บทที่ ๒

การทดสอบสมมติฐานเชิงเส้นโดยใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูด

๒.๑ การแจกแจงปกติ (Normal Distributions)

ให้

(๒.๑.๑) $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ x_p \end{pmatrix}$$

เป็นเวคเตอร์ที่ประกอบด้วย p components $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_p$ โดยที่แต่ละ x_i เป็นตัวแปรสุ่ม เรากล่าวว่า X มีการแจกแจงปกติ ถ้า joint density function ของ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_p$ เขียนได้ในรูป

(๒.๑.๒) $$f(X) = f(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_p) = k\, e^{-\frac{1}{2}(x-b)' A(x-b)}$$

โดยที่ k เป็นจำนวนคงที่

(๒.๑.๓) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot\cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots\cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

เป็น real positive definite symmetric matrix และ

$$(๒.๑.๔) \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ b_p \end{pmatrix}$$

เป็นเวคเตอร์ซึ่งมี components $b_1, b_2, \ldots, b_p$ เป็นจำนวนคงที่

เราจะใช้สัญลักษณ์ E (x) เขียนแทน expected value หรือมัชฌิม ของตัวแปรสุ่ม x

เราเรียก

$$(๒.๑.๕) \qquad E(X) = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ E(x_p) \end{pmatrix}$$

ว่า expected value ของเวคเตอร์สุ่ม X และจะใช้สัญลักษณ์ μ เขียนแทน E(X)

ให้

$$(๒.๑.๖) \qquad \sigma_{ij} = E\left[(x_i - E(x_i))(x_j - E(x_j)) \right]$$

กล่าวคือ σ_{ij} เป็น covariance ของ component ที่ i และ component ที่ j ของ X

เราเรียก matrix

$$(๒.๑.๗) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots\cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots\cdots & \sigma_{2p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots\cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

ว่า covariance matrix ของ X เราอาจแสดงได้ว่า[๑]

(๒.๑.๘) $\mu = E(X) = b$

(๒.๑.๙) $\Sigma = A^{-1}$

(๒.๑.๑๐) $k = \sqrt{|\Sigma^{-1}|}\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}p}$

ดังนั้นเราจึงเขียน density function ของเวคเตอร์สุ่ม **X** ได้เป็น

(๒.๑.๑๑) $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}p}\,|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$

ถ้า X มีdensity function ดังเช่น (๒.๑.๑๑) เราจะเขียนย่อ ๆ ว่า X มีการแจกแจง $N(\mu, \Sigma)$.

๒.๒ สมมติฐานเชิงเส้น (Linear Hypothesis)

ให้ Y_{ij} เป็นเวคเตอร์สุ่มซึ่งมีการแจกแจง $N(\mu^{(i)}, \Sigma)$ $i = 1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, N_i$. ให้ $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_q$

การทดสอบสมมติฐาน

$H_o^{(1)}$; $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \ldots\ldots\ldots = \mu^{(q)}$

ก็คือการทดสอบว่า Y_{ij} ทุกตัวมีการแจกแจงเดียวกัน สำหรับแต่ละค่าของ i ถ้าเราถือว่า $Y_{i1}, \ldots\ldots, Y_{iN_i}$ เป็นตัวอย่างจากประชากรประชากรหนึ่ง การทดสอบ $H_o^{(1)}$ ก็เท่ากับการทดสอบว่าประชากรต่าง ๆ ทั้ง q ประชากร มีมัชฌิมเดียวกัน

---

[๑] T.W ANDERSON An Introduction to Multivariate Statistical Analysis (New York. John Wiley and Sons Inc.) หน้า ๑๑ – ๑๗

ในทางปฏิบัติ Y_{ij} อาจเป็นเวกเตอร์ซึ่งมี components เป็นปริมาณที่ได้จากการวัดคุณลักษณะต่าง ๆ เช่น น้ำหนักผลปริมาณน้ำตาล ปริมาณน้ำ ปริมาณกรดหรือด่าง ฯลฯ. ของผลไม้ผลที่ j ซึ่งปลูกโดยใช้ปุ๋ยชนิดที่ i การทดสอบ $H_o^{(1)}$ ก็คือการทดสอบว่าปุ๋ย q ชนิดทำให้ผลไม้มีความเจริญงอกงามในด้านต่าง ๆ ที่เราสนใจเท่าเทียมกันหรือไม่

สมมติฐานข้างต้นนี้ เป็นเพียงกรณีพิเศษของสมมติฐานทั่ว ๆ ไปที่จะกล่าวถึงในลำดับต่อไปนี้

ให้

(๒.๒.๑)
$$X_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1\alpha} \\ x_{2\alpha} \\ \cdot\cdot \\ x_{p\alpha} \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots\ldots N$$

เป็นเวกเตอร์สุ่ม N ตัวซึ่งไม่ขึ้นต่อกันและแต่ละ X_α มีการแจกแจง $N(\beta Z_\alpha, \Sigma)$ โดยที่

(๒.๒.๒)
$$Z_\alpha = \begin{pmatrix} z_{1\alpha} \\ z_{2\alpha} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ z_{q\alpha} \end{pmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์ที่ทราบค่า และ

(๒.๒.๓)
$$\beta = (\beta_{iu})$$

เป็น matrix ขนาด $p \times q$ ซึ่ง components ต่าง ๆ เป็นจำนวนไม่ทราบค่า

ให้

(๒.๒.๔)
$$\beta = (\beta_1, \beta_2)$$

เป็นการแบ่ง matrix β ออกเป็น submatrices β_1 และ β_2 โดยที่ β_1, β_2 เป็น matrix ขนาด $p \times q_1$ และ $p \times q_2$ ตามลำดับ ดังนั้น $q_1 + q_2 = q$

ให้ H_o เป็นสมมติฐานในรูป

$$H_o \;;\quad \beta_1 = \beta_1^*$$

โดยที่ β_1^* เป็น matrix ที่กำหนดให้ matrix หนึ่ง

ต่อจากนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าการทดสอบสมมติฐาน $H_o^{(1)}$ เป็นกรณีพิเศษของสมมติฐาน H_o

ให้

(๒.๒.๕) $$(Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1N_1}, Y_{21}, \ldots, Y_{qN_q}) = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_q$$

ให้

(๒.๒.๖) $$\begin{cases} Z_{i\alpha} = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า } N_1 + \ldots + N_{i-1} < \alpha \leq N_1 + \ldots + N_i \\ 0 \quad \alpha \text{ ค่าอื่น ๆ เมื่อ } i = 1, \ldots, q-1 \end{cases} \\ Z_{q\alpha} = 1 \quad \text{ทุกค่า } \alpha \end{cases}$$

และ

(๒.๒.๗) $$Z_\alpha = \begin{pmatrix} z_{1\alpha} \\ \vdots \\ z_{q\alpha} \end{pmatrix}$$

ให้

(๒.๒.๘) $$\beta = (\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(q)})$$

โดยที่

(๒.๒.๙) $$\beta^{(1)} = \mu^{(1)} - \mu^{(q)}, \ldots, \beta^{(q-1)} = \mu^{(q-1)} - \mu^{(q)},\ \beta^{(q)} = \mu^{(q)}$$

แบ่ง matrix β โดยให้

(๒.๒.๑๐) $$\beta = (\beta_1, \beta_2)$$

โดยที่

$$(๒.๒.๑๑) \qquad \beta_1 = (\mu^{(1)} - \mu^{(q)}, \ldots\ldots, \mu^{(q-1)} - \mu^{(q)})$$

$$(๒.๒.๑๒) \qquad \beta_2 = \mu^{q}$$

เราจะเห็นได้ว่า X_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(\beta Z_\alpha, \Sigma)$ ถ้าเราให้ $\beta_1^* = 0$ เราจะได้ว่า H_o ในกรณีนี้ก็คือ $H_o^{(1)}$ นั่นเอง

ยังมีสมมติฐานอื่น ๆ ที่เป็นกรณีพิเศษของสมมติฐานทั่วไป H_o อีกมาก จะขอยกตัวอย่างมากล่าวไว้ ณ ที่นี้อีกหนึ่งตัวอย่าง

กราวนี้ขอสมมติว่าเราทำการทดลองดังกล่าวถึงข้างต้นโดยใช้ปุ๋ยหลายชนิดในที่ดินซึ่งมีความอุดมสมบูรณ์ต่าง ๆ กัน ในกรณีเช่นนี้ ความเจริญงอกงามในด้านต่าง ๆ ของผลไม้ย่อมขึ้นอยู่กับทั้งปุ๋ยและความอุดมสมบูรณ์ของที่ดินที่ใช้ทำการเพาะปลูก ดังนั้นเราต้องจำแนกผลลัพธ์ของการทดลองเป็นสองทางด้วยกัน กล่าวคือจำแนกตามปุ๋ยที่ใช้และจำแนกตามแปลงที่ใช้ สมมติว่าในการทดลองของเราเราใช้ที่ดิน I แปลงและใช้ปุ๋ย J ชนิด ดังนั้นเราต้องใช้หน่วยของการทดลองทั้งสิ้น IJ หน่วย ให้ Y_{ij} เป็นเวกเตอร์ซึ่งแสดงถึงความเจริญงอกงามในด้านต่าง ๆ ของหน่วยการทดลองในที่ดินแปลงที่ i และใช้ปุ๋ยชนิดที่ j

ให้

$$(๒.๒.๑๓) \qquad \mu_{ij} = E(Y_{ij})$$

$$(๒.๒.๑๔) \qquad \mu_{\cdot\cdot} = \frac{\sum_i^I \sum_j^J \mu_{ij}}{IJ}$$

$$(๒.๒.๑๕) \qquad \mu_{i\cdot} = \frac{\sum_j^J \mu_{ij}}{J}$$

$$(๒.๒.๑๖) \qquad \mu_{\cdot j} = \frac{\sum_i^I \mu_{ij}}{I}$$

จะเห็นว่า

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + (\mu_{i.} - \mu_{..}) + (\mu_{.j} - \mu_{..}) + (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})$$

$$= \mu + \lambda_i + \nu_j + \gamma_{ij}$$

ในที่นี้

(๒.๒.๑๘) $\mu = \mu_{..}$ หมายถึงค่าเฉลี่ยของผลที่ได้จากการทดลองทั้งหมด

(๒.๒.๑๙) $\lambda_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$ เป็นผลต่างของค่าเฉลี่ยของผลที่ได้จากที่ดินแปลงที่ i กับค่าเฉลี่ยของผลที่ได้จากการทดลองทั้งหมดที่ได้ เราเรียก λ_i ว่า effect ของที่ดินแปลงที่ i

(๒.๒.๒๐) $\nu_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$ เป็นผลต่างของค่าเฉลี่ยของผลที่ได้จากปุ๋ยชนิดที่ j กับค่าเฉลี่ยของผลที่ได้จากการทดลองทั้งหมด เราเรียก ν_j ว่า effect ของปุ๋ยชนิดที่ j และ

(๒.๒.๒๑) $\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$ เป็น interactions ระหว่างที่ดินแปลงที่ i และปุ๋ยชนิดที่ j

ในการทดลองบางอย่างเราอาจอนุโลมได้ว่า ไม่มี interactions ระหว่างที่ดินและปุ๋ยเลย กล่าวคือ γ_{ij} มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะสมมติว่าตัวอย่างที่ยกมากล่าวตอนนี้เป็นเช่นนี้ ดังนั้น

(๒.๒.๒๒) $$E(Y_{ij}) = \mu + \lambda_i + \nu_j$$

(๒.๒.๒๓) $$\sum_i^I \lambda_i = \sum_i^I (\mu_{i.} - \mu_{..})$$

$$= \frac{\sum_i^I \sum_j^J \mu_{ij}}{J} - \frac{\sum_i^I \sum_j^J \mu_{ij}}{J}$$

$$= 0$$

และ

(๒.๒.๒๔) $$\sum_{j}^{J} \nu_j = \sum_{j}^{J} (\mu_{.j} - \mu_{..}) = \frac{\sum_{i}^{I}\sum_{j}^{J} \mu_{ij}}{I} - \frac{\sum_{i}^{I}\sum_{j}^{J} \mu_{ij}}{I} = 0$$

ดังนั้น เราจึงสามารถเขียนได้ว่า

(๒.๒.๒๕) $$\lambda_I = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_{I-1})$$

(๒.๒.๒๖) $$\nu_J = -(\nu_1 + \nu_2 + \ldots\ldots + \nu_{J-1})$$

การทดสอบสมมติฐาน

$$H_o^{(2)} : \lambda_i = 0 \; ; \; i = 1, \ldots\ldots, I$$

ก็คือการทดสอบสมมติฐานที่ว่า ไม่มีความแตกต่างกันเลยระหว่าง effect ของที่ดิน ต่อจาก**นี้จะ**แสดงให้เห็นว่าสมมติฐาน $H_o^{(2)}$ เป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งของสมมติฐาน H_o ให้

(๒.๒.๒๗) $$(Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1J}, Y_{21}, \ldots\ldots, Y_{IJ}) = (X_1, X_2, \ldots\ldots X_N) \;;$$

$N = IJ$

และ

(๒.๒.๒๘) $$(\mu, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{I-1}, \nu_1, \nu_2, \ldots\ldots \nu_{J-1}) = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots\ldots, \beta^{(I)}, \beta^{(I+1)}, \ldots \beta^{(I+J-1)}) = \beta$$

ให้ Z เป็น matrix

$$
\begin{array}{ccccc|l}
\multicolumn{5}{c|}{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
11 \ldots 11 & 11 \ldots 11 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 11 \ldots 11 & 11 \ldots 11 \\ \hline
11 \ldots 11 & 00 \ldots 00 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 00 \ldots 00 & -1-1 \ldots -1-1 \\
00 \ldots 00 & 11 \ldots 11 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots & & \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\
00 \ldots 00 & 00 \ldots 00 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 11 \ldots 11 & -1-1 \ldots -1-1 \\ \hline
10 \ldots 0-1 & 10 \ldots 0-1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 10 \ldots 0-1 & 10 \ldots 0-1 \\
01 \ldots 0-1 & 01 \ldots 0-1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 01 \ldots 0-1 & 01 \ldots 0-1 \\
\ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots & & \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\
00 \ldots 1-1 & 00 \ldots 1-1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 00 \ldots 1-1 & 00 \ldots 1-1
\end{array}\right)} & \begin{array}{l} 1\ \text{แถว} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} (I-1)\ \text{แถว} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} (J-1)\ \text{แถว} \end{array} \\
\text{J คอลัมน์} & \text{J คอลัมน์} & & \text{J คอลัมน์} & \text{J คอลัมน์} & \\
\multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{ทั้งสิ้น IJ คอลัมน์}}} &
\end{array}
$$

ให้ Z_α เป็นคอลัมน์ที่ α ของ Z

แบ่ง

(๒.๒.๒๙) $$\beta = (\beta_1 , \beta_2)$$

โดยที่

(๒.๒.๓๐) $$\beta_1 = (\beta^{(2)} , \ldots\ldots , \beta^{(I)})$$

(๒.๒.๓๑) $$\beta_2 = (\beta^{(1)} , \beta^{(I+1)} , \ldots\ldots , \beta^{(I+J-1)})$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า X_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(\beta Z_\alpha , \Sigma)$ และในกรณีนี้ H_o ก็คือ $H_o^{(2)}$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถทดสอบสมมติฐานที่ว่าไม่มีความแตกต่างกันเลยระหว่าง effect ของปุ๋ย ชนิดต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดลอง เราจะได้กล่าวถึงรายละเอียดของการทดสอบสมมติฐานนี้ — และสมมติฐานที่กล่าวไว้ข้างต้นในบทที่ ๔

๒.๓ อัตราส่วนไลค์ลิฮูด (Likelihood Ratio)

ให้ X_α มี density function เป็น $f(X_\alpha ; \Theta)$ $\alpha = 1,\ldots,N$ โดยที่แต่ละ Θ เป็น parameter (Θ อาจเป็นปริมาณเวคเตอร์ก็ได้) เราเรียกเซท Ω ของค่าทั้งหลายของ Θ ว่า parametric space สมมติฐานทางสถิติก็คือ ข้อความใด ๆ ที่กล่าวถึงค่าของ Θ โดยทั่ว ๆ ไป เราจะเขียนสมมติฐานได้ในรูป

$$H : \Theta \in \omega$$

โดยที่ ω เป็น subset ที่กำหนดให้ของ Ω subset หนึ่ง การทดสอบสมมติฐานก็คือการพิจารณาดูค่าที่วัดได้ของ $X_1,\ldots\ldots, X_N$ แล้วตัดสินใจว่าจะยอมรับสมมติฐานนั้นหรือไม่ วิธีทดสอบสมมติฐานที่เราใช้ในที่นี้คือการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูด (likelihood ratio test)

สำหรับแต่ละค่าของ $X_1, \ldots\ldots, X_N$ เราได้

$$L(X_1,\ldots\ldots, X_N ; \Theta) = \prod_{\alpha=1}^{N} f(X_\alpha ; \Theta) \qquad (๒.๓.๑)$$

เป็นฟังก์ชั่นของ Θ เราเรียกฟังก์ชั่นนี้ว่าฟังก์ชั่นไลค์ลิฮูด (likelihood function) การทดสอบโดยใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูดนั้นก็คือ การทดสอบที่พิจารณาดูว่าอัตราส่วน

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\Theta \in \omega} L(X_1,\ldots\ldots, X_N ; \Theta)}{\max\limits_{\Theta \in \Omega} L(X_1,\ldots\ldots, X_N ; \Theta)} \qquad (๒.๓.๒)$$

มีค่ามากน้อยเพียงใด ถ้า λ มีค่าน้อย (ใกล้ศูนย์) เราจะปฏิเสธสมมติฐาน ในการนี้เราจำต้องหาค่า λ_o ไว้สำหรับพิจารณาเปรียบเทียบกับค่า λ ที่คำนวณได้จากค่าที่วัดได้ของ $X_1,\ldots\ldots\ldots, X_N$ ว่า λ มีค่าน้อยพอจนสมควรที่เราจะปฏิเสธสมมติฐานหรือไม่ เราหาค่า λ_o ได้โดยการเลือก λ_o ให้ความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมติฐานเมื่อมันเป็นจริงมีค่าน้อยมากพอ กล่าวคือ เลือก λ_o ให้

(๒.๓.๓) $\text{Prob}\ (\lambda \leq \lambda_0 \mid \Theta \in \omega) \leq \alpha$

โดยที่ $0 < \alpha < 1$ เราเรียก α ว่าขนาด (size) ของการทดสอบ (ในทางปฏิบัติเรานิยมใช้ $\alpha = 0.01$ หรือ 0.05) และเรียกค่า λ_0 ว่าค่าวิกฤต (critical value) .

ต่อจากนี้เราจะได้นำอัตราส่วนไลค์ลิฮูดมาใช้ทดสอบสมมติฐาน H_0 เนื่องจาก X_α มี density function ดังได้กล่าวไว้ใน (๒.๑.๑๑) คือ

(๒.๓.๔) $$f(X_\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}p} |\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(X_\alpha - \beta Z_\alpha)' \Sigma^{-1} (X_\alpha - \beta Z_\alpha)}$$

ดังนั้นถ้าเราให้ $\Theta = (\beta, \Sigma)$ เราจะได้ฟังก์ชั่นไลค์ลิฮูดเป็น

(๒.๓.๕) $$L(X_1, \ldots, X_N ; \Theta) = L(X_1, \ldots, X_N ; \beta, \Sigma)$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}Np} |\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}N} e^{-\frac{1}{2}\sum_\alpha^N (X_\alpha - \beta Z_\alpha)' \Sigma^{-1} (X_\alpha - \beta Z_\alpha)}$$

ซึ่งต่อไปเราจะเขียนแทนด้วย L

(๒.๓.๖) $$L = (2\pi)^{-\frac{1}{2}NP} |\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}N} e^{-\frac{1}{2}\sum_\alpha^N (X_\alpha - \beta Z_\alpha)' \Sigma^{-1} (X_\alpha - \beta Z_\alpha)}$$

ในกรณีนี้เราเห็นว่า parametric space คือ

(๒.๓.๗) $$\Omega = \left\{ (\beta, \Sigma) \mid \Sigma \text{ เป็น real positive semidefinite symmetric matrix} \right\}$$

ในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \beta_1 = \beta_1^*$$

เราทำได้โดยกำหนดให้

(๒.๓.๘) $$\omega = \left\{ (\beta, \Sigma) \mid \beta = (\beta_1^*, \beta_2) \text{ และ } \Sigma \text{ เป็น real positive semidefinite symmetric matrix} \right\}$$

เราจะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการคำนวณหาค่า λ สำหรับทดสอบ H_o

<u>ทฤษฎีบทที่ ๒.๓.๑</u>

ให้ $f(C) = \frac{1}{2} N \log |C| - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} c_{ij} d_{ij}$ ซึ่ง $C = (c_{ij})$ เป็น positive semidefinite และ $D = (d_{ij})$ เป็น positive definite เราจะได้ว่า $f(C)$ มีค่าสูงสุดเมื่อ $C = N D^{-1}$ และค่าสูงสุดนี้คือ

$$(๒.๓.๙) \quad f(N D^{-1}) = \frac{1}{2} Np \log N - \frac{1}{2} N \log |D| - \frac{1}{2} pN$$

<u>พิสูจน์</u> ดิฟเฟอเรนชิเอต $f(C)$ เทียบกับ elements c_{kl} ต่าง ๆ ของ C ได้

$$(๒.๓.๑๐) \quad \frac{\partial f(C)}{\partial c_{kl}} = \begin{cases} \frac{1}{2} N \operatorname{cof.}(c_{kk}) / |C| - \frac{1}{2} d_{kk} & \text{เมื่อ } k = l \\ N \operatorname{cof.}(c_{kl}) / |C| - d_{kl} & \text{เมื่อ } k \neq l \end{cases}$$

เราจึงได้ว่า $\frac{\partial f(C)}{\partial c_{kl}} = 0$ เมื่อ $N \operatorname{cof.}(c_{kl}) / |C| = d_{kl}$ นั่นคือ เมื่อ d_{kl}/N เป็น element ในแถวที่ k คอลัมน์ที่ l ของ C^{-1} ดังนั้น $C = N D^{-1}$ ทำให้ $f(C)$ มีค่าสูงสุด และเราได้ว่า

$$(๒.๓.๑๑) \quad f(N D^{-1}) = \frac{1}{2} N \log |N D^{-1}| - \frac{1}{2} \operatorname{tr} N D^{-1} D$$

$$= \frac{1}{2} N \log N^{p} |D^{-1}| - \frac{1}{2} \operatorname{tr} N I$$

$$= \frac{1}{2} p N \log N - \frac{1}{2} N \log |D| - \frac{1}{2} p N$$

ต่อจากนี้เราจะพิจารณาค่าของ λ เพื่อใช้ในการทดสอบสมมติฐาน H_o จากสูตร (๒.๓.๖) โดยใช้ σ_{ij}^{-1} เขียนแทน element ที่ i,j ของ Σ^{-1} เราได้

$$(๒.๓.๑๒) \quad L = (2\pi)^{-\frac{1}{2} Np} |\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2} N}$$

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha} - \sum_{g=1}^{q} \beta_{ig} z_{g\alpha}) \sigma_{ij}^{-1} (x_{j\alpha} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} z_{h\alpha}) \right]$$

$$(๒.๓.๑๓)\ \log L = -\frac{1}{2} pN \log (2\pi) + \frac{1}{2} N \log |\Sigma^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i.j}^{p} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha} - \sum_{g=1}^{q} \beta_{ig} z_{g\alpha}) \sigma_{ij}^{-1} (x_{j\alpha} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} z_{h\alpha})$$

เนื่องจาก log L เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มขึ้นของ L ดังนั้นในการหาค่าสูงสุดของ L เราจึงหาได้โดยหา L ที่ทำให้ log L มีค่าสูงสุด เพราะว่า

$$(๒.๓.๑๔)\ \max.\log L = -\frac{1}{2} pN \log 2\pi + \max. (\frac{1}{2} N \log |\Sigma^{-1}|\ ) - \max. (\frac{1}{2} \sum_{i.j}^{p} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha} - \sum_{g=1}^{q} \beta_{ig} z_{g\alpha}) \sigma_{ij}^{-1} (x_{j\alpha} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} z_{h\alpha}))$$

โดย ทฤษฎีบทที่ ๒.๓.๑ เราได้ว่า

$$(๒.๒.๑๕)\ \max. (\frac{1}{2} N \log |\Sigma^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{p} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha} - \sum_{g=1}^{q} \beta_{ig} z_{g\alpha}) \sigma_{ij}^{-1} (x_{j\alpha} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} z_{h\alpha})$$

$$= \frac{1}{2} p N \log N - \frac{1}{2} N \log |D| - \frac{1}{2} p N$$

โดยที่

$$(๒.๓.๑๖)\qquad D = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_{\alpha} - \beta z_{\alpha})(x_{\alpha} - \beta z_{\alpha})'$$

$$(๒.๓.๑๗)\qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_{\alpha} - \beta z_{\alpha})(x_{\alpha} - \beta z_{\alpha})' = \frac{1}{N} D$$

ดังนั้น

$$(๒.๓.๑๘)\quad \max.\log L = -\frac{1}{2} pN \log (2\pi) + \frac{1}{2} pN \log N - \frac{1}{2} N \log |D| - \frac{1}{2} pN$$

จากนี้เราต้องหาค่า β ที่ทำให้ log L มีค่าสูงสุด จากสูตร

(๒.๓.๑๓) เราดิฟเฟอเรนชิเอต log L เทียบกับ β_{kf} จะได้ว่า

$$(๒.๓.๑๙)\qquad \frac{\partial \log L}{\partial \beta_{kf}} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_{kj}^{-1} z_{f\alpha} (x_{j\alpha} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} z_{h\alpha})$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \sigma_{kj}^{-1} (c_{jf} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} a_{hf})$$

โดยที่

(๒.๓.๒๐) $$c_{jf} = \sum_{\alpha=1}^{N} x_{j\alpha} z_{f\alpha}$$

(๒.๓.๒๑) $$a_{hf} = \sum_{\alpha=1}^{N} z_{h\alpha} z_{f\alpha}$$

เมื่อกำหนดให้

(๒.๓.๒๒) $$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_{kf}} = 0$$

จะได้ว่า

(๒.๓.๒๓) $$c_{jf} - \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} a_{hf} = 0.$$

$$c_{jf} = \sum_{h=1}^{q} \beta_{jh} a_{hf}$$

นั่นคือ

(๒.๓.๒๔) $$C = \beta A$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

006342

(๒.๓.๒๕) $$\beta = CA^{-1}$$

และโดยที่

(๒.๓.๒๖) $$C = (c_{jf}) = \sum_{\alpha=1}^{N} X_{\alpha} Z'_{\alpha}$$

(๒.๓.๒๗) $$A = (a_{hf}) = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_{\alpha} Z'_{\alpha}$$

จากสูตร (๒.๓.๑๗) และ (๒.๓.๑๘) เราได้ว่า

(๒.๓.๒๘) $$\max. \log L = -\frac{1}{2} pN \log (2\pi) + \frac{1}{2} p N \log N - \frac{1}{2} N \log |N\hat{\Sigma}| \quad -\frac{1}{2} pN$$

$$= -\frac{1}{2} p N \log (2\pi) - \frac{1}{2} N \log |\hat{\Sigma}| \quad -\frac{1}{2} p N$$

(๒.๓.๒๙) $\max. L = (2\pi)^{-\frac{1}{2}pN} |\hat{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}N} e^{-\frac{1}{2}pN}$

โดยที่ $\hat{\Sigma}$ และ $\hat{\beta}$ เป็น matrices ซึ่งกล่าวไว้ในสูตร (๒.๓.๑๗) และ (๒.๓.๒๕) ตามลำดับ

ดังนั้นเราจึงได้ว่าค่าสูงสุดของฟังก์ชั่นไลค์ลิฮูด L สำหรับเซท Ω คือ

(๒.๓.๓๐) $\max\limits_{\beta, \Sigma} L = (2\pi)^{-\frac{1}{2}pN} |\hat{\Sigma}_{\Omega}|^{-\frac{1}{2}N} e^{-\frac{1}{2}pN}$

โดยที่

(๒.๓.๓๑) $\hat{\Sigma}_{\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \hat{\beta}_{\Omega} Z_\alpha)(X_\alpha - \hat{\beta}_{\Omega} Z_\alpha)'$

(๒.๓.๓๒) $\hat{\beta}_{\Omega} = CA^{-1}$

จากสูตร (๒.๓.๓๑) และ (๒.๓.๓๒) ได้ว่า

(๒.๓.๓๓) $N\hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \hat{\beta}_{\Omega} Z_\alpha)(X_\alpha - \hat{\beta}_{\Omega} Z_\alpha)'$

$= \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha X_\alpha' - \hat{\beta}_{\Omega} A \hat{\beta}_{\Omega}'$

$= \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha X_\alpha' - CA^{-1} C'$

ต่อจากนี้เราจะหาค่าสูงสุดของฟังก์ชั่นไลค์ลิฮูด L สำหรับเซท ω

จากสูตร (๒.๓.๒๕) เราจะได้ว่า

(๒.๓.๓๔) $\hat{\beta}_{\omega} A = C$

(๒.๓.๓๕) $(\beta_1^*, \hat{\beta}_{2\omega}) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = (C_1, C_2)$

$\beta_1^* A_{12} + \hat{\beta}_{2\omega} A_{22} = C_2$

(๒.๓.๓๖) $\hat{\beta}_{2\omega} = (C_2 - \beta_1^* A_{12}) A_{22}^{-1}$

ดังนั้นค่าสูงสุดของฟังก์ชั่นไลค์ลิฮูด L สำหรับเซท ω คือ

(๒.๓.๓๗) $$\max_{\beta_2, Z} . L = (2\pi)^{-\frac{1}{2}pN} |\hat{\Sigma}_\omega|^{-\frac{1}{2}N} e^{-\frac{1}{2}pN}$$

โดยที่

(๒.๓.๓๘) $$\hat{\Sigma}_\omega = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha - \hat{\beta}_\omega Z_\alpha)(X_\alpha - \hat{\beta}_\omega Z_\alpha)'$$

(๒.๓.๓๙) $$\hat{\beta}_\omega = (\beta_1^*, \hat{\beta}_{2\omega})$$

จาก (๒.๓.๓๘) ได้

(๒.๓.๔๐) $$N\hat{\Sigma}_\omega = \sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha - \hat{\beta}_\omega Z_\alpha)(X_\alpha - \hat{\beta}_\omega Z_\alpha)'$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha - \beta_1^* Z_\alpha^{(1)} - \hat{\beta}_{2\omega} Z_\alpha^{(2)})(X_\alpha - \beta_1^* Z_\alpha^{(1)} - \hat{\beta}_{2\omega} Z_\alpha^{(2)})'$$

โดยที่

(๒.๓.๔๑) $$Z_\alpha = \begin{pmatrix} Z_\alpha^{(1)} \\ Z_\alpha^{(2)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้นจากสูตร (๒.๓.๔๐) ได้

(๒.๓.๔๒) $$N\hat{\Sigma}_\omega = \sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha - \beta_1^* Z_\alpha^{(1)})(X_\alpha - \beta_1^* Z_\alpha^{(1)})' - \hat{\beta}_{2\omega} A_{22} \hat{\beta}_{2\omega}'$$

โดยที่ $\hat{\beta}_{2\omega}$ คือ matrix ที่กำหนดให้โดยสูตร (๒.๓.๓๖) ถ้า $\beta_1^* = 0$ เราจะได้ $N\hat{\Sigma}_\omega$ ดังได้กล่าวไว้ในสูตร (๒.๓.๔๒) คือ

(๒.๓.๔๓) $$N\hat{\Sigma}_\omega = \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha X_\alpha' - C_2 A_{22}^{-1} C_2'$$

ดังนั้นอัตราส่วนไลค์ลิฮูดสำหรับการทดสอบสมมติฐาน H_o คือ

(๒.๓.๔๔) $$\lambda = \frac{|\hat{\Sigma}_\Omega|^{\frac{N}{2}}}{|\hat{\Sigma}_\omega|^{\frac{N}{2}}}$$

$$= \frac{|N\hat{\Sigma}_\Omega|^{\frac{N}{2}}}{|N\hat{\Sigma}_\omega|^{\frac{N}{2}}}$$

เราเห็นได้ว่า λ เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มขึ้นของ

(๒.๓.๔๕) $$U = \frac{|N\hat{\Sigma}_{\Omega}|}{|N\hat{\Sigma}_{\omega}|}$$

ดังนั้นในบทที่ ๓ เราจะได้ศึกษาการแจกแจงของ U