

บทที่ 4

การวิเคราะห์และผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และเทคนิค Student's t Copula ในบทนี้เป็นการนำเสนอผลการวิจัย ซึ่งผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัยจำแนกตามหัวข้อต่อไปนี้

- 4.1 ลักษณะของเมตริกซ์สหสัมพันธ์
- 4.2 ขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ใช้สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula
- 4.3 ขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ใช้สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula
- 4.4 การเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และเทคนิค Student's t Copula

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.1 ลักษณะของเมตริกซ์สหสัมพันธ์

กำหนดให้ S เป็นเซตของเมตริกซ์สมมาตรที่มีองค์ประกอบที่ $(i, i) = 1$ และองค์ประกอบที่

(i, j) อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ นั่นคือ

$$S = \{ \Sigma \mid \Sigma = \Sigma', \Sigma(i, i) = 1, \Sigma(i, j) \in [-1, 1] \}$$

R เป็นเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ นั่นคือ

$$R = \{ \Sigma \mid \Sigma = \Sigma', \Sigma \succeq 0, \Sigma(i, i) = 1, \Sigma(i, j) \in [-1, 1] \}$$

จากการศึกษาพบว่าในกรณีมิติเท่ากับ 2 ; $R = S$

ส่วนในกรณีมิติมากกว่า 2 ; $R \subset S$ แต่ $S \not\subset R$

กรณีมิติเท่ากับ 2

พิสูจน์ $R = S$

$$\Rightarrow \text{ให้ } M \in S \text{ นั่นคือ } M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} \\ m_{12} & 1 \end{pmatrix}, m_{12} \in [-1, 1]$$

$$\text{กำหนดให้ } \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \forall \alpha \neq \underline{0}$$

$$\begin{aligned} \alpha' M \alpha &= [\alpha_1 \quad \alpha_2] \begin{pmatrix} 1 & m_{12} \\ m_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1^2 + 2m_{12}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 \\ &= \alpha_1^2 + 2m_{12}\alpha_1\alpha_2 + m_{12}^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2 - m_{12}^2\alpha_2^2 \\ &= (\alpha_1 + m_{12}\alpha_2)^2 + (1 - m_{12}^2)\alpha_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ M เป็นเมตริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

$$\therefore M \in R \text{ แสดงว่า } S \subset R$$

$$\Leftarrow \text{ให้ } M \in R \text{ นั่นคือ } M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} \\ m_{12} & 1 \end{pmatrix}, M \succeq 0, m_{12} \in [-1, 1]$$

$$\therefore M \in S \text{ แสดงว่า } R \subset S \text{ ดังนั้น } R = S \quad \#$$

ทฤษฎีบท ถ้า M เป็นเมตริกซ์กึ่งบวกแน่นอนแล้ว $M(1,1) \geq 0$ และ $\begin{vmatrix} 1 & m_{12} \\ m_{12} & 1 \end{vmatrix} \geq 0$ และ

$$\begin{vmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & 1 & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \text{ และ } \dots \text{ และ } |M| \geq 0$$

ซึ่งสมมูลกับ ถ้า $M(1,1) < 0$ หรือ $\begin{vmatrix} 1 & m_{12} \\ m_{12} & 1 \end{vmatrix} < 0$ หรือ $\begin{vmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & 1 & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & 1 \end{vmatrix} < 0$ หรือ ... หรือ

$|M| < 0$ แล้ว M ไม่เป็นเมตริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

กรณีมิติมากกว่า 2

พิสูจน์ $R \subset S$

ให้ $M \in R$

นั่นคือ $M = M', M \geq 0, m_{12} \in [-1,1]$

$\therefore M \in S$

ดังนั้น $R \subset S$

#

พิสูจน์ $S \not\subset R$

ขนาดมิติเท่ากับ 3

$$\text{ให้ } M = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & -0.9 \\ 0.9 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

$M \in S$

$$|M| = -2.4 < 0$$

นั่นคือ M ไม่เป็นเมตริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

$\therefore M \notin R$

ขนาดมิติของเมตริกซ์เท่ากับ d (มากกว่า 3) ; $d = 4, 5, 6, \dots$

$$\text{ให้ } C = \begin{pmatrix} M & q \\ q' & 1 \end{pmatrix}$$

โดยที่ $q' = (q_{11} \quad q_{12} \quad \dots \quad q_{1(d-1)})$ ซึ่ง $q(i, j) \in [-1, 1]$

$C \in S$

$$\text{และ } |M| = -2.4 < 0$$

นั่นคือ C ไม่เป็นเมตริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

$\therefore C \notin R$

ดังนั้น $S \not\subset R$

#

จากการศึกษาสรุปได้ว่า ในกรณีที่เมตริกซ์มีขนาดมิติเท่ากับ 2 เมตริกซ์สมมาตรที่มีองค์ประกอบที่ $(i, i) = 1$ องค์ประกอบที่ (i, j) อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ ทุกเมตริกซ์เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์ แต่ในกรณีที่เมตริกซ์มีขนาดมิติมากกว่า 2 เมตริกซ์สมมาตรที่มีองค์ประกอบที่ $(i, i) = 1$ องค์ประกอบที่ (i, j) อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ ไม่จำเป็นต้องเป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์

4.2 ขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วย เทคนิค Gaussian Copula

กำหนดให้ $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_d)'$ เป็นตัวแปรสุ่มร่วมมิติ d ซึ่งแต่ละ U_i , $i = 1, 2, 3, \dots, d$ มีการแจกแจงส่วนริบบแบบสม่ำเสมอบน $[0, 1]$ และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $= \Sigma_U$

เนื่องจากผู้วิจัยต้องการศึกษาลักษณะขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ดังนั้นผู้วิจัยจึงขอเสนอขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 เฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับลักษณะเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำการแปลงค่า Σ_U ให้เป็น Σ_z ($\Sigma_z = f^{-1}(\Sigma_U)$) ซึ่งมีขั้นตอนในการทำดังต่อไปนี้

1.1 นำ Σ_U มาแยกองค์ประกอบโดยให้ค่าในองค์ประกอบที่ (i, j) และ $(j, i) = \rho_{U_i, U_j}$

$i, j = 1, 2, \dots, d$; $i \neq j$ ซึ่งจะได้ ρ_{U_i, U_j} ทั้งหมด $\frac{(d-1)d}{2}$ ตัว

1.2 นำแต่ละ ρ_{U_i, U_j} มาทำการแปลงค่าให้เป็น ρ_{z_i, z_j} ($\rho_{U_i, U_j} \xrightarrow{f^{-1}} \rho_{z_i, z_j}$) ด้วยฟังก์ชัน

$$\rho_{U_i, U_j} = f(\rho_{z_i, z_j}) = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z_i) \Phi(z_j) \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{z_i, z_j}^2}} \exp\left(-\frac{z_i^2 - 2\rho_{z_i, z_j} z_i z_j + z_j^2}{2(1 - \rho_{z_i, z_j}^2)}\right) dz_i dz_j - 3$$

1.3 นำค่า ρ_{z_i, z_j} ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1.2 มาประกอบเป็น Σ_z โดยกำหนดให้ Σ_z

มีค่าในองค์ประกอบที่ (i, j) และ $(j, i) = \rho_{z_i, z_j}$; $i, j = 1, 2, \dots, d$; $i \neq j$

และองค์ประกอบที่ $(i, i) = 1$

2. ทำการตรวจสอบว่า Σ_z เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์หรือไม่

ถ้า $\Sigma_z \in R$ แสดงว่า ตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} สามารถทำการจำลองด้วย

เทคนิค Gaussian Copula ได้

แต่ถ้า $\Sigma_z \notin R$ แสดงว่า ตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} ไม่สามารถทำการจำลองด้วย

เทคนิค Gaussian Copula ได้

#

กำหนดให้ Ω_z เป็นเซตของ Σ_z ที่ได้จากการแปลง Σ_U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula

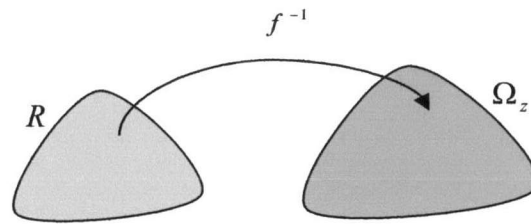
$$\Omega_z = \{\Sigma_z \mid \Sigma_z = f^{-1}(\Sigma_U) ; \Sigma_U \in R\}$$

และเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $\Sigma_U = R$

ลักษณะของเมตริกซ์ที่ใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} ด้วยเทคนิค Gaussian Copula

จึงเป็นการแปลงค่าจาก R ไปยัง Ω_z นั้นเอง ($R \xrightarrow{f^{-1}} \Omega_z$)

รูปที่ 4.1 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula



จากการสร้างจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula จะเห็นได้ว่า Σ_U สามารถแบ่งได้เป็น 2 ส่วนคือ

1. Σ_U ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้
 2. Σ_U ที่ไม่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้
- กำหนดให้ θ_z เป็นเซตของ Σ_U ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้

$$\theta_z = \{\Sigma_U \mid \Sigma_U = f(\Sigma_z) ; \Sigma_z \in R\}$$

เนื่องจากตัวแปรสุ่มร่วม U มีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Σ_U ทุกตัวอยู่ใน R

จากนิยามของ θ_z ทำให้ทราบว่า $\theta_z \subset R$

และจากการศึกษาพบว่า $R \subset \Omega_z$

พิสูจน์ $R \subset \Omega_z$

$$\text{กำหนดให้ } \mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)' \sim N(0, \Sigma) \quad ; \Sigma \in R$$

$$\text{นิยาม } U_i = \Phi(Z_i)$$

$$\text{ซึ่ง } \mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_d)'$$

กำหนดให้ Σ_U เป็น เมตริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มร่วม U

เนื่องจาก U เป็นตัวแปรสุ่มร่วมดังนั้น $\Sigma_U \in R$

และเนื่องจาก $\Sigma_U = f(\Sigma)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$\text{จึงทำให้ } f^{-1}(\Sigma_U) = \Sigma$$

$$\text{ซึ่ง } f^{-1}(\Sigma_U) \in \Omega_z \quad (\text{จากนิยาม})$$

$$\text{ดังนั้น } \Sigma \in \Omega_z$$

$$\text{นั่นคือ } R \subset \Omega_z$$

#

สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไปคือ $R \subset \theta_z$ หรือไม่

เพราะการที่ $R \subset \theta_z$ หมายความว่าทุกๆ เมตริกซ์สหสัมพันธ์ Σ_U สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้

หมายเหตุ การศึกษา $R \subset \theta_z$ นั้นก็เปรียบเสมือนการศึกษา $\Omega_z \subset R$ เนื่องจากนิยามของ θ_z ที่ว่าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_z$ เมื่อทำการแปลงด้วยฟังก์ชัน f^{-1} แล้วจะได้ทุกๆ $\Sigma_z \in R$ ดังนั้นการที่ $\Omega_z \subset R$ จึงหมายถึง $R \subset \theta_z$ ด้วย

สำหรับการศึกษาว่า $R \subset \theta_z$ หรือไม่ ผู้วิจัยได้แบ่งการศึกษาเป็น 2 กรณีคือ

1. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติเท่ากับ 2
2. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิตินานกว่า 2

1. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติเท่ากับ 2

$$\text{เมตริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มร่วม } U \text{ คือ } \Sigma_U = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{U_1U_2} \\ \rho_{U_1U_2} & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีองค์ประกอบของค่าสหสัมพันธ์ $\frac{(2-1)(2)}{2} = 1$ ตัวคือ $\rho_{U_1U_2}$

พิจารณา $\rho_{U_1U_2} \xrightarrow{f^{-1}} \rho_{z_1z_2}$ พบว่า $\rho_{z_1z_2} \in [-1,1]$

ซึ่งทำให้ $\Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{z_1z_2} \\ \rho_{z_1z_2} & 1 \end{pmatrix} ; \rho_{z_1z_2} \in [-1,1]$

นั่นคือ ทุกๆ เมตริกซ์ $\Sigma_z \in S \quad \therefore \Omega_z \subset S$

และเนื่องจาก U มีขนาด 2 มิติซึ่ง $R = S$ จึงทำให้ทุกๆ เมตริกซ์ $\Sigma_z \in R$

ดังนั้น $\Omega_z \subset R$

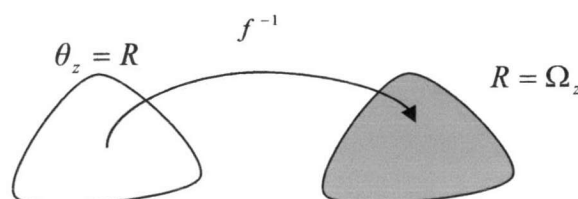
#

สำหรับตัวแปรสุ่มร่วมมิติ 2 ; จากการศึกษาพบว่า $R \subset \Omega_z$ และ $\Omega_z \subset R$

ดังนั้น $\Omega_z = R$ จึงส่งผลให้ $\theta_z = R$ ด้วย ทำให้สามารถสรุปผลได้ว่าเทคนิค Gaussian Copula สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ที่มีขนาดมิติเท่ากับ 2 ได้ในทุกๆ เมตริกซ์สหสัมพันธ์

รูปที่ 4.2 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลอง

ตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ในกรณีตัวแปรสุ่มร่วมมีมิติเท่ากับ 2



2. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติมากกว่า 2 (มิติ d ; $d = 3, 4, 5, \dots$)

จากการศึกษาพบว่า $R \not\subset \theta_z$ และ $\Omega_z \not\subset R$

พิสูจน์ $R \not\subset \theta_z$ และ $\Omega_z \not\subset R$

กรณีมิติเท่ากับ 3

กำหนดให้ $\Sigma_U = \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0.2 \\ -0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$ ซึ่ง $\Sigma_U \in R$

จากการดำเนินการตามขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula

จะได้ $\Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & -0.4158 & 0.2091 \\ -0.4158 & 1 & 0.8135 \\ 0.2091 & 0.8135 & 1 \end{pmatrix}$

ซึ่ง $\Sigma_z \in \Omega_z$ แต่จากการตรวจสอบพบว่า $|\Sigma_z| = -0.0199 < 0$

นั่นคือ $\Sigma_z \notin R$ ซึ่งหมายถึง $\Sigma_U \notin \theta_z$ ด้วย

กรณีมิติของเมตริกซ์เท่ากับ d (มากกว่า 3) ; $d = 4, 5, 6, \dots$

กำหนดให้ $\Sigma_{U^*} = \begin{pmatrix} \Sigma_U & q \\ q' & 1 \end{pmatrix}$

โดยที่ $q' = (q_{11} \quad q_{12} \quad \dots \quad q_{1(d-1)})$ ซึ่ง $q(i, j) \in [-1, 1]$ ที่ทำให้ $\Sigma_{U^*} \in R$

จากการดำเนินการตามขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula

จะได้ $\Sigma_{z^*} = \begin{pmatrix} \Sigma_z & q^* \\ q'^* & 1 \end{pmatrix}$

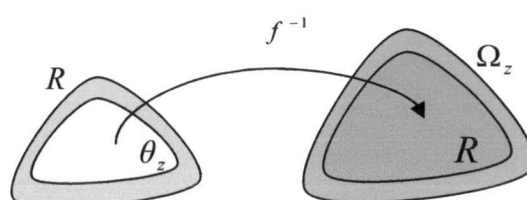
ซึ่ง $\Sigma_{z^*} \in \Omega_z$ แต่ $|\Sigma_z| = -0.0199 < 0$ นั่นคือ $\Sigma_{z^*} \notin R$ ซึ่งหมายถึง $\Sigma_U \notin \theta_z$ ด้วย

$\therefore R \not\subset \theta_z$ และ $\Omega_z \not\subset R$ #

สำหรับตัวแปรสุ่มร่วมที่มีขนาดมิติมากกว่า 2 จากการศึกษพบว่า $\theta_z \subset R$ และ $R \subset \Omega_z$ แต่ $R \not\subset \theta_z$ และ $\Omega_z \not\subset R$ ซึ่งสามารถสรุปผลได้ว่าเทคนิค Gaussian Copula สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ที่มีขนาดมิติมากกว่า 2 ได้เพียงบางเมตริกซ์สหสัมพันธ์

รูปที่ 4.3 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U

ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ในกรณีตัวแปรสุ่มร่วมมีมิติมากกว่า 2



4.3 ขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ใช้สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula

กำหนดให้ $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_d)'$ เป็นตัวแปรสุ่มร่วมมิติ d ซึ่งแต่ละ U_i , $i = 1, 2, 3, \dots, d$ มีการแจกแจงส่วนริบบนสม่ำเสมอบน $[0, 1]$ และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $= \Sigma_U$

ด้วยเหตุเช่นเดียวกับหัวข้อ 4.2 ผู้วิจัยจึงขอเสนอขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula องศาความเป็นอิสระ v ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 เฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับลักษณะเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำการแปลงค่า Σ_U ให้เป็น Σ_T ($\Sigma_T = g^{-1}(\Sigma_U)$) ซึ่งมีขั้นตอนในการทำดังต่อไปนี้

1.1 นำ Σ_U มาแยกองค์ประกอบโดยให้ค่าในองค์ประกอบที่ (i, j) และ $(j, i) = \rho_{U_i U_j}$

$i, j = 1, 2, \dots, d$; $i \neq j$ ซึ่งจะได้ $\rho_{U_i U_j}$ ทั้งหมด $\frac{(d-1)d}{2}$ ตัว

1.2 นำแต่ละ $\rho_{U_i U_j}$ มาทำการแปลงค่าให้เป็น $\rho_{T_i T_j}$ ($\rho_{U_i U_j} \xrightarrow{g^{-1}} \rho_{T_i T_j}$) ด้วยฟังก์ชัน

$$\rho_{U_i U_j} = g(\rho_{T_i T_j}) = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{T,v}(t_i) F_{T,v}(t_j) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{T_i T_j}^2}} \left(1 - \frac{t_i^2 - 2\rho_{T_i T_j} t_i t_j + t_j^2}{v(1-\rho_{T_i T_j}^2)} \right)^{-\frac{v+2}{2}} dt_i dt_j - 3$$

1.3 นำค่า $\rho_{T_i T_j}$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1.2 มาประกอบเป็น Σ_T โดยกำหนดให้ Σ_T

มีค่าในองค์ประกอบที่ (i, j) และ $(j, i) = \rho_{T_i T_j}$; $i, j = 1, 2, \dots, d$; $i \neq j$

และองค์ประกอบที่ $(i, i) = 1$

2. ทำการตรวจสอบว่า Σ_T เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์หรือไม่

ถ้า $\Sigma_T \in R$ แสดงว่า ตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} สามารถทำการจำลองด้วย

เทคนิค Student's t Copula ได้

แต่ถ้า $\Sigma_T \notin R$ แสดงว่า ตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} ไม่สามารถทำการจำลองด้วย

เทคนิค Student's t Copula ได้ #

กำหนดให้ Ω_T เป็นเซตของ Σ_T ที่ได้จากการแปลง Σ_U ด้วยเทคนิค Student's t Copula

$$\Omega_T = \{ \Sigma_T \mid \Sigma_T = g^{-1}(\Sigma_U) ; \Sigma_U \in R \}$$

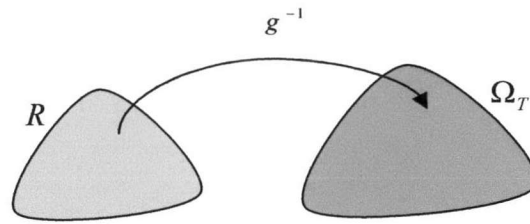
และเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $\Sigma_U = R$

ลักษณะของเมตริกซ์ที่ใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม \mathbf{U} ด้วยเทคนิค Student's t Copula

จึงเป็นการแปลงค่าจาก R ไปยัง Ω_T นั่นเอง ($R \xrightarrow{g^{-1}} \Omega_T$)

รูปที่ 4.4 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์ที่ใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค

Student's t Copula



จากการสร้างจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Student's t Copula จะเห็นได้ว่า Σ_U สามารถแบ่งได้เป็น 2 ส่วนคือ

1. Σ_U ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้
 2. Σ_U ที่ไม่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้
- กำหนดให้ θ_T เป็นเซตของ Σ_U ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค

Student's t Copula ได้

$$\theta_T = \{\Sigma_U \mid \Sigma_U = g(\Sigma_T) ; \Sigma_T \in R\}$$

เนื่องจากตัวแปรสุ่มร่วม U มีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Σ_U ทุกตัวอยู่ใน R

จากนิยามของ θ_T ทำให้ทราบว่า $\theta_T \subset R$

และจากการศึกษาพบว่า $R \subset \Omega_T$

พิสูจน์ $R \subset \Omega_T$

$$\text{กำหนดให้ } \mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_d)' \sim T(0, \Sigma) \quad ; \Sigma \in R$$

$$\text{นิยาม } U_i = F_T(T_i)$$

โดยที่ F_T คือฟังก์ชันการแจกแจงแบบสะสมของตัวแปรสุ่มที่

$$\text{ซึ่ง } \mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_d)'$$

กำหนดให้ Σ_U เป็น เมตริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มร่วม U

เนื่องจาก U เป็นตัวแปรสุ่มร่วมดังนั้น $\Sigma_U \in R$

และเนื่องจาก $\Sigma_U = g(\Sigma)$ โดยที่ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$\text{จึงทำให้ } g^{-1}(\Sigma_U) = \Sigma$$

$$\text{ซึ่ง } g^{-1}(\Sigma_U) \in \Omega_T \quad (\text{จากนิยาม})$$

$$\text{ดังนั้น } \Sigma \in \Omega_T$$

$$\text{นั่นคือ } R \subset \Omega_T$$

#

สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไปคือ $R \subset \theta_T$ หรือไม่
 เพราะการที่ $R \subset \theta_T$ หมายความว่าทุกๆเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Σ_U สามารถใช้ในการจำลอง
 ตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้
 หมายเหตุ การศึกษา $R \subset \theta_T$ นั้นก็เปรียบเสมือนการศึกษา $\Omega_T \subset R$ เนื่องจากนิยามของ θ_T
 ที่ว่าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_T$ เมื่อทำการแปลงด้วยฟังก์ชัน g^{-1} แล้วจะได้ทุกๆ $\Sigma_T \in R$
 ดังนั้นการที่ $\Omega_T \subset R$ จึงหมายถึง $R \subset \theta_T$ ด้วย

สำหรับการศึกษาว่า $R \subset \theta_T$ หรือไม่ ผู้วิจัยได้แบ่งการศึกษาเป็น 2 กรณีคือ

1. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติเท่ากับ 2
2. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติน้อยกว่า 2

1. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติเท่ากับ 2

$$\text{เมตริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มร่วม } U \text{ คือ } \Sigma_U = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{U_1, U_2} \\ \rho_{U_1, U_2} & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีองค์ประกอบของค่าสหสัมพันธ์ $\frac{(2-1)(2)}{2} = 1$ ตัวคือ ρ_{U_1, U_2}

พิจารณา $\rho_{U_1, U_2} \xrightarrow{g^{-1}} \rho_{T_1, T_2}$ พบว่า $\rho_{T_1, T_2} \in [-1, 1]$

$$\text{ซึ่งทำให้ } \Sigma_T = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{T_1, T_2} \\ \rho_{T_1, T_2} & 1 \end{pmatrix} ; \rho_{T_1, T_2} \in [-1, 1]$$

นั่นคือ ทุกๆเมตริกซ์ $\Sigma_T \in S \therefore \Omega_T \subset S$

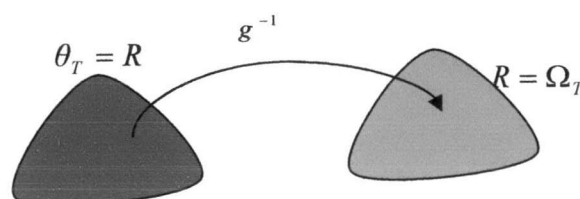
และเนื่องจาก U มีขนาด 2 มิติซึ่ง $R = S$ จึงทำให้ทุกๆเมตริกซ์ $\Sigma_T \in R$

ดังนั้น $\Omega_T \subset R$

#

สำหรับตัวแปรสุ่มร่วมมิติ 2 ; จากการศึกษาพบว่า $R \subset \theta_T$ และ $\Omega_T \subset R$ ดังนั้น $\Omega_T = R$
 ซึ่งส่งผลให้ $\theta_T = R$ ด้วย ซึ่งสามารถสรุปผลได้ว่าเทคนิค Student's t Copula สามารถทำการ
 จำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ที่มีขนาดมิติเท่ากับ 2 ได้ในทุกๆเมตริกซ์สหสัมพันธ์

รูปที่ 4.5 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U
 ด้วยเทคนิค Student's t Copula ในกรณีตัวแปรสุ่มร่วมมีมิติเท่ากับ 2



2. กรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติมากกว่า 2 (มิติ d ; $d = 3, 4, 5, \dots$)

จากการศึกษาพบว่า $R \not\subset \theta_T$ และ $\Omega_T \not\subset R$

พิสูจน์ $R \not\subset \theta_T$ และ $\Omega_T \not\subset R$

กรณีมิติเท่ากับ 3

$$\text{กำหนดให้ } \Sigma_U = \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0.2 \\ -0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \text{ ซึ่ง } \Sigma_U \in R$$

จากการดำเนินการตามขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula

$$\text{จะได้ } \Sigma_T = \begin{pmatrix} 1 & -0.4206 & 0.2117 \\ -0.4206 & 1 & 0.8179 \\ 0.2117 & 0.8179 & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่ง $\Sigma_T \in \Omega_T$ แต่จากการตรวจสอบพบว่า $|\Sigma_T| = -0.0363 < 0$

นั่นคือ $\Sigma_T \notin R$ ซึ่งหมายถึง $\Sigma_U \notin \theta_T$ ด้วย

กรณีมิติของเมตริกซ์เท่ากับ d (มากกว่า 3) ; $d = 4, 5, 6, \dots$

$$\text{กำหนดให้ } \Sigma_{U^*} = \begin{pmatrix} \Sigma_U & q \\ q' & 1 \end{pmatrix}$$

โดยที่ $q' = (q_{11} \quad q_{12} \quad \dots \quad q_{1(d-1)})$ ซึ่ง $q(i, j) \in [-1, 1]$ และทำให้ $\Sigma_{U^*} \in R$

จากการดำเนินการตามขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula

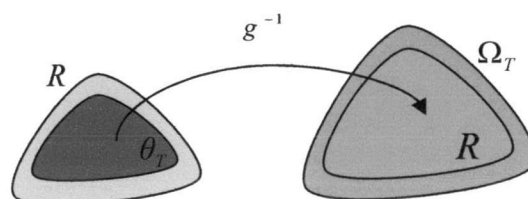
$$\text{จะได้ } \Sigma_{T^*} = \begin{pmatrix} \Sigma_T & q^* \\ q'^* & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่ง $\Sigma_{T^*} \in \Omega_T$ แต่ $|\Sigma_T| = -0.0363 < 0$ นั่นคือ $\Sigma_{T^*} \notin R$ ซึ่งหมายถึง $\Sigma_U \notin \theta_T$ ด้วย

$$\therefore R \not\subset \theta_T \text{ และ } \Omega_T \not\subset R \quad \#$$

สำหรับตัวแปรสุ่มร่วมที่มีขนาดมิติมากกว่า 2 จากการศึกษพบว่า $\theta_T \subset R$ และ $R \subset \Omega_T$ แต่ $R \not\subset \theta_T$ และ $\Omega_T \not\subset R$ ซึ่งสามารถสรุปผลได้ว่าเทคนิค Student's t Copula สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ที่มีขนาดมิติมากกว่า 2 ได้เพียงบางเมตริกซ์สหสัมพันธ์

รูปที่ 4.6 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ในกรณีตัวแปรสุ่มร่วมมีมิติมากกว่า 2



4.4 การเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula

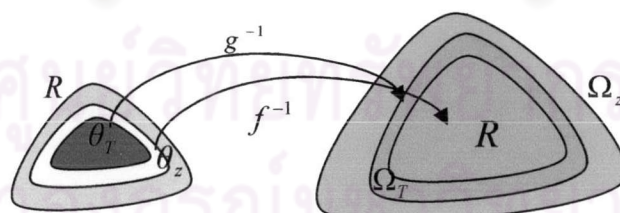
จากการศึกษาลักษณะของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula ในหัวข้อที่ 4.1 และ 4.2 พบว่าในกรณีที่ตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติมากกว่า 2 มีเพียงบางเมตริกซ์สหสัมพันธ์เท่านั้นที่สามารถทำการจำลองด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula ได้ ($\theta_z \subset R$ และ $\theta_T \subset R$) นั้นหมายความว่าทั้งเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula มีขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถทำการจำลองได้อย่างจำกัด แต่ยังไม่ทราบถึงขอบเขตที่ชัดเจน ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงทำการศึกษาโดยการเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula

สิ่งที่ใช้ในการเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula คือการเปรียบเทียบระหว่าง θ_z และ θ_T

ผลที่ได้จากการเปรียบเทียบ θ_z และ θ_T สามารถเกิดขึ้นได้ 4 ลักษณะดังนี้

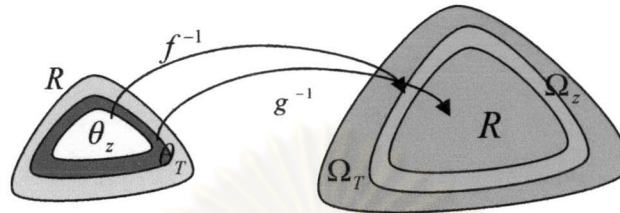
1. $\theta_T \subset \theta_z$ หมายถึงทุกๆเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้จะสามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้ด้วย

รูปที่ 4.7 แสดงลักษณะของ $\theta_T \subset \theta_z$



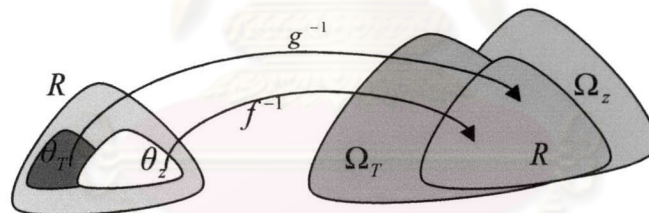
2. $\theta_z \subset \theta_T$ หมายถึงทุกๆ เมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้จะสามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้ด้วย

รูปที่ 4.8 แสดงลักษณะของ $\theta_z \subset \theta_T$



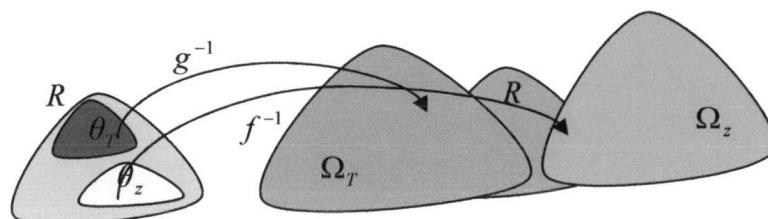
3. $\theta_z \cap \theta_T \neq \emptyset$ แต่ $\theta_T \not\subset \theta_z$ และ $\theta_z \not\subset \theta_T$ หมายถึงมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์บางส่วนที่สามารถใช้ในทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยทั้งเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula ได้ แต่ก็มีเมตริกซ์สหสัมพันธ์บางส่วนที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula หรือเทคนิค Student's t Copula ได้เพียงเทคนิคใดเทคนิคหนึ่งเท่านั้น

รูปที่ 4.9 แสดงลักษณะของ $\theta_z \cap \theta_T \neq \emptyset$ แต่ $\theta_T \not\subset \theta_z$ และ $\theta_z \not\subset \theta_T$



4. $\theta_z \not\subset \theta_T$, $\theta_T \not\subset \theta_z$ และ $\theta_z \cap \theta_T = \emptyset$ หมายถึงเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้จะไม่สามารถใช้ในการจำลองด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้เลย และในทำนองเดียวกันเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้ก็จะไม่สามารถใช้ในการจำลองด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้เลยเช่นกัน

รูปที่ 4.10 แสดงลักษณะของ $\theta_z \not\subset \theta_T$, $\theta_T \not\subset \theta_z$ และ $\theta_z \cap \theta_T = \emptyset$



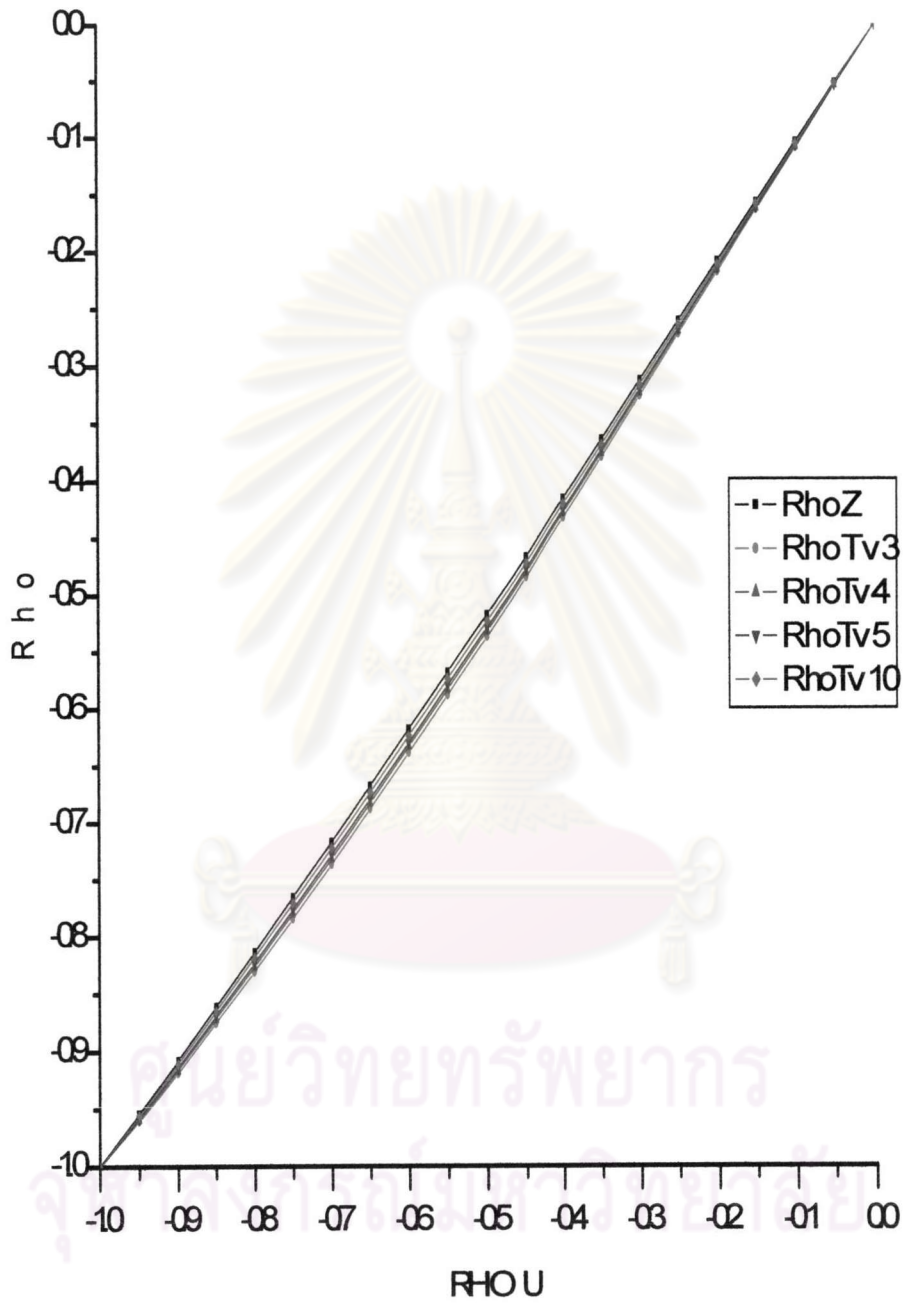
การวิเคราะห์ผลการเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลอง
ตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula

พิจารณาฟังก์ชัน f^{-1} และ g^{-1} ผู้วิจัยสามารถคำนวณค่า ρ_{z,z_j} และ ρ_{T_j,T_j} ได้ดังตารางที่ 4.1

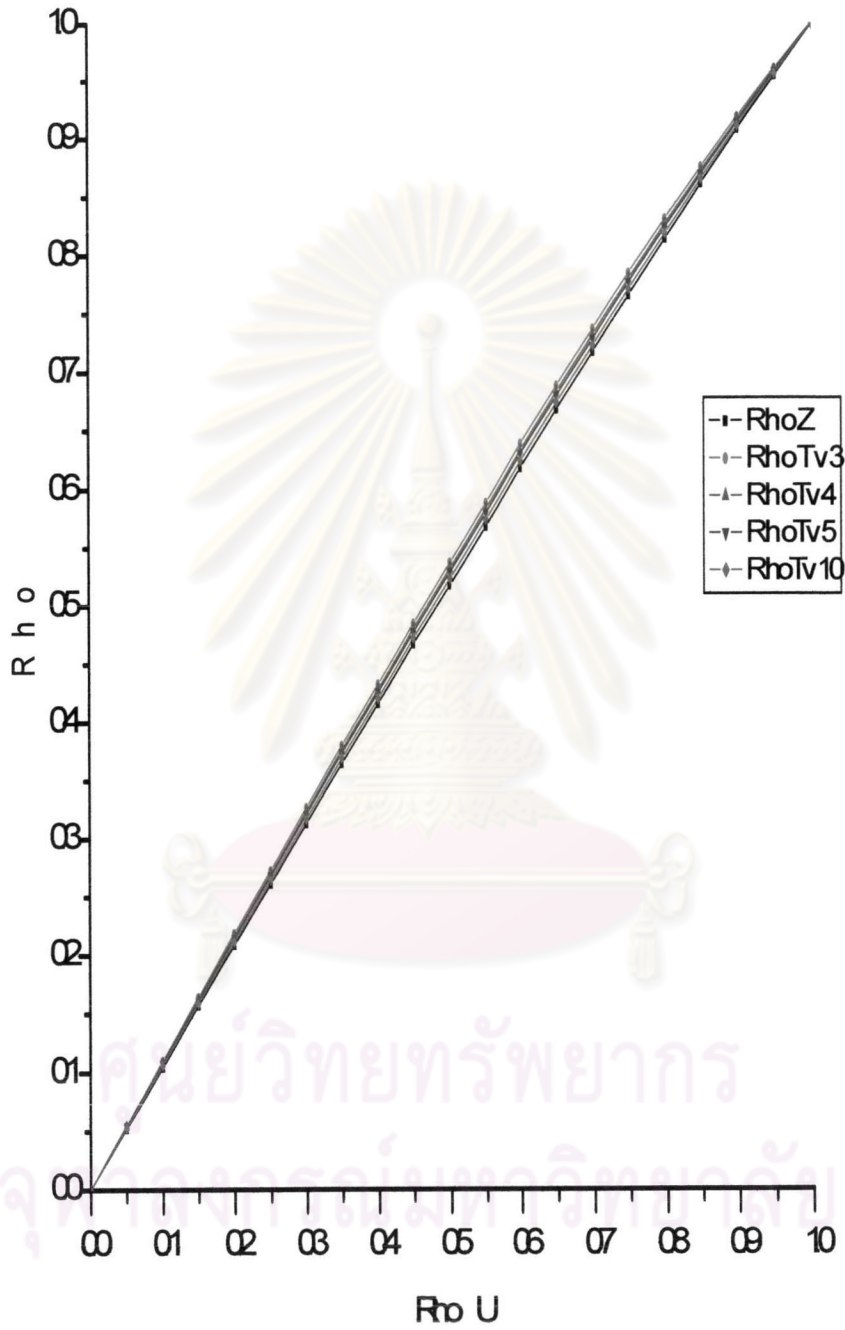
ตารางที่ 4.1 แสดงค่าของ ρ ต่างๆที่ได้จากการคำนวณค่าในฟังก์ชัน f^{-1} และ g^{-1}

ρ_{U_i,U_j}	ρ_{z,z_j}	$\rho_{T_j,T_j,v=3}$	$\rho_{T_j,T_j,v=4}$	$\rho_{T_j,T_j,v=5}$	$\rho_{T_j,T_j,v=10}$
-1.00	-1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000
-0.95	-0.95432	-0.96063	-0.95879	-0.95775	-0.95610
-0.90	-0.90798	-0.91889	-0.91582	-0.91405	-0.91079
-0.85	-0.86102	-0.87537	-0.87141	-0.86911	-0.86478
-0.80	-0.81347	-0.83034	-0.82575	-0.82306	-0.81797
-0.75	-0.76537	-0.78399	-0.77898	-0.77603	-0.77040
-0.70	-0.71674	-0.73647	-0.73120	-0.72809	-0.72212
-0.65	-0.66761	-0.68790	-0.68252	-0.67933	-0.67319
-0.60	-0.61803	-0.63839	-0.63302	-0.62983	-0.62367
-0.55	-0.56803	-0.58803	-0.58277	-0.57965	-0.57360
-0.50	-0.51764	-0.53690	-0.53185	-0.52885	-0.52302
-0.45	-0.46689	-0.48510	-0.48034	-0.47750	-0.47200
-0.40	-0.41582	-0.43268	-0.42829	-0.42567	-0.42057
-0.35	-0.36447	-0.37974	-0.37576	-0.37339	-0.36878
-0.30	-0.31287	-0.32634	-0.32283	-0.32075	-0.31668
-0.25	-0.26105	-0.27254	-0.26955	-0.26778	-0.26430
-0.20	-0.20906	-0.21842	-0.21599	-0.21454	-0.21171
-0.15	-0.15692	-0.16404	-0.16219	-0.16109	-0.15894
-0.10	-0.10467	-0.10947	-0.10822	-0.10748	-0.10603
-0.05	-0.05235	-0.05477	-0.05414	-0.05377	-0.05304
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.05	0.05235	0.05477	0.05414	0.05377	0.05304
0.10	0.10467	0.10947	0.10822	0.10748	0.10603
0.15	0.15692	0.16404	0.16219	0.16109	0.15894
0.20	0.20906	0.21842	0.21599	0.21454	0.21171
0.25	0.26105	0.27254	0.26955	0.26778	0.26430
0.30	0.31287	0.32634	0.32283	0.32075	0.31668
0.35	0.36447	0.37974	0.37576	0.37339	0.36878
0.40	0.41582	0.43268	0.42829	0.42567	0.42057
0.45	0.46689	0.48510	0.48034	0.47750	0.47200
0.50	0.51764	0.53690	0.53185	0.52885	0.52302
0.55	0.56803	0.58803	0.58277	0.57965	0.57360
0.60	0.61803	0.63839	0.63302	0.62983	0.62367
0.65	0.66761	0.68790	0.68252	0.67933	0.67319
0.70	0.71674	0.73647	0.73120	0.72809	0.72212
0.75	0.76537	0.78399	0.77898	0.77603	0.77040
0.80	0.81347	0.83034	0.82575	0.82306	0.81797
0.85	0.86102	0.87537	0.87141	0.86911	0.86478
0.90	0.90798	0.91889	0.91582	0.91405	0.91079
0.95	0.95432	0.96063	0.95879	0.95775	0.95610
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

รูปที่ 4.11 แสดงค่าของ ρ ต่างๆ ในช่วง $[-1,0]$ ที่ได้จากการคำนวณค่าในฟังก์ชัน f^{-1} และ g^{-1}



รูปที่ 4.12 แสดงค่าของ ρ ต่างๆในช่วง $[0,1]$ ที่ได้จากการคำนวณค่าในฟังก์ชัน f^{-1} และ g^{-1}



จากตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.11 – 4.12 แสดงให้เห็นว่า

เมื่อ $\rho_{U,U_j} \xrightarrow{f^{-1}} \rho_{z,z_j}$ แล้ว $|\rho_{z,z_j}| \geq |\rho_{U,U_j}|$ และ $\rho_{z,z_j} \in [-1,1]$

เมื่อ $\rho_{U,U_j} \xrightarrow{g^{-1}} \rho_{T,T_j}$ แล้ว $|\rho_{T,T_j}| \geq |\rho_{U,U_j}|$ และ $\rho_{T,T_j} \in [-1,1]$

โดยที่ขนาดของ ρ ต่างๆ สามารถเรียงลำดับได้ดังนี้

$|\rho_{T_{v=3}}| \geq |\rho_{T_{v=4}}| \geq |\rho_{T_{v=5}}| \geq |\rho_{T_{v=10}}| \geq |\rho_z| \geq |\rho_U|$ ซึ่งพบว่า ρ_{T,T_j} มีขนาดใหญ่กว่า ρ_{z,z_j}

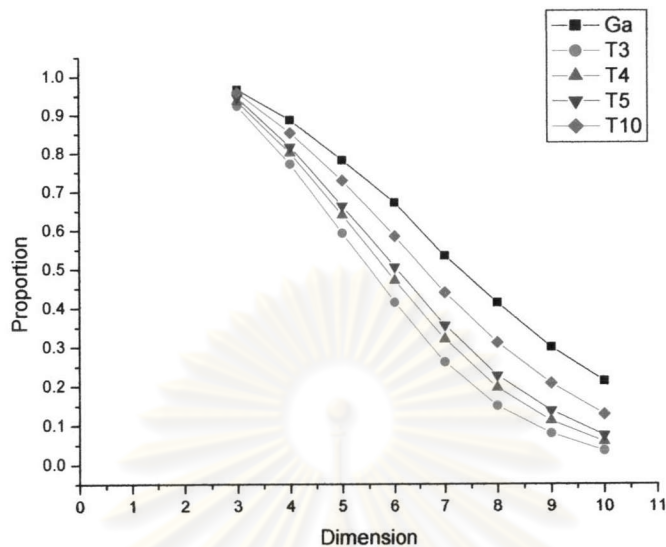
แต่เมื่อ ρ_{T,T_j} มีองศาความเป็นอิสระ (v) มากขึ้นขนาดของ ρ_{T,T_j} มีค่าลดลง แต่ไม่น้อยกว่า ρ_{z,z_j}

เนื่องจากตัวแปรสุ่มร่วม U ในมิติที่มากกว่า 2 สามารถทำการจำลองด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula ได้เพียงบางเมตริกซ์สหสัมพันธ์ จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจศึกษาค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ได้ด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการทดลองเพื่อหาค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ด้วยเทคนิคทั้งสองขึ้น ซึ่งผลการทดลองปรากฏในตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมได้ด้วยเทคนิค Gaussian Copula และเทคนิค Student's t Copula ที่องศาความเป็นอิสระ 3,4,5 และ 10

การจำลอง	มิติ							
	3	4	5	6	7	8	9	10
Ga	0.9667	0.8868	0.7819	0.6711	0.5343	0.4134	0.2998	0.2131
T_3	0.9228	0.7719	0.5927	0.4136	0.2611	0.1498	0.079	0.0346
T_4	0.9352	0.8005	0.6389	0.47	0.3198	0.1959	0.1112	0.0576
T_5	0.9452	0.8167	0.6635	0.5052	0.3561	0.227	0.1374	0.0743
T_{10}	0.9588	0.8526	0.7291	0.5841	0.4394	0.3112	0.207	0.1282

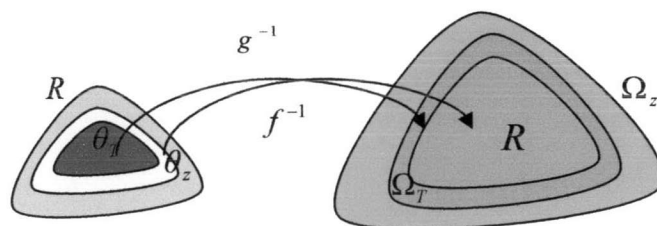
รูปที่ 4.13 แสดงค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วมได้ด้วยเทคนิค Gaussian Copula และเทคนิค Student's t Copula ที่องศาความเป็นอิสระ 3,4,5 และ 10



จากตาราง 4.2 และ รูปที่ 4.13 พบว่าค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ได้ด้วยเทคนิค Gaussian Copula มีค่ามากกว่าเทคนิค Student's t Copula โดยค่าสัดส่วนของเทคนิค Student's t Copula จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อองศาความเป็นอิสระมากขึ้น แต่เมื่อตัวแปรสุ่มร่วม U มีขนาดมิติเพิ่มขึ้นทั้งเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula มีค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ได้ลดลง

จากลักษณะการแปลงของ ρ_{U,U_j} ด้วยฟังก์ชัน f และ g ที่ส่งผลให้ $|\rho_{T_{v=3}}| \geq |\rho_{T_{v=4}}| \geq |\rho_{T_{v=5}}| \geq |\rho_{T_{v=10}}| \geq |\rho_z| \geq |\rho_U|$ ประกอบกับค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วม U ได้ด้วยเทคนิค Gaussian Copula มีค่ามากกว่าเทคนิค Student's t Copula ทำให้ผู้วิจัยมีข้อสันนิษฐานว่า $\theta_T < \theta_z$

รูปที่ 4.14 แสดงลักษณะเซตของเมตริกซ์ตามข้อสันนิษฐานของผู้วิจัยที่ว่า $\theta_T < \theta_z$



แต่เนื่องจากการพิสูจน์ทำได้ยาก ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการตรวจสอบข้อสันนิษฐานดังกล่าวด้วยการสร้างการจำลอง (Simulation) แทนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จากข้อสันนิษฐานของผู้วิจัยที่ว่า $\theta_T \subset \theta_z$ ข้อสันนิษฐานนี้จะเป็นจริงเมื่อ

1. ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_T$ แล้ว $\Sigma_U \in \theta_z$
2. มีบาง $\Sigma_U \in \theta_z$ ที่ $\Sigma_U \notin \theta_T$

การตรวจสอบข้อสันนิษฐาน

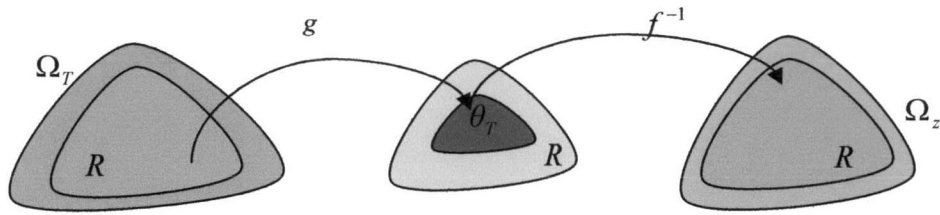
1. ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_T$ แล้ว $\Sigma_U \in \theta_z$

ในการตรวจสอบนี้ผู้วิจัยทำการตรวจสอบเมตริกซ์เฉพาะเมตริกซ์ที่มีขนาดตั้งแต่ 3 ถึง 10 มิติ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 1.1 สำหรับ $v = 3, 4, 5, 10$
- 1.2 ให้ $d = 2$
- 1.3 $d = d + 1$
- 1.4 ให้ num = 0
- 1.5 num = num + 1
- 1.6 สุ่ม Σ_T โดยที่ $\Sigma_T \in R$
- 1.7 แปลง Σ_T ให้เป็น Σ_U โดยที่ $\Sigma_U = g(\Sigma_T)$
- 1.8 แปลง Σ_U ให้เป็น Σ_z โดยที่ $\Sigma_z = f^{-1}(\Sigma_U)$
- 1.9 ตรวจสอบว่า $\Sigma_z \in R$ หรือไม่

ถ้า $\Sigma_z \in R$	ทำขั้นตอนต่อไป
ถ้า $\Sigma_z \notin R$	หยุด จบขั้นตอน
- 1.10 ถ้า num < 10,000 กลับไปที่ 1.5
อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป
- 1.11 ถ้า $d < 10$ กลับไปที่ 1.3
อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป
- 1.12 ถ้า $v = 10$ จบขั้นตอน
อื่นๆ กลับไปที่ 1.1

รูปที่ 4.15 แสดงภาพการตรวจของข้อสันนิษฐานในข้อ 1 (ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_T$ แล้ว $\Sigma_U \in \theta_Z$)



จากการศึกษาตามขั้นตอนในข้างต้นพบว่าในทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_T$ ที่มีขนาดมิติตั้งแต่ 3 - 10 ไม่มีเมตริกซ์ใดเลยที่ทำการแปลงค่าแล้วทำให้ $\Sigma_Z \notin R$

ตารางที่ 4.3 แสดงตัวอย่างที่ได้จากการทำการจำลองเพื่อตรวจสอบข้อสันนิษฐานในข้อ 1 เมื่อเมตริกซ์ของการจำลองมีขนาดเท่ากับ 3

Num	$\rho_{T_1T_2, v=10}$	$\rho_{T_1T_3, v=10}$	$\rho_{T_2T_3, v=10}$	$\Sigma_Z \in R$
1	0.4821	0.9126	0.6713	✓
2	0.3619	0.0551	0.4977	✓
3	0.5762	-0.4280	0.2468	✓
4	0.2983	0.1285	-0.2839	✓
5	-0.1137	0.2610	0.6006	✓
6	-0.1625	-0.7371	0.1168	✓
7	-0.2333	-0.1261	-0.7019	✓
8	0.8218	-0.1134	-0.3804	✓
9	-0.0406	-0.2211	0.6689	✓
10	0.1592	0.1595	0.7315	✓
11	-0.7012	-0.9115	0.4320	✓
12	-0.2427	0.5712	-0.4912	✓
13	-0.6647	-0.2768	0.3019	✓
14	-0.4428	0.4348	0.5516	✓
15	-0.2211	0.6126	0.5360	✓
16	-0.6168	-0.8670	0.7340	✓
17	-0.7359	0.2432	0.0568	✓
18	-0.9143	-0.7897	0.5307	✓
19	0.2690	0.9263	0.1960	✓
20	-0.0723	-0.0955	-0.2997	✓
21	-0.2285	0.4099	-0.4165	✓
22	-0.2695	-0.0524	-0.8450	✓
23	-0.3442	-0.2151	0.0090	✓
24	0.3279	0.4040	0.9939	✓
25	-0.0616	0.5284	-0.7209	✓
26	-0.5223	0.6413	-0.3468	✓
27	-0.2617	0.1797	0.0968	✓
28	0.8364	0.6538	0.8845	✓
29	-0.0542	0.0928	-0.9565	✓
30	-0.3450	-0.6311	-0.4423	✓

หมายเหตุ ✓ หมายถึง $\Sigma_Z \in R$

2. มีบาง $\Sigma_U \in \theta_z$ ที่ $\Sigma_U \notin \theta_T$ ซึ่งสามารถตรวจสอบดังนี้

2.1 ทำการสุ่มเมตริกซ์ Σ_z ด้วยวิธี Onion มา 1 ตัว

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0.0207 & -0.6900 \\ 0.0207 & 1 & -0.7373 \\ -0.6900 & -0.7373 & 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $\Sigma_z \in R$

2.2 คำนวณค่า Σ_U จาก $\Sigma_U = f(\Sigma_z)$ จะได้

$$\Sigma_U = \begin{pmatrix} 1 & 0.0198 & -0.6727 \\ 0.0198 & 1 & -0.7210 \\ -0.6727 & -0.7210 & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่ง $\Sigma_U \in R$

2.3 คำนวณค่า Σ_T จาก $\Sigma_T = g^{-1}(\Sigma_U)$ จะได้

$$\Sigma_T = \begin{pmatrix} 1 & 0.0209 & -0.6955 \\ 0.0209 & 1 & -0.7426 \\ -0.6955 & -0.7426 & 1 \end{pmatrix}$$

จากการตรวจสอบพบว่า $|\Sigma_T| = -0.0140 < 0$ นั่นคือ $\Sigma_T \notin R$

ดังนั้น $\Sigma_U \notin \theta_T$ นั่นคือมี $\Sigma_U \in \theta_z$ ที่ทำให้ $\Sigma_U \notin \theta_T$

จากการตรวจสอบข้อสันนิษฐานในข้อ 1 และ 2 สามารถสรุปผลได้ว่า

1. ถ้าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ใดๆที่สามารถใช้ในการจำลอง U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้ แล้วเมตริกซ์สหสัมพันธ์นั้นต้องทำการจำลอง U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้เสมอ
2. ถ้าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ใดๆ สามารถใช้ในการจำลอง U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้ แล้วเมตริกซ์สหสัมพันธ์นั้นไม่จำเป็นต้องทำการจำลอง U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้เสมอไป

แต่เพื่อเป็นการแสดงผลการตรวจสอบให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงทำการตรวจสอบเพิ่มเติม โดยการศึกษาบริเวณส่วนผิวของ θ_z (θ_{zSur}) และบริเวณส่วนผิวของ θ_T (θ_{TSur})

ซึ่งถ้าข้อสันนิษฐานที่ว่า $\theta_T \subset \theta_z$ จะเป็นจริงชัดเจนยิ่งขึ้นเมื่อ

I. ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_{TSur}$ แล้ว $\Sigma_U \in \theta_z$

$$\text{โดยที่ } \theta_{TSur} = \{\Sigma_U \mid \Sigma_U = g(\Sigma_T) ; \Sigma_T \in R_{sur}\}$$

ซึ่ง R_{sur} คือ เซตของเมตริกซ์ที่อยู่บริเวณผิวของเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์

II. ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_{zSur}$ แล้ว $\Sigma_U \notin \theta_T$

$$\text{โดยที่ } \theta_{zSur} = \{\Sigma_U \mid \Sigma_U = f(\Sigma_z) ; \Sigma_z \in R_{sur}\}$$

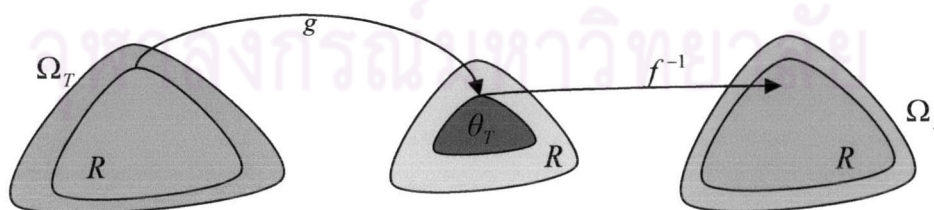
การตรวจสอบ

I. ถ้าทุก ๆ $\Sigma_U \in \theta_{TSur}$ แล้ว $\Sigma_U \in \theta_Z$

ในการตรวจสอบนี้ผู้วิจัยทำการตรวจสอบเมตริกซ์เฉพาะเมตริกซ์ที่มีขนาดตั้งแต่ 3 ถึง 10 มิติ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- I.I สำหรับ $v = 3, 4, 5, 10$
- I.II ให้ $d = 2$
- I.III $d = d + 1$
- I.IV ให้ num = 0
- I.V num = num + 1
- I.VI สุ่ม Σ_T โดยที่ $\Sigma_T \in R_{Sur}$
- I.VII แปลง Σ_T ให้เป็น Σ_U โดยที่ $\Sigma_U = g(\Sigma_T)$
- I.VIII แปลง Σ_U ให้เป็น Σ_z โดยที่ $\Sigma_z = f^{-1}(\Sigma_U)$
- I.IX ตรวจสอบว่า $\Sigma_z \in R$ หรือไม่
 - ถ้า $\Sigma_z \in R$ ทำขั้นตอนต่อไป
 - ถ้า $\Sigma_z \notin R$ หยุด จบขั้นตอน
- I.X ถ้า num < 10,000 กลับไปที่ I.V
อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป
- I.XI ถ้า $d < 10$ กลับไปที่ I.III
อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป
- I.XII ถ้า $v = 10$ จบขั้นตอน
อื่นๆ กลับไปที่ I.I

รูปที่ 4.16 แสดงภาพการตรวจของข้อสันนิษฐานในข้อ I (ถ้าทุก ๆ $\Sigma_U \in \theta_{TSur}$ แล้ว $\Sigma_U \in \theta_Z$)



จากการศึกษาตามขั้นตอนในข้างต้นพบว่าในทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_{TSur}$ ที่มีขนาดมิติ ตั้งแต่ 3 - 10 ไม่มีเมตริกซ์ใดเลยที่ทำการแปลงค่าแล้วทำให้ $\Sigma_z \notin R$

ตารางที่ 4.4 แสดงตัวอย่างที่ได้จากการทำการจำลองเพื่อตรวจสอบข้อสันนิษฐานในข้อ 1
เมื่อเมตริกซ์ของการจำลองมีขนาดเท่ากับ 3

Num	$\rho_{T_1T_2, v=10}$	$\rho_{T_1T_3, v=10}$	$\rho_{T_2T_3, v=10}$	$\Sigma_z \in R$
1	0.5111	0.9676	0.7117	✓
2	0.6134	0.0934	0.8436	✓
3	0.6792	-0.5046	0.2909	✓
4	0.6202	0.2672	-0.5902	✓
5	-0.1620	0.3718	0.8558	✓
6	-0.2200	-0.9980	0.1581	✓
7	-0.2974	-0.1607	-0.8946	✓
8	0.9482	-0.1309	-0.4390	✓
9	-0.0585	-0.3190	0.9648	✓
10	0.2177	0.2180	1.0000	✓
11	-0.7235	-0.9404	0.4458	✓
12	-0.3768	0.8866	-0.7625	✓
13	-0.9991	-0.4160	0.4538	✓
14	-0.4638	0.4553	0.5776	✓
15	-0.2374	0.6578	0.5755	✓
16	-0.6963	-0.9788	0.8286	✓
17	-0.9275	0.3065	0.0716	✓
18	-0.9339	-0.8066	0.5420	✓
19	0.2894	0.9967	0.2109	✓
20	-0.2120	-0.2799	-0.8788	✓
21	-0.4748	0.8518	-0.8655	✓
22	-0.2984	-0.0580	-0.9355	✓
23	-0.8565	-0.5352	0.0223	✓
24	0.3288	0.4051	0.9966	✓
25	-0.0712	0.6108	-0.8332	✓
26	-0.7677	0.9426	-0.5097	✓
27	-0.7124	0.4892	0.2636	✓
28	0.8939	0.6988	0.9453	✓
29	-0.0566	0.0970	-0.9992	✓
30	-0.3608	-0.6600	-0.4625	✓

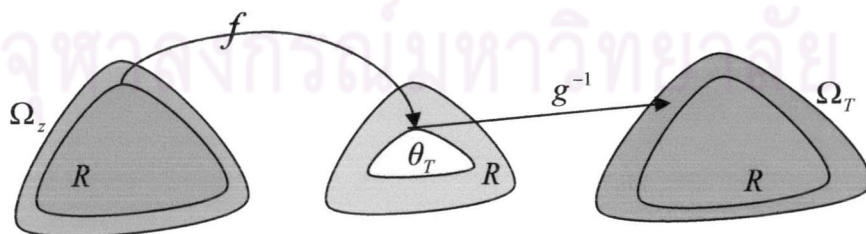
หมายเหตุ ✓ หมายถึง $\Sigma_z \in R$

II. ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_{zSur}$ แล้ว $\Sigma_U \notin \theta_T$

ในการตรวจสอบนี้ผู้วิจัยทำการตรวจสอบเมตริกซ์เฉพาะเมตริกซ์ที่มีขนาดตั้งแต่ 3 ถึง 10 มิติ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- II.I สำหรับ $v = 3, 4, 5, 10$
- II.II ให้ $d = 2$
- II.III $d = d + 1$
- II.IV ให้ $num = 0$
- II.V $num = num + 1$
- II.VI สุ่ม Σ_z โดยที่ $\Sigma_z \in R_{Sur}$
- II.VII แปลง Σ_z ให้เป็น Σ_U โดยที่ $\Sigma_U = f(\Sigma_z)$
- II.VIII แปลง Σ_U ให้เป็น Σ_T โดยที่ $\Sigma_T = g^{-1}(\Sigma_U)$
- II.IX ตรวจสอบว่า $\Sigma_T \in R$ หรือไม่
 - ถ้า $\Sigma_T \in R$ หยุด จบขั้นตอน
 - ถ้า $\Sigma_T \notin R$ ทำขั้นตอนต่อไป
- II.X ถ้า $num < 10,000$ กลับไปที่ II.V
 - อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป
- II.XI ถ้า $d < 10$ กลับไปที่ II.III
 - อื่นๆ จบขั้นตอน
- II.XII ถ้า $v = 10$ จบขั้นตอน
 - อื่นๆ กลับไปที่ II.I

รูปที่ 4.17 แสดงภาพการตรวจสอบของข้อสันนิษฐานในข้อ II (ถ้าทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_{zSur}$ แล้ว $\Sigma_U \notin \theta_T$)



จากการศึกษาตามขั้นตอนในข้างต้นพบว่าในทุกๆ $\Sigma_U \in \theta_{zSur}$ ที่มีขนาดมิติตั้งแต่ 3 - 10 ไม่มีเมตริกซ์ใดเลยที่ทำการแปลงค่าแล้วทำให้ $\Sigma_T \in R$

ตารางที่ 4.5 แสดงตัวอย่างที่ได้จากการทำการจำลองเพื่อตรวจสอบข้อสันนิษฐานในข้อ II
เมื่อเมตริกซ์ของการจำลองมีขนาดเท่ากับ 3

Num	$\rho_{z_1z_2}$	$\rho_{z_1z_3}$	$\rho_{z_2z_3}$	$\Sigma_T \in R$
1	0.5111	0.9676	0.7117	X
2	0.6134	0.0934	0.8436	X
3	0.6792	-0.5046	0.2909	X
4	0.6202	0.2672	-0.5902	X
5	-0.1620	0.3718	0.8558	X
6	-0.2200	-0.9980	0.1581	X
7	-0.2974	-0.1607	-0.8946	X
8	0.9482	-0.1309	-0.4390	X
9	-0.0585	-0.3190	0.9648	X
10	0.2177	0.2180	1.0000	X
11	-0.7235	-0.9404	0.4458	X
12	-0.3768	0.8866	-0.7625	X
13	-0.9991	-0.4160	0.4538	X
14	-0.4638	0.4553	0.5776	X
15	-0.2374	0.6578	0.5755	X
16	-0.6963	-0.9788	0.8286	X
17	-0.9275	0.3065	0.0716	X
18	-0.9339	-0.8066	0.5420	X
19	0.2894	0.9967	0.2109	X
20	-0.2120	-0.2799	-0.8788	X
21	-0.4748	0.8518	-0.8655	X
22	-0.2984	-0.0580	-0.9355	X
23	-0.8565	-0.5352	0.0223	X
24	0.3288	0.4051	0.9966	X
25	-0.0712	0.6108	-0.8332	X
26	-0.7677	0.9426	-0.5097	X
27	-0.7124	0.4892	0.2636	X
28	0.8939	0.6988	0.9453	X
29	-0.0566	0.0970	-0.9992	X
30	-0.3608	-0.6600	-0.4625	X

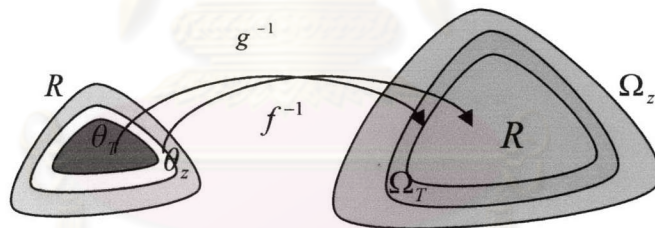
หมายเหตุ X หมายถึง $\Sigma_T \notin R$

จากผลการตรวจสอบข้อสันนิษฐานสามารถสรุปผลได้ดังนี้

1. ถ้าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ใดๆที่สามารถใช้ในการจำลอง U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้ แล้วเมตริกซ์สหสัมพันธ์นั้นต้องทำการจำลอง U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้เสมอ
2. ถ้าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ใดๆ สามารถใช้ในการจำลอง U ด้วยเทคนิค Gaussian Copula ได้ แล้วเมตริกซ์สหสัมพันธ์นั้นไม่จำเป็นต้องทำการจำลอง U ด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้เสมอไป

นั่นคือทั้งเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วมมิติมากกว่า 2 ได้เพียงบาง เมตริกซ์สหสัมพันธ์ แต่เมื่อเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมได้พบว่าเทคนิค Gaussian Copula มีขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมได้มากกว่าเทคนิค Student's t Copula

รูปที่ 4.18 แสดงขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย