บทที่ ๔

Power ของการทดสอบสมมติฐาน H_o

ให้ H_1 เป็นสมมติฐาน

$$H_1 : \begin{cases} \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij}) \geq \frac{1}{2} \quad \text{ทุก ๆ ค่าของ} \quad i,\ i=2,\ 3,\ldots,k\ ; \\ \\ \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij}) > \frac{1}{2} \quad \text{สำหรับค่าใดค่าหนึ่งของ} \quad i \end{cases}$$

สมมติฐานนี้เป็นสมมติฐานที่แย้งกับสมมติฐาน H_o ของเรา **เพื่อพิจารณาดู** power ของการทดสอบ H_o เทียบกับ H_1 เราต้องพิจารณาดูว่า $\text{Prob}\,(W > W_\alpha \mid H_1)$ มีค่ามากน้อยเพียงใด

๔.๑ <u>ทฤษฎีบท</u>

ให้ W เป็นตัวแปรสุ่มดังนิยามไว้ใน (๒.๑.๑), (๒.๑.๒), (๒.๑.๓) และ (๒.๑.๔) และให้ W_α^* เป็นจำนวนดังนิยามไว้ใน (๓.๒.๖) ถ้า H_1 จริงแล้ว เราจะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} \text{Prob}\,(W \geq W_\alpha^*) = 1$$

<u>พิสูจน์</u>

ให้

(๔.๑.๑) $\pi_i = \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij})$

(๔.๑.๒) $\pi_{ii'} = \text{Prob}\left\{(X_{1j} > X_{ij}) \text{ และ } (X_{1j} > X_{i'j})\right\}$.

เนื่องจาก

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } X_{1j} < X_{ij} \\ 1 & \text{ถ้า } X_{1j} > X_{ij} \end{cases}$$

ดังนั้น

(๔.๑.๓) $$W_{ij}\, W_{i'j'} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } X_{1j} > X_{ij} \text{ และ } X_{1j'} > X_{i'j'} \\ 0 & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

$$i, i' = 2, \ldots, k;\; j, j' = 1, \ldots, n$$

(๔.๑.๔) $$E(W_{ij}) = 0.\text{Prob}\,(X_{1j} < X_{ij}) + 1.\text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij})$$

$$= \pi_i$$

(๔.๑.๕) $$E(W) = E\left(\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} W_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} E(W_{ij})$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} \pi_i$$

$$= n \sum_{i=2}^{k} \pi_i$$

จาก (๔.๑.๓) เราจะได้

(๔.๑.๖) $E(W_{ij}\, W_{i'j'}) = 0.\text{Prob}\,(W_{ij}\, W_{i'j'} = 0) + 1.\text{Prob}(W_{ij}\, W_{i'j'} = 1)$

$= \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij}$ และ $X_{1j'} > X_{i'j'})$

เมื่อ $j \neq j'$ เราได้

$E\,(W_{ij}\, W_{i'j'}) = \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij}).\text{Prob}\,(X_{1j'} > X_{i'j'})$

เมื่อ $i \neq i'$, $j = j'$ เราได้

$E\,(W_{ij}\, W_{i'j'}) = \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij}$ และ $X_{1j} > X_{i'j})$

เมื่อ $i = i'$, $j = j'$ เราได้

$E\,(W_{ij}\, W_{i'j'}) = \text{Prob}\,(X_{1j} > X_{ij})$

ดังนั้นจาก (๔.๑.๑) และ (๔.๑.๒) เราจะได้

(๔.๑.๗) $$E\,(W_{ij}\, W_{i'j'}) = \begin{cases} \pi_i . \pi_{i'} & \text{เมื่อ } j \neq j' \\ \pi_{ii'} & \text{เมื่อ } i \neq i' \text{ และ } j = j' \\ \pi_i & \text{เมื่อ } i = i' \text{ และ } j = j' \end{cases}$$

(๔.๑.๘) $E(W^2) = E(\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} W_{ij})^2$

$$= E(\sum_{i=2}^{k} \sum_{i'=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} W_{ij} W_{i'j'})$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \sum_{i'=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} E(W_{ij} W_{i'j'})$$

$$= n(n-1) \left(\sum_{i=2}^{k} \sum_{i'=2}^{k} \pi_i \pi_{i'} \right) + n \left(\sum_{i \neq i'}\sum \pi_{ii'} \right) + n \sum_{i=2}^{k} \pi_i$$

$$= n(n-1) \left(\sum_{i=2}^{k} \pi_i \right)^2 + n \sum_{i \neq i'}\sum \pi_{ii'} + n \sum_{i=2}^{k} \pi_i$$

(๔.๑.๙) $Var(W) = E(W^2) - \left\{ E(W) \right\}^2$

$$= n(n-1) \left(\sum_{i=2}^{k} \pi_i \right)^2 + n \sum_{i \neq i'}\sum \pi_{ii'} + n \sum_{i=2}^{k} \pi_i - n^2 \left(\sum_{i=2}^{k} \pi_i \right)^2$$

$$= n \left[-(\sum_{i=2}^{k} \pi_i)^2 + \sum_{i \neq i'}\sum \pi_{ii'} + \sum_{i=2}^{k} \pi_i \right]$$

(๔.๑.๑๐) $$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\ (W > W^*_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left(\frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} > \frac{W^*_\alpha - E(W)}{\sqrt{Var(W)}}\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left(\frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \leq \frac{W^*_\alpha - E(W)}{\sqrt{Var(W)}}\right)$$

จาก (๓.๒.๖), (๔.๑.๕), และ (๔.๑.๙) เราได้

(๔.๑.๑๑) $$\frac{W^*_\alpha - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} = \frac{Z_\alpha \sqrt{\frac{n(k-1)(k+1)}{12}} + \frac{n(k-1)}{2} - n\sum_{i=2}^{k} \pi_i}{\sqrt{n\left(-(\sum_{i=2}^{k} \pi_i)^2 + \sum_{i \neq i'} \pi_{ii'} + \sum_{i=2}^{k} \pi_i\right)}}$$

ให้

(๔.๑.๑๒) $$M = Z_\alpha \sqrt{\frac{(k-1)(k+1)}{12}}$$

(๔.๑.๑๓) $$N = \sqrt{-(\sum_{i=2}^{k} \pi_i)^2 + \sum_{i \neq i'} \pi_{ii'} + \sum_{i=2}^{k} \pi_i}$$

เราจะได้

(๔.๑.๑๔) $$\frac{W^*_\alpha - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} = \frac{\sqrt{n}\, M + \frac{n(k-1)}{2} - n\sum_{i=2}^{k} \pi_i}{\sqrt{n}\, N}$$

$$= \frac{M + \sqrt{n} \sum_{i=2}^{k} (\frac{1}{2} - \pi_i)}{N}$$

จาก H_1 เราได้

(๔.๑.๑๕) $$\sum_{i=2}^{k} (\frac{1}{2} - \pi_i) < 0$$

ดังนั้น

(๔.๑.๑๖) $$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{W_\alpha^* - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \right] = -\infty$$

(๔.๑.๑๗) $$\lim_{n\to\infty} \Phi \left[\frac{W_\alpha^* - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \right] = 0$$

แทนค่าใน (๔.๑.๑๐) จะได้

(๔.๑.๑๘) $$\lim_{n\to\infty} \text{Prob} \left[\frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} > \frac{W_\alpha^* - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \right] = 1$$

นั่นคือ $$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\,(W > W_\alpha^*) = 1$$