

## บทที่ 4

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 4.1 ทฤษฎีน้ำขึ้นน้ำลง

##### 4.1.1 นิยามของศัพท์

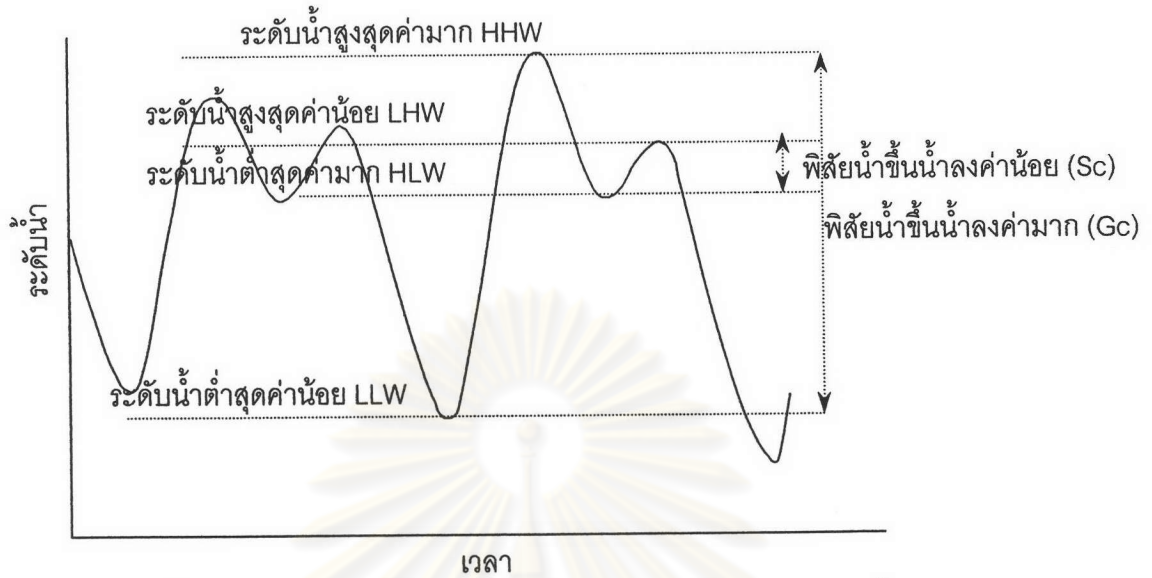
ระดับน้ำที่ปากแม่น้ำบางปะกงมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบผสม (Mixed Tide) ระดับน้ำมีลักษณะน้ำขึ้น 2 ครั้งและน้ำลง 2 ครั้งใน 1 วัน คำนิยามของค่าระดับน้ำต่างๆที่เกี่ยวข้องจึงมีมาก นิยามของศัพท์ต่างๆสำหรับน้ำขึ้นน้ำลงที่ใช้ในการศึกษานี้ แสดงดังตารางที่ 4-1 และรูปที่ 4-1

ตารางที่ 4-1 นิยามของศัพท์ต่างๆในการศึกษาปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลง

คำศัพท์	นิยาม
ระดับน้ำเฉลี่ย (Mean level, ML)	ค่าระดับน้ำเฉลี่ยที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำ ในช่วงเวลาตั้งแต่ 1 คาบน้ำขึ้นน้ำลงขึ้นไป
ระดับน้ำสูงสุด (High water, HW)	ระดับน้ำสูงสุดที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำที่เกิดเนื่องจากอิทธิพลการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำขึ้นน้ำลงที่ทะเลและผลทางอุทกวิทยาอื่นในช่วงการเกิดน้ำขึ้นน้ำลง 1 ครั้ง
ระดับน้ำต่ำสุด (Low water, LW)	ระดับน้ำต่ำสุดที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำที่เกิดเนื่องจากอิทธิพลการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำขึ้นน้ำลงที่ทะเลและผลทางอุทกวิทยาอื่นในช่วงการเกิดน้ำขึ้นน้ำลง 1 ครั้ง
ระดับน้ำสูงสุดค่ามาก (Higher high water, HHW)	ค่าที่มากที่สุดของระดับน้ำสูงสุดที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำในช่วงเวลา 1 วัน
ระดับน้ำสูงสุดค่าน้อย (Lower high water, LHW)	ค่าที่น้อยที่สุดของระดับน้ำสูงสุดที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำในช่วงเวลา 1 วัน
ระดับน้ำต่ำสุดค่ามาก (Higher low water, HLW)	ค่าที่มากที่สุดของระดับน้ำต่ำสุดที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำในช่วงเวลา 1 วัน
ระดับน้ำต่ำสุดค่าน้อย (Lower low water, LLW)	ค่าที่น้อยที่สุดของระดับน้ำต่ำสุดที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำในช่วงเวลา 1 วัน
ระดับน้ำสูงสุดเฉลี่ย (Mean high water, MHW)	ค่าเฉลี่ยของระดับน้ำสูงสุดค่ามาก ในทางทฤษฎีควรเฉลี่ยในช่วงเวลา 18.6 ปี แต่ในทางปฏิบัติค่าเฉลี่ยในช่วง 1 ปีสามารถใช้ได้

ตารางที่ 4-1(ต่อ) นิยามของศัพท์ต่างๆในการศึกษาปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลง

คำศัพท์	นิยาม
ระดับน้ำต่ำสุดเฉลี่ย (Mean low water, MLW)	ค่าเฉลี่ยของระดับน้ำต่ำสุดค่าน้อย ในทางทฤษฎีควรเฉลี่ยในช่วงเวลา 18.6 ปี แต่ในทางปฏิบัติค่าเฉลี่ยในช่วง 1 ปีสามารถใช้ได้
พิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่ามาก (Great tropic range, Gc)	ความแตกต่างระหว่าง ระดับน้ำต่ำสุดค่าน้อยและระดับน้ำสูงสุดค่ามาก
พิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่าน้อย (Small tropic range, Sc)	ความแตกต่างระหว่าง ระดับน้ำต่ำสุดค่ามากและระดับน้ำสูงสุดค่าน้อย
พิสัยน้ำขึ้นน้ำลง (Tidal Range)	ความแตกต่างระหว่างระดับน้ำสูงสุดและต่ำสุดที่เกิดขึ้นติดต่อกัน โดยในการศึกษานี้ ใช้ในความหมายแทน พิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่ามาก และพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่าน้อย
พิสัยน้ำขึ้นน้ำลงเฉลี่ย (Mean range of tide)	ความแตกต่างระหว่าง ระดับน้ำต่ำสุดเฉลี่ยและระดับน้ำสูงสุดเฉลี่ย
อัตราส่วนคลื่นขยายตัว (Amplification Factor)	อัตราส่วนระหว่างพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงที่จุดหนึ่งบนแม่น้ำเทียบกับพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงที่ปากแม่น้ำ
อัตราส่วนแอมพลิจูด (Amplitudes ratio, F)	อัตราส่วนของผลรวมของแอมพลิจูดขององค์ประกอบน้ำขึ้นน้ำลงแบบน้ำเดี่ยวเทียบกับผลรวมของแอมพลิจูดขององค์ประกอบน้ำขึ้นน้ำลงแบบน้ำคู่ เป็นค่าบอกชนิดน้ำขึ้นน้ำลง เมื่อ F น้อยกว่า 0.5 น้ำขึ้นน้ำลงมีลักษณะเป็นน้ำคู่ เมื่อ F มากกว่า 2.0 มีลักษณะเป็นน้ำเดี่ยว เมื่ออยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 2.0 มีลักษณะเป็นน้ำผสม
ชนิดน้ำขึ้นน้ำลง (Types of tide)	การแบ่งประเภทของน้ำขึ้นน้ำลงโดยพิจารณาค่าพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่ามากและพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่าน้อย ถ้าค่าทั้งสองใกล้เคียงกันในแต่ละวัน ชนิดน้ำขึ้นน้ำลงเป็นน้ำคู่ (Semidiurnal) ถ้าต่างกันมาก ชนิดน้ำขึ้นน้ำลงเป็นน้ำผสม (Mixed) ถ้ามีน้ำขึ้นน้ำลงเพียง 1 ครั้งต่อวัน ชนิดน้ำขึ้นน้ำลงเป็นน้ำเดี่ยว (Diurnal)
น้ำเกิด (Spring tide)	น้ำขึ้นน้ำลงที่มีพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่ามาก (Gc) สูงที่สุดสำหรับน้ำคู่และน้ำผสม โดยเกิดทุกครึ่งเดือน ปกติเกิดหลังขึ้น 15 ค่ำและแรม 1 ค่ำ ประมาณ 1 ถึง 2 วัน
น้ำตาย (Neap tide)	น้ำขึ้นน้ำลงที่มีพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงค่ามาก (Gc) ต่ำที่สุดสำหรับน้ำคู่และน้ำผสม โดยเกิดทุกครึ่งเดือน ปกติเกิดหลังขึ้น 8 ค่ำและแรม 8 ค่ำ ประมาณ 1 ถึง 2 วัน



รูปที่ 4-1 นิยามค่าระดับน้ำของน้ำขึ้นน้ำลงแบบผสมที่ใช้ในการศึกษานี้

#### 4.1.2 การวิเคราะห์น้ำขึ้นน้ำลงโดยวิธีฮาร์โมนิก

จากการศึกษาด้านดาราศาสตร์ทำให้ทราบว่า การเคลื่อนที่ของโลก ดวงจันทร์ และ ดวงอาทิตย์ เป็นสาเหตุของการเกิดแรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง และสามารถนำแนวความคิดการวิเคราะห์วิธีฮาร์โมนิก มาอธิบายการเกิดน้ำขึ้นน้ำลง โดยมีองค์ประกอบต่างๆที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลงในรูปของแอมพลิจูด (Amplitude) และ คาบ (Period) โดยคาบขององค์ประกอบต่างๆมีค่าคงที่สำหรับแต่ละองค์ประกอบ ส่วนค่า แอมพลิจูด และ เฟส (Phase) สามารถวิเคราะห์ได้จากระดับน้ำจริงที่ตำแหน่งนั้น

สมมติฐานของการวิเคราะห์

1. ผลของน้ำขึ้นน้ำลงที่แต่ละตำแหน่งจะมีองค์ประกอบจำนวนจำกัด ในแต่ละองค์ประกอบจะมี คาบ มุมเฟส และแอมพลิจูดของตัวเอง
2. ส่วนประกอบต่างๆเป็น ฮาร์โมนิกส์อย่างง่าย (Simple Harmonic) และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

สมการฮาร์โมนิกส์ของน้ำขึ้นน้ำลงเขียนได้ดัง สมการที่ 4-1

$$\eta = a_m + \sum_{i=1}^N \left[ a_i \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} + \delta_i \right) \right] \quad \dots(4-1)$$

เมื่อ  $a_m$  คือ ระดับน้ำเฉลี่ย (ม. เหนือระดับอ้างอิง)  
 $a_i$  คือ แอมพลิจูดขององค์ประกอบที่  $i$  (ม.)

$\delta_i$	คือ	มุมเฟสขององค์ประกอบที่ $i$	( เรเดียน )
$N$	คือ	จำนวนองค์ประกอบ	
$T_i$	คือ	คาบขององค์ประกอบที่ $i$	( วินาที )

ในการศึกษานี้ได้เลือกองค์ประกอบที่สำคัญที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลงดังตารางที่ 4-2

ตารางที่ 4-2 องค์ประกอบหลักที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง

ชนิด	ชื่อน้ำขึ้นน้ำลง	สัญลักษณ์	คาบเวลา ชั่วโมง : นาที
Semi – Diurnal Tides	Principal Lunar	$M_2$	12 : 25
	Principal Solar	$S_2$	12 : 00
Diurnal Tides	Luni – Solar Diurnal	$K_1$	23 : 36
	Principal Lunar Diurnal	$O_1$	25 : 49

การวิเคราะห์ค่า  $a_m$ ,  $a_i$  และ  $\delta_i$  แสดงได้ดังนี้

$$\eta = a_m + \sum_{i=1}^N \left[ a_i \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \cos \delta_i + a_i \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \sin \delta_i \right] \quad \dots(4-2)$$

คูณสมการที่ 4-2 ด้วย  $\sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)$  แล้วอินทิเกรตในช่วงเวลา 0 ถึง  $\Delta t$  และหารด้วย  $\Delta t$  ได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_0^{\Delta t} a_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt + \sum_{i=1}^N a_i \cos \delta_i \int_0^{\Delta t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N a_i \sin \delta_i \int_0^{\Delta t} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt \right] \quad \dots(4-3) \end{aligned}$$

อินทิเกรตสมการ 4-3 ได้ สมการที่ 4-4

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{a_0}{2\pi} T_j \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi \Delta t}{T_j}\right) \right) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^N a_i \cos \delta_i \left[ \frac{\sin\left(2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)\right)}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)} - \frac{\sin\left(2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)\right)}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^N a_i \sin \delta_i \left[ \frac{1 - \cos\left(2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)\right)}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)} - \frac{1 - \cos\left(2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)\right)}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)} \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

...(4-4)

เมื่อ  $T_i = T_j$  สมการที่ 4-4 จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt = \frac{a_i}{2} \cos \delta_i \quad \dots(4-5)$$

ในการทำงานเดียวกันคุณสมการที่ 4-2 ด้วย  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)$  แล้วอินทิเกรตในช่วงเวลา 0 ถึง  $\Delta t$  และหารด้วย  $\Delta t$  ได้

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt = \frac{a_i}{2} \sin \delta_i \quad \dots(4-6)$$

ค่าคงที่  $a_m$  หาได้จาก

$$a_m = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta(t) dt \quad \dots(4-7)$$

จากสมการที่ 4-5 และ 4-6 สามารถหาค่า  $a_i$  และ  $\delta_i$  ได้ดังนี้

$$a_i = 2 \left[ \left( \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt \right)^2 + \left( \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4-8)$$

$$\delta_i = \tan^{-1} \left[ \frac{\int_0^{\Delta t} \eta \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt}{\int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt} \right] \quad \dots(4-9)$$

การวิเคราะห์ฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลงเพื่อหาค่า แอมพลิจูด และมุมเฟส สามารถคำนวณจากระดับน้ำจริงโดยสมการที่ 4-7 ถึง 4-9 ในกรณีทำนายระดับน้ำขึ้นน้ำลงใช้สมการที่ 4-1

## 4.2 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำในทางน้ำภายใต้อิทธิพลของน้ำขึ้นน้ำลง

ปรากฏการณ์การเปลี่ยนแปลงระดับน้ำในทางน้ำภายใต้อิทธิพลของน้ำขึ้นน้ำลง เป็นที่สนใจกันมาตั้งแต่อดีต เพราะความรู้ในเรื่องนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหลายด้าน ทั้งในด้านชลศาสตร์ และคุณภาพน้ำ การวิเคราะห์ใช้ความรู้ในเรื่องการไหลในทางน้ำเปิด โดยมีสมการพื้นฐานมาจากสมการ Saint Venant แต่เนื่องจาก ความยากลำบากในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ทำให้มีผู้พยายามหารากของสมการ Saint Venant โดยอาศัยลักษณะการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำที่มีลักษณะเป็นคาบ ประกอบกับสมมติฐานเพิ่มเติมทำให้สามารถหาคำตอบสมการได้

ลักษณะของการศึกษาทางทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำในทางน้ำภายใต้อิทธิพลของน้ำขึ้นน้ำลง สามารถแบ่งได้เป็น 4 แบบ คือ

1. การศึกษาโดยใช้รากของสมการ Saint Venant ซึ่งละเว้นเทอมการนำพา (Convective) และเทอมแรงเสียดทาน (Friction) ในสมการโมเมนต์
  2. การศึกษาโดยสมการ Telegraphers ซึ่งเป็นการละเว้นเทอมการนำพาและทำเทอมแรงเสียดทานให้เป็นเชิงเส้น
  3. การศึกษาโดยรากของสมการ Saint Venant โดยทำเทอมการนำพา และ เทอมแรงเสียดทานให้เป็นเชิงเส้น
  4. การศึกษาโดยใช้วิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) แก้สมการ Saint Venant (ใช้ทุกเทอม)
- นอกจากนี้ยังมีการศึกษาโดยวิธีอื่น เช่น แบบจำลองทางกายภาพ เป็นต้น

การศึกษาแบบที่ 1 2 และ 3 สามารถกล่าวได้ว่าเป็นการวิเคราะห์เชิงทฤษฎี ส่วนการศึกษาแบบที่ 4 เป็นวิธีเชิงตัวเลข ลักษณะการศึกษาแต่ละแบบกล่าวโดยสรุป ได้ดังต่อไปนี้

### 4.2.1 สมการพื้นฐาน

ในกรณีทางน้ำคงรูปที่เหลี่ยมผืนผ้าความชันเป็นศูนย์ สมการ Saint Venant (สมการต่อเนื่องและสมการโมเมนต์ของการไหลใน 1 มิติ) คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] + \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots(4-10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gu^2}{C_c^2 R} = 0 \quad \dots(4-11)$$

เมื่อ  $h$  คือ ความลึกที่ระดับน้ำนิ่ง (ม.)  $\eta$  คือ ค่าความสูงระดับน้ำเหนือระดับน้ำนิ่ง (ม.)  $u$  คือความเร็วการไหล (ม./ว.)  $g$  คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (ม./ว.<sup>2</sup>)  $C_c$  คือ สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานของ Chezy และ  $R$  คือ รัศมีชลศาสตร์ โดยมีสมมติฐานว่า

1. การกระจายแรงดันในหน้าตัดเป็นเหมือนสภาพน้ำนิ่ง (Hydrostatic Pressure)
2. ความเร็วการไหลในแต่ละหน้าตัด สามารถแสดงในรูปความเร็วเฉลี่ยค่าหนึ่งได้
3. ความเสียดทานในลำน้ำ สามารถอธิบายได้โดย ทฤษฎีความเสียดทานในการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow)

รากของสมการที่ 4-10 และ 4-11 สามารถหาได้โดยการละเทอมที่มีดีกรีสูง ซึ่งคือเทอมที่แสดงถึงการนำพา และ แรงเสียดทาน ซึ่งการวิเคราะห์วิธีนี้ จะทำให้สมการที่ 4-10 และ 4-11 รวมกันเป็นสมการคลื่น

$$gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad \dots(4-12)$$

โดยสมการที่ 4-12 สามารถหาคำตอบได้เมื่อ สมมติรูปร่างทางน้ำอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่งเข้าไป แต่ในกรณีทางน้ำธรรมชาติ ผลของเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นและถูกละไป คือ การนำพา และ แรงเสียดทาน มีความสำคัญมากและไม่สามารถละได้

สมการที่ 4-10 และ 4-11 มีวิธีหาคำตอบอีกแนวทางหนึ่ง โดยละเทอมการนำพา และ ทำเทอมแรงเสียดทานให้เป็นเชิงเส้น การหารากสมการในกรณีทางน้ำคงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าความชันท้องน้ำเป็นศูนย์ทำให้ได้สมการในรูป Telegraphers Equation รายละเอียดสมการได้กล่าวในหัวข้อ 4.2.2 โดย Ippen และ Harleman ได้ใช้สมการ Telegraphers นี้ ประยุกต์กับสมมติฐานที่ให้น้ำขึ้นน้ำลงมีการสะท้อนกลับที่ปลายปิด มาพัฒนาเป็นทฤษฎี Cooscilating Tide สำหรับอธิบายการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำในทางน้ำปลายปิด ซึ่งทฤษฎี Cooscilating Tide นี้ได้กล่าวในหัวข้อ 4.2.3

รากของสมการที่ 4-10 และ 4-11 เป็นการวิเคราะห์ที่ทำเทอมการนำพา และ เทอมแรงเสียดทานให้เป็นเชิงเส้น ซึ่งการหารากสมการ สามารถทำได้ในกรณีทางน้ำคงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าความชันท้องน้ำเป็นศูนย์ และการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำที่ขอบเขตมีลักษณะเป็นฮาร์โมนิกอย่างง่าย วิธีการนี้จึงเรียกว่าวิธีฮาร์โมนิก (Harmonic Method) ซึ่งเสนอโดย Dronker(1964) วิธีการนี้มีผู้นำมาพัฒนาต่ออย่างกว้างขวางเช่น การศึกษาของ Kawachi และ Minami (1979) และ Knight (1973) ซึ่งในแต่ละการศึกษา ก็มีสมมติฐานย่อยแตกต่างกันไป ในการศึกษานี้ได้ใช้ผลการศึกษาของ Kawachi และ Minami ซึ่งรายละเอียดสมการแสดงในหัวข้อ 4.2.4

นอกจากนี้ สมการที่ 4-10 และ 4-11 ยังสามารถหาคำตอบได้โดยการใช้วิธีเชิงตัวเลข เช่นการใช้ วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference) ซึ่งหาคำตอบของสมการที่ 4-10 และ 4-11 โดยการแบ่งการคำนวณออกเป็นช่วงย่อยๆ (Discretization) แล้วเริ่มคำนวณจากจุดเริ่มต้นซึ่งทราบค่าแล้ว (Initial Condition) ต่อจากนั้นจะคำนวณที่ค่าถัดไปเรื่อยๆทีละน้อย ซึ่งรายละเอียดกล่าวไว้ในหัวข้อ 4.3

#### 4.2.2 สมการ Telegraphers

เมื่อค่า  $\eta$  มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความลึก  $h$  สมการต่อเนื่อง (สมการที่ 4-10)

สามารถลดรูปเป็นสมการที่ 4-13

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots(4-13)$$

สมการโมเมนตัม (สมการที่ 4-11) ละเทอมการนำพาและ ทำเทอมแรงเสียดทานให้เป็นเชิงเส้น ได้เป็นสมการที่ 4-14

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + gMu = 0 \quad \dots(4-14)$$

โดยค่า  $M$  เป็นค่าที่ใช้ทำเทอมแรงเสียดทานให้เป็นเชิงเส้น ซึ่งแทนพจน์  $\frac{u}{C_c^2 R}$  ในสมการที่ 4-11 สมการที่ 4-14 จัดรูปใหม่ได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + Mu \right) \quad \dots(4-14ก)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ 4-13 เทียบกับ  $t$  และสมการที่ 4-14ก เทียบกับ  $x$  ได้สมการที่ 4-13ก และ 4-14ข

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} = -h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots(4-13ก)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad \dots(4-14ข)$$

รวมสมการที่ 4-13ก และ 4-14ข ได้

$$C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + gM \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots(4-15ก)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการที่ 4-13 เทียบกับ  $x$  และสมการที่ 4-14ก เทียบกับ  $t$  สมการที่ได้อยู่ในรูปตัวแปรระดับน้ำ ดังสมการที่ 4-15ข

$$C_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + gM \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots(4-15ข)$$

สมการที่ 4-15ก และสมการที่ 4-15ข อยู่ในรูปสมการ Telegraphers ซึ่งสามารถหารากสมการเมื่อ ค่าของ  $M$  มีค่าคงที่ตลอดทางน้ำ



ในกรณีทางน้ำที่ติดต่อกับทะเล ปากแม่น้ำอยู่ที่ตำแหน่ง  $x=0$  มีความยาวไม่จำกัด แอมพลิจูดน้ำขึ้นน้ำลงที่ปากแม่น้ำเป็น  $a_0$  จากสมการที่ 4-15x ได้ค่าระดับน้ำเหนือระดับน้ำนิ่งที่จุดใดๆ บนทางน้ำ ดังสมการที่ 4-16

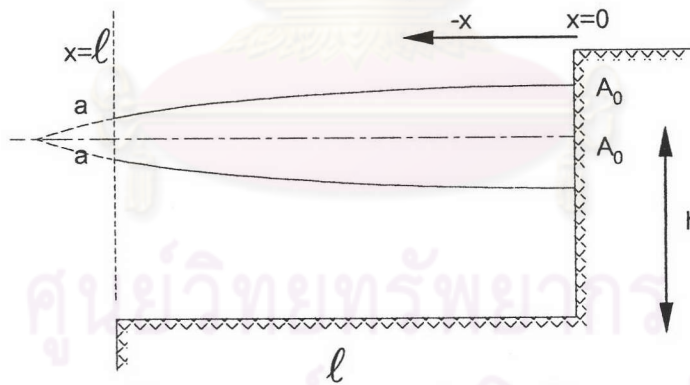
$$\eta = a_0 e^{-\mu x} \cos(\sigma t - kx) \quad \dots(4-16)$$

โดยค่า  $\mu$  คือ สัมประสิทธิ์การลดขนาดคลื่น (Damped coefficient) และ  $k$  คือ เลขจำนวนคลื่น (Wave number) ซึ่งค่าทั้งสองมีความสัมพันธ์กับค่า  $M$  ดังสมการที่ 4-17

$$\frac{g}{\sigma} M = 2 \frac{\mu}{k} \frac{1}{1 - (\mu/k)^2} \quad \dots(4-17)$$

#### 4.2.3 ทฤษฎี Cooscilating Tides

Ippen และ Harleman (1966) ได้ทำการศึกษาเรื่องการเคลื่อนตัวของความเค็มในปากแม่น้ำแบบ 1 มิติ โดยมีสมมติฐานในการทดลองคือ เมื่อคลื่นเคลื่อนที่ในทางน้ำที่ปลายด้านหนึ่งปิด จะเกิดการสะท้อนที่ปลายด้านปิด และการเคลื่อนที่ผ่านทางน้ำหน้าตัดคงรูปที่มีความเสียดทานคงที่ จะทำให้ความสูงคลื่นลดลงเป็นความสัมพันธ์แบบเอกซ์โปเนนเชียลกับระยะทาง



รูปที่ 4-2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์

ระดับน้ำในทางน้ำจะสมมติให้เกิดจากการรวมตัวกันของคลื่นสองชุดที่เคลื่อนที่ในทิศทางตรงข้าม ชุดแรกเคลื่อนที่เข้าจากด้านปลายเปิด ในทิศทางบวก  $x$  และมีระดับเหนือน้ำนิ่ง  $\eta_1$  ซึ่งเป็นความสัมพันธ์กับ  $x$  และ  $t$  และชุดที่สองเป็นคลื่นที่เกิดจากการสะท้อนเคลื่อนที่ในทิศทางลบ  $x$  มีระดับเหนือน้ำนิ่ง  $\eta_2$  เป็นความสัมพันธ์กับ  $x$  และ  $t$  และสมมติให้การสลายพลังงานเป็นอัตราส่วนกับพลังงานที่มีในคลื่น ซึ่งจะทำให้ความสูงคลื่นมีการลดลงเป็นความสัมพันธ์แบบเอกซ์โปเนนเชียลกับระยะทาง

ค่าระดับน้ำเหนือน้ำนิ่งของทั้งสองชุดจึงสามารถอธิบายได้ในสมการ

$$\eta_1 = A_0 e^{-\mu x} \cos(\sigma t - kx) \quad \dots(4-18)$$

$$\eta_2 = A_0 e^{\mu x} \cos(\sigma t + kx) \quad \dots(4-19)$$

เมื่อ  $\sigma = 2\pi/T$  ( $T$  คือคาบของคลื่นที่ปลายเปิด) หน่วย เรเดียน ต่อวินาที

$k = 2\pi/L$  ( $L$  คือความยาวคลื่นที่ตำแหน่ง  $x$ ) หน่วย เรเดียน ต่อเมตร

$A_0$  คือ ความสูงคลื่นที่ปลายปิด(เนื่องจากคลื่น 1 ชุด) หน่วย เมตร

$\mu$  คือ damping coefficient หน่วย ต่อเมตร

$t$  คือ เวลาซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ขณะเกิดความสูงคลื่นสูงสุดที่ปลายปิด

ความสูงของระดับน้ำเทียบกับระดับน้ำนิ่ง  $\eta$  ที่เวลาและระยะทางต่างๆ เกิดจากผลรวมของคลื่นสองชุด คือ

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = A_0 [ e^{-\mu x} \cos(\sigma t - kx) + e^{\mu x} \cos(\sigma t + kx) ] \quad \dots(4-20)$$

เวลาที่เกิดระดับน้ำสูงสุดหาจาก

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 = e^{-\mu x} \sin(\sigma t - kx) + e^{\mu x} \sin(\sigma t + kx) \quad \dots(4-21)$$

สมการที่ 4-21 สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\tan \sigma t_H = -\tan kx \tanh \mu x \quad \dots(4-22)$$

$\sigma t_H$  เป็นค่าสัมพัทธ์ของเฟสที่เกิดระดับน้ำสูงสุดที่แต่ละจุดบนทางน้ำ เทียบกับเฟสที่เกิดระดับน้ำสูงสุดที่ปลายปิด ( $\sigma t_H = 0$ ) จากสมการที่ 4-22 ค่าของ  $\sigma t_H$  ในหน่วยองศาหาได้จาก

$$\sigma t_H = \tan^{-1}(-\tan kx \tanh \mu x) \quad \dots(4-23)$$

เมื่อแทนค่า  $\sigma t_H$  ในสมการที่ 4-20 สามารถหาความสูงคลื่น(รวม 2 ชุด)ที่จุดต่างๆได้

$$\eta_H = 2A_0 \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2kx + \cosh 2\mu x)} \quad \dots(4-24)$$

ที่ปลายปิดความสูงคลื่นรวมเป็น  $2A_0$  ดังนั้นความสูงคลื่นที่จุดต่างๆเทียบปลายปิดได้

$$\frac{\eta_H}{\eta_{0H}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2kx + \cosh 2\mu x)} \quad \dots(4-25)$$

ในกรณีทางน้ำที่หน้าตัดคงตัว และความเสียดทานคงที่ ค่า  $k$  และ  $\mu$  สามารถสมมติให้เป็นค่าคงที่ได้ หรือสามารถเขียนในรูปสมการที่ 4-26 โดยนิยามค่าคงที่  $\phi$  ขึ้นมาใหม่โดยค่านี้ขึ้นกับลักษณะของลำน้ำ และสามารถหาได้เมื่อทราบค่า  $k$  และ  $\mu$  จากเหตุการณ์จริง

$$\mu = \left(\frac{\phi}{2\pi}\right)k \quad \dots(4-26)$$

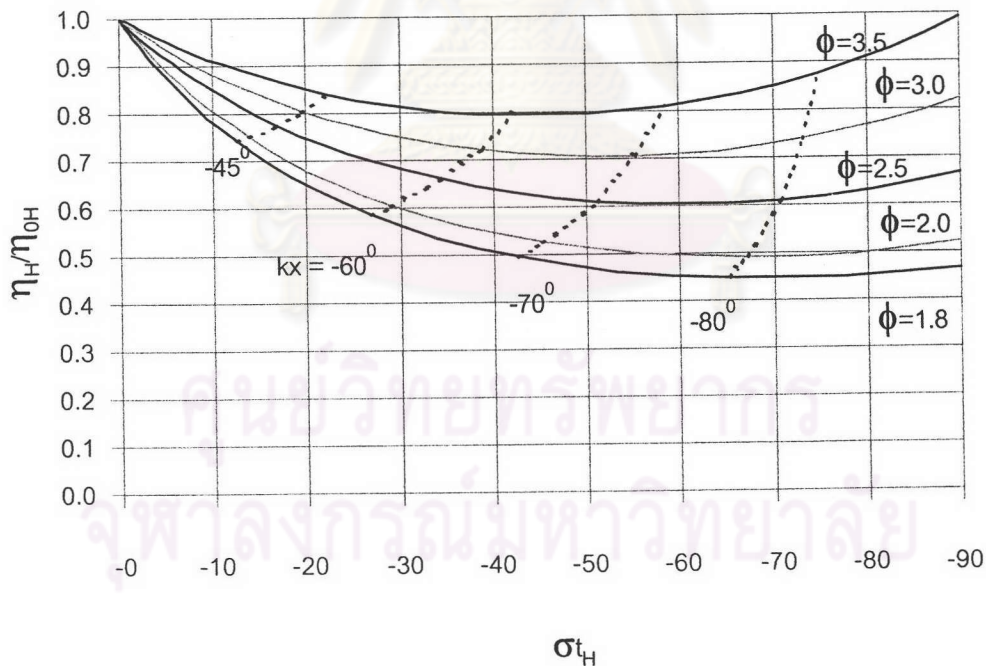
ดังนั้นสมการที่ 4-23 และ 4-25 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sigma t_H = \tan^{-1} \left( -\tan kx \tanh \left( \frac{\phi kx}{2\pi} \right) \right) \quad \dots(4-27)$$

$$\frac{\eta_H}{\eta_{0H}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \cos 2kx + \cosh \left( \frac{\phi kx}{\pi} \right) \right)} \quad \dots(4-28)$$

จากสมการที่ 4-27 และ 4-28 จึงมีวิธีหาค่าของ  $\phi$  และ  $kx$  โดยการ plot ค่า  $\eta_H/\eta_{0H}$  และ ค่าเวลาที่เกิดระดับน้ำสูงสุด  $\sigma t_H$  จึงสามารถเขียนได้โดยกลุ่มตัวแปร  $\phi$  และ  $kx$  ดังนั้น ถ้าหาก ความสูงของระดับน้ำสูงสุดและเวลาที่เกิด เป็นค่าที่ทราบในบางจุดบนทางน้ำ เมื่อนำมา plot ในรูปแบบข้างต้น แต่ละจุดจะตกบนเส้นของ  $\phi =$  ค่าคงที่ ในทางทฤษฎีค่า  $\phi$  และ  $k$  สามารถหาได้จากจุดเพียงจุดเดียวในความสัมพันธ์ข้างต้น แต่ในทางปฏิบัติ มักใช้วิธีหาค่า  $\phi$  ที่เข้ากับกลุ่มข้อมูลทั้งหมด

ค่าคำตอบทางทฤษฎีของ ทฤษฎี Cooscillating Tide ตามสมการที่ 4-27 และ 4-28 แสดงได้ดังรูปที่ 4-3



รูปที่ 4-3 คำตอบของระบบสมการในทฤษฎี Cooscillating Tide เมื่อเขียนลงในแกน  $\eta_H/\eta_{0H}$  และ  $\sigma t_H$

วิธีการวิเคราะห์ปัญหาการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำในทางน้ำภายใต้อิทธิพลน้ำขึ้นน้ำลง โดยใช้ทฤษฎี Cooscilating Tide นี้สามารถทำได้โดย แปลงข้อมูลระดับน้ำขึ้นน้ำลงสูงสุดที่จุดใดจุดหนึ่ง ให้เป็นค่า  $\eta_H/\eta_{OH}$  (โดยนำระดับน้ำเหนือระดับน้ำนิ่งที่จุดนั้นหารระดับน้ำเหนือระดับน้ำนิ่งที่ปลายด้าน ปิด) และแปลงเวลาที่เกิดระดับน้ำนี้เป็นค่า  $\sigma t_H$  (โดยนำเวลาที่เกิดระดับน้ำสูงสุดที่จุดนั้นเทียบเวลาที่เกิด ระดับน้ำสูงสุดที่ปลายด้านปิดคูณด้วย  $\sigma$  ของระดับน้ำขึ้นน้ำลง) ซึ่งจะได้เป็น 1 จุดความสัมพันธ์ นำ ความจุดนี้มาเขียนบนรูปที่ 4-3 แล้วหาค่า  $\phi$  ที่ผ่านจุดนั้น และหาค่า  $k$  โดยการอ่านจากรูป 4-3 เมื่อได้ค่า  $\phi$  และ  $k$  แล้ว สามารถคำนวณค่า  $\mu$  ได้จากสมการที่ 4-26 และสามารถหาค่า  $\mu$  คำนวณระดับน้ำที่จุด ต่างๆได้โดยสมการที่ 4-20

การหาความเร็วสูงสุดที่ปากแม่น้ำ สามารถใช้ความสัมพันธ์จากสมการที่ 4-13 และ สมการที่ 4-16 โดยจากสมการทั้งสองสามารถรวมกันได้ดังสมการที่ 4-29

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_0}{h} \sigma e^{-\mu x} \sin(\sigma t - kx) \quad \dots(4-29)$$

ซึ่งอินทิเกรตได้เป็น

$$u = \frac{a_0}{h} \sigma \int e^{-\mu x} \sin(\sigma t - kx) \quad \dots(4-30)$$

ความเร็วที่จุดใดๆหาได้จาก ผลรวมของความเร็วตามสมการที่ 4-30 ในสองทิศทางคือ

$$u = u_1 + u_2 = \frac{a_0 \sigma}{h} \int_0^x [e^{-\mu x} \sin(\sigma t - kx) + e^{\mu x} \sin(\sigma t + kx)] dx \quad \dots(4-31)$$

ความเร็วที่ปากแม่น้ำหาจากการแทนค่าสมการที่ 4-28 ในสมการที่ 4-31 ได้

$$u = \frac{\eta_{eH}}{h} c_0 \frac{k_0}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} \frac{|e^{-\mu x} \cos(\sigma t - kx + \alpha) + e^{\mu x} \cos(\sigma t + kx + \alpha)|}{\sqrt{2(\cos 2kl + \cosh 2\mu l)}} \quad \dots(4-32)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\mu}{k}\right) \quad \dots(4-33)$$

สำหรับการหาความเร็วการไหลสูงสุดที่ปากแม่น้ำสามารถทำได้โดยการแทนค่าสมการ ที่ 4-22 ในสมการที่ 4-32

#### 4.2.4 วิธีฮาร์โมนิก(Harmonic Method) ของสมการการไหล

การแก้สมการ Saint Venant ในทางน้ำภายใต้อิทธิพลน้ำขึ้นน้ำลงโดยวิธีฮาร์โมนิก (Harmonic Method) นี้ เสนอโดย Dronker(1964) โดยมีลักษณะเด่นคือ กำหนดค่าขอบเขตทั้งสองด้านของทางน้ำมีการเปลี่ยนแปลงแบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย และสมมติให้รากของสมการ Saint Venant มีค่าเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกกับเวลา และระยะทาง ซึ่งวิธีนี้มีผู้ศึกษาต่อมากมาย ในการศึกษานี้ได้แสดงผลการศึกษาของ Kawachi และ Minami(1979)

สมการต่อเนื่องและสมการพลังงาน เขียนในรูปอัตราการไหล ได้ดังสมการที่ 4-34 และ 4-35

$$B \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \dots(4-34)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gQ^2}{C_c^2 AR} = 0 \quad \dots(4-35)$$

เมื่อ B คือ ความกว้างหน้าตัด Q คืออัตราการไหล และ A คือ พื้นที่หน้าตัดการไหล

ในกรณีทางน้ำหน้าตัดคงรูป ความชันท้องน้ำเป็นศูนย์ค่าความกว้างทางน้ำ B มีค่าคงที่สามารถเขียนเป็น  $B_0$  สมมติให้การเปลี่ยนแปลงความเร็วตามระยะทางมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วเฉลี่ย ค่า  $u$  ในเทอมการนำพาจึงสามารถแทนด้วยค่า  $u_0$  ซึ่งเป็นค่าคงที่ตลอดทางน้ำ และสมมติให้การเปลี่ยนแปลงระดับน้ำ  $\eta$  มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความลึก D ทำให้ความเร็วคลื่นสามารถแทนได้ด้วยค่า  $c_0 = \sqrt{gA_0/B_0}$  เมื่อ  $A_0$  แทนพื้นที่หน้าตัดการไหลได้ระดับน้ำนิ่ง และทำเทอมแรงเสียดทานในสมการที่ 4-35 ให้เป็นเชิงเส้น สมการที่ 4-34 และ 4-35 สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$B_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \dots(4-36)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2u_0 \frac{\partial Q}{\partial x} + (c_0^2 - u_0^2) B_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda Q = 0 \quad \dots(4-37)$$

เมื่อ

$$\lambda = \frac{8gQ_{\max}}{3\pi C_c^2 DA_0} \quad \dots(4-38)$$

เมื่อ  $Q_{\max}$  คือ อัตราการไหลเฉลี่ยสูงสุดตลอดช่วงทางน้ำ

เมื่อกำหนดให้ค่าขอบเขตมีการเปลี่ยนแปลงแบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย โดยขอบเขตที่ปากแม่น้ำคือตำแหน่ง  $x = 0$  มีการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำแบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย ส่วนขอบเขตต้นน้ำคือตำแหน่ง  $x = L$  มีการเปลี่ยนแปลงอัตราการไหลฮาร์โมนิกอย่างง่าย สมการค่าขอบเขตที่ตำแหน่งทั้งสองแสดงได้ดัง สมการที่ 4-39 และ 4-40

$$\eta(0, t) = a_0 \cos(\sigma t) \quad \text{ที่ตำแหน่ง } x = 0 \quad \dots(4-39)$$

$$Q(\ell, t) = q_0 + q^*(\ell) \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad \text{ที่ตำแหน่ง } x = \ell \quad \dots(4-40)$$

เมื่อ  $a_0$  คือ แอมพลิจูดของน้ำขึ้นน้ำลงที่ปากแม่น้ำ (ม.)  $q_0$  คือ อัตราการไหลส่วนที่คงที่ด้านต้นน้ำ (ลบ.ม./ว.)  $q(\ell)$  คือ แอมพลิจูดของอัตราการไหลที่เปลี่ยนแปลงเป็นฮาร์โมนิกอย่างง่ายทางด้านต้นน้ำ (ลบ.ม./ว.)  $\sigma$  คือ ความเร็วเชิงมุมของการเปลี่ยนแปลงอัตราการไหลและระดับน้ำที่ขอบเขตทั้งสอง  $\varepsilon$  คือ ความต่างเฟสของการเปลี่ยนแปลงทั้งสอง

จากสมการที่ 4-36 ถึงสมการที่ 4-40 Kawachi และ Minami (1979) ได้หารากของสมการโดยใช้ฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน สามารถหาระดับน้ำเหนือระดับน้ำนิ่งและอัตราการไหลที่จุดและเวลาใด ๆ บนทางน้ำได้ดังสมการที่ 4-41 และ 4-42

$$\eta(x, t) = \frac{1}{D_d} \left[ \left\{ \frac{q^*(\ell)}{B_0 c_0} I_1(x) + h^*(0) P_1(x) \right\} \cos(\sigma t) + \left\{ \frac{q^*(\ell)}{B_0 c_0} I_2(x) + h^*(0) P_2(x) \right\} \sin(\sigma t) \right] \quad \dots(4-41)$$

$$Q(x, t) = q_0 + \frac{1}{D_d} \left[ \left\{ q^*(\ell) J_1(x) + h^*(0) B_0 c_0 S_1(x) \right\} \cos(\sigma t) + \left\{ q^*(\ell) J_2(x) + h^*(0) B_0 c_0 S_2(x) \right\} \sin(\sigma t) \right] \quad \dots(4-42)$$

โดยฟังก์ชันต่างๆที่ประกอบเป็นสมการที่ 4-41 และ 4-42 มีค่าดังสมการข้างล่าง

$$D_d = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cosh(2N\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) \cos(2N\gamma) - 2\beta\gamma \sinh(2N\alpha) + 2\alpha\beta \sin(2N\gamma)$$

$$I_1(x) = W_1(x) \cos \varepsilon - W_2(x) \sin \varepsilon$$

$$I_2(x) = -W_2(x) - W_1(x) \sin \varepsilon$$

$$J_1(x) = Y_1(x) \cos \varepsilon - Y_2(x) \sin \varepsilon$$

$$J_2(x) = -Y_2(x) \cos \varepsilon - Y_1(x) \sin \varepsilon$$

$$W_1(x) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \alpha [-F_2(x + \ell, x - \ell, x - \ell) - F_2(x - \ell, x - \ell, x + \ell)$$

$$- F_6(x + \ell, x - \ell, x - \ell) - F_6(x - \ell, x - \ell, x + \ell)]$$

$$+ (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \beta [-F_1(x + \ell, x - \ell, x - \ell) + F_1(x - \ell, x - \ell, x + \ell)$$

$$+ F_5(x + \ell, x - \ell, x - \ell) - F_5(x - \ell, x - \ell, x + \ell)]$$

$$+ (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) \gamma [F_4(x + \ell, x - \ell, x - \ell) + F_4(x - \ell, x - \ell, x + \ell)$$

$$- F_8(x + \ell, x - \ell, x - \ell) - F_8(x - \ell, x - \ell, x + \ell)]$$

$$+ 2\alpha\beta\gamma[-F_3(x-l, x-l, x+l) + F_3(x+l, x-l, x-l) \\ - F_7(x-l, x-l, x+l) + F_7(x+l, x-l, x-l)]$$

$$W_2(x) = (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)\alpha[-F_4(x-l, x-l, x+l) - F_4(x+l, x-l, x-l) \\ - F_8(x-l, x-l, x+l) + F_8(x+l, x-l, x-l)] \\ + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\beta[F_3(x-l, x-l, x+l) - F_3(x+l, x-l, x-l) \\ + F_7(x-l, x-l, x+l) - F_7(x+l, x-l, x-l)] \\ + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)\gamma[-F_2(x-l, x-l, x+l) - F_2(x+l, x-l, x-l) \\ - F_6(x-l, x-l, x+l) - F_6(x+l, x-l, x-l)] \\ + 2\alpha\beta\gamma[F_1(x-l, x-l, x+l) - F_1(x+l, x-l, x-l) \\ - F_5(x-l, x-l, x+l) + F_5(x+l, x-l, x-l)]$$

$$Y_1(x) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[F_1(x+l, x-l, x-l) - F_5(x+l, x-l, x-l)] \\ + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)[F_1(x-l, x-l, x+l) - F_5(x-l, x-l, x+l)] \\ + 2\alpha\beta[F_6(x-l, x-l, x+l) + F_2(x-l, x-l, x+l)] \\ + 2\beta\gamma[F_4(x+l, x-l, x-l) - F_8(x+l, x-l, x-l)]$$

$$Y_2(x) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[F_3(x+l, x-l, x-l) + F_7(x+l, x-l, x-l)] \\ + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)[F_3(x-l, x-l, x+l) + F_7(x-l, x-l, x+l)] \\ + 2\alpha\beta[F_4(x-l, x-l, x+l) - F_8(x-l, x-l, x+l)] \\ - 2\beta\gamma[F_4(x+l, x-l, x-l) + F_2(x+l, x-l, x-l)]$$

$$P_1(x) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[F_1(x-2l, x, x) - F_5(x-2l, x, x)] \\ + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)[F_1(x, x, x-2l) - F_5(x, x, x-2l)] \\ - 2\alpha\beta[F_6(x, x, x-2l) + F_2(x, x, x-2l)] \\ - 2\beta\gamma[F_4(x-2l, x, x) - F_8(x-2l, x, x)]$$

$$P_2(x) = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[F_3(x-2l, x, x) + F_7(x-2l, x, x)] \\ - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)[F_3(x, x, x-2l) + F_7(x, x, x-2l)] \\ - 2\alpha\beta[F_4(x, x, x-2l) + F_8(x, x, x-2l)] \\ - 2\beta\gamma[F_6(x-2l, x, x) - F_2(x-2l, x, x)]$$

$$S_1(x) = \alpha[F_2(x-2l, x, x) + F_2(x, x, x-2l) - F_6(x-2l, x, x) + F_6(x, x, x-2l)] \\ + \beta[F_1(x, x, x-2l) - F_1(x-2l, x, x) - F_5(x, x, x-2l) + F_5(x-2l, x, x)] \\ + \gamma[F_4(x, x, x-2l) + F_4(x-2l, x, x) - F_8(x, x, x-2l) - F_8(x-2l, x, x)]$$

$$S_2(x) = -\alpha[F_4(x, x, x-2l) + F_4(x-2l, x, x) - F_8(x, x, x-2l) - F_8(x-2l, x, x)] \\ - \beta[F_3(x, x, x-2l) - F_3(x-2l, x, x) + F_7(x, x, x-2l) - F_7(x-2l, x, x)] \\ + \gamma[F_2(x, x, x-2l) + F_2(x-2l, x, x) + F_8(x, x, x-2l) + F_8(x-2l, x, x)]$$

$$F_1(\xi, \zeta, \theta) = \cosh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \cos\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \cos\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_2(\xi, \zeta, \theta) = \cosh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \cos\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \sin\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_3(\xi, \zeta, \theta) = \cosh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \sin\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \cos\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_4(\xi, \zeta, \theta) = \cosh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \sin\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \sin\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_5(\xi, \zeta, \theta) = \sinh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \sin\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \sin\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_6(\xi, \zeta, \theta) = \sinh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \sin\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \cos\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_7(\xi, \zeta, \theta) = \sinh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \cos\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \sin\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

$$F_8(\xi, \zeta, \theta) = \sinh\left(N\frac{\xi}{\ell}\alpha\right) \cos\left(N\frac{\zeta}{\ell}\beta\right) \cos\left(N\frac{\theta}{\ell}\gamma\right)$$

เมื่อค่าตัวแปรที่สำคัญ  $N$  แทนค่าความยาวทางน้ำสัมพัทธ์ (Relative channel length)

มีค่าดังสมการที่ 4-43

$$N = \frac{\sigma l}{c_0} = \frac{2\pi l}{L} \quad \dots(4-43)$$

เมื่อค่า  $L$  แทนความยาวคลื่นของน้ำขึ้นน้ำลง

$$\alpha = \frac{1}{1 - \hat{F}_r^2}, \beta = \frac{\hat{F}_r^2}{1 - \hat{F}_r^2}, \gamma = \frac{b}{1 - \hat{F}_r^2} \quad \dots(4-44)$$

$$a = \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ 1 + (1 - \hat{F}_r^2)^2 R_s^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad \dots(4-45)$$

$$b = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ 1 + (1 - \hat{F}_r^2)^2 R_s^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad \dots(4-46)$$

$$R_s = \frac{\lambda}{\sigma} \quad \dots(4-47)$$

$$\hat{F}_r = \frac{U_0}{c_0} = \frac{q_0}{A_0 c_0} \quad \dots(4-48)$$



และได้ค่าอัตราส่วนคลื่นขยาย  $H_r$  ที่ตำแหน่งอาคารกั้นลำน้ำ ดังสมการที่ 4-49

$$H_r(x = \ell) = \frac{a(x = \ell)}{a_0} = \frac{1}{D} [F_r^* (W_1(x)^2 + W_2(x)^2) + 2F_r^* \{ (P_1(x)W_1(x) - P_2(x)W_2(x)) \cos \varepsilon - (W_1(x)P_2(x) + W_2(x)P_1(x)) \sin \varepsilon \} + P_1(x)^2 + P_2(x)^2 ]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4-49)$$

เมื่อ

$$F_r^* = \frac{q^*(l)}{a_0 B_0 C_0} \quad \dots(4-50)$$

โดย  $q^*(l)$  และ  $a_0$  แทนแอมพลิจูดอัตราการไหลตำแหน่งปลายเปิดและระดับน้ำที่ตำแหน่งปลายเปิดตามลำดับ ดังแสดงในสมการที่ 4-39 และ 4-40

ในกรณีที่ทางน้ำปลายข้างหนึ่งปิดสนิท ไม่มีอัตราการไหล ค่า  $q(0)$  และค่า  $q^*(l)$  มีค่าเป็นศูนย์ สมการที่ 4-49 4-45 4-46 และ 4-47 สามารถเขียนใหม่ในรูปสมการที่ 4-51 ถึง 4-54

$$H_r(\ell) = \frac{1}{D_d} (a^2 + b^2) [4 \cosh^2(Na) \cos^2(Nb) + 4 \sinh^2(Na) \sin^2(Nb)]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4-51)$$

เมื่อ

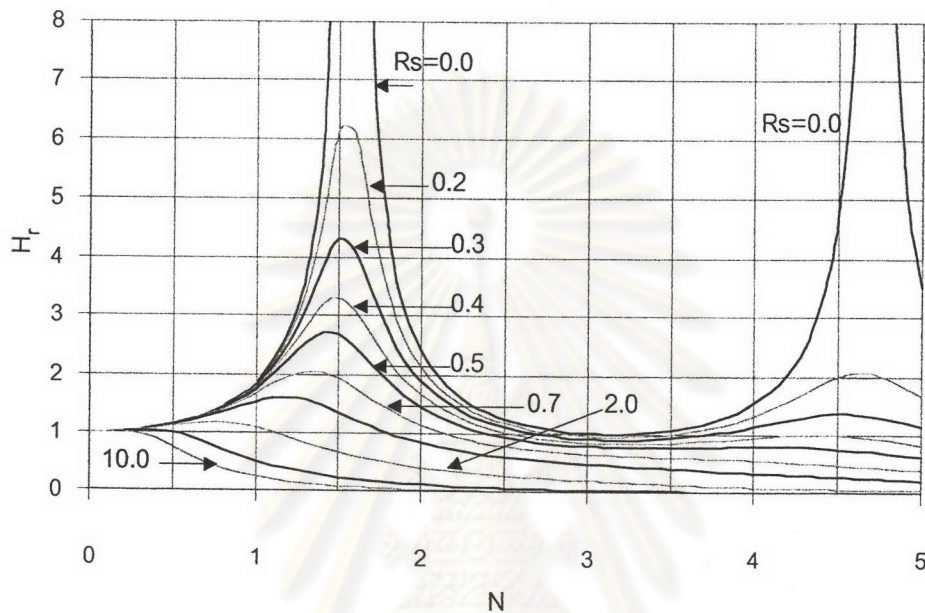
$$a = \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + Rs^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4-52)$$

$$b = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + Rs^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4-53)$$

$$Rs = \frac{\lambda}{\sigma} = \left( \frac{8gQ_{\max}}{3\pi C_c^2 D A_0} \right) / \sigma \quad \dots(4-54)$$

ซึ่งจากสมการที่ 4-51 ถึง 4-54 แสดงให้เห็นว่า ในกรณีทางน้ำคงรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าปลายข้างหนึ่งปิดสนิท อัตราส่วนคลื่นขยายที่ตำแหน่งใดๆ มีค่าขึ้นกับ  $Rs$  ซึ่งเป็นผลของค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน ( $C_c$  - Chezy Coefficient) ความลึกท้องน้ำ ( $D$ ) พื้นที่หน้าตัดการไหล ( $A_0$ ) คาบน้ำขึ้นน้ำลง (ในรูป  $\sigma = 2\pi/T$ ) และอัตราการไหลเฉลี่ยสูงสุดตลอดลำน้ำ ( $Q_{\max}$ ) ซึ่งการหาค่า  $Q_{\max}$  ที่เป็นตัวแทนตลอดทั้งลำน้ำนี้ สามารถใช้การเฉลี่ยอัตราการไหลตลอดช่วงคาบคลื่นและตลอดช่วงระยะทางได้ ตัวแปรต่างๆ ที่มีผลต่อค่า  $Q_{\max}$  นี้ ได้แก่ แอมพลิจูดน้ำขึ้นน้ำลง ( $a_0$ ) ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน ความลึกท้องน้ำ พื้นที่หน้าตัดการไหล และคาบน้ำขึ้นน้ำลง

รากของสมการที่ 4-51 ถึง 4-54 แสดงในรูปความสัมพันธ์ระหว่าง  $H_r$  กับ  $R_s$  แสดงในรูปที่ 4-4 ซึ่งในกรณีไม่มีแรงเสียดทาน ค่า  $H_r$  จะมีค่ามากเป็นอนันต์ที่ ความยาวทางน้ำสัมผัส  $N = \pi/2$  (และ  $3\pi/2$   $5\pi/2$ ...) เมื่อแรงเสียดทานเพิ่มขึ้น ค่า  $H_r$  จะลดลงและตำแหน่ง  $N$  ที่ให้ค่า  $H_r$  สูงสุด จะน้อยลงเรื่อยๆ



รูปที่ 4-4 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $H_r$  กับ  $N = \sigma/c$  ที่  $R_s$  ต่างๆ

(จากการศึกษาของ Kawachi และ Minami (1979))

### 4.3 การหาคำตอบของสมการโดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม

สมการ Saint Venant เป็นสมการแบบอนุพันธ์ย่อย มีลักษณะต่อเนื่อง ไม่สามารถหาคำตอบของสมการต่อเนื่องนั้นได้โดยตรง จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคและสมมติฐานบางประการ วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite Difference) เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถหาคำตอบดังกล่าวได้โดยการแบ่งการคำนวณออกเป็นช่วงย่อยๆ (Discretization) แล้วเริ่มคำนวณจากจุดเริ่มต้นซึ่งทราบค่าแล้ว (Initial Condition) ต่อจากนั้นจะคำนวณที่ค่าถัดไปเรื่อยๆทีละน้อย

การคำนวณโดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม แบ่งเป็นวิธีใหญ่ๆได้ 2 แบบ คือ แบบ Explicit Scheme และ Implicit Scheme ในการคำนวณแบบ Explicit Scheme ค่าที่การคำนวณถัดไปเป็นฟังก์ชันของค่าสองค่าคือ ค่าเริ่มต้น หรือคำตอบจากการคำนวณในช่วงเวลา ก่อน และค่าที่ขอบเขตเท่านั้น ส่วนการคำนวณแบบ Implicit Scheme ค่าที่การคำนวณถัดไป เป็นฟังก์ชันของ ค่าเริ่มต้น ค่าที่ขอบเขต และค่าในช่วงการคำนวณเดียวกันที่ตำแหน่งข้างเคียง การคำนวณจำเป็นต้องใช้วิธีคำนวณซ้ำ (Iteration)

### 4.3.1 การประมาณค่าอนุพันธ์ย่อย

ถ้าฟังก์ชัน  $f(x)$  และอนุพันธ์ของ  $f(x)$  มีตัวแปรเดียว ฟังก์ชันต่อเนื่องของ  $x$  กระจายโดยทฤษฎีเทเลอร์ ได้ดังสมการที่ 4-55 และ 4-56

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad \dots(4-55)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad \dots(4-56)$$

เมื่อนำสมการ 4-55 บวกกับสมการ 4-56 จะได้

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\Delta x)^4 \quad \dots(4-57)$$

เมื่อ  $O(\Delta x)^4$  แทนอนุกรมที่มีกำลังสูงตั้งแต่ 4 ขึ้นไป

เนื่องจากอนุกรมที่มีกำลังสูงขึ้น จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมแรกๆ เมื่อไม่คิดเทอมที่มีกำลังของ  $\Delta x$  ตั้งแต่ 4 ขึ้นไป สมการ 4-57 จะสามารถประมาณค่า อนุพันธ์ลำดับที่สองที่จุด  $x$  ได้ดังสมการ 4-58

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{x=x} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)) \quad \dots(4-58)$$

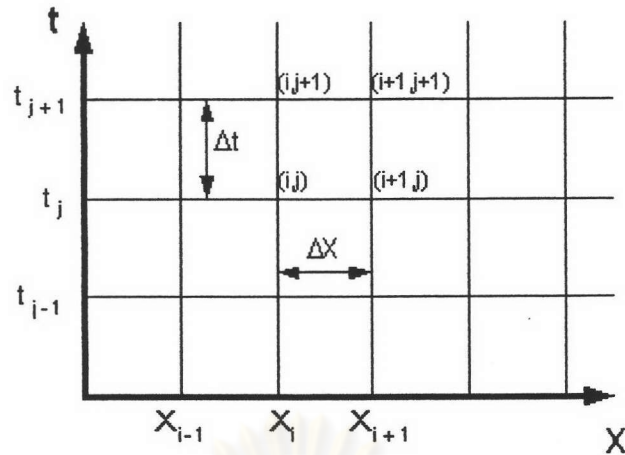
ทำนองเดียวกันถ้า นำ สมการที่ 4-57 ลบสมการที่ 4-56 และไม่คิดเทอมที่มีกำลังสูงตั้งแต่ 3 ขึ้นไป จะสามารถประมาณค่าอนุพันธ์ที่จุด  $x$  ได้ดังสมการที่ 4-59

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{x=x} = \frac{1}{2\Delta x} (f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) \quad \dots(4-59)$$

### 4.3.2 การประยุกต์ใช้กับสมการการไหล

จากสมการพื้นฐาน (สมการที่ 4-10 และ 4-11) ค่าที่ต้องการทราบคือ ค่าระดับน้ำเหนือระดับน้ำนิ่ง ( $\eta$ ) และความเร็วการไหล ( $u$ ) ซึ่งทั้งสองเป็นฟังก์ชันของตัวแปร ตำแหน่ง  $x$  และเวลา  $t$

ตัวแปรตำแหน่ง  $x$  และเวลา  $t$  เมื่อเขียนในระนาบ  $x-t$  สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4-5 ระยะห่างระหว่างจุด ในแนวแกน  $x$  มีค่าเป็น  $\Delta x$  และระยะห่างตามแนวแกน  $t$  มีค่า  $\Delta t$  ดังนั้นจึงสามารถเรียกตำแหน่ง  $i\Delta x$  ว่า กริดที่  $i$  และ เรียกตำแหน่ง  $(i+1)\Delta x$  ว่า กริดที่  $i+1$  สำหรับแกนเวลา จะเรียกเวลา  $j\Delta t$  ว่า กริดที่  $j$  และ เรียกตำแหน่ง  $(j+1)\Delta t$  ว่า กริดที่  $j+1$  และในการใช้สัญลักษณ์แทนค่า  $\eta$  และ  $u$  ที่ตำแหน่งและเวลาต่างๆจะใช้ ตัวห้อยแสดงตำแหน่งและตัวยกแสดงเวลา เช่น ความเร็วที่กริดระยะทางที่  $i$  และ กริดเวลาที่  $j$  มีสัญลักษณ์เป็น  $u_i^j$



รูปที่ 4-5 ระนาบระยะทาง-เวลา ของวิธีผลต่างสืบเนื่อง

ในการคำนวณเริ่มต้นที่กริดเวลาที่ทราบค่าตัวแปรทุกตัว แล้วจึงคำนวณที่กริดเวลาถัดไป เช่นในกรณีที่ต้องการทราบค่าที่กริดเวลาที่  $j+1$  ต้องทราบค่าที่กริดเวลาที่  $j$  ก่อน โดยค่าที่กริดเวลาเริ่มต้นในการคำนวณเรียกว่า เงื่อนไขค่าเริ่มต้น (Initial Condition)

การหาคำตอบของสมการการไหล มีผู้เสนอวิธีการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยหลายวิธี ซึ่งวิธีการหนึ่งที่ใช้กันอย่างกว้างขวางคือ Preissman Scheme ซึ่งเป็นวิธี Implicit Scheme วิธีหนึ่ง โดยมีการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยดังสมการที่ 4-60

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(f_i^{j+1} + f_{i+1}^{j+1}) - (f_i^j + f_{i+1}^j)}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1})}{\Delta x} + \frac{(1-\theta)(f_{i+1}^j - f_i^j)}{\Delta x} \quad \dots(4-60)$$

$$f = \frac{1}{2}\theta(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1}) + \frac{1}{2}(1-\theta)(f_{i+1}^j + f_i^j)$$

เมื่อ  $\theta$  คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ซึ่งมีผลให้การคำนวณมีลักษณะเป็น Explicit (เมื่อ  $\theta = 0$ ) หรือ Implicit (เมื่อ  $\theta = 1$ ) โดยในการคำนวณปกติควรใช้  $\theta = 0.6 - 0.7$

สมการที่ 4-10 และ 4-11 สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการที่ 4-61

$$U_t + F_x + S = 0 \quad \dots(4-61)$$

เมื่อ

$$U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} (h+\eta)u \\ \frac{1}{2}u^2 + g\eta \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gu^2}{C_c R} \end{pmatrix} \quad \dots(4-62)$$

ตัวห้อย  $t$  และ  $x$  ในสมการที่ 4-61 เป็นการแสดงเทอมอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ  $t$  และ  $x$

แทนค่าของอนุพันธ์ย่อยดังสมการที่ 4-60 ลงในสมการที่ 4-62 และจัดรูปใหม่ได้

$$U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1} + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} [ \theta (F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}) + (1 - \theta)(F_{i+1}^j - F_i^j) ] \\ + \Delta t [ \theta (S_{i+1}^{j+1} + S_i^{j+1}) + (1 - \theta)(S_{i+1}^j + S_i^j) ] = U_i^j + U_{i+1}^j \quad \dots(4-63)$$

สมการที่ 4-63 มีตัวแปรไม่ทราบค่า 4 ตัว คือ  $u_i^{j+1}$   $\eta_i^{j+1}$   $u_{i+1}^{j+1}$  และ  $\eta_{i+1}^{j+1}$  ซึ่งสามารถเขียนในรูป

$$au_i^{j+1} + b\eta_i^{j+1} + cu_{i+1}^{j+1} + d\eta_{i+1}^{j+1} = e \quad \dots(4-64)$$

เมื่อเขียนสมการที่ 4-64 ลงในแต่ละกริด จะมีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด  $2n$  ตัวแปร เมื่อ  $n$  คือจำนวนกริด และมีสมการทั้งหมด  $2(n-1)$  สมการ ซึ่งสามารถแก้สมการได้เมื่อทราบค่าขอบเขตที่ท้ายน้ำหรือเหนือน้ำอีก 2 สมการ

#### 4.4 การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนระหว่าง ค่าที่คำนวณได้ และ ค่าที่เกิดขึ้นจริง เพื่อประโยชน์ในการเปรียบเทียบและสอบทานแบบจำลอง ในการศึกษาที่ใช้ค่า รากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Square Error, RMSe) โดย

$$RMSe = \sqrt{\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (Calc - Meas)^2} \quad \dots(4-65)$$

เมื่อ	RMSe	คือ	ค่ารากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
	Calc	คือ	ค่าที่ได้จากการคำนวณ
	Meas	คือ	ค่าที่เกิดขึ้นจริง
	$N_d$	คือ	จำนวนข้อมูลทั้งหมด

การตรวจสอบว่าเส้นแนวโน้มมีความเหมาะสมกับกลุ่มข้อมูลเพียงใด การศึกษานี้ได้ใช้ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination -  $R^2$ ) โดย

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad \dots(4-66)$$

เมื่อ	$Y_i$	คือ	ข้อมูลจริง
	$\bar{y}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของข้อมูลจริง
	$\hat{y}$	คือ	ค่าที่ได้จากเส้นแนวโน้ม

ขนาดของ  $R^2$  มีค่าระหว่าง 0.0 ถึง 1.0 ถ้าค่า  $R^2$  เข้าใกล้ 1.0 แสดงว่าเส้นแนวโน้มสามารถอธิบายกลุ่มข้อมูลได้ดี