บทที่ 2

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าเชิงเส้น

2.1 กล่าวนำ

สิ่งแรกที่ต้องกระทำในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า คือ ต้องสร้างสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ (Matrix Equations) จากวงจรไฟฟ้าซึ่งสามารถกระทำได้หลายวิธีด้วยกัน โดยแต่ละวิธีก็มีจุดเด่นและข้อบกพร่องต่างๆ กัน ในการสร้างโปรแกรมวิเคราะห์วงจรอิเล็กทรอนิกส์ทั่วไป จะต้องสามารถทำงานได้โดยมีองค์ประกอบของวงจรหลาย ๆ ชนิดต่างกันจากการศึกษาพบว่าวิธีการสร้างสมการเมตริกซ์ด้วยวิธี Modified Nodal Approach [2] เป็นวิธีที่ง่าย สะดวก และมีประสิทธิภาพในการเขียนโปรแกรมวิเคราะห์วงจรอิเล็กทรอนิกส์ และได้เลือกใช้วิธี LU factorization ในการแก้สมการเมตริกซ์

2.2 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยวิธี Nodal Analysis

เมื่อใช้ทฤษฎีผลรวมของกระแสไฟฟ้า (Kirchhoff's Current Law) ซึ่งกล่าวไว้ว่า "ผลรวมทางพีชคณิตของกระแสที่โนดใด ๆ ก็ตาม มีค่าเป็นศูนย์" กับวงจรไฟฟ้าเชิงเส้นใด ๆ แล้ว ผลลัพธ์ของสมการที่ได้สามารถจัดอยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ดังสมการ 2.2.1

$$\underline{Y}\,\underline{V} = \underline{J} \qquad \text{...(2.2.1)}$$

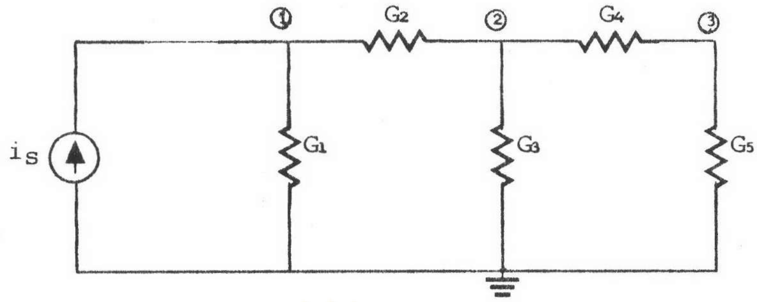
เมื่อ

$\underline{Y}$ เป็น Node Admittance Matrix

$\underline{V}$ เป็น เวกเตอร์ของแรงดันที่โนดต่าง ๆ เมื่อเทียบกับโนดอ้างอิง (Datum Node)

$\underline{J}$ เป็น เวกเตอร์กระแสของแหล่งจ่ายกระแสในวงจร

<u>ตัวอย่าง</u>



รูปที่ 2.1

จากวงจรข้างบนสามารถเขียนสมการ KCL ได้ดังนี้

KCL ที่ node 1: $G_1v_1 + G_2(v_1-v_2) - I_s = 0$ ...(2.2.2)

KCL ที่ node 2: $-G_2(v_1-v_2) + G_3v_2 + G_4(v_2-v_3) = 0$ ...(2.2.3)

KCL ที่ node 3: $-G_4(v_2-v_3) + G_5v_3 = 0$ ...(2.2.4)

สมการที่ (2.2.2) ถึง (2.2.4) สามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ดังนี้ คือ

$$\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น

$$\underline{Y} = \begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{V} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{J} = \begin{vmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

เราสามารถเขียนสมการ KCL เมตริกซ์ได้โดยใช้วิธีพิจารณา (Inspection Method) ได้โดย เมื่อระบบสมการเมตริกซ์เขียนได้เป็น

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots y_{1j} & \ldots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots y_{2j} & \ldots y_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ y_{i1} & y_{i2} & \ldots y_{ij} & \ldots y_{in} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots y_{nj} & \ldots y_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_i \\ . \\ . \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j_1 \\ j_2 \\ . \\ . \\ j_i \\ . \\ . \\ j_n \end{vmatrix} \qquad \ldots(2.2.5)$$

หลักพิจารณา

y_{ii} คือ ผลรวมทางพีชคณิตของค่า Admittance ขององค์ประกอบของวงจรทั้งหมดที่ต่ออยู่กับโนด i มีค่าเป็นบวก

y_{ij} คือ ผลรวมทางพีชคณิตของค่า Admittance ขององค์ประกอบของวงจรทั้งหมดที่ต่ออยู่ระหว่างโนด i กับโนด j มีค่าเป็นลบ

j_i คือ ผลรวมทางพีชคณิตของค่ากระแสของแหล่งจ่ายกระแสทั้งหมดที่ต่ออยู่กับโนด i โดยถ้าทิศทางของกระแสไหลเข้าสู่โนดจะมีเครื่องหมายเป็นบวก และถ้าทิศทางของกระแสไหลออกจากโนดจะมีเครื่องหมายเป็นลบ

2.3 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยวิธีการ Modified Nodal Analysis

ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยวิธี Nodal Analysis นั้น จะสามารถทำงานได้สะดวกและง่าย เมื่อวงจรมีแหล่งจ่ายพลังงานเป็นแหล่งจ่ายกระแส (Current Sources) เท่านั้น หากว่าวงจรนั้นมีแหล่งจ่ายแรงดัน (Voltage Sources) ต่ออยู่ในวงจรด้วยแล้ว การใช้ Nodal Analysis จะกระทำได้ยากขึ้น เนื่องจากว่าสมการ $\underline{Y}\ \underline{V} = \underline{J}$ นั้น ไม่สามารถบรรจุค่าคงที่ซึ่งเป็นค่าแรงดันของแหล่งจ่ายได้ ดังนั้นจึงได้ปรับปรุงวิธี Nodal Analysis โดยเพิ่มกระแสใน Branch ที่กำลังสนใจให้เป็นตัวแปรตัวหนึ่งของสมการ และเพิ่มสมการกระแสสัมพันธ์ BCR (Branch Constitutive Relative Equations) เข้ามาในระบบสมการด้วย

วิธี Nodal Analysis ที่ปรับปรุงขึ้นนี้ เรียกว่า MNA (Modified Nodal Approach) [2] สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{vmatrix} Y_R & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{J} \\ \underline{E} \end{vmatrix} \qquad \ldots(2.3.1)$$

โดย

Y_R คือ Nodal Admittance Matrix

B คือ ส่วนที่เพิ่มเติมเข้ามาใน KCL เนื่องจากการเพิ่มตัวแปรของระบบที่เป็นกระแสไฟฟ้า

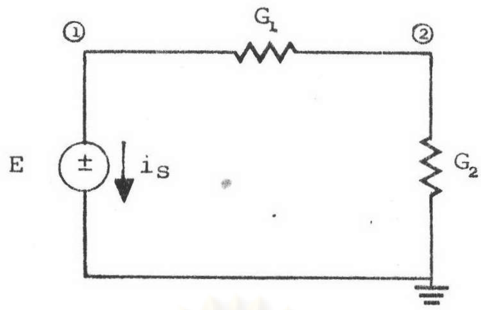
C, D คือ ส่วนที่เป็นสมการกระแสสัมพันธ์ (BCR) ที่เพิ่มเข้ามาในระบบ

$\underline{J}$ คือ ค่าของกระแสจากแหล่งจ่ายกระแสในวงจร

$\underline{E}$ คือ ค่าของแรงดันจากแหล่งจ่ายแรงดันในวงจร

MNA สามารถใช้แก้ปัญหาเมื่อองค์ประกอบของวงจร ที่ต้องการคำตอบประกอบไปด้วยแหล่งจ่ายแรงดัน, องค์ประกอบวงจรพวก Current Controlled และระบบวงจรที่ต้องการให้กระแสใน Branch ใด ๆ เป็นตัวแปรได้ง่าย

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.2

โดยวิธี MNA จะเพิ่ม i_s เป็นตัวแปรตัวหนึ่งในระบบ สมการวงจรในรูปที่ 2.2 จะเขียนได้ว่า

KCL ที่ node 1: $G_1(v_1-v_2) + i_s = 0$ ...(2.3.2)

KCL ที่ node 2: $-G_1(v_1-v_2) + G_2v_2 = 0$ ...(2.3.3)

สมการ BCR ที่เพิ่มเข้ามาจะอยู่ในรูป

$$v_1 = E \qquad ...(2.3.4)$$

จากสมการที่ 2.3.2 ถึง 2.3.4 นำมาเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{vmatrix} G_1 & -G_1 & +1 \\ -G_1 & G_1+G_2 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{vmatrix} \qquad ...(2.3.5)$$

โดย $$Y_R = \begin{vmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{vmatrix}$$

$$B^T = [+1 \quad 0\ ]$$
$$C = [+1 \quad 0\ ]$$
$$D = [\ 0\ ]$$
$$J = [\ 0\ ]$$
$$E = [\ E\ ]$$

2.4 การหาคำตอบของสมการเมตริกซ์

การหาคำตอบ (Solutions) ของสมการเมตริกซ์โดยใช้วิธี LU factorization [3] เป็นวิธีการที่เหมาะสมที่จะใช้ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า โดยมีหลักการดังนี้ คือ

ให้ระบบสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป

$$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{b} \qquad \ldots(2.4.2)$$

เมื่อ $\underline{A}$ เป็น Matrix ที่มีขนาด n x n

$\underline{b}$ เป็น n-Vector ของค่าคงที่ที่รู้ค่าแล้ว

$\underline{X}$ เป็น n-Vector ของตัวแปรที่ไม่รู้ค่า

หรือเมื่อเขียนในรูปเมตริกซ์ จะได้

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ . & . \qquad\quad . \\ . & . \qquad\quad . \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix}$$

แยกองค์ประกอบของเมตริกซ์ A เป็น

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{U} \qquad \ldots(2.4.3)$$

โดย

$$\underline{L} = \begin{vmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ . & . & . & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} \ldots\ldots & l_{nn} \end{vmatrix} \qquad \ldots(2.4.4)$$

และ

$$\underline{U} = \begin{vmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \ldots\ldots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} \ldots\ldots & u_{2n} \\ & & 1 \ \ldots\ldots & u_{3n} \\ & & . & \\ & & & . \\ & & & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots(2.4.5)$$

$\underline{L}$ ถูกเรียกว่าเป็น Lower Triangular Matrix และ

$\underline{U}$ ถูกเรียกว่าเป็น Upper Triangular Matrix และ

ระบบสมการเมตริกซ์ที่ 2.4.1 จะถูกเขียนใหม่ได้เป็น

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad \ldots(2.4.6)$$

ถ้ากำหนดจให้

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{Z} \qquad \ldots(2.4.7)$$

แทนค่า $\underline{Z}$ ในสมการ 2.4.6 จะได้ว่า

$$\underline{L}\,\underline{Z} = \underline{b} \qquad \ldots(2.4.8)$$

เนื่องจากเมตริกซ์ L ที่รูปแบบเป็นสามเหลี่ยม ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่พิเศษ ทำให้เราสามารถคำนวณหาค่า z ได้ง่ายดาย โดย

$$\begin{aligned}
l_{11} z_1 &= b_1 \\
l_{21} z_1 + l_{22} z_2 &= b_2 \\
l_{31} z_1 + l_{32} z_2 + l_{33} z_3 &= b_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots &= \ldots \\
l_{n1} z_1 + l_{n2} z_2 + \ldots\ldots + l_{nn} z_n &= b_n
\end{aligned}$$

จากชุดของสมการข้างบนนี้ทำให้สามารถคำนวณค่า z ได้โดย

$$\begin{aligned}
z_1 &= b_1 / l_{11} \\
z_2 &= (b_2 - l_{21} \cdot z_1)/l_{22} \\
z_3 &= (b_3 - l_{31} \cdot z_1 - l_{32} \cdot z_2)/ l_{33}
\end{aligned}$$

เขียนเป็นแบบทั่วไป (General Form) ได้เป็น

$$z_1 = b_1/l_{11}$$

$$z_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot z_j)/l_{ii} \qquad ;i = 2,3,\ldots,n \qquad \ldots(2.4.9)$$

การหาค่า z ในสมการที่ 2.4.9 เรียกว่าวิธี Forward Substitution จะสังเกตได้ว่า องค์ประกอบของเมตริกซ์ L ที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมจะต้องมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จึงจะ

สามารถหาค่าของ z ได้ และเมื่อได้ค่าของ z แล้ว แทนค่า z ลงใน สมการที่ 2.4.7 จะสามารถหาค่า x ออกมาได้

จาก $\underline{U}\,\underline{x} = \underline{z}$

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + \dots + u_{1n} x_n &= z_1 \\ x_2 + u_{23} x_3 + \dots + u_{2n} x_n &= z_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots &= .. \\ x_{n-1} + u_{n-1,n} x_n &= z_{n-1} \\ x_n &= z_n \end{aligned}$$

แทนค่า x_n จากสมการล่างสุดลงในสมการถัดขึ้นไปข้างบนเรื่อย ๆ เพื่อหาค่า $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ เรียกวิธีนี้ว่าวิธี Backward Substitution สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้เป็น

$$x_n = z_n$$

$$x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} z_j \quad ; i = n-1, n-2, .., 1 \qquad (2.4.10)$$

การแยกแฟคเตอร์ของเมตริกซ์ A ออกเป็น L และ U กระทำโดย

$$l_{k1} = a_{k1} \quad ; \qquad k = 1, 2, \dots, n \qquad \dots(2.4.11)$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \quad ; i => k \qquad \dots(2.4.12)$$

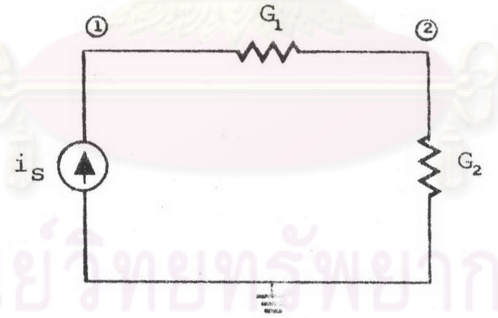
และ $u_{1k} = a_{1k}/l_{11} \quad ; \quad k = 2, 3, \dots, n \qquad \dots(2.4.13)$

$$u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}) / l_{kk} \quad ; \quad j > k \qquad ...(2.4.14)$$

2.5 การสร้างสมการเมตริกซ์ด้วยวิธีประทับองค์ประกอบ (Element Stamp Method)

ในการสร้างสมการเมตริกซ์ที่ใช้ในโปรแกรมวิเคราะห์วงจรไฟฟ้านั้น มีวิธีที่ง่ายและสะดวกต่อการเขียนโปรแกรม คือ วิธีประทับองค์ประกอบของวงจรแต่ละองค์ประกอบลงในระบบสมการทีละองค์ประกอบจนครบองค์ประกอบทั้งหมด ซึ่งผลสุดท้ายจะได้ระบบสมการของวงจรไฟฟ้านั้น ๆ เนื่องจากว่า องค์ประกอบของวงจรแต่ละชนิดเมื่อนำไปสร้างเป็นสมการเมตริกซ์แล้วจะมีตำแหน่งที่เติมลงไปในตำแหน่งของสมการเมตริกซ์ตายตัว เรียกรูปแบบตำแหน่งในสมการเมตริกซ์นี้ว่าแบบประทับ (Stamp) ดังนั้น การสร้างสมการเมตริกซ์จะกระทำได้โดยง่าย คือ เมื่อได้รับข้อมูลจากภาครับข้อมูลมาว่า องค์ประกอบของวงจรตัวนี้เป็นองค์ประกอบชนิดไหนและต่ออยู่ระหว่างโนดอะไรบ้างแล้ว ก็เติมค่าขององค์ประกอบนั้น ลงในสมการเมตริกซ์ในตำแหน่งที่อยู่ตามแบบประทับของชนิดองค์ประกอบนั้น ๆ แต่ละชนิด

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.3

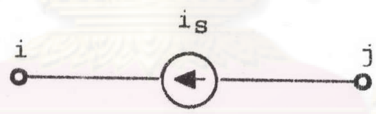
ระบบสมการเมตริกซ์ของรูปที่ 2.3 คือ

$$\begin{vmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +I_s \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \ldots(2.5.1)$$

ลักษณะแบบประทับของความต้านทาน คือ

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} i & j & & \mathrm{RHS} \end{array} \\ \text{KCL } i: & \multirow{2}{*}{$\begin{vmatrix} G & -G \\ -G & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$} \\ \text{KCL } j: & \end{array}$$

ลักษณะแบบประทับของแหล่งจ่ายกระแส คือ



$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} i & j & & \mathrm{RHS} \end{array} \\ \text{KCL } i: & \multirow{2}{*}{$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} +I_s \\ -I_s \end{vmatrix}$} \\ \text{KCL } j: & \end{array}$$

จากรูปที่ 2.3 มี G_1 ต่ออยู่ระหว่างโนดที่ 1 และ 2 G_2 ต่อระหว่างโนดที่ 2 กับโนดอ้างอิง (โนดที่ 0)

เมื่อประทับองค์ประกอบ G_1 ลงในระบบสมการ จะได้

$$
\begin{array}{lcc}
 & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & RHS \\
\text{KCL 1 :} & \multirow{2}{*}{} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{KCL 1 :} \\
\text{KCL 2 :}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \;\;1 & \;\;\;2 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cc} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c}
RHS \\
\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right|
\end{array}
$$

และประทับองค์ประกอบ G_2 ลงในระบบสมการ จะได้

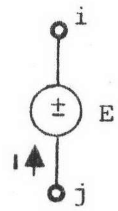
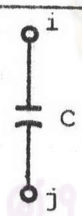
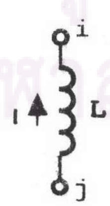
$$
\begin{array}{l}
\text{KCL 1 :} \\
\text{KCL 2 :}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \;\;1 & \;\;\;2 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cc} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c}
RHS \\
\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right|
\end{array}
$$

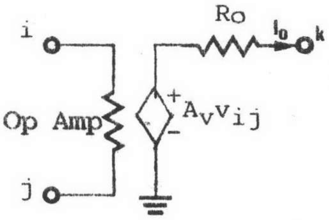
เมื่อประทับองค์ประกอบ I_s ลงในระบบสมการ จะได้

$$
\begin{array}{l}
\text{KCL 1 :} \\
\text{KCL 2 :}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \;\;1 & \;\;\;2 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cc} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c}
RHS \\
\left|\begin{array}{c} I_s \\ 0 \end{array}\right|
\end{array}
$$

ซึ่งหลังจากทำการประทับองค์ประกอบทุกตัวแล้ว ระบบสมการที่ได้จะเป็นระบบ สมการที่สมบูรณ์ และเมื่อแก้ระบบสมการนี้แล้วคำตอบที่ได้จะเป็นค่าแรงดันที่โนดต่าง ๆ นั่นเอง

ตารางที่ 2.5.1 <u>แบบประทับของงค์ประกอบวงจรแบบพื้นฐาน</u>

องค์ประกอบ	สัญลักษณ์	แบบประทับเมตริกซ์	สมการคณิตศาสตร์
Current Source		$\begin{array}{c\|cc\|c\|} & v_i & v_j & RHS \\ i & 0 & 0 & +i_s \\ j & 0 & 0 & -i_s \end{array}$	$I_i = +i_s$ $I_j = -i_s$
Voltage Source		$\begin{array}{c\|ccc\|c\|} & v_i & v_j & I & \\ i & & & -1 & \\ j & & & +1 & \\ BCR & 1 & -1 & & E \end{array}$	$I_i - I = 0$ $I_j + I = 0$ $v_i - v_j = E$
Admittance		$\begin{array}{c\|cc\|c\|} & v_i & v_j & RHS \\ i & G & -G & 0 \\ j & -G & G & 0 \end{array}$	$I_i+(Gv_i - Gv_j) = 0$ $I_j-(Gv_i - Gv_j) = 0$
Capacitor		$\begin{array}{c\|cc\|c\|} & v_i & v_j & RHS \\ i & C/h & -C/h & (C/h)v_{n-1} \\ j & -C/h & C/h & (-C/h)v_{n-1} \end{array}$	$I_i+((C/h)v_i-(C/h)v_j)=(C/h)v_{n-1}$ $I_j-((C/h)v_i-(C/h)v_j)=-(C/h)v_{n-1}$
Inductor		$\begin{array}{c\|ccc\|c\|} & v_i & v_j & I & RHS \\ i & & & 1 & \\ j & & & -1 & \\ BCR & 1 & -1 & -L/h & -(L/h)v_{n-1} \end{array}$	$I_i + I= 0$ $I_j - I= 0$ $v_i-v_j-I(L/h)=(L/h)v_{n-1}$

องค์ประกอบ	สัญญลักษณ์	แบบประทับเมตริกซ์	สมการคณิตศาสตร์
Op Amp		$\begin{array}{c\|cccc\|\|c\|} & v_i & -v_j & v_k & I_o & RHS \\ i & G_i & -G_i & & & 0 \\ j & -G_i & G_i & & & 0 \\ k & & & & 1.0 & 0 \\ BCR & A_v & -A_v & -1 & R_o & 0 \end{array}$	$I_i+(G_i v_i-G_i v_j) = 0$ $I_j-(G_i v_i-G_i v_j) = 0$ $I_k+I_o = 0$ $A_v(v_i-v_j)+I_oR_o-v_k=0$