} N_i y_i \tag{ฉ.2}$$

โดยที่ x_i และ y_i คือ พิกัดของจุดที่อยู่บนรูปร่างของอิลีเมนต์ และ N_i คือ พหุนามที่ใช้ในการกำหนดรูปร่างของอิลีเมนต์ โดยมีนิพจน์ดังนี้

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad \text{(ฉ.3)}$$

พิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 มีความสัมพันธ์กับตัวแปรพิกัด x และ y ดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{(ฉ.4)}$$

เมื่อ A_e คือ พื้นที่ของอิลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และสัมประสิทธิ์ a_k b_k และ c_k โดยที่

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{(ฉ.5)}$$

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \quad \text{(ฉ.6)}$$

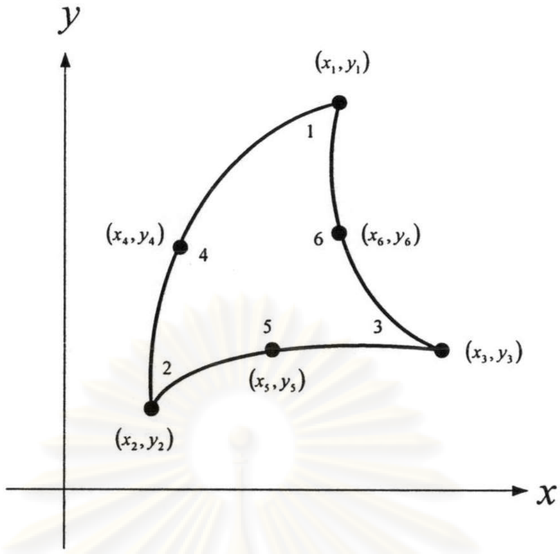
$$b_k = y_l - y_m \quad \text{(ฉ.7)}$$

$$c_k = x_m - x_l \quad \text{(ฉ.8)}$$

(k,l,m) เป็นมอดุโล (modulo) ของ $(1,2,3)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกอันดับสอง (quadratic isoparametric element)



รูปที่ ฉ 2 อิลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมอันดับสอง

อันดับของพหุนามที่ใช้ในการกำหนดรูปร่างของอิลีเมนต์นี้เท่ากับสอง ดังนั้น รูปร่างของอิลีเมนต์จึงมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมขอบโค้งดังรูปที่ ฉ 2 พิกัด (x, y) ที่อยู่บนอิลีเมนต์นี้เป็นดังนี้

$$X = \sum_{i=1}^{6} N_i x_i \tag{ฉ.9}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{6} N_i y_i \tag{ฉ.10}$$

โดยที่ x_i และ y_i คือ พิกัดของจุดที่อยู่บนรูปร่างของอิลีเมนต์ และ N_i คือ พหุนามที่ใช้ในการกำหนดรูปร่างของอิลีเมนต์ โดยมีนิพจน์ ดังนี้

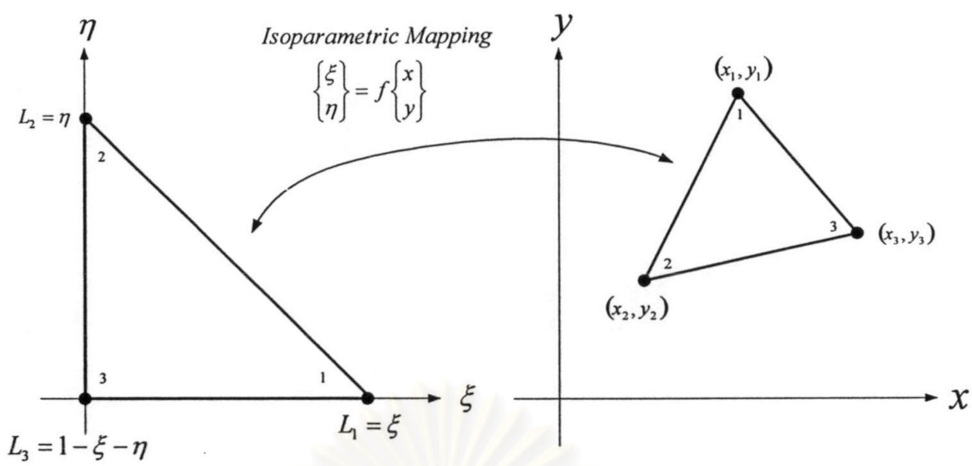
$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ L_3(2L_3 - 1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_3L_1 \end{Bmatrix} \tag{ฉ.11}$$

พิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 มีนิพจน์เดียวกันกับสมการ (ฉ.4)

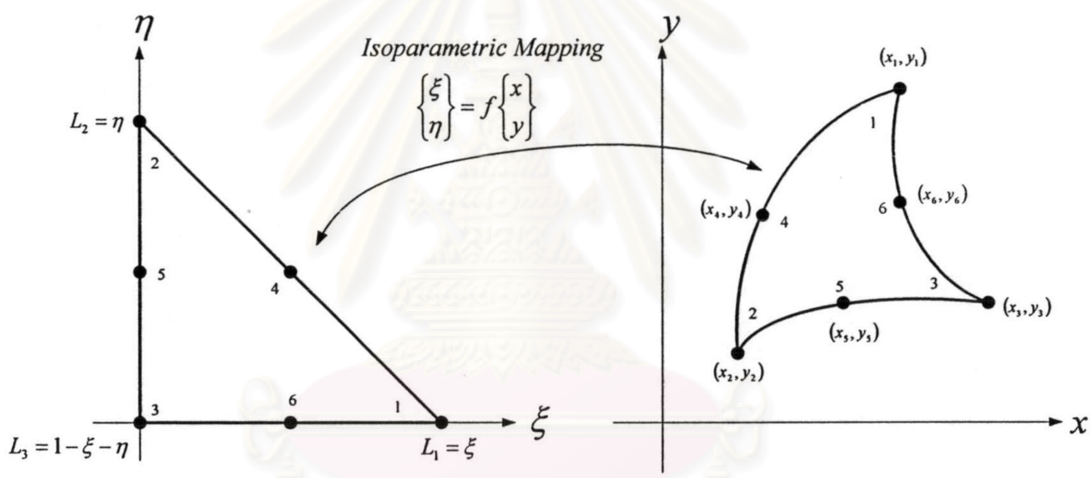
<u>การแปลงระบบพิกัดในการพิจารณาปัญหา</u>

โดยทั่วไปการพิจารณาอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปร่างแบบใดๆ (irregular shape) ในระบบพิกัดกายภาพ xy (physical coordinate) นั้นค่อนข้างจะมีความยุ่งยาก วิธีหลีกเลี่ยงความยุ่งยากนี้สามารถทำได้โดยการแปลงระบบพิกัดในการพิจารณาจากระบบพิกัด xy ไปเป็นระบบพิกัดท้องถิ่น $\xi\eta$ (local coordinate) สำหรับอิลีเมนต์แบบไอโซพาราเมตริกนั้น จะอาศัยวิธีการแปลงระบบพิกัดที่เรียกว่า การส่งแบบไอโซพาราเมตริก f (isoaparametric mapping) ทั้งนี้ข้อกำหนดของ การส่งแบบพาราเมตริก นั้นจะกำหนดให้รูปแบบของฟังก์ชันการส่ง f (mapping function) เป็นรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชันรูปร่างของอิลีเมนต์สามเหลี่ยม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกอันดับหนึ่ง



(ข) อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกอันดับสอง

รูปที่ ฉ 3 การแปลงระบบพิกัดสำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก

การส่งแบบไอโซพาราเมตริกสำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกมีลักษณะดังรูปที่ ฉ 3 นิยามให้ ระบบพิกัดท้องถิ่น $\xi\eta$ เป็นดังนี้

$$L_1 = \xi \tag{ฉ.12}$$

$$L_2 = \eta \tag{ฉ.13}$$

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2 = 1 - \xi - \eta \tag{ฉ.14}$$

นิยามการแปลงตัวดำเนินการอนุพันธ์ระหว่างพิกัด xy และพิกัด $\xi\eta$ เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \tag{ฉ.15}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial L_1 \\ \partial/\partial L_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial L_1 \\ \partial/\partial L_2 \end{bmatrix} \tag{ฉ.16}$$

โดยที่ $[J]$ คือ เมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) และ $|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$

จะได้ความสัมพันธ์ของตัวดำเนินการอนุพันธ์ระหว่างสองระบบพิกัด ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|J|}\left(J_{22}\frac{\partial}{\partial L_1} - J_{12}\frac{\partial}{\partial L_2} \right) \tag{ฉ.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|J|}\left(-J_{21}\frac{\partial}{\partial L_1} + J_{11}\frac{\partial}{\partial L_2} \right) \tag{ฉ.18}$$

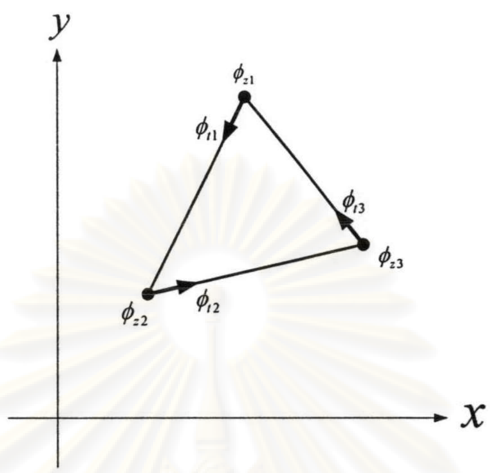
นิยามการแปลงตัวดำเนินการอินทิเกรตระหว่างพิกัด xy และพิกัด $\xi\eta$ เป็นดังนี้

$$\iint_{\Omega^e} g(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-L_1} g(L_1, L_2, L_3)|J|(L_1, L_2, L_3)\,dL_2 \right] dL_1 \tag{ฉ.19}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>การสร้างฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยม</u>

1. อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยมแบบ CT/LN



รูปที่ ฉ 4 ลักษณะของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก CT/LN ในระบบพิกัดกายภาพ xy

ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก CT/LN ในรูปที่ ฉ 4 จะสร้างจากฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ของอิลีเมนต์อันดับหนึ่ง ดังนี้

$$N_1 = L_1 \tag{ฉ.20}$$

$$N_2 = L_2 \tag{ฉ.21}$$

$$N_3 = L_3 \tag{ฉ.22}$$

งานวิทยานิพนธ์นี้จะอาศัยรูปแบบฟังก์ชันรูปร่างสำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยม CT\LN ที่สร้างโดย Peterson (1994) Itoh , Pelosi and Silvester (1996: 110) และ Koshiba and Tsuji (2000) นิยามได้ดังนี้

$$\boldsymbol{a}_x U_1 + \boldsymbol{a}_y V_1 = |J|_1 |\nabla_t L_3|_1 \left(L_1 \nabla_t L_2 - L_2 \nabla_t L_1 \right) \tag{ฉ.23}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_2 + \boldsymbol{a}_y V_2 = |J|_2 |\nabla_t L_1|_2 \left(L_2 \nabla_t L_3 - L_3 \nabla_t L_2 \right) \tag{ฉ.24}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_3 + \boldsymbol{a}_y V_3 = |J|_3 |\nabla_t L_2|_3 (L_3 \nabla_t L_1 - L_1 \nabla_t L_3) \qquad \text{(ฉ.25)}$$

พิจารณารูปแบบชัดแจ้งของพจน์ต่างๆ ในสมการ (ฉ.23) ถึง (ฉ.25) เป็นดังนี้

รูปแบบชัดแจ้งของสมาชิกของเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) J จะเป็นดังนี้

$$J_{11} = \frac{\partial X}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i = x_1 - x_3 \qquad \text{(ฉ.26)}$$

$$J_{12} = \frac{\partial Y}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} y_i = y_1 - y_3 \qquad \text{(ฉ.27)}$$

$$J_{21} = \frac{\partial X}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} x_i = x_2 - x_3 \qquad \text{(ฉ.28)}$$

$$J_{22} = \frac{\partial Y}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} y_i = y_2 - y_3 \qquad \text{(ฉ.29)}$$

ดังนั้น ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ J จะเป็นดังนี้

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3) = 2A_e \qquad \text{(ฉ.30)}$$

โดยที่ A_e คือ พื้นที่ของอิลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมในระบบพิกัด xy

ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ J ที่โนดหมายเลข 1 2 และ 3จะเป็นดังนี้

$$|J|_1 = |J|_2 = |J|_3 = |J| = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3) = 2A_e \qquad \text{(ฉ.31)}$$

ค่าเกรเดียนต์ในแนวขวางของพิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 จะเป็นดังนี้

$$\nabla_t L_1 = \frac{1}{|J|}\left(\boldsymbol{a}_x J_{22} - \boldsymbol{a}_y J_{21}\right) = \frac{1}{2A_e}\left(\boldsymbol{a}_x (y_2 - y_3) - \boldsymbol{a}_y (x_2 - x_3)\right) \qquad \text{(ฉ.32)}$$

$$\nabla_t L_2 = \frac{1}{|J|}\left(-\boldsymbol{a}_x J_{12} + \boldsymbol{a}_y J_{11}\right) = \frac{1}{2A_e}\left(-\boldsymbol{a}_x (y_1 - y_3) + \boldsymbol{a}_y (x_1 - x_3)\right) \qquad \text{(ฉ.33)}$$

$$\begin{aligned} \nabla_t L_3 &= \frac{1}{|J|}\left(\boldsymbol{a}_x (J_{12} - J_{22}) + \boldsymbol{a}_y (J_{21} - J_{11})\right) \\ &= \frac{1}{2A_e}\left(\boldsymbol{a}_x [(y_1 - y_3) - (y_2 - y_3)] + \boldsymbol{a}_y [(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)]\right) \end{aligned} \qquad \text{(ฉ.34)}$$

ขนาดของเกรเดียนต์ในแนวขวางของพิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 ที่โนดหมายเลข 2 1และ 3 จะเป็นดังนี้

$$\left|\nabla_t L_3\right|_1 = \left|\nabla_t L_3\right| \quad \text{(ฉ.35)}$$

$$\left|\nabla_t L_1\right|_2 = \left|\nabla_t L_1\right| \quad \text{(ฉ.36)}$$

$$\left|\nabla_t L_2\right|_3 = \left|\nabla_t L_2\right| \quad \text{(ฉ.37)}$$

<u>สรุป</u> รูปชัดแจ้งของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยม CT\LN

$$\boldsymbol{a}_x U_1 + \boldsymbol{a}_y V_1 = \left|\nabla_t L_3\right| \left\{ \boldsymbol{a}_x \left[-L_1(y_1 - y_3) + L_2(y_2 - y_3) \right] + \boldsymbol{a}_y \left[L_1(x_1 - x_3) + L_2(x_2 - x_3) \right] \right\}$$

(ฉ.38)

$$\boldsymbol{a}_x U_2 + \boldsymbol{a}_y V_2 = \left|\nabla_t L_1\right| \left\{ \boldsymbol{a}_x \left[L_2(y_1 - y_2) - L_3(y_2 - y_3) \right] + \boldsymbol{a}_y \left[L_2(x_2 - x_1) + L_3(x_2 - x_3) \right] \right\}$$

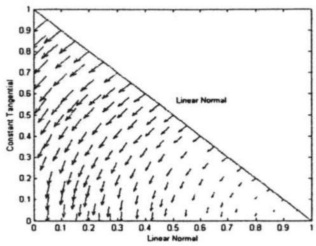
(ฉ.39)

$$\boldsymbol{a}_x U_3 + \boldsymbol{a}_y V_3 = \left|\nabla_t L_2\right| \left\{ \boldsymbol{a}_x \left[L_3(y_2 - y_3) - L_1(y_1 - y_2) \right] + \boldsymbol{a}_y \left[L_3(x_2 - x_3) + L_3(x_2 - x_1) \right] \right\}$$

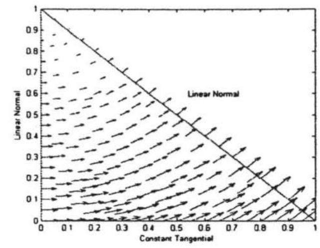
(ฉ.40)

ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันรูปร่างในสมการ (ฉ.38) ถึง (ฉ.40) แสดงดังรูปที่ ฉ 5

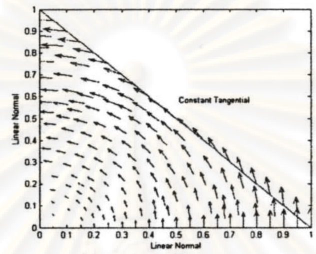
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_x U_1 + \boldsymbol{a}_y V_1$



(ข) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_x U_2 + \boldsymbol{a}_y V_2$

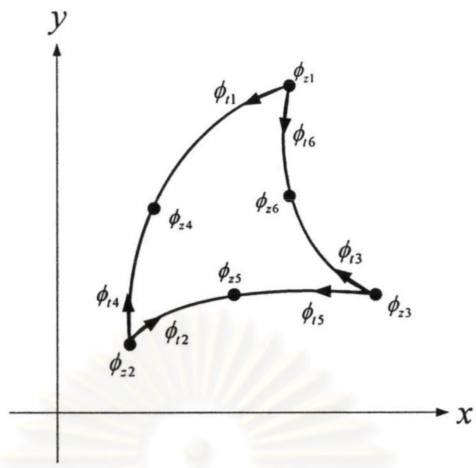


(ค) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_x U_3 + \boldsymbol{a}_y V_3$

รูปที่ ฉ 5 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก CT/LN ที่มีจุดยอดหมายเลข 1 2 และ 3 อยู่ที่พิกัด $(0,1)$ $(0,0)$ และ $(1,0)$ ตามลำดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยมแบบ LT/LN



รูปที่ ฉ 6 ลักษณะของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบ LT/LN ในระบบพิกัดกายภาพ xy

ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก LT/LN ในรูปที่ ฉ 5 จะสร้างจากฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ของอิลีเมนต์อันดับหนึ่ง ดังนี้

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \tag{ฉ.41}$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \tag{ฉ.42}$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1) \tag{ฉ.43}$$

$$N_4 = 4L_1L_2 \tag{ฉ.44}$$

$$N_5 = 4L_2L_3 \tag{ฉ.45}$$

$$N_6 = 4L_3L_1 \tag{ฉ.46}$$

งานวิทยานิพนธ์นี้จะอาศัยรูปแบบฟังก์ชันรูปร่างสำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยม LT\LN ที่สร้างโดย Peterson (1994) Itoh , Pelosi and Silvester (1996: 110) และ Koshiba and Tsuji (2000) นิยามได้ดังนี้

$$\boldsymbol{a}_x U_1 + \boldsymbol{a}_y V_1 = |J|_1 \cdot |\nabla_t L_3|_1 \cdot (L_1 \nabla_t L_2) \tag{ฉ.47}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_2 + \boldsymbol{a}_y V_2 = |J|_2 \cdot |\nabla_t L_1|_2 \cdot (L_2 \nabla_t L_3) \tag{ฉ.48}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_3 + \boldsymbol{a}_y V_3 = |J|_3 \cdot |\nabla_t L_2|_3 \cdot (L_3 \nabla_t L_1) \tag{ฉ.49}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_4 + \boldsymbol{a}_y V_4 = |J|_2 \cdot |\nabla_t L_3|_2 \cdot (L_2 \nabla_t L_1) \tag{ฉ.50}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_5 + \boldsymbol{a}_y V_5 = |J|_3 \cdot |\nabla_t L_1|_3 \cdot (L_3 \nabla_t L_2) \tag{ฉ.51}$$

$$\boldsymbol{a}_x U_6 + \boldsymbol{a}_y V_6 = |J|_1 \cdot |\nabla_t L_2|_1 \cdot (L_1 \nabla_t L_3) \tag{ฉ.52}$$

พิจารณารูปแบบชัดแจ้งของพจน์ต่างๆ ในสมการ (ฉ.47) ถึง (ฉ.52) เป็นดังนี้

รูปแบบชัดแจ้งของสมาชิกของเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) J จะเป็นดังนี้

$$J_{11} = \frac{\partial X}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i = (4x_1 + 4x_3 - 8x_6)L_1 + (4x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6)L_2 + (-x_1 - 3x_3 + 4x_6)$$
$$J_{12} = \frac{\partial Y}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} y_i = (4y_1 + 4y_3 - 8y_6)L_1 + (4y_3 + 4y_4 - 4y_5 - 4y_6)L_2 + (-y_1 - 3y_3 + 4y_6)$$
$$J_{21} = \frac{\partial X}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} x_i = (4x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6)L_1 + (4x_2 + 4x_3 - 8x_5)L_2 + (-x_2 - 3x_3 + 4x_5)$$
$$J_{22} = \frac{\partial Y}{\partial L_2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} y_i = (4y_3 + 4y_4 - 4y_5 - 4y_6)L_1 + (4y_2 + 4y_3 - 8y_5)L_2 + (-y_2 - 3y_3 + 4y_5)$$

กำหนดให้

$$kx_1 = (4x_1 + 4x_3 - 8x_6) \quad , \quad ky_1 = (4y_1 + 4y_3 - 8y_6)$$

$$lx_1 = (4x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6) \quad , \quad ly_1 = (4y_3 + 4y_4 - 4y_5 - 4y_6)$$

$$mx_1 = (-x_1 - 3x_3 + 4x_6) \quad , \quad my_1 = (-y_1 - 3y_3 + 4y_6)$$

และ

$$kx_2 = (4x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6) \quad , \quad ky_2 = (4y_3 + 4y_4 - 4y_5 - 4y_6)$$

$$lx_2 = (4x_2 + 4x_3 - 8x_5) \quad , \quad ly_2 = (4y_2 + 4y_3 - 8y_5)$$

$$mx_1 = (-x_2 - 3x_3 + 4x_5) \quad , \quad my_2 = (-y_2 - 3y_3 + 4y_5)$$

ดังนั้น

$$J_{11} = kx_1 \cdot L_1 + lx_1 \cdot L_2 + mx_1 \tag{ฉ.53}$$

$$J_{11} = ky_1 \cdot L_1 + ly_1 \cdot L_2 + my_1 \tag{ฉ.54}$$

$$J_{21} = kx_2 \cdot L_1 + lx_2 \cdot L_2 + mx_2 \tag{ฉ.55}$$

$$J_{22} = ky_2 \cdot L_1 + ly_2 \cdot L_2 + my_2 \tag{ฉ.56}$$

ตาราง ฉ 1 ค่าของพิกัดพื้นที่ ณ โนดต่างๆ ของในระบบพิกัด $\xi\eta$

หมายเลขโนด	ค่าของ L_1 L_2 และ L_3
1	$(1,0,0)$
2	$(0,1,0)$
3	$(0,0,1)$
4	$(1/2,1/2,0)$
5	$(0,1/2,1/2)$
6	$(1/2,0,1/2)$

ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ J ที่โนดหมายเลข 1 2 และ 3จะหาได้จากการแทนค่าของพิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 ในตาราง ฉ 1ลงในสมการ (ฉ.53) ถึง (ฉ.56) จะได้

$$|J|_1 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = (kx_1 + mx_1)(ky_2 + my_2) - (ky_1 + my_1)(kx_2 + mx_2) \tag{ฉ.57}$$

$$|J|_2 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = (lx_1 + mx_1)(ly_2 + my_2) - (ly_1 + my_1)(lx_2 + mx_2) \tag{ฉ.58}$$

$$|J|_3 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = (mx_1 \cdot my_2) - (my_1 \cdot mx_2) \tag{ฉ.59}$$

ค่าเกรเดียนต์ในแนวขวางของพิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 จะเป็นดังนี้

$$\nabla_t L_1 = \boldsymbol{a}_x \left\{ \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \frac{\partial L_1}{\partial L_1} - J_{12} \frac{\partial L_1}{\partial L_2} \right) \right\} + \boldsymbol{a}_y \left\{ \frac{1}{|J|} \left(-J_{21} \frac{\partial L_1}{\partial L_1} + J_{11} \frac{\partial L_1}{\partial L_2} \right) \right\} = \frac{1}{|J|} \left(\boldsymbol{a}_x J_{22} - \boldsymbol{a}_y J_{21} \right) \tag{ฉ.60}$$

$$\nabla_t L_2 = \boldsymbol{a}_x \left\{ \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} - J_{12} \frac{\partial L_2}{\partial L_2} \right) \right\} + \boldsymbol{a}_y \left\{ \frac{1}{|J|} \left(-J_{21} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} + J_{11} \frac{\partial L_2}{\partial L_2} \right) \right\} = \frac{1}{|J|} \left(-\boldsymbol{a}_x J_{12} + \boldsymbol{a}_y J_{11} \right) \tag{ฉ.61}$$

$$\nabla_t L_3 = \boldsymbol{a}_x \left\{ \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \frac{\partial(1 - L_1 - L_2)}{\partial L_1} - J_{12} \frac{\partial(1 - L_1 - L_2)}{\partial L_2} \right) \right\}$$

$$+ \boldsymbol{a}_y \left\{ \frac{1}{|J|} \left(- J_{21} \frac{\partial(1 - L_1 - L_2)}{\partial L_1} + J_{11} \frac{\partial(1 - L_1 - L_2)}{\partial L_2} \right) \right\} \quad \text{(ฉ.62)}$$

$$= \frac{1}{|J|} \left[\boldsymbol{a}_x (J_{12} - J_{22}) - \boldsymbol{a}_y (J_{21} - J_{11}) \right]$$

ขนาดของเกรเดียนต์ในแนวขวางของพิกัดพื้นที่ L_1 L_2 และ L_3 ที่โนดหมายเลข 2 1และ 3จะเป็นดังนี้

$$\left|\nabla_t L_3\right|_1 = \frac{1}{|J|_1} \sqrt{\left(J_{12}\big|_{node1} - J_{22}\big|_{node1}\right)^2 + \left(J_{21}\big|_{node1} - J_{11}\big|_{node1}\right)^2} \quad \text{(ฉ.63)}$$

$$\left|\nabla_t L_1\right|_2 = \frac{1}{|J|_2} \sqrt{\left(J_{22}\big|_{node2}\right)^2 + \left(J_{21}\big|_{node2}\right)^2} \quad \text{(ฉ.64)}$$

$$\left|\nabla_t L_2\right|_3 = \frac{1}{|J|_3} \sqrt{\left(J_{12}\big|_{node3}\right)^2 + \left(J_{11}\big|_{node3}\right)^2} \quad \text{(ฉ.65)}$$

$$\left|\nabla_t L_3\right|_2 = \frac{1}{|J|_2} \sqrt{\left(J_{12}\big|_{node2} - J_{22}\big|_{node2}\right)^2 + \left(J_{21}\big|_{node2} - J_{11}\big|_{node2}\right)^2} \quad \text{(ฉ.66)}$$

$$\left|\nabla_t L_1\right|_3 = \frac{1}{|J|_3} \sqrt{\left(J_{22}\big|_{node3}\right)^2 + \left(J_{21}\big|_{node3}\right)^2} \quad \text{(ฉ.67)}$$

$$\left|\nabla_t L_2\right|_1 = \frac{1}{|J|_1} \sqrt{\left(J_{12}\big|_{node1}\right)^2 + \left(J_{11}\big|_{node1}\right)^2} \quad \text{(ฉ.68)}$$

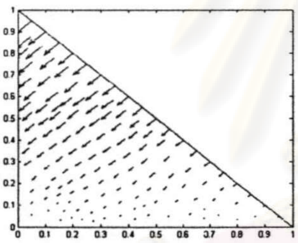
โดยที่ ค่าของสมาชิกของเมทริกซ์ J ที่โนด 1 2 และ 3 จะได้จากการแทนค่าของ L_1 L_2 และ L_3 ในตาราง ฉ 1 ลงในสมการ (ฉ.53) ถึง (ฉ.56)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

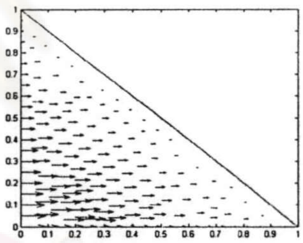
<u>สรุป</u> รูปชัดแจ้งของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกรูปสามเหลี่ยม LT\LN

$$\boldsymbol{a}_x\{U\}+\boldsymbol{a}_y\{V\}=\boldsymbol{a}_x\begin{Bmatrix} -|J|_1|\nabla_t L_3|_1\dfrac{L_1J_{12}}{|J|} \\ |J|_2|\nabla_t L_1|_2\dfrac{L_2(J_{12}-J_{22})}{|J|} \\ |J|_3|\nabla_t L_2|_3\dfrac{L_3J_{22}}{|J|} \\ |J|_2|\nabla_t L_3|_2\dfrac{L_2J_{22}}{|J|} \\ -|J|_3|\nabla_t L_1|_3\dfrac{L_3J_{12}}{|J|} \\ |J|_1|\nabla_t L_2|_1\dfrac{L_1(J_{12}-J_{22})}{|J|} \end{Bmatrix}+\boldsymbol{a}_y\begin{Bmatrix} |J|_1|\nabla_t L_3|_1\dfrac{L_1J_{11}}{|J|} \\ |J|_2|\nabla_t L_1|_2\dfrac{L_2(J_{21}-J_{11})}{|J|} \\ -|J|_3|\nabla_t L_2|_3\dfrac{L_3J_{21}}{|J|} \\ -|J|_2|\nabla_t L_3|_2\dfrac{L_2J_{21}}{|J|} \\ |J|_3|\nabla_t L_1|_3\dfrac{L_3J_{11}}{|J|} \\ |J|_1|\nabla_t L_2|_1\dfrac{L_1(J_{21}-J_{11})}{|J|} \end{Bmatrix} \quad (ฉ.69)$$

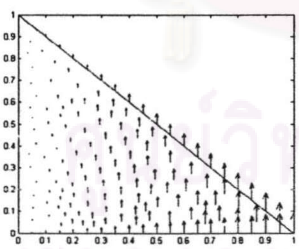
ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันรูปร่างในสมการ (ฉ.69) สำหรับอิลีเมนต์ขอบตรงแสดงดังรูปที่ ฉ 5



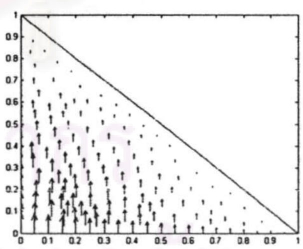
(ก) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_xU_1+\boldsymbol{a}_yV_1$



(ข) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_xU_2+\boldsymbol{a}_yV_2$ ฃ



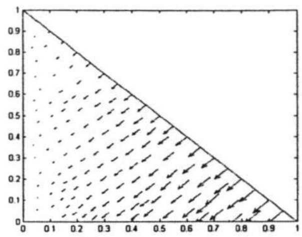
(ค) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_xU_3+\boldsymbol{a}_yV_3$



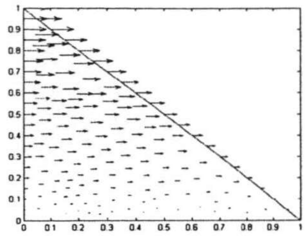
(ง) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_xU_4+\boldsymbol{a}_yV_4$

รูปที่ ฉ 7 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก LT/LN ที่มีจุดยอดหมายเลข 1 2 และ 3 อยู่ที่พิกัด $(0,1)$ $(0,0)$ และ $(1,0)$ ตามลำดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(จ) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_x U_5 + \boldsymbol{a}_y V_5$



(ฉ) องค์ประกอบ $\boldsymbol{a}_x U_6 + \boldsymbol{a}_y V_6$

รูปที่ ฉ 7 (ต่อ)

<u>การหาผลเฉลยของสมการอิลีเมนต์โดยอาศัยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข</u>

การหาค่าอินทิกรัลของสมการของอิลีเมนต์ สามารถหาได้โดยอาศัยสูตรการอินทิเกรต (Zienkiewitz, 1977; Kwon and Bang, 2000: 159-197) ดังนี้

$$\iint_{\Omega^e} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{7} \frac{W_k}{2} f(L_{1k}, L_{2k}, L_{3k}) |J(L_{1k}, L_{2k}, L_{3k})| \qquad \text{(ฉ.70)}$$

โดยที่ W_k คือ สัมประสิทธิ์น้ำหนัก (weighting coefficient) และ L_{1k} L_{2k} และ L_{3k} คือ พิกัดพื้นที่สำหรับแต่ละค่า k โดย W_k L_{1k} L_{2k} และ L_{3k} จะมีค่าดังตาราง 3.1

ตาราง ฉ.1 ค่าของสัมประสิทธิ์น้ำหนัก และ ค่าของพิกัดพื้นที่ สำหรับการอินทิเกรตเชิงตัวเลข

k	W_k	L_{1k}	L_{2k}	L_{3k}	a
1	0.225	a_1	a_1	a_1	
2	0.13239415	a_2	a_3	a_3	$a_1 = 0.33333333$
3	0.13239415	a_3	a_2	a_3	$a_2 = 0.05971587$
4	0.13239415	a_3	a_3	a_2	$a_3 = 0.47014206$
5	0.12593918	a_4	a_2	a_5	$a_4 = 0.79742669$
6	0.12593918	a_5	a_4	a_5	$a_5 = 0.10128651$
7	0.12593918	a_5	a_5	a_4	

ภาคผนวก ซ

การประเมินสมรรถนะของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก

การคำนวณในภาคผนวกนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประเมินความแม่นยำของผลเฉลยที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ร่วมกับการใช้งานอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก ปัญหาในกรณีตัวอย่างที่นำมาคำนวณนี้จะเป็น ปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน ของท่อนำคลื่นแสงที่มีโครงสร้างแบบเดียวกันกับส่วนท่อนำคลื่นแสงของอุปกรณ์ QPM-SHG

ระบบสมการของ ปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน เป็นดังนี้

$$\left([K]-\beta^2[M]\right)\{e\}=\{0\} \tag{ซ.1}$$

โดยที่

$$[M]=\sum_e \left[M^e\right]$$
$$[K]=\sum_e \left[K^e\right]$$

รูปชัดแจ้งของเมทริกซ์ย่อยในสมการ (ซ.1) สมารถดูได้ในภาคผนวก จ

ขั้นตอนการคำนวณจะเริ่มต้นจากการแบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก จากนั้นจึงแทนฟังก์ชันรูปร่างของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบ CT/LN หรือ ฟังก์ชันรูปร่างของอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบ LT/LN ในภาคผนวก ฉ ลงในสมการ (ซ.1) การแก้ระบบสมการดังกล่าวจะได้ผลเฉลย คือ ค่าเจาะจง (eigenvalue) และเวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) การเปรียบเทียบความแม่นยำของผลเฉลยจะพิจารณาจากค่าทั้งสองนี้

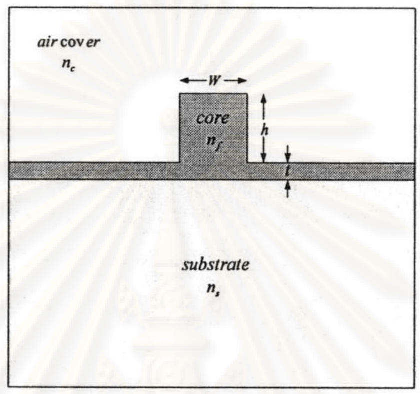
ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ

พิจารณา ท่อนำคลื่นแสงแบบริบดังรูปที่ ซ 1 ความยาวคลื่นแสงทำงาน λ (operating wavelength) ของท่อนำคลื่นแสงมีค่าเท่ากับ 1.15 ไมโครเมตร ค่าดัชนีหักเหแสงของบริเวณแคลดดิ้งอากาศ n_c บริเวณแกนนำแสง n_f และ บริเวณฐานรอง n_s มีค่าเท่ากับ 1.0 3.44 และ 3.40 ตามลำดับ ความกว้าง W ของแกนนำแสงมีค่าเท่ากับ 3 ไมโครเมตร ความหนา t รวมกับความสูง h ของแกนนำแสงมีค่าเท่ากับ 1 ไมโครเมตร ในการคำนวณนี้จะแปรค่าความหนา t ตั้งแต่ 0 จนถึง 0.9 ไมโครเมตร

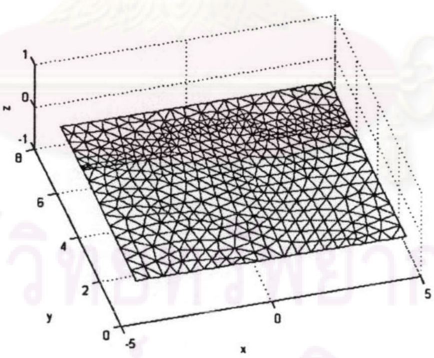
การเปรียบเทียบความแม่นยำของผลเฉลยที่คำนวณได้จะพิจารณาจาก ค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผล (effective refractive index) คือ

$$N_{eff} = \frac{\beta}{k_0} \tag{ช.2}$$

โดยที่ β คือ ค่าคงตัวการแพร่กระจาย ซึ่งเป็นค่าเจาะจงของสมการ (3.27) และ $k_0 = 2\pi/\lambda$ คือ เวฟนัมเบอร์ในอวกาศว่าง (free space wave number)



รูปที่ ช 1 ท่อนำคลื่นแสงแบบริบ

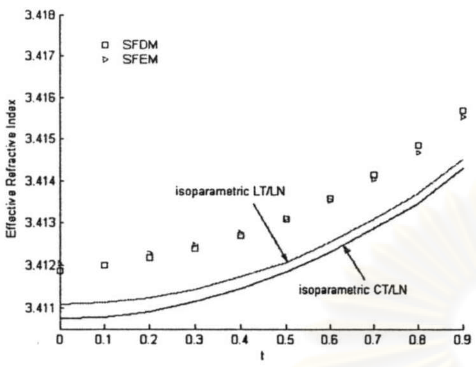


รูปที่ ช 2 ลักษณะของการแบ่งหน้าตัดของท่อนำคลื่นแสงแบบริบออกเป็น
อิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบขอบตรง

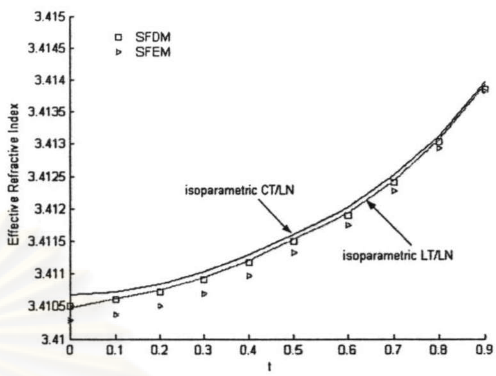
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราแบบขอบตรง จำนวน 473 อิลีเมนต์ ดังรูปที่ ช 2 ผลการคำนวณค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลแสดงเป็นกราฟดังรูปที่ ช 3 จะเห็นได้ว่า ค่า N_{eff} ที่คำนวณได้จากอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบ CT/LN และ LT/LN สำหรับโมดหลัก E_{11}^{x} จะมีค่าค่อนข้างแตกต่างจากผลการคำนวณของ Koshiba et al.

(1992) ที่อาศัยการประมาณแบบสเกลาร์ ในขณะที่ค่า N_{eff} สำหรับโมดหลัก E_{11}^{y} มีค่าใกล้เคียงกับเอกสารอ้างอิงดังกล่าว อย่างไรก็ตาม ค่าที่คำนวณได้จากอิลีเมนต์แบบ CT/LN และ LT/LN นั้นมีค่าค่อนข้างใกล้เคียงกัน



(ก) โมดหลัก E_{11}^{x}



(ข) โมดหลัก E_{11}^{y}

รูปที่ ซ 3 การเปรียบเทียบค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลที่คำนวณได้ของท่อนำคลื่นแสงแบบริบกับผลการคำนวณของ Koshiba et al. (1992)

ท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานแบบดรรชนีขั้นบันได

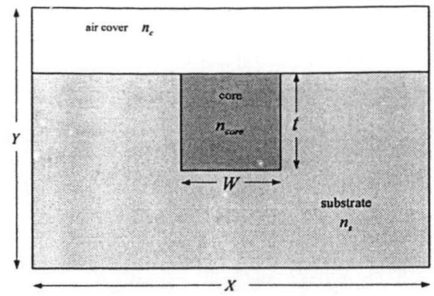
พิจารณา ท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานดังรูปที่ ซ 4 ความแตกต่างของค่าดัชนีหักเหแสงของบริเวณแกนนำแสงกับฐานรองสมมติให้เป็นแบบขั้นบันได รูปแบบเทนเซอร์สภาพยอมของบริเวณแผ่นฐานและแกนนำแสงจะเป็น ดังนี้

$$[\varepsilon_{sub}] = \begin{bmatrix} (2.20)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2.29)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2.29)^2 \end{bmatrix} \qquad (ซ.3)$$

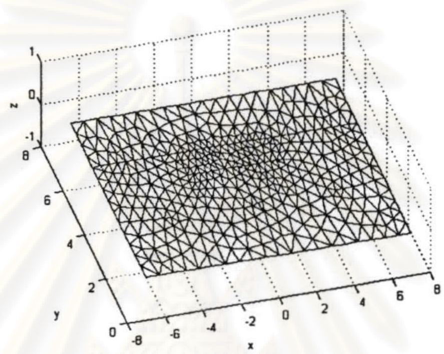
$$[\varepsilon_{core}] = \begin{bmatrix} (2.222)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2.3129)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2.3129)^2 \end{bmatrix} \qquad (ซ.4)$$

ความสูงของแกนนำแสงมีค่าเท่ากับ t ความกว้างของแกนนำแสงมีค่าเท่ากับ $W = 5t$ กรอบของการคำนวณในแนวแกน x และแกน y มีค่าเท่ากับ $X = 10t$ และ $Y = 5t$ ตามลำดับ ในการคำนวณนี้จะแปรค่า $k_0 t$ ตั้งแต่ 0 จนถึง 30

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



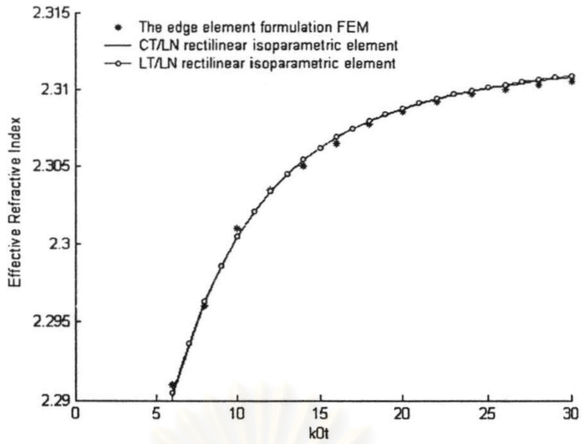
รูปที่ ซ 4 ท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานแบบขั้นบันได



รูปที่ ซ 5 ลักษณะการแบ่งหน้าตัดของท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานแบบ ขั้นบันได ออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบขอบตรง

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นอิลีเมนต์ แบบขอบตรงจำนวน 628 อิลีเมนต์ ดังรูปที่ ซ 5 ผลการคำนวณค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลของโมดหลัก E_{11}^{y} แสดงเป็นกราฟดังรูปที่ ซ 6 จะเห็นได้ว่า ค่า N_{eff} ที่คำนวณได้จากอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบ CT/LN และ LT/LN มีค่าใกล้เคียงกับผลการคำนวณของ Koshiba et al. (1992: 89-91)

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ ช 6 การเปรียบเทียบค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลของโมดหลัก E_{11}^{y} ที่คำนวณได้กับผลการคำนวณของ Koshiba et al. (1992: 89-91)

ท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานแบบดรรชนีลาด

พิจารณา ท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานดังรูปที่ ช 7 ความแตกต่างของค่าดัชนีหักเหแสงของบริเวณแกนนำแสงกับฐานรองเป็นแบบดรรชนีลาด ในกรณีนี้ค่าดัชนีหักเหแสงสามัญ n_o และค่าดัชนีหักเหแสงวิสามัญ n_e ของบริเวณแกนนำแสงจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรระยะทางในภาคตัดขวาง ดังนี้

$$n_o(x, y) = n_{o,sub} + \Delta n_o \cdot f(x) \cdot g(y) \qquad (ข.5)$$

$$n_e(x, y) = n_{e,sub} + \Delta n_e \cdot f(x) \cdot g(y) \qquad (ข.6)$$

โดยที่ $n_{o,sub}$ และ $n_{e,sub}$ คือ ค่าดัชนีหักเหแสงสามัญ และ ค่าดัชนีหักเหแสงวิสามัญ ของแผ่ฐานตามลำดับ Δn_o และ Δn_e คือ ค่าความแตกต่างดัชนีหักเหแสงแผ่นฐานกับแกนนำแสง ในขณะที่ $f(x)$ และ $g(y)$ คือ ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าดัชนีหักเหแสงในทิศ x และ y ตามลำดับ

ลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าดัชนีหักเหแสงในทิศ x โดยทั่วไปมักจะสมมติให้มีการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเกาส์เซียน ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงในทิศ y นิยมสมมติให้มีการเปลี่ยนแปลงแบบ ฟังก์ชันเกาส์เซียน หรือ ฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล (Nishihara , Haruna and Suhara, 1989) ดังนั้น รูปแบบของ $f(x)$ และ $g(y)$ จะเป็นดังนี้

$$f(x) = \exp\left[-(x/D_x)^2\right] \qquad (ข.7)$$

$$g(y)=\begin{cases}\exp\left[-\left(y/D_y\right)^2\right]\\ \exp\left[-y/D_y\right]\end{cases} \tag{ช.8}$$

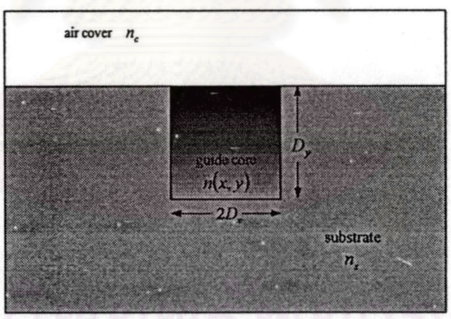
โดยที่ D_x และ D_y คือ ระยะของการแพร่ (diffusion) ในทิศ x และ y ตามลำดับ

กำหนดให้ แกนแสง (optic axis) ของตัวกลางทางแสงแบบยูนิแอกเซียลแอนไอโซทรอปิกของปัญหาท่อนำคลื่นแสงนี้อยู่ในแนวแกน x $(c \,//\, x)$ ในกรณีนี้เทนเซอร์สภาพยอมของแผ่นฐานและแกนนำแสง จะมีรูปแบบดังนี้

$$[\varepsilon_{sub}]=\begin{bmatrix}(n_{e,sub})^2 & 0 & 0\\ 0 & (n_{o,sub})^2 & 0\\ 0 & 0 & (n_{o,sub})^2\end{bmatrix} \tag{ช.9}$$

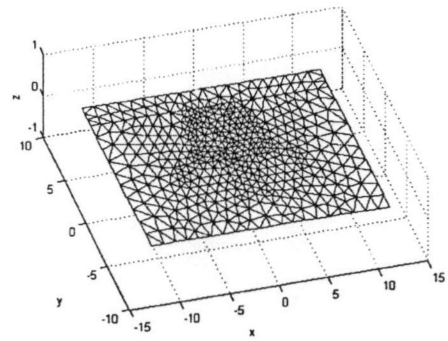
$$[\varepsilon_{core}]=\begin{bmatrix}(n_e)^2 & 0 & 0\\ 0 & (n_o)^2 & 0\\ 0 & 0 & (n_o)^2\end{bmatrix} \tag{ช.10}$$

ในการคำนวณนี้จะกำหนดให้ $n_{o,sub}$ และ $n_{e,sub}$ มีค่าเท่ากับ 2.286 และ 2.21 ตามลำดับ และ $\Delta n_o = \Delta n_e = 0.01$ ในขณะที่ D_x และ D_y มีค่าเท่ากับ $3.0\mu m$ และ $6.0\mu m$ ตามลำดับ



รูปที่ ช 7 ท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานแบบดรรชนีลาด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

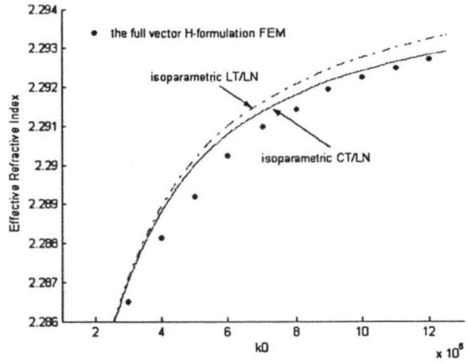


รูปที่ ช 8 ลักษณะการแบ่งหน้าตัดของท่อนำคลื่นแสงฝังในแผ่นฐานแบบดรรชนีลาด ออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบขอบตรง

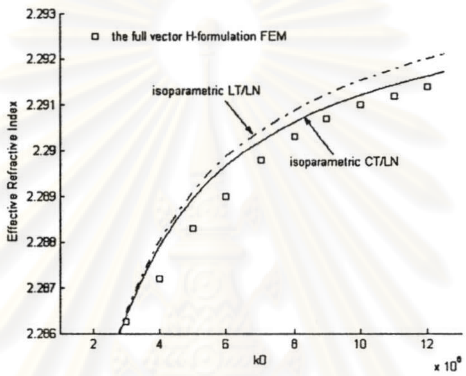
แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบขอบตรงจำนวน 648 อิลีเมนต์ดังรูปที่ ช 8 ผลการคำนวณของปัญหาท่อนำคลื่นแสงนี้จะแบ่งออกเป็น 2 กรณี

กรณีแรกกำหนดให้ $f(x)$ และ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียน ค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลของโมดหลัก E_{11}^{y} แสดงเป็นกราฟดังรูปที่ ช 9 (ก) จะเห็นได้ว่า ค่า N_{eff} ที่คำนวณได้จากอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริกแบบ CT/LN และ LT/LN มีค่าใกล้เคียงกับผลการคำนวณของ Katsriku , Rahman and Grattan (1996)

กรณีที่สองกำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียน ในขณะที่ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล ค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลของโมดหลัก E_{11}^{y} แสดงเป็นกราฟดังรูปที่ ช 9 (ข) จะเห็นได้ว่า ค่า N_{eff} ที่คำนวณได้ มีค่าใกล้เคียงกับผลการคำนวณของ Katsriku , Rahman and Grattan (1996) เช่นเดียวกัน



(ก) gaussian-gaussian distribution

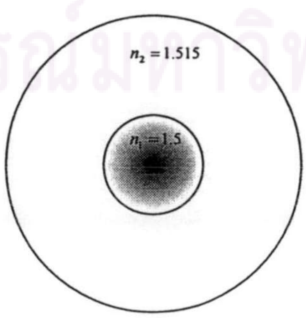


(ข) gaussian-exponential distribution

รูปที่ ช 9 การเปรียบเทียบค่าดัชนีหักเหแสงประสิทธิผลของโมดหลัก E_{11}^{y} ที่คำนวณได้ กับผลการคำนวณของ Katsriku , Rahman and Grattan (1996)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เส้นใยแสงแบบดรรชนีลาด (graded-index optical fiber)



รูปที่ ช 10 เส้นใยแสงแบบดรรชนีลาด

พิจารณา เส้นใยแสงแบบดรรชนีลาดดังรูปที่ ช 10 ส่วนเปลือกหุ้มของเส้นใยแสงนี้มีค่าดัชนีหักเหแสง n_2 คงที่ ในขณะที่ค่าดัชนีหักเหแสงของแกนนำแสงนั้นมีค่าแปรตามระยะทางในแนวรัศมีในลักษณะที่เรียกว่า กำลังอัลฟา (α-power refractive index profile) ดังรูปที่ ช 11 นิยามค่าดัชนีหักเหแสงดังกล่าวได้ ดังนี้

$$n(r) = \begin{cases} n_1\sqrt{1-2\Delta(r/a)^{\alpha}} & ; \quad 0 \le r \le a \\ n_1\sqrt{1-2\Delta} & ; \quad a < r \end{cases} \qquad \text{(ช.11)}$$

โดยที่ n_1 คือ ค่าดัชนีหักเหแสงสูงสุดของแกนนำแสง a คือ รัศมีของแกนนำแสง และ Δ คือ ค่าความแตกต่างดัชนีหักเหแสงสัมพัทธ์ (relative refractive index difference)

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \qquad \text{(ช.12)}$$

v คือ ความถี่แบบนอร์แมลไลซ์ (normalized frequency)

$$v = n_1 k_0 a\sqrt{2\Delta} \qquad \text{(ช.13)}$$

b คือ ค่าคงตัวการแพร่กระจายแบบนอร์แมลไลซ์ (normalized propagation constant)

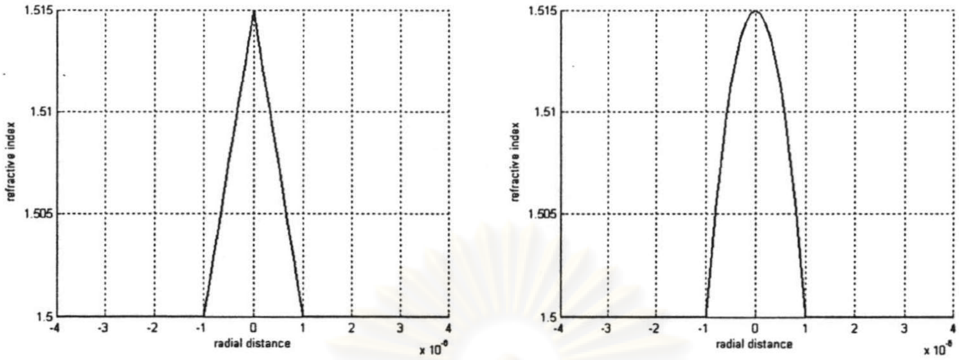
$$b = \frac{(\beta/k_0)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \qquad \text{(ช.14)}$$

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราแบบขอบตรงจำนวน 445 อิลีเมนต์ดังรูปที่ ช 12 (ก) และแบบขอบโค้งจำนวน 108 อิลีเมนต์ดังรูปที่ ช 13 (ข) ผลการคำนวณของปัญหาเส้นใยแสงนี้จะเทียบความถูกต้องกับผลการคำนวณของ Koshiba (1992: 118-120) โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีแรก การเปลี่ยนแปลงค่าดัชนีหักเหแสงของแกนนำแสงเป็นแบบ triangular index $(\alpha = 1)$ ดังรูปที่ ช 12 (ก) ค่าคงตัวการแพร่กระจายแบบนอร์แมลไลซ์ b ของโมดหลัก HE_{11} แสดงเป็นกราฟดังรูปที่ ช 13 (ก) จากรูปจะเห็นได้ว่าการลู่เข้าของค่า b ที่คำนวณได้จากอิลีเมนต์ LT/LN แบบขอบโค้งจะสูงกว่าอิลีเมนต์แบบขอบตรง ผลเฉลยนี้คำนวณได้จากการใช้อิลีเมนต์ขอบโค้งเพียง 108 อิลีเมนต์เท่านั้น ในขณะที่อิลีเมนต์ขอบตรงจำนวนถึง 445 อิลีเมนต์ยังให้ผลเฉลยที่ไม่ค่อยลู่เข้าเท่าใดนัก

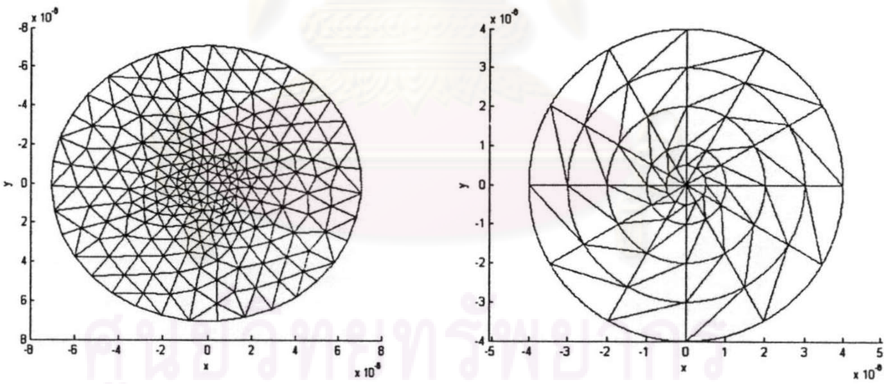
กรณีที่สอง การเปลี่ยนแปลงค่าดัชนีหักเหแสงของแกนนำแสงเป็นแบบ parabolic index $(\alpha = 2)$ ดังรูปที่ ช 12 (ข) ค่า b ของโมดหลัก HE_{11} แสดงเป็นกราฟ

ดังรูปที่ ช 13 (ก) จากรูปจะเห็นได้ว่าอัตราการลู่เข้าของค่า b ที่คำนวณได้จากอิลีเมนต์ LT/LN แบบขอบโค้งจะสูงกว่าอิลีเมนต์แบบขอบตรงเช่นกัน



(ก) triangular index $(\alpha = 1)$ (ข) parabolic index $(\alpha = 2)$

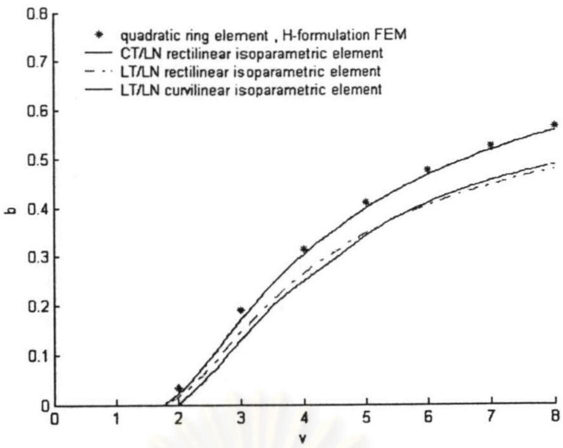
รูปที่ ช 11 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าดัชนีหักเหแสงตามระยะทางในแนวรัศมีของเส้นใยแสง



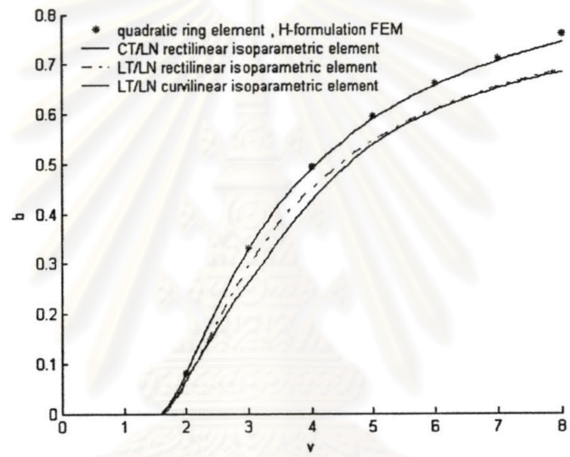
(ก) อิลีเมนต์ขอบตรงจำนวน 445 อิลีเมนต์ (ข) อิลีเมนต์ขอบโค้งจำนวน 108 อิลีเมนต์

รูปที่ ช 12 ลักษณะการแบ่งหน้าตัดของเส้นใยแสงออกเป็นอิลีเมนต์ไอโซพาราเมตริก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) triangular-index $(\alpha = 1)$



(ข) parabolic-index $(\alpha = 2)$

รูปที่ ช 13 คุณสมบัติการแพร่กระจายในโมด HE_{11} ของเส้นใยแสงที่มีดัชนีหักเหแสงเป็นแบบดรรชนีลาด (α -power)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายปิยพงศ์ นิพัทธ์ศานต์ เกิดวันที่ 6 พฤษภาคม พ.ศ. 2519 ที่อำเภอเมืองลำปาง จังหวัดลำปาง สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์และโทรคมนาคม ภาควิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์และโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ในปีการศึกษา 2542 จากนั้นเข้าศึกษาต่อในหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2542 โดยได้รับทุนโครงการพัฒนาอาจารย์ สาขาวิชาขาดแคลน ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย