บทที่ 2

วิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้น ปัญหาลักษณะนี้มีวิธีการหาผลเฉลยได้หลายวิธีเช่น วิธีการของ Kuhn-Tucker วิธีการของ quadratic programming, วิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ เป็นต้น ในงานวิจัยนี้ได้นำวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank – Wolfe มาคำนวณหาผลเฉลยของปัญหา เพราะว่าเป็นวิธีการหาผลเฉลยที่สามารถเขียนเป็นขั้นตอนวิธีทางคอมพิวเตอร์เพื่อที่จะสร้างซอฟต์แวร์ได้ ในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงปัญหาการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ ถ้าเป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์จะมีวิธีหาผลเฉลยได้ในทำนองเดียวกัน ก่อนอื่นจะกล่าวถึงนิยาม ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยได้แก่ รูปแบบของกำหนดการไม่เชิงเส้น บริเวณที่เป็นไปได้ ผลเฉลยเหมาะที่สุด ค่าสูงสุดวงกว้าง ดังจะแสดงรายละเอียดในหัวข้อ 2.1 ตามด้วยการค้นตามเส้นแบบต่างๆในหัวข้อ 2.2 และวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ในหัวข้อ 2.3

2.1 ความรู้พื้นฐานและนิยาม

ปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น (nonlinear programming problem) คือปัญหาการวิจัยดำเนินการที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ซึ่งเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นโดยมีฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นหรือฟังก์ชันไม่เชิงเส้นก็ได้ ปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นสามารถเขียนได้ในรูปทั่วไปดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\quad z = f(\mathbf{x})$

ภายใต้เงื่อนไข $\quad g_i(\mathbf{x}) \le b_i \ , \ i = 1,2,\ldots,m$

โดยที่ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ คือ ตัวแปรตัดสินใจ (decision variable) ซึ่งเป็นเวกเตอร์ขนาด $1 \times n$ n คือจำนวนตัวแปรตัดสินใจ, ฟังก์ชัน $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ เรียกว่าฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น, ฟังก์ชัน $g_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ เรียกว่าฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ (constraint function) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นหรือฟังก์ชันไม่เชิงเส้น สำหรับ b_i เป็นค่าคงที่ด้านขวาของแต่ละเงื่อนไขบังคับ, m คือจำนวนอสมการหรือสมการเงื่อนไขบังคับ

ตัวอย่าง ปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\quad z = f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2^3 - x_3^2$

ภายใต้เงื่อนไข $\quad x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \ge 4$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0, \ \ x_3 \ge 0$$

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษารูปแบบการแก้ปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้นซึ่งมีรูปทั่วไปดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x})$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

เมื่อ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นตัวแปรตัดสินใจ

ฟังก์ชันจุดประสงค์ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

$\mathbf{A}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ของตัวแปรตัดสินใจในเงื่อนไขบังคับมีขนาด $m \times n$

$\mathbf{b}$ คือ เวกเตอร์ของค่าคงที่ด้านขวาของเงื่อนไขบังคับมีขนาด $m \times 1$

ตัวอย่าง ปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 6x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข $x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + 2x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0$

นิยาม 2.1 บริเวณที่เป็นไปได้ (feasible region)

บริเวณที่เป็นไปได้ คือเซตของ $\mathbf{x}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทุกเงื่อนไข จุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้เรียกว่า **จุดที่เป็นไปได้ (feasible point)** และจุดที่ไม่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้เรียกว่า **จุดที่เป็นไปไม่ได้ (infeasible point)**

นิยาม 2.2 ผลเฉลยเหมาะที่สุด (optimal solution)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์โดยที่ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ สำหรับปัญหาการหาค่าสูงสุด **ผลเฉลยเหมาะที่สุด** คือ $\bar{\mathbf{x}}$ ที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ทำให้ $f(\bar{\mathbf{x}}) \ge f(\mathbf{x})$ สำหรับทุก $\mathbf{x}$ ที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

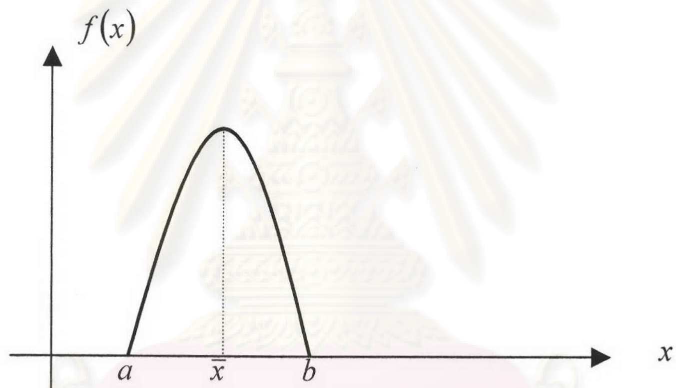
นิยาม 2.3 ค่าสูงสุดวงกว้าง (global maximum)

ฟังก์ชันจุดประสงค์ f มี **ค่าสูงสุดวงกว้าง** ที่จุด $\bar{\mathbf{x}}$ เมื่อ $f(\bar{\mathbf{x}}) \ge f(\mathbf{x})$ สำหรับทุกจุด $\mathbf{x}$ ที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

2.2 การค้นตามเส้น (line search)

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้มีการคำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ตามทิศทางที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นของหนึ่งตัวแปร ที่เรียกว่า **การค้นตามเส้น** การค้นตามเส้นเป็นวิธีการคำนวณการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน f บนขอบเขตของตัวแปร x คือ $a \le x \le b$ ซึ่งเป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยไม่ทราบว่าจุดที่ให้ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดอยู่ที่จุดใด แต่ทราบว่าอยู่ภายในช่วง $[a,b]$ เรียกช่วง $[a,b]$ ว่า interval of uncertainty วิธีการหาผลเฉลยของการค้นตามเส้นแยกได้เป็นการหาผลเฉลยโดยไม่ใช้อนุพันธ์ เช่นวิธี golden section และวิธีการหาผลเฉลยที่ใช้อนุพันธ์ เช่นกฎของ Armijo และวิธี bisection ซึ่งจะได้อธิบายตามรายละเอียดของแต่ละวิธีดังนี้

นิยาม ฟังก์ชัน $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ เป็น unimodal บนช่วง $[a,b]$ ถ้ามีจุด $\bar{x}$ บน $[a,b]$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing) บนช่วง $[a,\bar{x})$ และช่วงลดโดยแท้ (strictly decreasing) บนช่วง $(\bar{x},b]$



รูปที่ 2.1 ลักษณะของ unimodal function บนช่วง $[a,b]$

2.2.1 วิธี golden section

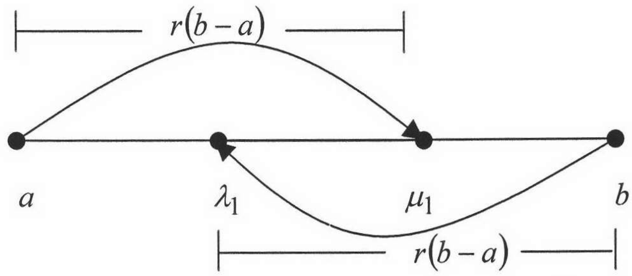
วิธี golden section [1, 2,12] เป็นวิธีการคำนวณการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ f บนขอบเขตของตัวแปรอิสระ x คือ $a \le x \le b$ ซึ่งเป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยมีหลักการว่า ถ้า f เป็น unimodal บน $[a,b]$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดวงกว้างอยู่จุดเดียว $\bar{x}$ บน $[a,b]$ และจุดที่ให้ค่าสูงสุดวงกว้างจะเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ f

กำหนดให้ $[a,b]$ เป็น interval of uncertainty

เริ่มต้นคำนวณค่าฟังก์ชัน f ที่สองจุด λ_1 และ μ_1

โดยที่ $\lambda_1 = b - r(b-a)$ และ $\mu_1 = a + r(b-a)$

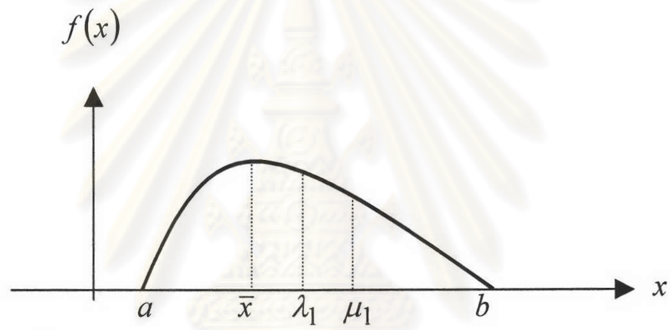
นั่นคือ $\lambda_1 < \mu_1$ บนช่วง $[a,b]$



จากนั้นทำการคำนวณเปรียบเทียบค่า $f(\lambda_1)$ และ $f(\mu_1)$ แยกเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$

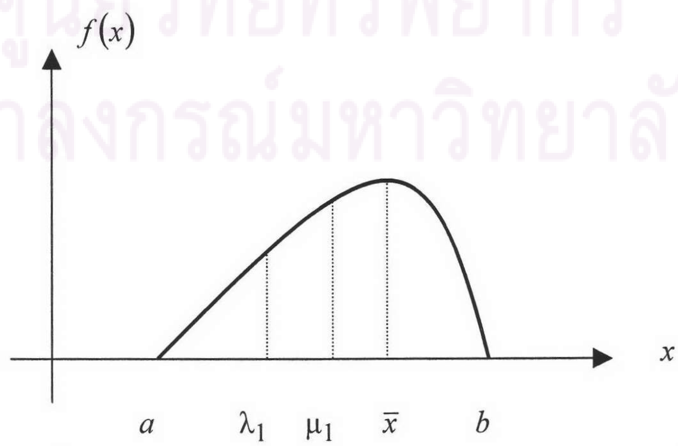
แสดงว่า f มีค่าลดลงจาก λ_1 ไปยัง μ_1 โดยสมบัติของ unimodal ผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ ต้องไม่อยู่ในช่วง $[\mu_1, b]$ จึงตัดช่วง $[\mu_1, b]$ ออก นั่นคือ $\bar{x}$ อยู่ในช่วง $[a, \mu_1]$ เพราะฉะนั้นจะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a, \mu_1]$



รูปที่ 2.2 ลักษณะของ $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$ บนช่วง $[a,b]$

กรณีที่ 2 $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$

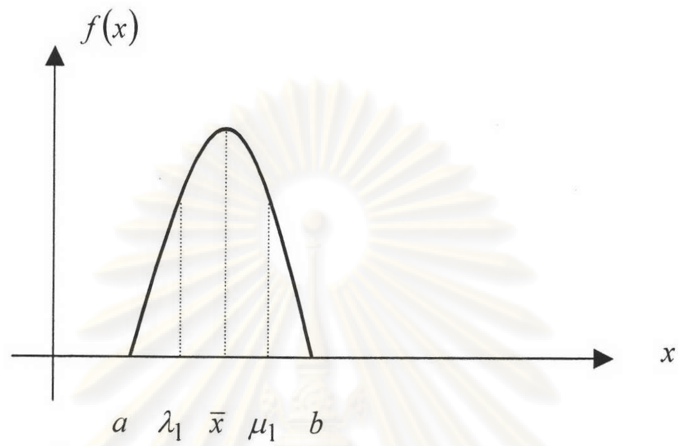
แสดงว่า f มีค่าเพิ่มขึ้นจาก λ_1 ไปยัง μ_1 โดยสมบัติของ unimodal ผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ ไม่อยู่ในช่วง $[a, \lambda_1]$ จึงตัดช่วง $[a, \lambda_1]$ ออก นั่นคือ $\bar{x}$ อยู่ในช่วง $[\lambda_1, b]$ เพราะฉะนั้นจะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[\lambda_1, b]$



รูปที่ 2.3 ลักษณะของ $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ บนช่วง $[a,b]$

กรณีที่ 3 $f(\lambda_1) = f(\mu_1)$

แสดงว่า ผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ อยู่ในช่วง $[\lambda_1, \mu_1]$ เพราะฉะนั้นจะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a, \mu_1]$ หรือ $[\lambda_1, b]$ สามารถเลือกกระทำตามแบบกรณีที่ 1 หรือกรณีที่ 2



รูปที่ 2.4 ลักษณะของ $f(\lambda_1) = f(\mu_1)$ บนช่วง $[a,b]$

หลักการของวิธี golden section คือลดความยาว interval of uncertainty $[a,b]$ จนกระทั่งได้ความยาวช่วงสุดท้ายที่ยอมรับได้ เพราะฉะนั้นในการลดความยาวช่วง ครั้งที่ k จะมีการคำนวณหาจุด λ_k และ μ_k เพื่อเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน $f(\lambda_k)$ และ $f(\mu_k)$ ซึ่งหลักการคำนวณในแต่ละขั้นตอนของการทำซ้ำจะมีลักษณะเดียวกัน เมื่อพิจารณาจากสามกรณีข้างต้นสามารถแยกเป็นหัวข้อดังนี้

1. จากกรณีที่ 1 ถ้า $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$ จะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a, \mu_1]$

   การคำนวณหาครั้งต่อไปจะได้

$$\lambda_2 = \mu_1 - r(\mu_1 - a) \text{ และ}$$
$$\mu_2 = a + r(\mu_1 - a) = a + r^2(b-a) = a + (1-r)(b-a) = b - r(b-a) = \lambda_1$$

จะเห็นได้ว่า $\mu_2 = \lambda_1$ เพราะฉะนั้นการคำนวณของ $f(\mu_2) = f(\lambda_1)$ ไม่จำเป็น ทำให้ได้ว่าคำนวณเฉพาะค่า $f(\lambda_2)$ แล้วเปรียบเทียบค่าระหว่าง $f(\lambda_2)$ และ $f(\mu_2)$ แล้วทำซ้ำเพื่อลดช่วงตามกรณีที่ 1 หรือกรณีที่ 2 จนกระทั่งได้ช่วงที่เหมาะสมที่สุดที่ยอมรับได้

2. จากกรณีที่ 2 หรือ กรณีที่ 3

   ถ้า $f(\lambda_1) \leq f(\mu_1)$ ได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[\lambda_1, b]$

   การคำนวณหาครั้งต่อไปจะได้

$$\lambda_2 = b - r(b - \lambda_1) = b - r^2(b-a) = b - (1-r)(b-a) = a + r(b-a) = \mu_1$$
$$\text{และ} \quad \mu_2 = \lambda_1 + r(b - \lambda_1)$$

จะเห็นได้ว่า $\lambda_2 = \mu_1$ เพราะฉะนั้นการคำนวณค่า $f(\lambda_2) = f(\mu_1)$ ไม่จำเป็น ทำให้ได้ว่าคำนวณเฉพาะค่า $f(\mu_2)$ แล้วเปรียบเทียบค่าระหว่าง $f(\lambda_2)$ และ $f(\mu_2)$ แล้วทำซ้ำเพื่อลดช่วงแยกได้ตามกรณีที่ 1 หรือ กรณีที่ 2 จนกระทั่งได้ช่วงที่เหมาะสมที่สุดที่ยอมรับได้

การหาค่า r ที่ทำให้จำนวนครั้งของการคำนวณค่า λ_k หรือ μ_k น้อยลง สามารถพิจารณาจากกรณีข้างต้นได้ดังนี้

จากเริ่มต้น $\lambda_1 = b - r(b-a)$

จากข้อ 1. $\mu_2 = a + r(\mu_1 - a) = a + r^2(b-a)$

วิธี golden section ต้องการให้ λ_1 และ μ_2 เป็นจุดเดียวกันเพื่อลดจำนวนครั้งของการคำนวณ

เพราะฉะนั้น กำหนดให้ $\mu_2 = \lambda_1$

$$a + r^2(b-a) = b - r(b-a)$$
$$r^2(b-a) + r(b-a) = b-a$$
$$r^2 + r = 1$$

รากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $r^2 + r = 1$ คือ $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$

แต่ถ้ากำหนดให้ $r = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงลบ ทำให้ค่า λ_k , μ_k ที่คำนวณได้ไม่อยู่ในช่วง interval of uncertainty เพราะฉะนั้นจึงเลือกรากที่เป็นจำนวนจริงบวก $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$

การสรุปจำนวนการทำซ้ำของวิธี golden section

กำหนดให้ I_k คือ interval of uncertainty เริ่มต้นการทำซ้ำครั้งที่ k

L_k คือ ความยาวของ interval of uncertainty ที่เกิดจากการทำซ้ำครั้งที่ k

ε คือ ความยาวของ interval of uncertainty สุดท้ายที่ยอมรับได้

การทำซ้ำครั้งที่ 1 เริ่มต้น interval of uncertainty คือ $I_1 = [a_1, b_1]$

หลังจากการคำนวณได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a, \mu_1]$ หรือ $[\lambda_1, b]$

พิจารณา $\mu_1 - a = a + r(b-a) - a = r(b-a)$ หรือ $b - \lambda_1 = b - b + r(b-a) = r(b-a)$

เพราะฉะนั้น $L_1 = r(b-a)$

ในทำนองเดียวกัน การทำซ้ำครั้งที่ 2 จะได้ว่า $I_2 = [a_2, b_2]$, $L_2 = r^2(b-a)$

เพราะฉะนั้นจากการทำซ้ำครั้งที่ k จะได้ว่า $I_k = [a_k, b_k]$, $L_k = r^k(b-a)$

สรุปได้ว่าจำนวนครั้ง k ของการทำซ้ำในการลดช่วงเพื่อหาผลเฉลยเหมาะที่สุดของความยาวช่วงที่ยอมรับได้ ε คำนวณได้จาก $r^k(b-a)<\varepsilon$ เมื่อ $r=0.618$ ตัวอย่างการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นโดยวิธี golden section แสดงรายละเอียดในภาคผนวก ข

วิธี golden section สามารถสรุปเป็นขั้นตอนวิธีได้ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z=f(x)$
ภายใต้เงื่อนไข $a \le x \le b$

ขั้นเริ่มต้น กำหนดให้ $k=1$, $r=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

ε คือความยาวของ interval of uncertainty สุดท้ายที่ยอมรับผลเฉลยเหมาะที่สุดได้

กำหนดให้ $a_k=a$, $b_k=b$, $\lambda_k=b_k-r(b_k-a_k)$ และ

$\mu_k=a_k+r(b_k-a_k)$

ขั้นหลัก

1. ตรวจสอบว่า $|b_k-a_k|<\varepsilon$ หรือไม่
   - ถ้าเป็นจริงกระทำขั้นตอนที่ 6
   - ถ้าเป็นเท็จกระทำขั้นตอนที่ 2
2. ตรวจสอบว่า $f(\lambda_k)>f(\mu_k)$ หรือไม่
   - ถ้าเป็นจริงกระทำขั้นตอนที่ 3
   - ถ้าเป็นเท็จกระทำขั้นตอนที่ 4
3. กำหนดให้ $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=\mu_k$, $\mu_{k+1}=\lambda_k$ และ
   $\lambda_{k+1}=b_{k+1}-r(b_{k+1}-a_{k+1})$ คำนวณหาค่า $f(\lambda_{k+1})$ แล้วกระทำขั้นตอนที่ 5
4. กำหนดให้ $a_{k+1}=\lambda_k$, $b_{k+1}=b_k$, $\lambda_{k+1}=\mu_k$ และ
   $\mu_{k+1}=a_{k+1}+r(b_{k+1}-a_{k+1})$ คำนวณหาค่า $f(\mu_{k+1})$ แล้วกระทำขั้นตอนที่ 5
5. กำหนดให้ $k=k+1$ และ กลับไปกระทำขั้นตอนที่ 1
6. แสดงว่าช่วง $[a_k,b_k]$ เป็นที่ยอมรับได้ของการหาผลเฉลยเหมาะที่สุด
   ตรวจสอบว่า $f(a_k)>f(b_k)$ หรือไม่
   - ถ้าเป็นจริง ส่งค่า $x=a_k$ แล้วหยุดการคำนวณ
   - ถ้าเป็นเท็จ ส่งค่า $x=b_k$ แล้วหยุดการคำนวณ

2.2.2 วิธี bisection

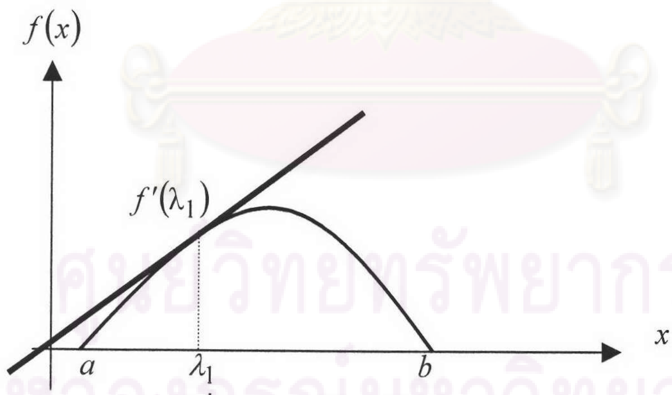
วิธี bisection [2, 7] เป็นวิธีการหาผลเฉลยของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันเพื่อลดความยาวของ interval of uncertainty สำหรับปัญหาการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันเว้า f ภายในขอบเขตของตัวแปรอิสระ $a \le x \le b$ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า x ภายในขอบเขตของตัวแปรอิสระ เริ่มต้นกำหนดให้ $[a,b]$ เป็น interval of uncertainty วิธี bisection ใช้การเปรียบเทียบค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุดกึ่งกลางของ $[a,b]$ เป็นเงื่อนไขเพื่อลดความยาวของ interval of uncertainty กระทำการลดช่วงจนกระทั่งความยาวช่วงสุดท้ายสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ยอมรับได้ ผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ คือจุดกึ่งกลางของช่วงนั้น

เริ่มต้นกำหนดให้ λ_1 เป็นจุดแบ่งครึ่งช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า $\lambda_1 = \dfrac{a+b}{2}$

คำนวณหาค่า $f'(\lambda_1)$ แล้วพิจารณาค่า $f'(\lambda_1)$ สามารถแยกเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $f'(\lambda_1) > 0$ จะได้ว่า $f'(\lambda_1)(\lambda - \lambda_1) > 0$ เมื่อ $\lambda > \lambda_1$

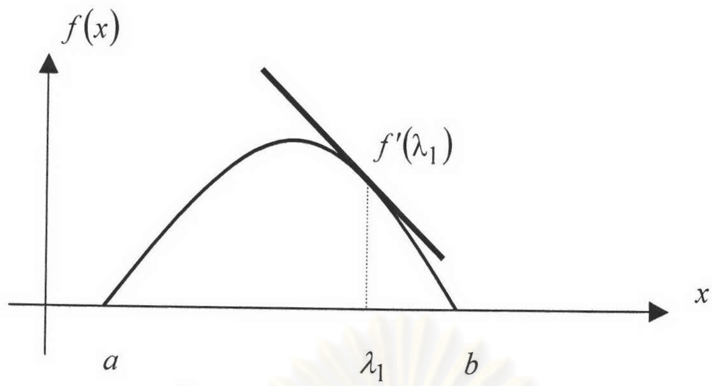
โดยสมบัติของฟังก์ชันเว้าหมายความว่ามีค่า λ ที่ทำให้ $f(\lambda) > f(\lambda_1)$ เมื่อ $\lambda > \lambda_1$ แสดงว่าผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ ไม่อยู่ในช่วง $[a,\lambda_1]$ แน่นอน ทำให้ได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[\lambda_1, b]$



รูปที่ 2.5 กรณี $f'(\lambda_1) > 0$

กรณีที่ 2 ถ้า $f'(\lambda_1) < 0$ จะได้ว่า $f'(\lambda_1)(\lambda - \lambda_1) > 0$ เมื่อ $\lambda < \lambda_1$

โดยสมบัติของฟังก์ชันเว้าหมายความว่า λ มีค่า $f(\lambda) > f(\lambda_1)$ เมื่อ $\lambda < \lambda_1$ แสดงว่าผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ ไม่อยู่ในช่วง $[\lambda_1, b]$ แน่นอน ทำให้ได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a, \lambda_1]$

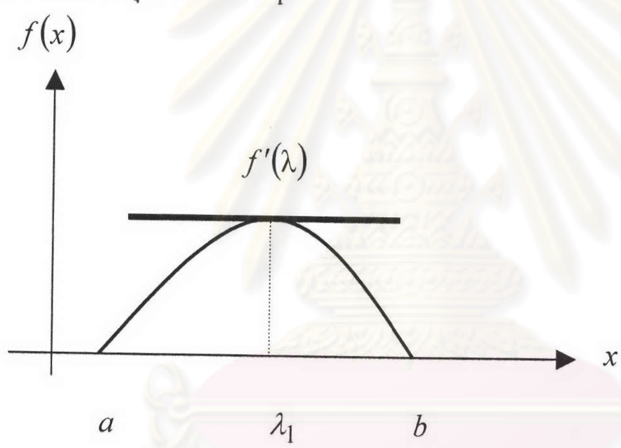


รูปที่ 2.6 กรณี $f'(\lambda_1) < 0$

กรณีที่ 3 ถ้า $f'(\lambda_1) = 0$

หยุดการคำนวณ แสดงว่า λ_1 เป็นจุดนิ่ง

ทำให้ได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x}$ คือ λ_1



รูปที่ 2.7 กรณี $f'(\lambda_1) = 0$

จากนั้นพิจารณาเปรียบเทียบค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุดกึ่งกลางของ interval of uncertainty ใหม่ที่ได้ เพื่อลดความยาวของช่วงลง ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งความยาวช่วงสุดท้ายสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ยอมรับได้ ผลเฉลยเหมาะที่สุดคือจุดกึ่งกลางของช่วงนั้น ดังจะแสดงรายละเอียดตัวอย่างการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นโดยวิธี bisection ในภาคผนวก ข

การสรุปจำนวนการทำซ้ำของวิธี bisection

กำหนดให้ I_k คือ interval of uncertainty เริ่มต้นของการทำซ้ำครั้งที่ k

L_k คือ ความยาวของ interval of uncertainty ที่เกิดจากการทำซ้ำครั้งที่ k

ε คือ ความยาวของ interval of uncertainty สุดท้ายที่ยอมรับผลเฉลยเหมาะที่สุดได้

การทำซ้ำครั้งที่ 1 เริ่มต้น interval of uncertainty คือ $I_1 = [a_1, b_1]$

หลังจากการคำนวณได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a, \lambda_1]$ หรือ $[\lambda_1, b]$

พิจารณา $\lambda_1 - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{1}{2}(b-a)$ หรือ $b - \lambda_1 = b - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(b-a)$

เพราะฉะนั้น $L_1 = \frac{1}{2}(b-a)$

ในทำนองเดียวกัน การทำซ้ำครั้งที่ 2 จะได้ว่า $I_2 = [a_2, b_2]$, $L_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b-a)$

เพราะฉะนั้น การทำซ้ำครั้งที่ k จะได้ว่า $I_k = [a_k, b_k]$, $L_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)$

สรุปได้ว่าจำนวนครั้ง k ของการทำซ้ำในการลดช่วงเพื่อหาผลเฉลยเหมาะที่สุดของความยาวช่วงที่ยอมรับได้ ε คำนวณได้จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a) \le \varepsilon$

วิธี bisection สามารถสรุปเป็นขั้นตอนวิธีได้ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(x)$

ภายใต้เงื่อนไข $a \le x \le b$

ขั้นเริ่มต้น กำหนดให้ $k = 1$ และ $a_k = a$, $b_k = b$

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{\varepsilon}{b-a}$

เมื่อ ε คือความยาวของ interval of uncertainty สุดท้ายที่ยอมรับผลเฉลยเหมาะที่สุดได้

ขั้นหลัก

1. กำหนดให้ $\lambda_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$
2. คำนวณหาค่า $f'(\lambda_k)$
3. ตรวจสอบค่า $f'(\lambda_k)$
   - ถ้า $f'(\lambda_k) > 0$ แล้ว กระทำขั้นตอนที่ 4
   - ถ้า $f'(\lambda_k) < 0$ แล้ว กระทำขั้นตอนที่ 5
   - ถ้า $f'(\lambda_k) = 0$ แล้ว ผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $\bar{x} = \lambda_k$ และหยุดการคำนวณ
4. กำหนดให้ $a_{k+1} = \lambda_k$ และ $b_{k+1} = b_k$ แล้วกระทำขั้นตอนที่ 6
5. กำหนดให้ $a_{k+1} = a_k$ และ $b_{k+1} = \lambda_k$ แล้วกระทำขั้นตอนที่ 6
6. ตรวจสอบว่า $k = n$ หรือไม่
   - ถ้าเป็นจริง แล้ว ช่วง $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ เป็นช่วงที่ยอมรับผลเฉลยเหมาะที่สุด และหยุดการคำนวณ ผลเฉลยเหมาะที่สุด คือ $\bar{x} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$
   - ถ้าเป็นเท็จ กำหนดให้ $k = k+1$ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ 1

2.2.3 กฎของ Armijo

กำหนดให้ $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในบริเวณที่เป็นไปได้ กฎของ Armijo [1, 2] เป็นวิธีการหาผลเฉลยของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α ของฟังก์ชันจุดประสงค์ f ที่จุด $\mathbf{x}$ ในทิศทางของการเคลื่อนที่ $\mathbf{d}$ สามารถสรุปเป็นรูปแบบของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นได้ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d})$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha \le 1$

เนื่องจากจุด $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{d}$ เป็นจุดที่ทราบค่าทำให้ได้ฟังก์ชันจุดประสงค์ $f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d})$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัดสินใจหนึ่งตัวแปรคือ α เพื่อความสะดวกต่อการหาผลเฉลยของปัญหาจะกำหนดฟังก์ชัน $\theta: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร α และใช้พารามิเตอร์สองตัวคือ σ และ λ โดยที่ $0<\sigma<1$ และ $\lambda>1$ กำหนดฟังก์ชัน θ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ของตัวแปรตัดสินใจ α

โดยที่ $\theta(\alpha) = f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d})$ เมื่อ $\alpha \ge 0$

จะได้ว่า $\theta'(\alpha) = \nabla f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d})^T \mathbf{d}$

ทำให้ได้ $\theta(0) = f(\mathbf{x})$ และ $\theta'(0) = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}$

กำหนดให้ $\hat{\theta}(\alpha) = \theta(0) + \alpha\sigma\theta'(0)$ เมื่อ $\alpha \ge 0$

จะได้ว่า $\hat{\theta}(\alpha) = f(\mathbf{x}) + \alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}$

กำหนดให้ s เป็นระยะการเคลื่อนที่สูงสุดของ α แต่จากปัญหา $0 \le \alpha \le 1$ จะได้ว่า $s = 1$

เริ่มต้นให้ $\alpha = s$

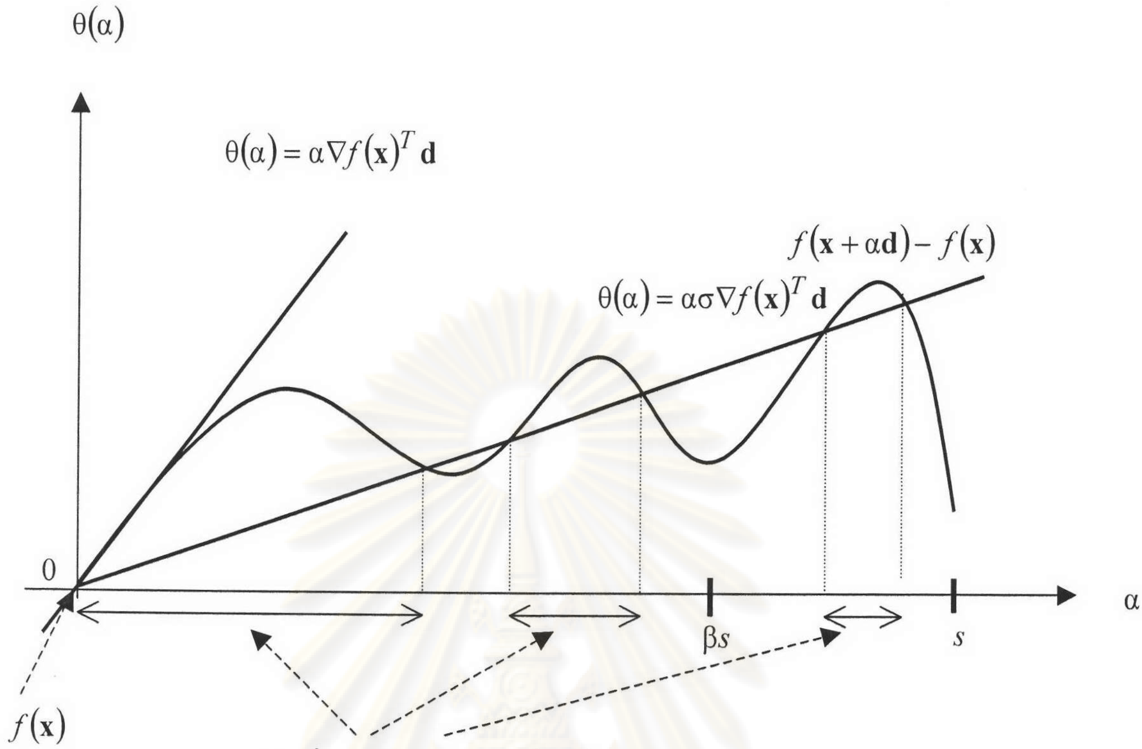
กฎของ Armijo กล่าวว่า ระยะการเคลื่อนที่ α จะได้รับการยอมรับว่าเป็นค่าที่ทำให้ ฟังก์ชันจุดประสงค์ f มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ

1. $\theta(\alpha) \ge \hat{\theta}(\alpha)$ นั่นคือ $f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) \ge \alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}$

หรือ 2. $\theta(\lambda\alpha) < \hat{\theta}(\lambda\alpha)$ เพื่อเป็นการป้องกันการลดค่า α เหลือน้อยมาก

นั่นคือ $f(\mathbf{x}+\lambda\alpha\mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) < \lambda\alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}$

ถ้าค่า α ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข ข้อ 1 หรือข้อ 2 แสดงว่าไม่ใช่ค่าที่ทำให้ฟังก์ชัน f เพิ่มขึ้นทำการลดค่า α โดยให้ $\alpha = \beta\alpha$ เมื่อ $0<\beta<1$ (ถ้าเลือกค่า $\beta = 0.7$ แล้วจะได้ว่าค่า α ใหม่คือ $\alpha = (0.7)(1) = 0.7$ มีค่าลดลง) แล้วทำการตรวจสอบกับเงื่อนไขข้อ 1 หรือข้อ 2 ใหม่ ถ้าเป็นจริงก็ยอมรับระยะนั้น ถ้าไม่เป็นจริงก็ทำการลดระยะการเคลื่อนที่ จนกระทั่งอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ว่าเป็นระยะที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นจริง จึงหยุดการคำนวณ ดังจะแสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นโดยวิธีกฎของ Armijo ในภาคผนวก ข



รูปที่ 2.8 ลักษณะกฎของ Armijo

กฎของ Armijo สามารถสรุปเป็นขั้นตอนวิธีได้ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d})$ เมื่อทราบค่าของ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha \le 1$

ขั้นเริ่มต้น กำหนดให้ $k = 1,\ s = 1,\ 0 < \sigma < 1,\ 0 < \beta < 1$ และ $\alpha_k = s$

กำหนดให้ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ และหาอนุพันธ์ได้ทุกจุด $\mathbf{x}$ ในบริเวณที่เป็นไปได้

กำหนดให้ α_k เป็นระยะการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}$ โดยเคลื่อนที่ไปในทิศทาง $\mathbf{d}$

ขั้นหลัก

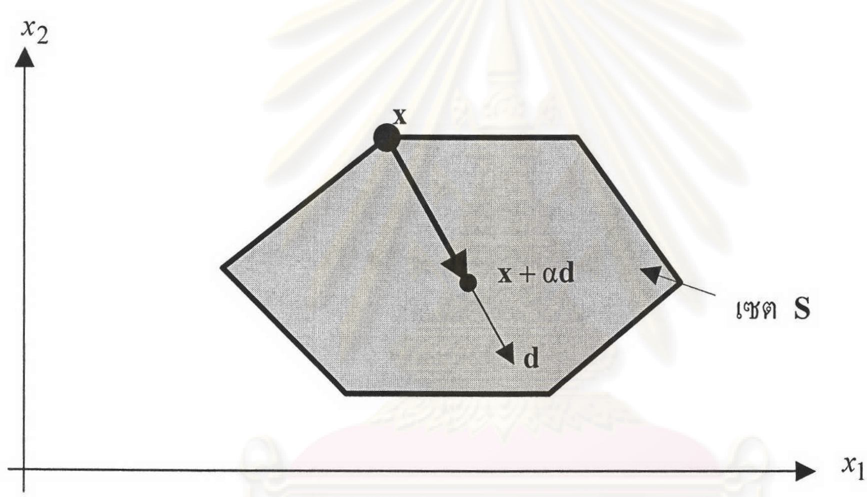
1. คำนวณหาค่า $f(\mathbf{x} + \alpha_k\mathbf{d})$, $f(\mathbf{x})$ และ $\alpha_k\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{d}$
2. ตรวจสอบว่า $f(\mathbf{x} + \alpha_k\mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) \ge \alpha_k\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{d}$ หรือไม่
   - ถ้าเป็นจริง สรุปได้ว่า α_k เป็นระยะการเคลื่อนที่สูงสุด และหยุดการคำนวณ
   - ถ้าเป็นเท็จ กระทำขั้นตอนที่ 3
3. กำหนดให้ $\alpha_{k+1} = \alpha_k\beta$
4. กำหนดให้ $k = k + 1$ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ 1

2.3 วิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ (method of feasible direction)

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษารูปแบบการแก้ปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้นโดยวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ที่พัฒนาจากการคิดค้นของ Marguerite Frank และ Philip Wolfe [1, 3, 4, 10, 12] ดังรายละเอียดต่อไปนี้

นิยาม 2.4

กำหนดให้ $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ เมื่อเซตนูน $\mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n$ และ $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ เรียกเวกเตอร์ $\mathbf{d}$ ว่า **ทิศทางที่เป็นไปได้ (feasible direction)** ที่จุด $\mathbf{x}$ ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d} \in \mathbf{S}$ สำหรับทุกค่า $\alpha \in [0, \delta]$



รูปที่ 2.9 ลักษณะของทิศทางที่เป็นไปได้

หลักการของวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank - Wolfe เริ่มต้นจากจุดในบริเวณที่เป็นไปได้แล้วหาทิศทางเคลื่อนไปที่จุดใดๆที่มีสมบัติที่สำคัญคือ

1. จุดที่เคลื่อนที่ไปเป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้
2. จุดที่เคลื่อนที่ไปเป็นจุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้น

ในการคำนวณหาทิศทางจะเป็นการประยุกต์ค่าเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และหาผลเฉลยกำหนดการเชิงเส้นเพื่อหาเวกเตอร์ใช้กำหนดเป็นทิศทางที่เป็นไปได้แล้วเคลื่อนจุดไปตามทิศทางนั้น โดยระยะการเคลื่อนที่คำนวณจากวิธีการค้นตามเส้น ทำซ้ำจนกระทั่งจุดที่เคลื่อนที่ไปลู่เข้าหาผลเฉลยเหมาะที่สุดจึงหยุดการคำนวณ จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถแสดงขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธี Frank-Wolfe

กำหนดให้ฟังก์ชัน $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x})$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

กำหนดให้ทรงหลายหน้า(polyhedron) $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} \subset \mathbf{R}^n$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $\mathbf{S}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded)

วิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank-Wolfe กระทำตามขั้นตอนดังนี้

1. เริ่มต้นที่จุด $\mathbf{x}^1$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ นั่นคือ $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{S}$

   กำหนดให้ $k = 1$

2. คำนวณหาผลเฉลย $\mathbf{d}^k = (d_1, d_2, ..., d_n)$ จากปัญหากำหนดการเชิงเส้น

   การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}$

   ภายใต้เงื่อนไข

   $$\mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$$
   $$\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$$

3. เลือกจำนวนจริงบวก $\delta = 1$

4. กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^k$ คือ $(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$

5. คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_k จากจุด $\mathbf{x}^k$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$ จากปัญหา

   การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k))$

   ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_k \le \delta$

   จากปัญหาข้างต้นเป็นปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นของหนึ่งตัวแปร α_k ซึ่งคำนวณโดยวิธีการค้นตามเส้น

6. คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^{k+1}$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_k จากจุด $\mathbf{x}^k$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$

   จากสมการ $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$

7. ตรวจสอบค่า $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$

   - ถ้า $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$ มีค่ามากกว่าความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้

     กำหนดให้ $k = k+1$ แล้วทำซ้ำที่ข้อ 2.

   - ถ้า $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้

     หยุดการคำนวณ $\{\mathbf{x}^k\}$ เป็นลำดับที่ได้จากขั้นตอนการหาผลเฉลยและเป็นลำดับที่ลู่เข้า

ผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาที่คำนวณได้คือจุดลิมิตของลำดับ $\{\mathbf{x}^k\}$

ทฤษฎีบท 2.5 [1, 3, 10] (การลู่เข้าของวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank-Wolfe)

กำหนดให้ทรงหลายหน้า(polyhedron) $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} \subset \mathbf{R}^n$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\mathbf{S}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded) และฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บน $\mathbf{S}$ ในขั้นตอนการหาระยะการเคลื่อนที่ของขั้นตอนวิธี Frank-Wolfe ใช้วิธีการค้นตามเส้น แล้ว $\{\mathbf{x}^k\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตและมีจุดลิมิต โดยที่จุดลิมิตของลำดับ $\{\mathbf{x}^k\}$ เป็นจุดนิ่ง ถ้า f เป็นฟังก์ชันเว้าบน $\mathbf{S}$ แล้ว f มีค่าสูงสุดวงกว้างที่จุดลิมิตของ $\{\mathbf{x}^k\}$

จากขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้นโดยวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank-Wolfe ข้างต้น เพื่อความชัดเจนจะอธิบายเหตุผลของแต่ละขั้นตอนดังนี้

ข้อ 1. เป็นการเริ่มต้นจากจุด $\mathbf{x}^k \in \mathbf{S}$ จากข้อ 2. จะได้ว่า $\mathbf{d}^k \in \mathbf{S}$

จากข้อ 3. ข้อ 4. ข้อ 5. และ ข้อ 6. จะเห็นได้ว่า $(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$ คือทิศทางที่เป็นไปได้ ด้วยเหตุผลดังนี้

พิจารณาที่จุด $\mathbf{x}^{k+1}$

จาก $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$

และ $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$, $\mathbf{x}^k \in \mathbf{S}$, $\mathbf{d}^k \in \mathbf{S}$, $\delta = 1$, $0 \le \alpha_k \le \delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\mathbf{Ax}^{k+1} &= \mathbf{A}(\mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)) = \mathbf{A}((1-\alpha_k)\mathbf{x}^k + \alpha_k\mathbf{d}^k) \\ &= (1-\alpha_k)\mathbf{Ax}^k + \alpha_k\mathbf{Ad}^k \\ &\le (1-\alpha_k)\mathbf{b} + \alpha_k\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

และ $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k) = (1-\alpha_k)\mathbf{x}^k + \alpha_k\mathbf{d}^k \ge \mathbf{0}$

ทำให้ได้ว่า $\mathbf{x}^{k+1}$ อยู่ในบริเวณ $\mathbf{S}$ ที่เป็นไปได้

จากที่แสดงข้างต้น $\mathbf{x}^k \in \mathbf{S}$ และ $\mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k) \in \mathbf{S}$ สำหรับทุกค่า $\alpha_k \in [0, \delta]$

โดยนิยาม 2.4 จะได้ว่า $(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)$ คือทิศทางที่เป็นไปได้

เมื่อพิจารณาค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ f ที่จุด $\mathbf{x}^{k+1}$

จะได้ว่า $f(\mathbf{x}^{k+1}) = f(\mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k)) \ge f(\mathbf{x}^k)$

เพราะว่าจากการคำนวณตามข้อ 5.

α_k เป็นค่าที่ทำให้ $f(\mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k))$ มีค่าสูงสุด เมื่อ $0 \le \alpha_k \le \delta$

จากข้อ 7. ถ้า $\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ หมายถึงมีระยะการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^{k}$ ไปที่จุด $\mathbf{x}^{k+1}$ น้อยมาก แสดงให้เห็นว่าไม่สามารถคำนวณหาทิศทางที่เป็นไปได้เคลื่อนที่ไปหาจุดที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นในบริเวณ $\mathbf{S}$ ที่เป็นไปได้นั่นคือ ลำดับ $\left\{\mathbf{x}^{k}\right\}$ ลู่เข้าหาจุดลิมิต โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่าลำดับ $\left\{\mathbf{x}^{k}\right\}$ มีขอบเขตและมีจุดลิมิต โดยที่จุดลิมิตของลำดับ $\left\{\mathbf{x}^{k}\right\}$ เป็นจุดนิ่ง

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ ฟังก์ชันจุดประสงค์ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้และเราสมมติว่า f เป็นฟังก์ชันเว้าบน $\mathbf{S}$ ดังนั้นจุดลิมิตของ $\left\{\mathbf{x}^{k}\right\}$ เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดวงกว้างของฟังก์ชันจุดประสงค์ f ในบริเวณ $\mathbf{S}$ ที่เป็นไปได้ ทั้งนี้ตัวอย่างวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank-Wolfe แสดงรายละเอียดที่ภาคผนวก ค