บทที่ 3

วิธีดำเนินงานวิจัย

การดำเนินงานวิจัยนี้เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 กรณี ประกอบด้วย กรณีที่ตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยวิธีประมาณความควรจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ และกรณีที่ตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มัล ด้วยวิธีประมาณความควรจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ โดยที่วิธีเบส์ของทั้งสองกรณีกำหนดการแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์การถดถอยเป็นปกติสองตัวแปร ทั้งนี้เพื่อหาวิธีการประมาณที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ นั่นคือตามการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงของตัวแปรตามที่เป็นปกติ และเป็นล็อกนอร์มัล, การแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์การถดถอยที่เป็นปกติสองตัวแปร และขนาดตัวอย่างที่ใช้ ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยมาจากการจำลอง และเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน 77

3.1 ข้อกำหนดในการทดลอง

ตัวแบบที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือตัวแบบเชิงเส้นเชิงเดียว ซึ่งอยู่ในรูป

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (1)$$

โดยที่ Y_i คือ ตัวแปรตาม

β_0, β_1 คือ พารามิเตอร์ของการถดถอย

X_i คือ ตัวแปรอิสระ และกำหนดเป็นค่าคงที่

ε_i คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจง $N(0,\sigma^2)$

n คือ ขนาดตัวอย่าง

ในการวิจัยครั้งนี้กำหนดสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ต้องการศึกษาดังนี้

3.1.1 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 20 30 50 70 และ 90

3.1.2 ตัวแปรอิสระเป็นค่าคงที่ ใด ๆ ในงานวิจัยนี้จำลองมาจากแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10

3.1.3 ความคลาดเคลื่อนสุ่มจากประชากรมีการแจกแจงปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(\varepsilon_i)$ เท่ากับ 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $SD(\varepsilon_i)$ เท่ากับ 1.0 3.0 5.0 7.0 และ 9.0

3.1.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์การถดถอย $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ ที่ใช้ในตัวแบบข้อ (1) เท่ากับ $\underline{\beta} = (1.0, 1.0)'$

3.1.5 พารามิเตอร์ $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ จากการแจกแจงก่อนเป็นปกติร่วม มีสัมประสิทธิ์ความแปรผันเป็น 0.6 1.0 และ 1.8 และกำหนดให้การแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์การถดถอย $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ มีค่าเฉลี่ย $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}$ และค่าความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 มีค่าสอดคล้องกับสัมประสิทธิ์ความแปรผันของพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 ตามลำดับ และกำหนดให้สหสัมพันธ์ ρ ระหว่างพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 คือ -0.3 -0.1 0.5 0.7 และ 0.9 มีค่า ผู้วิจัยแบ่งพิจารณาออกเป็น 3 กรณี ได้ดังนี้

(1) $\mu_0 = 0.5,\ \mu_1 = 1.0$ ดังนั้น σ_1^2 มีค่า 0.09 0.4225 และ 0.81 ตามลำดับ และ σ_2^2 มีค่า 0.36 1.69 และ 3.24 ตามลำดับ ดังนั้น

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 0.09 & -0.017 \\ -0.017 & 0.36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.09 & -0.039 \\ -0.039 & 1.69 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.09 & 0.27 \\ 0.27 & 3.24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.4225 & 0.819 \\ 0.819 & 3.24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.81 & 1.458 \\ 1.458 & 3.24 \end{bmatrix}$$

(2) $\mu_0 = 1.0,\ \mu_1 = 2.0$ ดังนั้น σ_1^2 มีค่า 0.36 1.69 และ 3.24 ตามลำดับ และ σ_2^2 มีค่า 1.44 6.76 และ 12.96 ตามลำดับ ดังนั้น

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.216 \\ -0.216 & 1.44 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.36 & -0.156 \\ -0.156 & 6.76 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.36 & 1.08 \\ 1.08 & 12.96 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.69 & 3.276 \\ 3.276 & 12.96 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3.24 & 5.832 \\ 5.832 & 12.96 \end{bmatrix}$$

(3) $\mu_0 = 2.0,\ \mu_1 = 3.0$ ดังนั้น σ_1^2 มีค่า 1.44 6.76 และ 12.96 ตามลำดับ และ σ_2^2 มีค่า 3.24 15.21 และ 29.16 ตามลำดับ ดังนั้น

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1.44 & -0.648 \\ -0.648 & 3.24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.44 & -0.468 \\ -0.468 & 15.21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.44 & 3.24 \\ 3.24 & 29.16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6.76 & 9.828 \\ 9.828 & 29.16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12.96 & 17.496 \\ 17.496 & 29.16 \end{bmatrix}$$

3.2 ขั้นตอนการวิจัย

3.2.1 สร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

3.2.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอยด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ ตามกรณี คือ

(1) กรณีตัวแปรตามมีการแจกแจงปกติ

(2) กรณีตัวแปรตามมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล กรณีนี้จะแปลงค่าของ Y_i เป็น $\ln Y_i$ ก่อน

3.2.3 หาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (AMSE) ของค่าพารามิเตอร์ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอยของแต่ละวิธี

3.2.4 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอยด้วยค่า AMSE

3.2.5 สรุปผลการวิจัยในแต่ละสถานการณ์

โดยมีรายละเอียด ในแต่ละขั้นตอน ดังนี้

3.2.1 การสร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

(1) สร้างข้อมูลของตัวแปรอิสระ (X_i) ที่เป็นค่าคงที่ซึ่งสุ่มจากการแจกแจกปกติตามค่าพารามิเตอร์การถดถอยที่กำหนดใน 3.1.2

(2) กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการถดถอย $\left(\beta = (\beta_0, \beta_1)'\right)$ ที่ใช้ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นปกติเชิงเดียว $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,...,n$ ตามที่กำหนดใน 3.1.4

(3) สร้างข้อมูลของตัวแปรตาม (Y_i) ให้มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย $E(Y_i)$ เท่ากับ $\beta_0 + \beta_1 X_i$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน $SD(Y_i) = SD(\varepsilon_i)$ ตามค่าที่กำหนดใน 3.1.3

ในกรณีที่การแจกแจง Y_i เป็นการแจกแจงล็อกนอร์มัล จะมีขั้นตอนการสร้างข้อมูลของตัวแปรตาม (Y_i) ที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_y = \beta_0 + \beta_1 X_i$ และความแปรปรวน $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2$ โดยอาศัยหลักการดังนี้

1. กำหนดค่า $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ ตามค่าที่กำหนดใน 3.1.4 , ค่า $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2$ ซึ่งค่า $SD(\varepsilon)$ ที่กำหนดใน 3.1.1 และค่า X_i ที่ได้จาก (1) สำหรับ $i = 1,2,...,n$
2. สำหรับ $i = 1,2,...,n$ ทำขั้นตอน 3. ถึง 5.
3. จำลอง Z_i จาก $N(0,1)$
4. ให้ $\mu_{y_i} = \beta_0 + \beta_1 X_i$

5. ให้ $W_i = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu_{y_i}^4}{\sigma_y^2+\mu_{y_i}^2}\right)+Z_i\sqrt{\ln\left(\frac{\sigma_y^2}{\mu_{y_i}^2}+1\right)}$

(ซึ่งเป็นสูตรการแปลงค่าไปยังการแจกแจงปกติ)

6. ให้ $Y_i = e^{W_i}$

<u>หมายเหตุ</u> $W_i \sim N\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu_{y_i}^4}{\sigma_y^2+\mu_{y_i}^2}\right), \ln\left(\frac{\sigma_y^2}{\mu_{y_i}^2}+1\right)\right)$

$Y_i \sim LN\left(\mu_{y_i}, \sigma_y^2\right)$

(6) สร้างเมทริกซ์ $\underline{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_0\\ \mu_1\end{pmatrix}$ และ $\underline{V} = \begin{bmatrix}\sigma_{00} & \sigma_{01}\\ \sigma_{10} & \sigma_{11}\end{bmatrix}$

โดยที่ $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $i = 0,1$, $\sigma_{01} = \sigma_{10} = Cov(\beta_0, \beta_1) = \rho\sqrt{\sigma_0^2\sigma_1^2}$ และ ค่าพารามิเตอร์กำหนดใน 3.1.5

3.2.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอยด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ ตามกรณี ดังนี้

(1) ตัวแปรตามมีการแจกแจงปกติ

(1.1) วิธีความควรจะเป็นสูงสุด เมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นมีการแจกแจงปกติ

วิธีความควรจะเป็นสูงสุด ซึ่งค่าประมาณความควรจะเป็นสูงสุด $\left(\underline{\hat{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)'\right)$ สามารถคำนวณได้

และ $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่ $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

และ $$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

(1.2) วิธีเบส์ เมื่อใช้การแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์เป็นการแจกแจงปกติสองตัวแปรและฟังก์ชันความควรจะเป็นมีการแจกแจงปกติ

ค่าประมาณเบส์ $\underline{\beta}^*$ ของจากการแจกแจงภายหลัง (posterior distribution) ที่ใช้การแจกแจงก่อน คือ การแจกแจงปกติร่วม ของ β_0 และ β_1

$$\underline{\beta}^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)' = \underline{\mu}^* = \underline{V}^*\left(\underline{V}^{-1}\underline{\mu} + \underline{W}\underline{\tilde{\beta}}\right) \qquad (2)$$

โดยที่ $\underline{V}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของ β_0 และ β_1

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}^* = \left(\underline{V}^{-1} + \underline{W}^{-1}\right)^{-1}, \quad \underline{W}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\underline{X}'\underline{X}\right), \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย ของพารามิเตอร์ $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$

และ $\underline{\tilde{\beta}} = \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1}\underline{X}'\underline{Y}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(2) **ตัวแปรตามมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล**

(2.1) วิธีความควรจะเป็นสูงสุด เมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นมีการแจกแจงเป็นล็อกนอร์มัล

ในกรณีนี้เมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y มีการแจกแจงเป็นล็อกนอร์มัลอาศัยหลักการจำลอง นำ Y_i ที่จำลองได้จาก (5) ในหัวข้อ 3.2.1 มาแปลงให้เป็นการแจกแจงปกติ โดยใส่ ln ได้ $\ln Y_i$ นำ $\ln Y_i$ และ X_i ที่ได้ ไปแทน Y_i และ X_i ในสูตร

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$

(2.2) วิธีเบส์ เมื่อใช้การแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์เป็นปกติสองตัวแปร และฟังก์ชันความควรจะเป็นมีการแจกแจงล็อกนอร์มัล

ในกรณีนี้เมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y มีการแจกแจงเป็นล็อกนอร์มัลอาศัยหลักการจำลอง นำ Y_i ที่จำลองได้จาก (5) ในหัวข้อ 3.2.1 มาแปลงให้เป็นการแจกแจงปกติ โดยใส่ ln ได้ $\ln Y_i$ นำ $\ln Y_i$ และ X_i ที่ได้ ไปแทน Y_i และ X_i ในสูตร

$$\underline{\tilde{\beta}} = \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1}\underline{X}'\underline{Y}$$

และนำมาแทนค่าในสมการ (2) จะได้ตัวประมาณของพารามิเตอร์ β_0 และ β_1

3.2.3 การหาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองและการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณพารามิเตอร์ของการถดถอย

การคำนวณค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ของการถดถอยของแต่ละวิธี โดยกระทำซ้ำ 500 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ มีดังนี้

$$MSE_i = \frac{1}{500}\sum_{j=1}^{500}(\theta_{ij} - \beta_i)^2$$

$$AMSE = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} MSE_i$$

เมื่อ β_i คือ พารามิเตอร์การถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียวตัวที่ i, $i = 0,1$

θ_{ij} คือ ค่าประมาณพารามิเตอร์การถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียวตัวที่ i จากการประมาณ ครั้งที่ j ซึ่ง $\theta_{ij} = \hat{\beta}_{ij}$ สำหรับตัวประมาณความควรจะเป็น และ $\theta_{ij} = \beta_{ij}^{*}$ สำหรับตัวประมาณเบส์, $i = 0,1$; $j = 1,2,...,500$

k คือ จำนวนพารามิเตอร์การถดถอย ซึ่งเท่ากับ 2

MSE_i คือ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณตัวที่ i สำหรับพารามิเตอร์การถดถอยตัวที่ i, $i = 0,1$

3.2.4 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอย

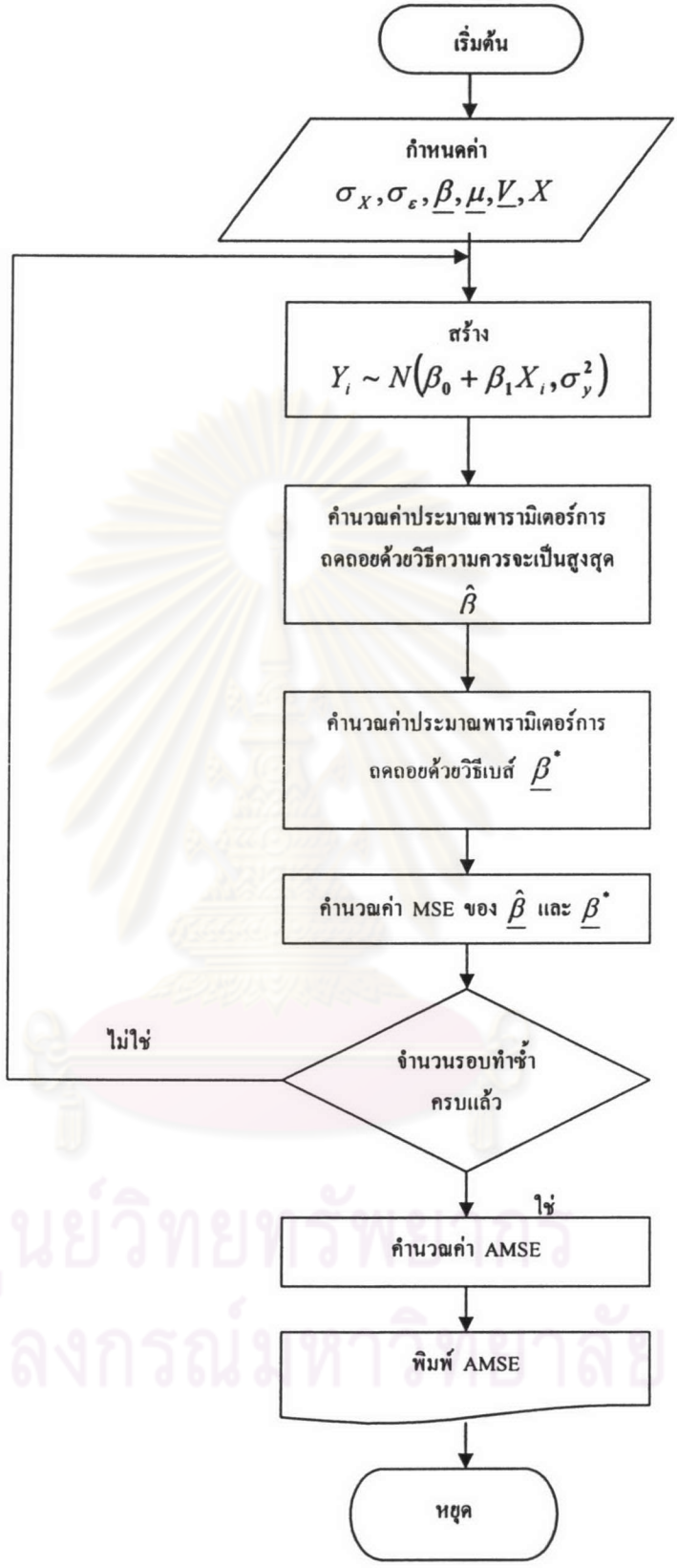
ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอยจะใช้ค่า AMSE เป็นค่าประเมิน วิธีประมาณใดที่มี AMSE ต่ำกว่าจะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากกว่า

3.2.5 สรุปผลการวิจัยในแต่ละสถานการณ์

เมื่อทำการเปรียบเทียบค่า AMSE จะทำการสรุปผลการทดลองว่า วิธีการประมาณใดที่เหมาะสมกับการประมาณพารามิเตอร์ ในสถานการณ์ นั้น ๆ

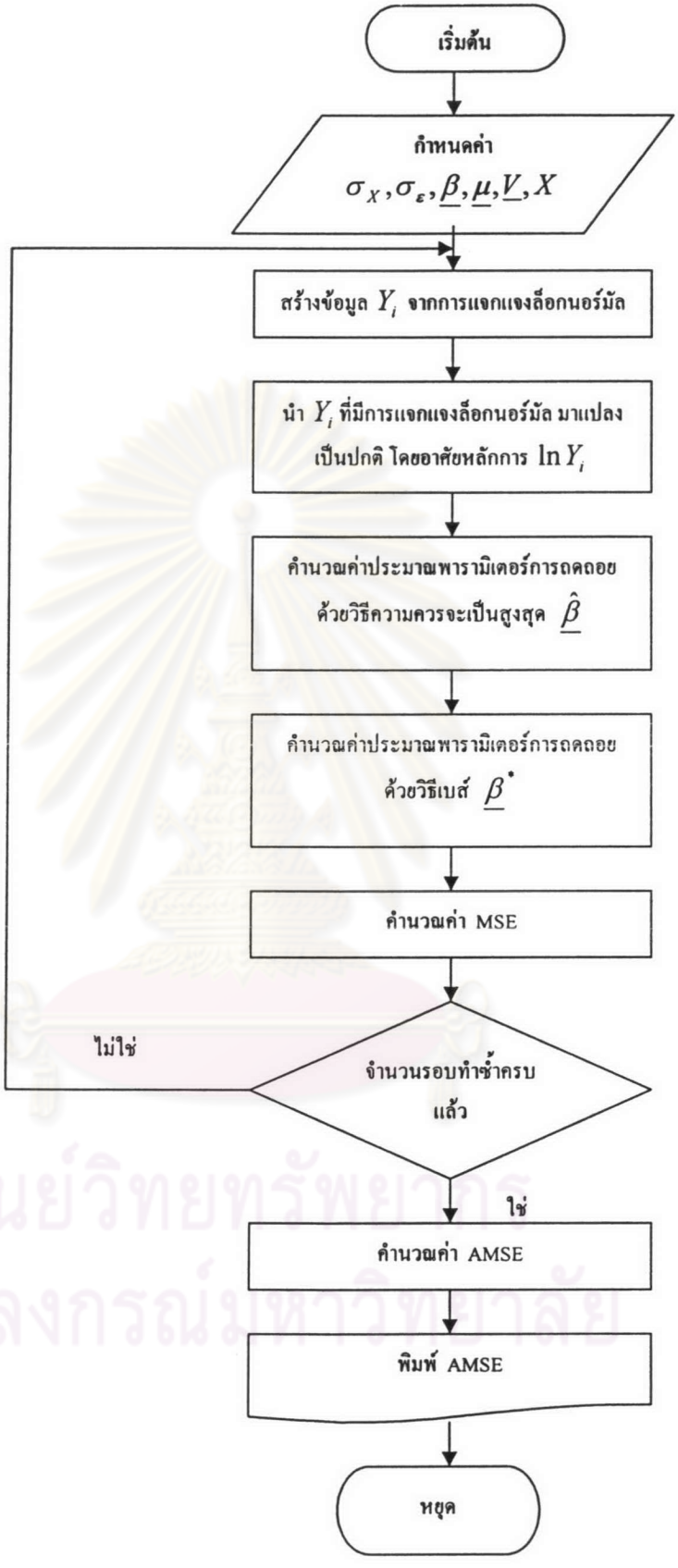
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.1 แสดงผังงานขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอยเมื่อ ตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบปกติ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.2 แสดงผังงานขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอยเมื่อตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มัล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย