การแยกส่วนและการแยกส่วนประกอบที่เกี่ยวข้องกับกราฟลูกบาศก์ กราฟ k-ส่วนบริบูรณ์ และกราฟต้นไม้

นายจิณดิษฐ์ ละออปักษิณ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-03-1455-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

DECOMPOSITIONS AND FACTORIZATIONS INVOLVING CUBES,
COMPLETE k-PARTITE GRAPHS AND TREES

Mr. Jinnadit Laorpaksin

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2001
ISBN 974-03-1455-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแยกส่วนและการแยกส่วนประกอบที่เกี่ยวข้องกับกราฟลูกบาศก์ กราฟ k -ส่วนบริบูรณ์ และกราฟต้นไม้
โดย	นายจิณดิษฐ์ ละออปักษิณ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

………………………………………….. รองคณบดีฝ่ายบริหาร
(รองศาสตราจารย์ ดร. พิพัฒน์ การเที่ยง) รักษาราชการแทนคณบดี
คณะวิทยาศาสตร์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………………… ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์)

………………………………………….... อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล)

……………………………………………กรรมการ
(อาจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ : การแยกส่วนและการแยกส่วนประกอบที่เกี่ยวข้องกับกราฟลูกบาศก์ กราฟ k-ส่วนบริบูรณ์ และกราฟต้นไม้(DECOMPOSITIONS AND FACTORIZATIONS INVOLVING CUBES, COMPLETE k-PARTITE GRAPHS AND TREES) อ. ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล, 52 หน้า. ISBN 974-03-1455-4.

วิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาและรวบรวมผลงานที่เกี่ยวข้องกับการแยกส่วนและการแยกส่วนประกอบของกราฟลูกบาศก์ กราฟ k-ส่วนบริบูรณ์ และกราฟต้นไม้ กล่าวคือ การแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน การแยกส่วนของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{t,t}$ เป็นกราฟ d-ลูกบาศก์ ที่ถอดแบบกัน เมื่อ $t = 2^{d-1}$ และการแยกส่วนประกอบของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{m,n}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน นอกจากนี้เราแสดงการแยกส่วนของกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน การแยกส่วนประกอบของกราฟ 3-ส่วนบริบูรณ์ $K_{1,m,m(m-1)}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน และไม่มีการแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว เมื่อ $m, p \geq 2$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา **คณิตศาสตร์** ลายมือชื่อนิสิต..

สาขาวิชา **คณิตศาสตร์** ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.......................................

ปีการศึกษา 2544 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

4272232423 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: DECOMPOSITION, FACTORIZATION

JINNADIT LAORPAKSIN : DECOMPOSITIONS AND FACTORIZATIONS INVOLVING CUBES, COMPLETE k-PARTITE GRAPHS AND TREES.THESIS ADVISOR: ASSOC. PROF. WANIDA HEMAKUL, Ph.D., 52 pp. ISBN 974-03-1455-4.

This thesis surveys and collects many classes of decompositions and factorizations involving cubes, complete k-partite graphs and trees, that is a decomposition of the n-cube Q_n into isomorphic trees having n edges, a decomposition of the complete bipartite graph $K_{t,t}$ into isomorphic d-cubes where $t = 2^{d-1}$ and a factorization of the complete bipartite graph $K_{m,n}$ into isomorphic spanning trees. Moreover, we show a decomposition of the graph k-ary n-cube Q_n^k into isomorphic trees having n edges, a factorization of the complete 3-partite graph $K_{1,m,m(m-1)}$ into isomorphic spanning trees and the complete p-partite graph $K_{m,m,\ldots,m}$ can not be factorizable into spanning trees where $m, p \geq 2$.

Department **Mathematics** Student's signature...

Field of study **Mathematics** Advisor's signature...

Academic year **2001** Co-advisor's signature -

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากบุคคลหลายท่าน จึงขอแสดงความขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้ ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาถ่ายทอดความรู้และให้คำปรึกษาที่มีประโยชน์ยิ่ง ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์ และอาจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ ประธานกรรมการ และกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้ข้อแนะนำและความช่วยเหลือด้านต่างๆ ขอขอบคุณ Prof. Charles Vanden Eynden ที่ได้กรุณาส่งเอกสารที่เป็นส่วนสำคัญในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มาให้ข้าพเจ้า ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. กฤษณะ เนียมมณี และ อาจารย์ ดร. ศจี เพียรสกุล สำหรับความช่วยเหลือเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจให้ข้าพเจ้ามาโดยตลอดตลอดจนพี่ๆเพื่อนๆ อาทิเช่น นายมนตรี มาลีวงศ์ นายกิตติพงษ์ ไหลภาภรณ์ และนายรตินันท์ บุญเคลือบ เป็นต้น สำหรับความช่วยเหลือด้านต่างๆ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

ในการศึกษาการแยกส่วนของกราฟในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเริ่มด้วยการแยกส่วนที่เกี่ยวข้องกับกราฟลูกบาศก์ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ และกราฟต้นไม้ โดยในปี พ.ศ.2533 John Frederick Fink [3] ได้แสดงว่า จะมีการแยกส่วนกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ n ด้านที่ถอดแบบกัน ต่อมาในปี พ.ศ.2539 Saad El-Zanati และ Charles Vanden Eynden [1], [2] ได้แสดงการแยกส่วนของกราฟสองส่วนบริบูรณ์เป็นกราฟลูกบาศก์ที่ถอดแบบกัน และในปีพ.ศ.2542 ได้แสดงให้เห็นถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ ที่จะทำให้เราสามารถแยกส่วนประกอบกราฟสองส่วนบริบูรณ์เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกันได้ และจากผลงานที่ได้รวบรวมมา เราได้ขยายงานของ John Frederick Fink [3] จากการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็น กราฟต้นไม้ n ด้านที่ถอดแบบกัน เป็นการแยกส่วนของกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k เป็น กราฟต้นไม้ n ด้านที่ถอดแบบกัน และขยายงานของ Saad El-Zanati และ Charles Vanden Eynden [2] จากการสร้างเซตของสับกราฟที่แผ่ไปทั่วชนิดถอดแบบกัน ที่เป็นการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{m,n}$ เป็นการสร้างเซตของสับกราฟที่แผ่ไปทั่วชนิดถอดแบบกัน ที่เป็นการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,m,m(m-1)}$

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้แบ่งออกเป็นห้าบท โดยมีบทนำนี้เป็นบทที่1

บทที่2 เป็นการให้บทนิยาม ความรู้พื้นฐาน ตลอดจนตัวอย่างประกอบ เพื่อเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาวิทยานิพนธ์นี้

บทที่3 ในหัวข้อแรกเป็นการเสนองานของ John Frederick Fink [3] เกี่ยวกับการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ n ด้านที่ถอดแบบกัน จำนวน 2^{n-1} ต้น และในหัวข้อที่สอง

เป็นการให้นิยามของกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k แล้วแสดงการแยกส่วนของกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k เป็นกราฟต้นไม้ n ด้านที่ถอดแบบกัน จำนวน k^n ต้น

บทที่4 ในหัวข้อแรกเป็นการเสนองานของ Saad El-Zanati และ Charles Vanden Eynden [2] เกี่ยวกับการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{m,n}$ เมื่อ $m + n - 1 \mid mn$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน $\dfrac{mn}{m+n-1}$ ต้น ในหัวข้อที่สองเป็นการแสดงการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,m,m(m-1)}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน m ต้น และในหัวข้อสุดท้ายศึกษาเกี่ยวกับการแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นสับกราฟที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน

และบทที่5 ซึ่งเป็นบทสุดท้าย เป็นการเสนองานของ Saad El-Zanati และ Charles Vanden Eynden [1] ซึ่งศึกษาถึงการแยกส่วนของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{t,t}$ เป็นกราฟ d-ลูกบาศก์ Q_d ที่ถอดแบบกัน จำนวน q ลูกบาศก์ เมื่อ $t = 2^{d-1} = dq$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

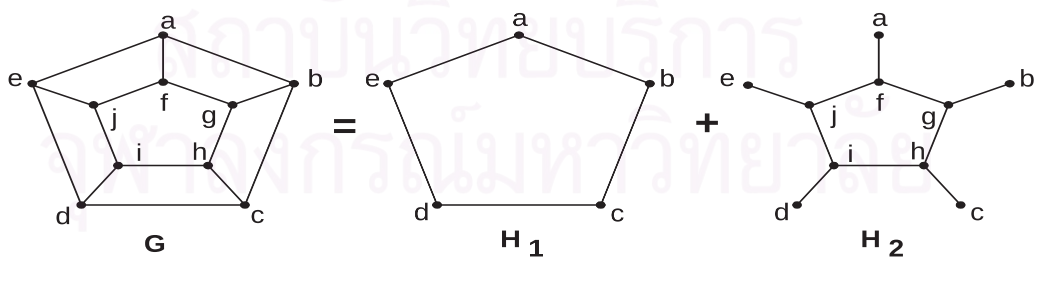
บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะแนะนำบทนิยามและความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเท่าที่จำเป็น เพื่อใช้ในการศึกษาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยกราฟที่จะกล่าวถึงในลำดับต่อๆไปจะหมายถึงเฉพาะกราฟที่มีจุดยอดจำนวนจำกัดที่ไม่มีวงวน(loop)หรือด้านขนาน(parallel edges) เท่านั้น

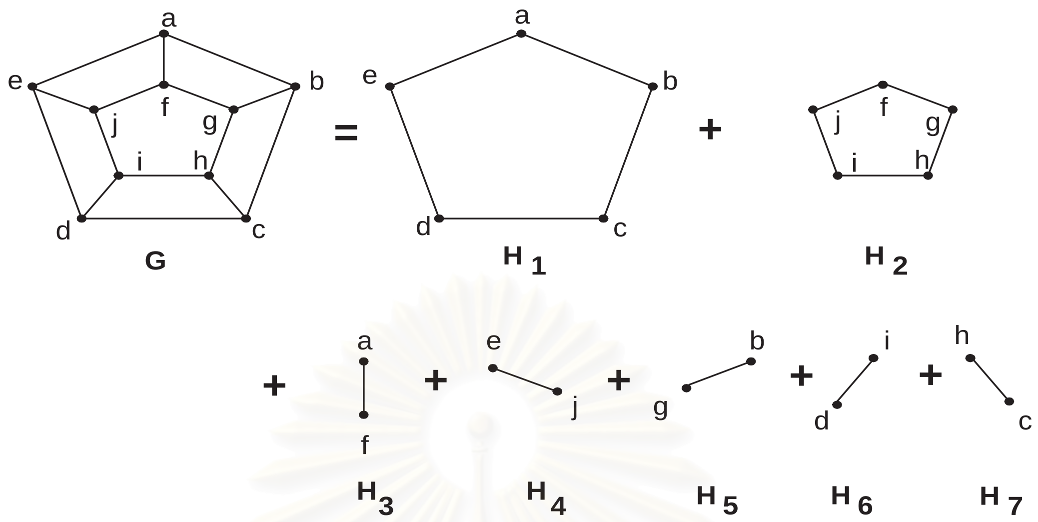
บทนิยาม 2.1. การแยกส่วน (decomposition) ของกราฟ G หมายถึง เซต $\{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ ซึ่ง $H_1, H_2, \ldots, H_t$ เป็นสับกราฟที่ต่างกัน t ชุดของ G โดยที่แต่ละด้านของ G อยู่ในสับกราฟ $H_1, H_2, \ldots, H_t$ เพียงกราฟเดียวเท่านั้น และจะแทนกราฟ G ด้วย $H_1 + H_2 + \cdots + H_t$
ถ้า $H_1, H_2, \ldots, H_t$ เป็นสับกราฟที่ถอดแบบกับสับกราฟ H เดียวกัน จะเขียนแทนด้วย $G = tH$

ตัวอย่าง 2.1. การแยกส่วนของกราฟ G



รูปที่ 2.1: การแยกส่วนของกราฟ $G = H_1 + H_2$

หรือ

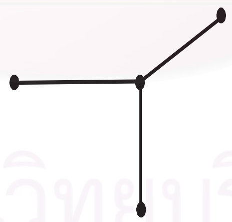


รูปที่ 2.2: การแยกส่วนของกราฟ $G = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7$

หมายเหตุ การแยกส่วนของกราฟมีได้หลายแบบ

ตัวอย่าง 2.2. การแยกส่วนของกราฟ G

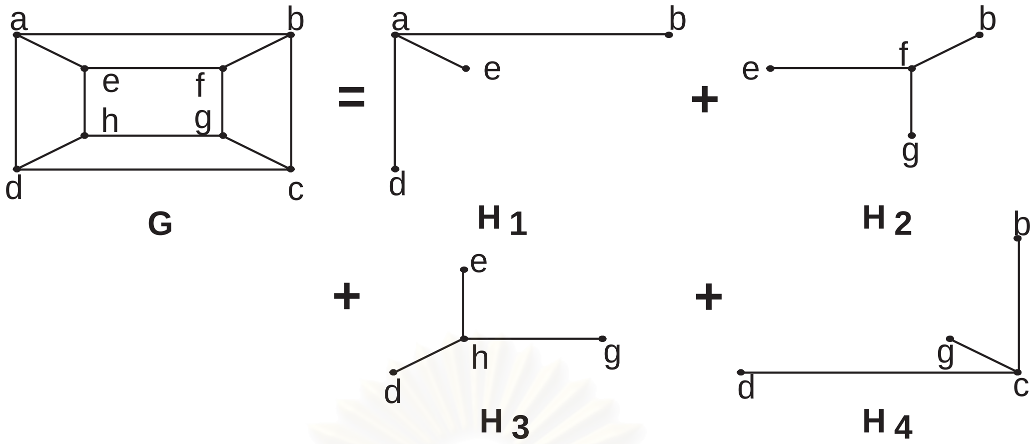
ถ้าเราให้ H แทนกราฟต้นไม้ 3 ด้านต่อไปนี้



รูปที่ 2.3: กราฟต้นไม้ 3 ด้าน H

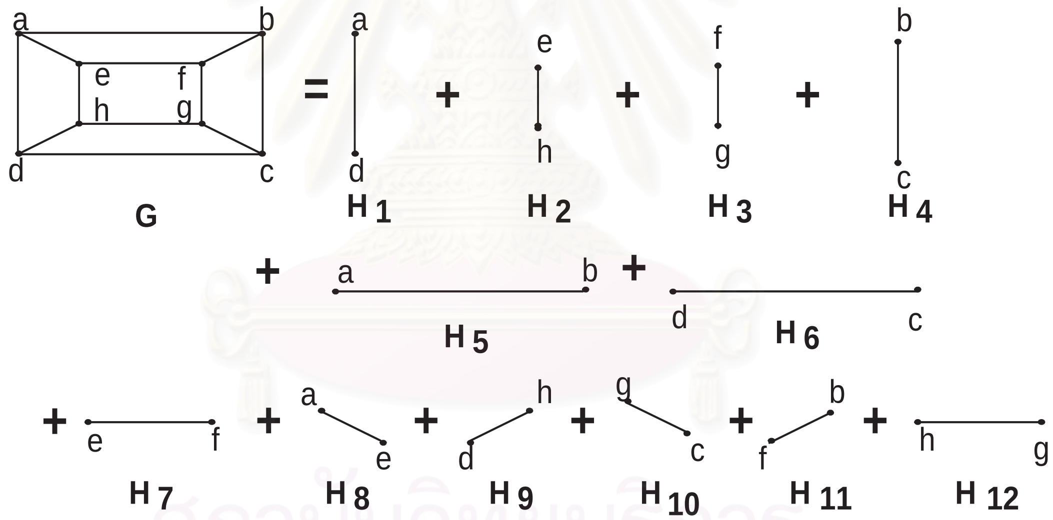
จะได้ว่า $H_1 \cong H_2 \cong H_3 \cong H_4 \cong H$ ดังนั้น $G = 4H$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.4: การแยกส่วนของกราฟ $G = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$

หรือ ถ้าให้ P_2 แทนวิถียาว 1 จะได้ว่า $G = 12P_2$



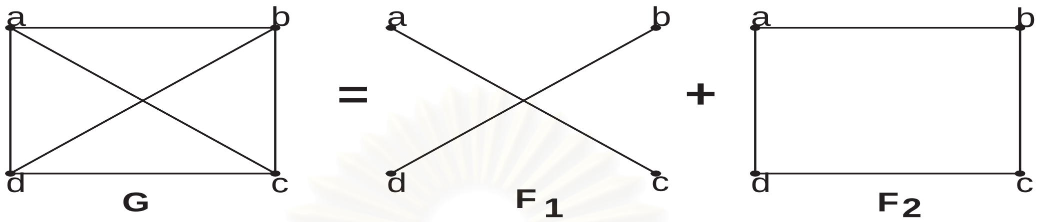
รูปที่ 2.5: การแยกส่วนของกราฟ $G = 12P_2$ เมื่อ P_2 คือวิถียาว 1

บทนิยาม 2.2. สับกราฟ F เป็น **ส่วนประกอบ (factor)** ของกราฟ G หมายถึง F เป็นสับกราฟที่แผ่ไปทั่ว G นั่นคือ F เป็นสับกราฟที่ $V(F) = V(G)$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

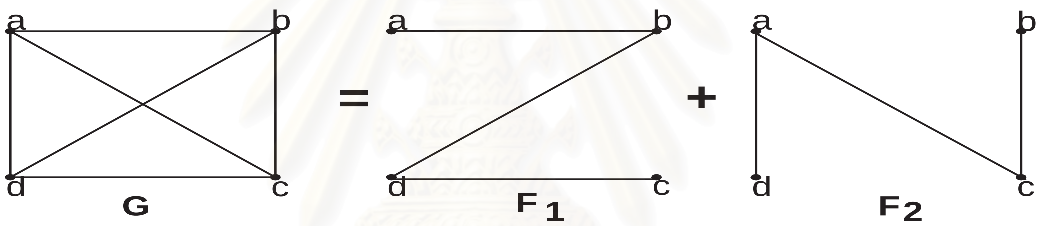
บทนิยาม 2.3. การแยกส่วนประกอบ (factorization) ของกราฟ G หมายถึง เซต $\{F_1, F_2, \ldots, F_t\}$ ที่เป็นการแยกส่วนของ G และแต่ละสับกราฟ $F_1, F_2, \ldots, F_t$ เป็นส่วนประกอบของ G

ตัวอย่าง 2.3. การแยกส่วนประกอบของกราฟ G



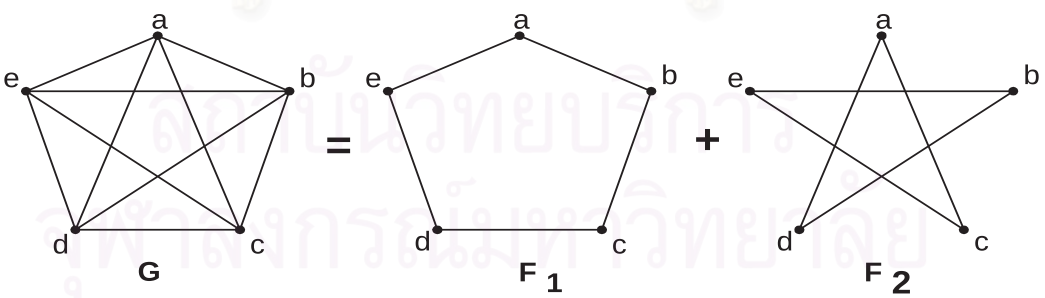
รูปที่ 2.6: การแยกส่วนประกอบของกราฟ $G = F_1 + F_2$

หรือ



รูปที่ 2.7: การแยกส่วนประกอบที่ถอดแบบกันของกราฟ $G = 2P_4$ เมื่อ P_4 คือวิถียาว 3

ตัวอย่าง 2.4. การแยกส่วนประกอบของกราฟ G

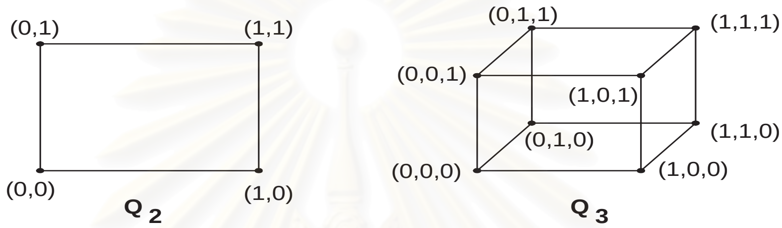


รูปที่ 2.8: การแยกส่วนประกอบที่ถอดแบบกันของกราฟ $G = 2C_5$ เมื่อ C_5 คือวัฏจักรยาว 5

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทนิยาม 2.4. กราฟ ***n*-ลูกบาศก์ (*n*-cube)** แทนด้วย $\boldsymbol{Q_n}$ หมายถึง กราฟที่มีเซตของจุดยอด $V(Q_n) = \mathbb{Z}_2^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | \ a_i \in \{0,1\}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ และด้านระหว่างจุดยอด $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ กับจุดยอด $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $a_k \neq b_k$ นั่นคือ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) - (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{(0, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, \ldots, 1, 0), \ldots, (0, 1, \ldots, 0, 0), (1, 0, \ldots, 0, 0)\}$

ตัวอย่าง 2.5.



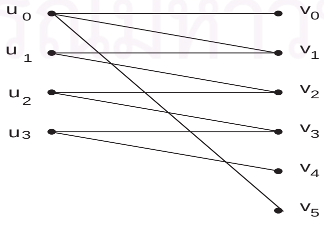
รูปที่ 2.9: กราฟ 2-ลูกบาศก์ Q_2 และ 3-ลูกบาศก์ Q_3

บทนิยาม 2.5. กราฟ *k*-ส่วน (*k*-partite graph) หมายถึง กราฟ G ที่สามารถแบ่งกั้นเซตของจุดยอดของ G ออกเป็น k เซตที่ไม่ใช่เซตว่าง กล่าวคือ $V(G) = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \ldots \bigcup V_k$ โดยที่ $V_i \bigcap V_j = \phi$ สำหรับทุก $i \neq j$ และด้านใน G เป็นด้านที่เชื่อมจุดยอดใน V_i ไปยังจุดยอดใน V_j เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ i และ j เป็นจำนวนเต็มในเซต $\{1, 2, \ldots, k\}$

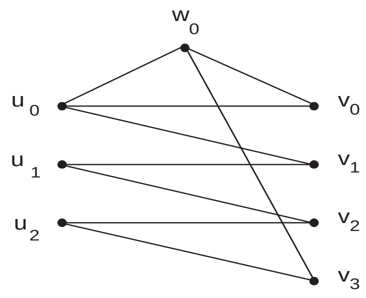
เรียก $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ ว่า เซตแบ่งกั้นของ G

กรณี $k = 2$ จะเรียกกราฟ G ว่า **กราฟสองส่วน (bipartite graph)**

ตัวอย่าง 2.6. แสดงกราฟสองส่วนและกราฟสามส่วน



รูปที่ 2.10: กราฟสองส่วน

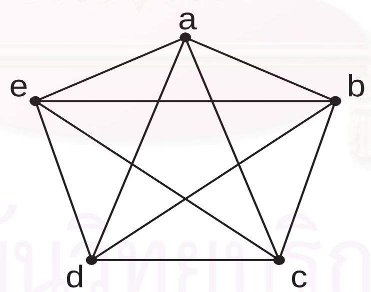


รูปที่ 2.11: กราฟสามส่วน

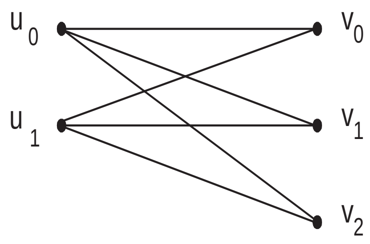
บทนิยาม 2.6. กราฟ k-ส่วนบริบูรณ์ (complete k-partite graph) หมายถึง กราฟ G ที่เป็นกราฟ k-ส่วน ที่มี $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ เป็นเซตแบ่งกั้น และมีสมบัติว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก i และ j ที่ต่างกันในเซต $\{1, 2, \ldots, k\}$ ถ้า $u \in V_i$ และ $v \in V_j$ แล้วจะมีด้านระหว่างจุดยอด u และ v เสมอ
กรณี $|V_i| = 1$ ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ เรียกกราฟ G ว่า **กราฟบริบูรณ์** แทนด้วย K_k

กรณี $|V_i| = p_i$ ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ จะแทน G ด้วย $K_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$

ตัวอย่าง 2.6. แสดงกราฟบริบูรณ์ K_5 และกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{2,3}$



รูปที่ 2.12: กราฟบริบูรณ์ K_5



รูปที่ 2.13: กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{2,3}$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

การแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n และกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน

เราจะเริ่มบทนี้ด้วยการกล่าวถึงการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน จำนวน 2^{n-1} ต้น ซึ่งเป็นผลงานของ Frederick Fink [3] ตามด้วยการให้นิยามกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k (k-ary n-cube) และแสดงว่า กราฟนี้สามารถแยกส่วนเป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน จำนวน k^n ต้น ได้เช่นกัน

3.1 การแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน

จากนิยามของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n จะได้ข้อสังเกตว่า

1. กราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n มี $n2^{n-1}$ ด้าน และ 2^n จุดยอด โดยที่แต่ละจุดยอดมีดีกรี n เท่ากัน

2. กราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟสองส่วน ที่มี (V_0, V_1) เป็นเซตแบ่งกั้นของ Q_n โดย V_0 เป็นเซตของ n สิ่งอันดับ (n-tuples) ที่มี 1 ปรากฏอยู่เป็นจำนวนคู่ และ V_1 เป็นเซตของ n สิ่งอันดับที่มี 1

ปรากฏอยู่เป็นจำนวนคี่ ทำให้ $|V_0| = |V_1| = 2^{n-1}$

3. สำหรับแต่ละ $\alpha \in V(Q_n)$ ถ้าให้ $\varphi_\alpha : V(Q_n) \to V(Q_n)$ กำหนดโดย $\varphi_\alpha(v) = v + \alpha$ จะได้ว่า φ_α เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก Q_n ไปทั่วถึง Q_n

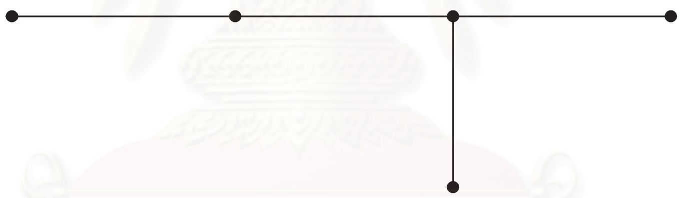
ทฤษฎีบท 3.1.1. [3] ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน จะได้ว่า มีการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ที่ถอดแบบกับ T จำนวน 2^{n-1} ต้น เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $n \geq 2$

พิสูจน์. แบ่งการพิสูจน์เป็นสองขั้นตอน ในขั้นตอนแรกเป็นการกำกับ T ให้เป็นสับกราฟของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n แล้วสร้างกราฟต้นไม้ n ด้าน จำนวน 2^{n-1} ต้น ซึ่งต่างเป็นสับกราฟของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n ที่ถอดแบบกับ T และในขั้นตอนที่สองจะแสดงว่าเซตของสับกราฟต้นไม้ที่สร้างขึ้นเป็นการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n

ขั้นตอนแรก กำหนดให้ n ด้านของ T แทนด้วย n สิ่งอันดับ ต่อไปนี้

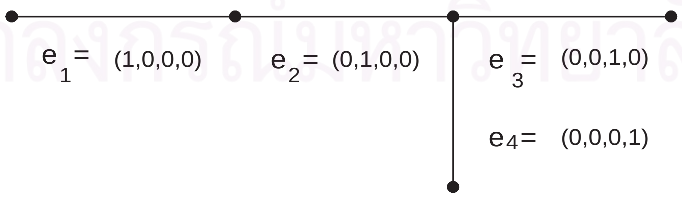
$e_1 = (1,0,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,0,1)$ อย่างไรก็ได้

เช่น กรณี $n = 4$ ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ ดังรูป



รูปที่ 3.1: กราฟต้นไม้ T

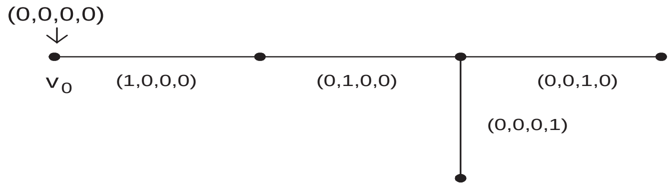
เราสามารถกำกับด้านของ T ได้ดังรูป



รูปที่ 3.2: การกำกับด้านของกราฟต้นไม้ T

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

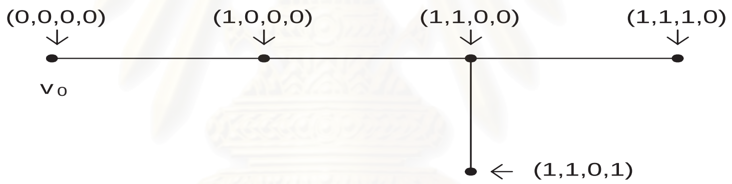
เลือกจุดยอดใดๆใน T มาหนึ่งจุด ให้ชื่อว่า v_0 แทน v_0 ด้วย $(0, 0, 0, \ldots, 0)$



รูปที่ 3.3: การกำกับจุดยอด v_0

ให้ x เป็นจุดยอดใดๆ ใน T ที่ $x \neq v_0$ เพราะว่า v_0 และ x เป็นจุดยอดที่ต่างกันของ T ซึ่งเป็นกราฟต้นไม้ ดังนั้น จะมีวิถีที่เชื่อมจุด x และ v_0 เพียงชุดเดียว ให้ชื่อว่า $\mathbf{P}_x$

กำหนด $\lambda(x)$ เป็นการกำกับจุดยอด x โดย $\lambda(x) = \sum\limits_{e_i \in \mathbf{P}_x} e_i$ เมื่อ e_i แทนการกำกับด้านบนวิถี $\mathbf{P}_x$ เช่น



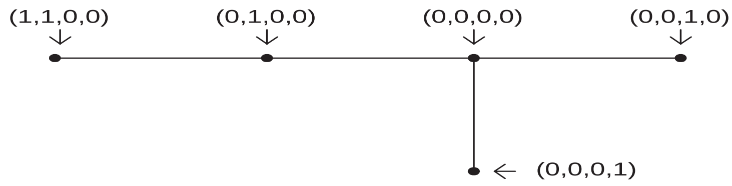
รูปที่ 3.4: การกำกับจุดยอดของกราฟต้นไม้ T

สังเกตว่าถ้า u และ v เป็นจุดยอดใดๆของ T ที่ $u \neq v$ จะมีวิถี $\mathbf{P}_u$ และ $\mathbf{P}_v$ ที่ต่างกัน ทำให้ได้ว่า $\lambda(u) \neq \lambda(v)$ และสำหรับจุดยอด u' และ v' ของ T ที่ประชิดกัน จะได้ว่า $\lambda(u')$ และ $\lambda(v')$ เป็น n สิ่งอันดับ ที่ต่างกันหนึ่งตำแหน่ง ดังนั้น จากนิยามของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n ได้ว่า T เป็นสับกราฟของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n

เพราะว่ากราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟสองส่วน ให้ A แทนเซตของจุดยอดในกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n ที่ n สิ่งอันดับ มี 1 ปรากฏอยู่เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $|A| = 2^{n-1}$

ทุก $\alpha \in A$ กำหนดให้ $T_\alpha = \varphi_\alpha(T)$ ซึ่งคือภาพของ T ภายใต้ φ_α ที่นิยามตามข้อสังเกตที่ 3.

เช่น เมื่อ $\alpha = (1,1,0,0)$ จะได้ T_α ดังรูป



รูปที่ 3.5: แสดงกราฟ T_α เมื่อ $\alpha = (1,1,0,0)$

สำหรับจุดยอด u และ v ของ T ที่ประชิดกัน จะได้ว่า $\lambda(u)$ และ $\lambda(v)$ เป็น n สิ่งอันดับที่ต่างกันหนึ่งตำแหน่ง และสำหรับแต่ละ $\alpha \in A$ จะได้ว่า $\varphi_\alpha(\lambda(u)) = \lambda(u) + \alpha$ และ $\varphi_\alpha(\lambda(v)) = \lambda(v) + \alpha$ ทำให้ $\lambda(u)+\alpha$ และ $\lambda(v)+\alpha$ ซึ่งเป็นจุดยอดของ T_α เป็น n สิ่งอันดับที่ต่างกันหนึ่งตำแหน่ง
จากนิยามของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n ได้ว่า T_α เป็นสับกราฟของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n
เพราะว่า φ_α เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งและยังคงไว้ซึ่งความเป็นด้าน จึงได้ว่า T_α ถอดแบบกับ T ทุก $\alpha \in A$
ดังนั้น T_α เป็นสับกราฟต้นไม้ของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n ที่ถอดแบบกับ T ทุก $\alpha \in A$
ขั้นตอนที่สอง ให้ $\mathcal{C} = \{\, T_\alpha |\, \alpha \in A \,\}$ จะพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n
จาก $|A| = 2^{n-1}$ ดังนั้น $|\mathcal{C}| = 2^{n-1}$ และแต่ละ $\alpha \in A$ จะได้ $|E(T_\alpha)| = n$ ดังนั้น $\sum\limits_{\alpha \in A} |E(T_\alpha)| = n2^{n-1}$ ซึ่งเท่ากับจำนวนด้านของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n จึงเพียงพอที่จะแสดงเพียงว่า สำหรับ T_α และ T_β ที่ $\alpha, \beta \in A$ และ $\alpha \neq \beta$ จะไม่มีด้านที่ซ้ำกัน
ให้ $\alpha, \beta \in A$ โดยที่ $\alpha \neq \beta$ สมมติให้ T_α มีด้านซ้ำกับ T_β อย่างน้อยหนึ่งด้าน นั่นคือ มีด้าน $\{v, v+e_k\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัวที่ $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ ซึ่งเป็นด้านใน T ที่ทำให้ $\{v+\alpha, v+e_k+\alpha\}$ เท่ากับด้าน $\{v+\beta, v+e_k+\beta\}$ ดังนั้น $v+\alpha = v+\beta$ หรือ $v+\alpha = v+e_k+\beta$
กรณีที่1. $v+\alpha = v+\beta$
นั่นคือ $\alpha = \beta$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น กรณีที่1. ไม่เกิดขึ้น
กรณีที่2. $v+\alpha = v+e_k+\beta$
นั่นคือ $\alpha = e_k+\beta$ ดังนั้น $\alpha+\beta = e_k$ เนื่องจาก $\alpha,\beta \in A$ ดังนั้น $\alpha+\beta \in A$ แต่ e_k เป็น n สิ่งอันดับ ที่มี 1 ปรากฏอยู่ในตำแหน่งที่ k เพียงตำแหน่งเดียว ดังนั้นกรณีที่2. ไม่เกิดขึ้น

ดังนั้นสำหรับ $\alpha, \beta \in A$ จะได้ว่า T_α และ T_β จะไม่มีด้านที่ซ้ำกัน นั่นคือจะสามารถแยกส่วนกราฟ n-ลูกบาศก์ Q_n เป็นกราฟต้นไม้ ที่ถอดแบบกับ T จำนวน 2^{n-1} ต้นได้

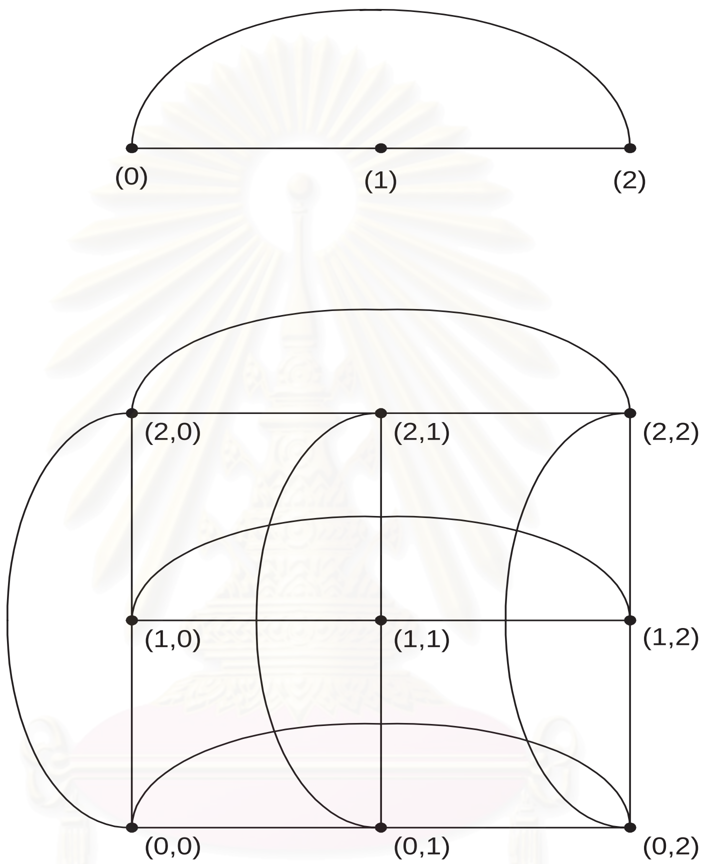
□

3.2 การแยกส่วนของกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน ที่ถอดแบบกัน

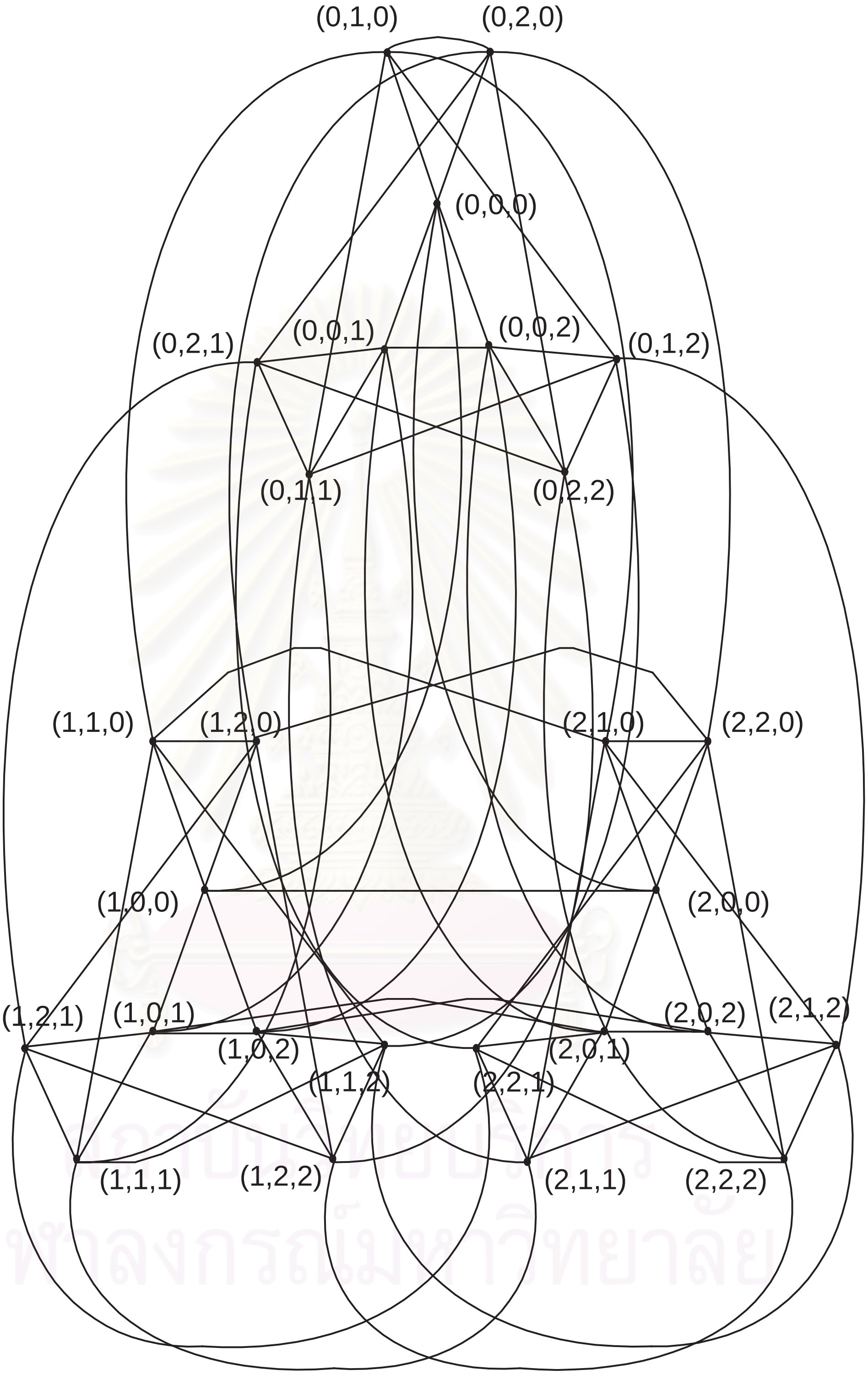
บทนิยาม 3.2.1. กราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ (k-ary n-cube) แทนด้วย Q_n^k เมื่อ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $k \geq 3$ หมายถึงกราฟ G ที่มี $V(G) = \mathbb{Z}_k^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) |\ a_i \in \{0, 1, ..., k-1\}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ และด้านระหว่างจุดยอด $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ กับจุดยอด $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $(u_1, u_2, \ldots, u_n) - (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \{(0, 0, \ldots, 0, 1),$ $(0, 0, \ldots, 1, 0), \ldots, (0, 1, \ldots, 0, 0), (1, 0, \ldots, 0, 0), (0, 0, \ldots, 0, k-1), (0, 0, \ldots, k-1, 0), \ldots,$ $(0, k-1, \ldots, 0, 0), (k-1, 0, \ldots, 0, 0)\}$

ที่จริงเราสามารถอธิบายกราฟ Q_n^k ด้วยความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยอาศัยนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
Q_1^k &= C_k \\
Q_n^k &= Q_{n-1}^k \times C_k \text{ เมื่อ } n \geq 2 \\
&= \underbrace{C_k \times C_k \times \cdots \times C_k}_{n \text{ ชุด}} = (C_k)^n
\end{aligned}$$

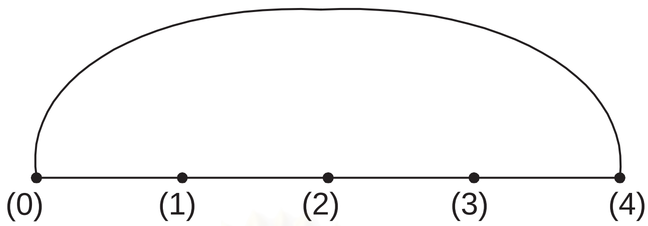


รูปที่ 3.6: กราฟลูกบาศก์ $Q_1^3 = C_3$ และกราฟลูกบาศก์ $Q_2^3 = Q_1^3 \times C_3 = C_3 \times C_3$

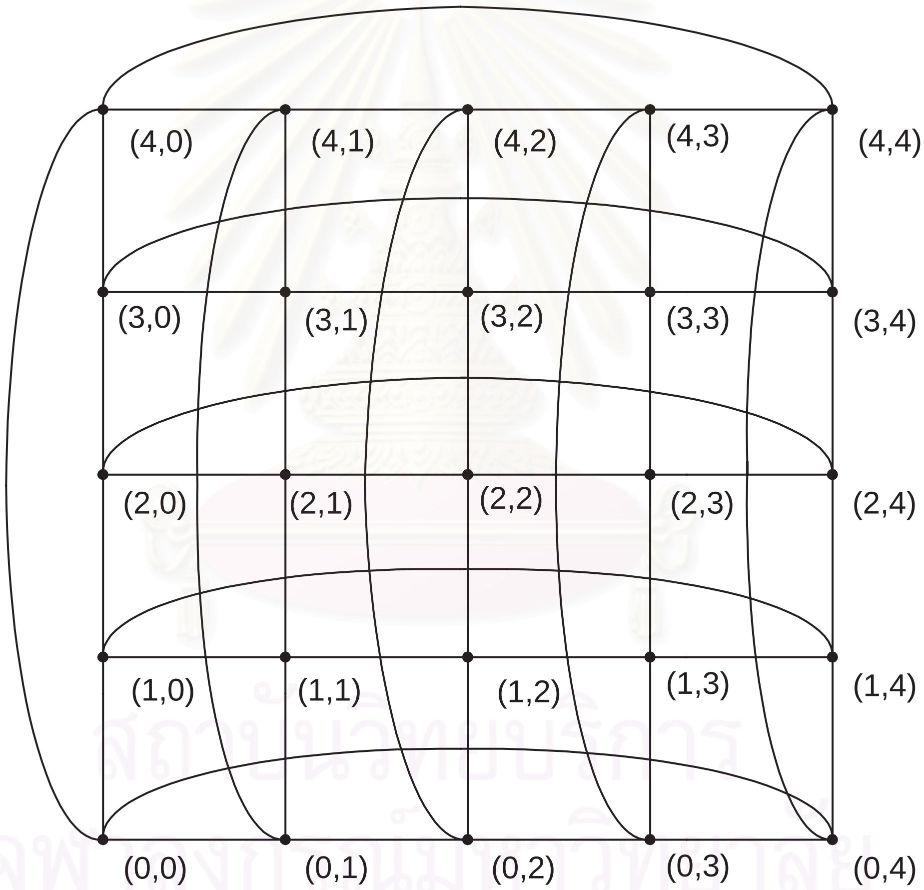


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 3.7: กราฟลูกบาศก์ $Q_3^3 = Q_2^3 \times C_3 = C_3 \times C_3 \times C_3$



Q_1^5



Q_2^5

รูปที่ 3.8: กราฟลูกบาศก์ $Q_1^5 = C_5$ และ $Q_2^5 = C_5 \times C_5$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หมายเหตุ 1. กราฟ Q_n^k เมื่อ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $k \geq 3$ เป็นกราฟที่มี nk^n ด้าน และk^n จุดยอดโดยที่แต่ละจุดยอดมีดีกรี $2n$ เท่ากัน

2. สำหรับแต่ละ $\alpha \in V(Q_n^k)$ ถ้าให้ $\varphi_\alpha : V(Q_n^k) \to V(Q_n^k)$ กำหนดโดย $\varphi_\alpha(v) = v + \alpha$ จะได้ว่า φ_α เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก Q_n^k ไปทั่วถึง Q_n^k

ทฤษฎีบท 3.2.2. ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ n ด้าน จะได้ว่า มีการแยกส่วนของกราฟ k-ส่วน n-ลูกบาศก์ Q_n^k เป็นกราฟต้นไม้ที่ถอดแบบกับ T จำนวน k^n ต้น เมื่อ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$

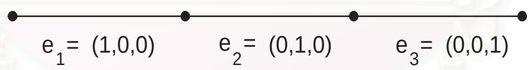
พิสูจน์. แบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองขั้นตอน โดยจะเริ่มด้วยการกำกับ T ให้เป็นสับกราฟของ Q_n^k แล้วสร้างกราฟต้นไม้ n ด้าน จำนวน k^n ต้น ซึ่งต่างเป็นสับกราฟของ Q_n^k ที่ถอดแบบกับ T ส่วนขั้นที่สองจะแสดงว่าเซตของสับกราฟต้นไม้ที่สร้างขึ้นเป็นการแยกส่วนของกราฟ Q_n^k

ขั้นตอนแรก ให้ $\mathcal{S} = \{(0,0,\ldots,0,1),(0,0,\ldots,1,0),\ldots,(0,1,\ldots,0,0),(1,0,\ldots,0,0),$
$(0,0,\ldots,0,k-1),(0,0,\ldots,k-1,0),\ldots,(0,k-1,\ldots,0,0),(k-1,0,\ldots,0,0)\}$

กำหนดให้ n ด้านของ T แทนด้วย n สิ่งอันดับ ต่อไปนี้

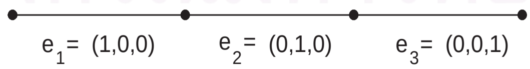
$e_1 = (1,0,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,0,0,1)$ อย่างไรก็ได้

เช่น กรณี $n = 3$ และ $k = 3$ ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ ดังรูป



รูปที่ 3.9: กราฟต้นไม้ T

เราสามารถกำกับด้านของ T ได้ ดังรูป

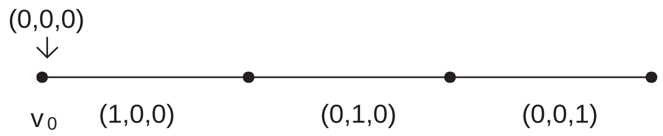


รูปที่ 3.10: การกำกับด้านของ T

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เลือกจุดยอดใดๆใน T มาหนึ่งจุด ให้ชื่อว่า v_0 และแทน v_0 ด้วย $(0, 0, \ldots, 0)$

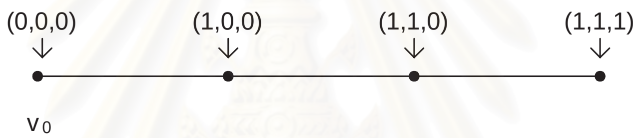
เช่น



รูปที่ 3.11: การกำกับจุดยอด v_0

ให้ x เป็นจุดยอดใดๆใน T ที่ $x \neq v_0$ จาก T เป็นกราฟต้นไม้ ดังนั้นจะมีวิถี $\mathbf{P}_x$ เพียงวิถีเดียวที่เชื่อม x กับ v_0 กำหนดให้ $\lambda(x)$ เป็นการกำกับจุดยอด x โดย $\lambda(x) = \sum\limits_{e_i \in \mathbf{P}_x} e_i$
เมื่อ e_i แทนการกำกับด้านบนวิถี $\mathbf{P}_x$

เช่น



รูปที่ 3.12: การกำกับจุดยอดของกราฟต้นไม้ T

สำหรับจุดยอด u และ vใดๆ ของ T ที่ $u \neq v$ จะมีวิถี $\mathbf{P}_u$ และ $\mathbf{P}_v$ ที่ต่างกัน ซึ่งทำให้ได้ว่า $\lambda(u) \neq \lambda(v)$ และสำหรับจุดยอด u' และ v' ของ T ที่ประชิดกัน จะได้ว่า $\lambda(u') - \lambda(v') \in S$
ดังนั้น จากนิยามของ Q_n^k ได้ว่า T เป็นสับกราฟของ Q_n^k
สำหรับ $\alpha \in V(Q_n^k)$ กำหนดให้ $T_\alpha = \varphi_\alpha(T)$ ซึ่งคือภาพของ T ภายใต้ φ_α ตามหมายเหตุที่ 2.
เช่น เมื่อ $\alpha = (1, 0, 0)$ จะได้กราฟ T_α ดังรูป

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 3.13: แสดงกราฟ T_α เมื่อ $\alpha = (1, 0, 0)$

สำหรับจุดยอด u และ v ใดๆ ของ T ที่ประชิดกัน จะได้ว่า $\lambda(u) - \lambda(v) \in \mathcal{S}$ และแต่ละ $\alpha \in V(Q_n^k)$ จะได้ว่า $\varphi_\alpha(\lambda(u)) = \lambda(u) + \alpha$ และ $\varphi_\alpha(\lambda(v)) = \lambda(v) + \alpha$ ทำให้ $(\lambda(u) + \alpha) - (\lambda(v) + \alpha) \in \mathcal{S}$ จากนิยามของ Q_n^k ได้ว่า T_α เป็นสับกราฟของ Q_n^k เพราะว่า φ_α เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง และยังคงไว้ซึ่งความเป็นด้าน จึงได้ว่า T_α ถอดแบบกับ T ทุก $\alpha \in V(Q_n^k)$

ดังนั้น T_α เป็นสับกราฟต้นไม้ของ Q_n^k ที่ถอดแบบกับ T ทุก $\alpha \in V(Q_n^k)$

ขั้นที่สอง ให้ $\mathcal{C} = \{\ T_\alpha |\ \alpha \in V(Q_n^k)\ \}$ จะพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของ Q_n^k

เพราะว่า $|V(Q_n^k)| = k^n$ และแต่ละ $\alpha \in V(Q_n^k)$ ได้ว่า $|E(T_\alpha)| = n$ ทำให้

$\sum\limits_{\alpha \in V(Q_n^k)} |E(T_\alpha)| = nk^n = |E(Q_n^k)|$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของ Q_n^k จึงเพียงพอที่จะแสดงเพียงว่าสำหรับ $\alpha, \beta \in V(Q_n^k)$ ที่ $\alpha \neq \beta$ กราฟ T_α และ T_β ไม่มีด้านที่ซ้ำกัน

ให้ $\alpha, \beta \in V(Q_n^k)$ ที่ $\alpha \neq \beta$ สมมติให้ T_α และ T_β มีด้านที่ซ้ำกันอย่างน้อยหนึ่งด้าน ดังนั้นจะมีด้าน $\{v, v + e_p\}$ สำหรับจำนวนเต็ม p บางตัวในเซต $\{1, 2, ..., n\}$ ที่ทำให้ $\{v + \alpha, v + e_p + \alpha\}$ เท่ากับด้าน $\{v + \beta, v + e_p + \beta\}$

กรณีที่1. $\quad v + \alpha = v + \beta$ และ $v + e_p + \alpha = v + e_p + \beta$

นั่นคือ $\alpha = \beta$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น กรณีที่1. ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่2. $\quad v + \alpha = v + e_p + \beta$ และ $v + e_p + \alpha = v + \beta$

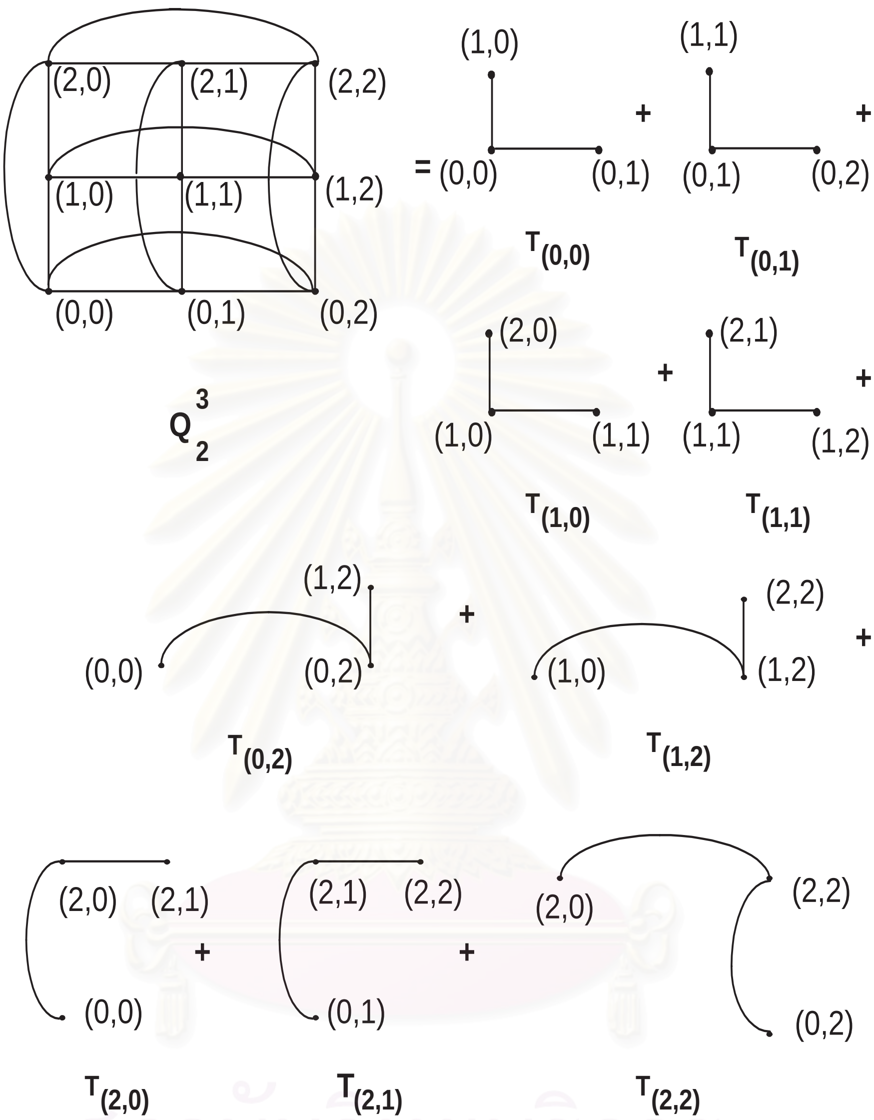
นั่นคือ $v + \alpha + v + \beta \ = \ v + e_p + \beta + v + e_p + \alpha$ ดังนั้น $\alpha + \beta \ = \ (e_p + e_p) + (\alpha + \beta)$

จาก $e_p \in S$ จะได้ว่า $e_p + e_p \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ดังนั้นกรณีที่2. ไม่เกิดขึ้น นั่นคือสำหรับ $\alpha, \beta \in V(Q_n^k)$ ที่ $\alpha \neq \beta$ จะได้ว่า T_α และ T_β ไม่มีด้านที่ซ้ำกัน

ดังนั้นจะสามารถแยกส่วนของกราฟ Q_n^k เมื่อ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $k \geq 3$ และ $n \geq 2$ เป็นกราฟต้นไม้ n ด้านที่ถอดแบบกัน จำนวน k^n ต้นได้ $\square$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง 3.2.2. การแยกส่วนของ Q_2^3 เป็นกราฟต้นไม้ 2 ด้าน



รูปที่ 3.14: การแยกส่วนของกราฟ $Q_2^3 = 9T$ เมื่อ T คือกราฟต้นไม้ 2 ด้าน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4

การแยกส่วนประกอบของกราฟ k-ส่วนบริบูรณ์เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว ที่ถอดแบบกัน

เราจะศึกษาถึงการแยกส่วนประกอบของกราฟ k-ส่วนบริบูรณ์เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อย่อย ในหัวข้อแรก เป็นการนำเสนองานของ Sadd El-Zanati และ Charles Vanden Eynden [2] เรื่องการแยกส่วนประกอบของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{m,n}$ เมื่อ $m+n-1 \mid mn$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน $\dfrac{mn}{m+n-1}$ ต้น ในหัวข้อที่สอง เป็นการขยายงานของหัวข้อแรกคือศึกษาถึงการแยกส่วนประกอบของกราฟ 3-ส่วนบริบูรณ์ $K_{1,m,m(m-1)}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน m ต้น และในหัวข้อสุดท้ายจะศึกษาถึงการแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ ไปเป็นสับกราฟที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน

4.1 การแยกส่วนประกอบของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{m,n}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว ที่ถอดแบบกัน

เนื่องจากกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{m,n}$ เป็นกราฟที่มี mn ด้าน และมีจุดยอด $m+n$ จุด และกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว $K_{m,n}$ จำเป็นต้องมีจุดยอด $m+n$ จุด และด้าน $m+n-1$ ด้าน พอดี ถ้าเราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{m,n}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้แล้วจะได้ว่า $(m+n-1) \mid mn$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1.1. [2] ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า$m+n-1 \mid mn$ และ $j = gcd(m, n-1)$ และ $k = gcd(m-1, n)$ แล้วจะได้ว่า $m+n-1 = jk$

พิสูจน์. สังเกตว่า $j \mid m$ และ $k \mid m-1$ ดังนั้น $gcd(j,k) = 1$
เพราะว่า $j \mid m+n-1$ และ $k \mid m+n-1$ จึงได้ว่า $jk \mid m+n-1$
นั่นคือ มีจำนวนเต็ม y บางตัวที่ทำให้ $m+n-1 = yjk$ (4.1)
ต้องการแสดงว่า $y = 1$ เพราะว่า $j = gcd(m, n-1)$ และ $(m+n-1) \mid mn$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม m_0 และ b บางตัวที่ทำให้ $m = jm_0$ และ $n-1 = jb$ และมีจำนวนเต็ม x บางตัวที่ทำให้

$$mn = x(m+n-1) \tag{4.2}$$

โดย (4.1) และ (4.2) ได้ว่า $mn = xyjk$ ซึ่งทำให้ $m_0 n = xyk$
เนื่องจาก $jm_0 n = x(jm_0 + jb)$ หรือ $m_0(n-x) = xb$ ดังนั้น $m_0 \mid xb$ แต่ $gcd(m_0, b) = 1$
ดังนั้น $m_0 \mid x$ ให้ $x = um_0$ สำหรับบางจำนวนเต็ม u บางตัว ได้ว่า $m_0 n = um_0 yk$ นั่นคือ $y \mid n$ ในทำนองเดียวกัน จะแสดงได้ว่า $y \mid m$ ทำให้ $y \mid m+n-yjk$ นั่นคือ $y \mid 1$ หรือ $y = 1$ ดังนั้น $m+n-1 = jk$ □

ทฤษฎีบท 4.1.2. [2] ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $m+n-1 \mid mn$ จะได้ว่า มีการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{m,n}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน $\frac{mn}{m+n-1}$ ต้น

พิสูจน์. เริ่มด้วยการสร้างสับกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว $K_{m,n}$ ที่ถอดแบบกัน จำนวน $\frac{mn}{m+n-1}$ ต้น แล้วแสดงให้เห็นว่าเซตของสับกราฟที่สร้างขึ้นนี้ เป็นการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{m,n}$
ในขั้นแรก โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $m \leq n$ และ $j = gcd(m, n-1)$ และ $k = gcd(m-1, n)$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 4.1.1 จะได้ว่า $m+n-1 = jk$

ให้ (U,V) เป็นเซตแบ่งกั้นของ $K_{m,n}$ ที่ $|U| = m$ และ $|V| = n$ และให้ $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ เป็นจุดยอดใน U และ $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ เป็นจุดยอดใน V และจะใช้สัญลักษณ์ (a,b) แทน $\{u_a, v_b\}$ ซึ่งคือด้านระหว่างจุดยอด u_a กับ v_b เมื่อคิด a และ b ในมอดูโล m และ n ตามลำดับ

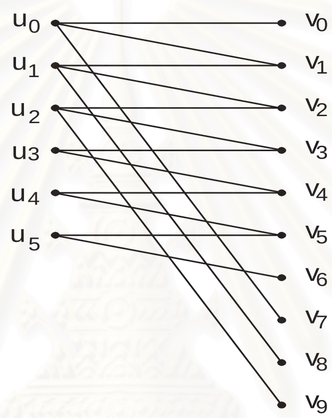
แต่ละจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $0 \le x < \dfrac{m}{j}$ และ $0 \le y < \dfrac{n}{k}$

สร้างสับกราฟที่แผ่ไปทั่ว $T(x,y)$ ของ $K_{m,n}$ โดยมีด้านดังนี้

$$(jx, ky) + (i,i) \quad ; \quad 0 \le i \le m-1 \tag{4.3}$$

$$(jx, ky+1) + (i,i) \quad ; \quad 0 \le i \le n-2 \tag{4.4}$$

เช่น กรณี $m = 6$ และ $n = 10$ ถ้า $x = y = 0$ จะได้กราฟ $T(0,0)$ ดังรูป 4.1



รูปที่ 4.1: กราฟ $T(0,0)$

เราจะแสดงว่า $T(0,0)$ ถอดแบบกับ $T(x,y)$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y ที่ $0 \le x < \dfrac{m}{j}$ และ $0 \le y < \dfrac{n}{k}$

ให้ $\Phi : V(T(0,0)) \to V(T(x,y))$ กำหนดโดย $\Phi(u_i) = u_{i+jx}$ และ $\Phi(v_i) = v_{i+ky}$ เห็นได้ชัดว่า Φ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับ $\{u_a, v_b\}$ ที่เป็นด้านใน $T(0,0)$ จะได้ว่า $\{\Phi(u_a), \Phi(v_b)\}$ จะเป็นด้านใน $T(x,y)$

ให้ $\{u_a, v_b\}$ ซึ่งแทนด้วย (a,b) เป็นด้านใน $T(0,0)$ ดังนั้น (a,b) เกิดจาก (4.3) หรือ (4.4)

กรณีที่1. (a,b) เป็นด้านของ $T(0,0)$ ที่เกิดจาก (4.3) ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม i บางตัวที่ $0 \le i \le m-1$ ที่ทำให้ $(i + j0, i + k0) = (a,b)$ นั่นคือ $(i,i) = (a,b)$ หรือ $a = b = i$ ทำให้ได้ว่า $\{\Phi(u_a), \Phi(v_b)\} = \{u_{a+jx}, v_{a+ky}\} = (a + jx, a + ky) = (jx, ky) + (a,a)$ จาก $0 \le a \le m-1$ ดังนั้น $\{\Phi(u_a), \Phi(v_b)\}$ เป็นด้านของ $T(x,y)$ ที่เกิดจาก (4.3)

กรณีที่2. (a,b) เป็นด้านของ $T(0,0)$ ที่เกิดจาก (4.4) ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม i บางตัวที่ $0 \leq i \leq n-2$ ที่ทำให้ $(i+j0, i+k0+1) = (i, i+1) = (a, b)$ นั่นคือ $a = i$ และ $b = a+1$ ทำให้ได้ว่า $\{\Phi(u_a), \Phi(v_b)\} = \{u_{a+jx}, v_{b+ky}\} = (a+jx, b+ky) = (a+jx, a+ky+1) = (jx, ky+1)+(a, a)$ จาก $0 \leq a \leq n-2$ ดังนั้น $\{\Phi(u_a), \Phi(v_b)\}$ เป็นด้านของ $T(x,y)$ ที่เกิดจาก (4.4)

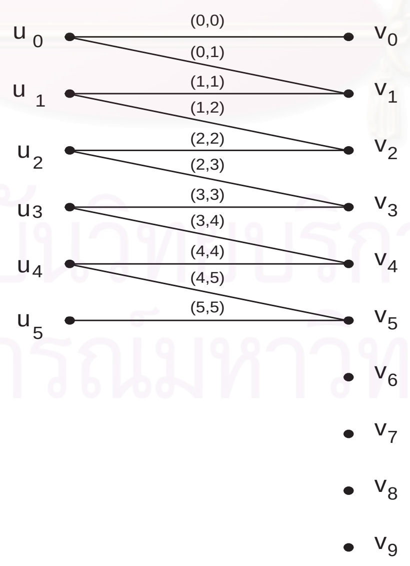
ดังนั้น $T(0,0)$ ถอดแบบกับ $T(x,y)$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y ที่ $0 \leq x < \frac{m}{j}$ และ $0 \leq y < \frac{n}{k}$

ขั้นต่อไปจะแสดงว่า $T(0,0)$ เป็นสับกราฟต้นไม้ของ $K_{m,n}$ โดยแสดงว่า $T(0,0)$ เป็นกราฟเชื่อมโยงได้และมีจำนวนด้านน้อยกว่าจำนวนจุดยอดอยู่หนึ่งจุดเสมอ

สังเกตว่าด้านที่เกิดจาก (4.3) และ (4.4) ของ $T(0,0)$ นั้นไม่ซ้ำกันเลย ดังนั้น $T(0,0)$ มีด้านทั้งหมด $m+n-1$ ด้านและจุดยอดทุกจุดของ $K_{m,n}$ เป็นจุดยอดของ $T(0,0)$

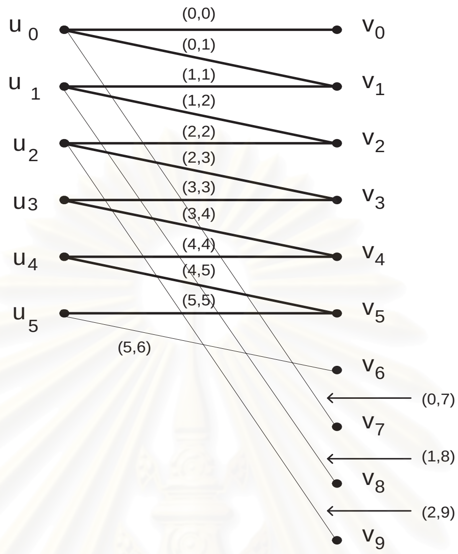
จาก $(0,0),(1,1),\ldots,(m-1,m-1)$ เป็นด้านของ $T(0,0)$ ที่เกิดจาก (4.3) และ $(0,1),(1,2),(2,3),\ldots,(m-2,m-1)$ เป็นด้านของ $T(0,0)$ ที่เกิดจาก (4.4) ทำให้จุดยอดสองจุดใดๆ ในเซต $\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ สามารถเชื่อมโยงได้ ด้วยวิถี $v_0(0,0)u_0(0,1)v_1(1,1)u_1, ..., u_{m-2}(m-2,m-1)v_{m-1}(m-1,m-1)u_{m-1}$

เช่น สำหรับ $m = 6, n = 10$ ทุกสองจุดยอดใดๆ ในเซต $\{u_0, u_1, \ldots, u_5, v_0, v_1, \ldots, v_5\}$ ของกราฟ $T(0,0)$ สามารถเชื่อมโยงได้ด้วยวิถี $v_0(0,0)u_0(0,1)v_1(1,1)u_1(1,2)v_2(2,2)u_2(2,3)v_3(3,3)u_3(3,4)v_4(4,4)$ $u_4(4,5)v_5(5,5)u_5$ ดังรูป



รูปที่ 4.2: แสดงการเชื่อมโยงของจุดยอด $u_0, u_1, \ldots, u_5, v_0, v_1, \ldots, v_5$ ของกราฟ $T(0,0)$

และจาก (4.4) ได้ว่า จะต้องมีด้านระหว่างจุดยอด $v_m, v_{m+1}, ..., v_{n-1}$ กับจุดยอดบางจุดใน U เช่น จากรูป 4.2 จะมีด้าน (5,6) (0,7) (1,8) และ(2,9)ที่เกิดจาก (4.4) ซึ่งทำให้กราฟ $T(0,0)$ เป็นกราฟเชื่อมโยงได้ ดังรูป



รูปที่ 4.3: แสดงการเชื่อมโยงของทุกจุดยอดของกราฟ $T(0,0)$ กรณี $m = 6, m = 10$

ดังนั้น จุดยอดสองจุดใดๆ ในเซต $\{u_0, u_1, ..., u_{m-1}, v_0, v_1 ..., v_{n-1}\}$ สามารถเชื่อมโยงไได้

นั่นคือ $T(0,0)$ เป็นกราฟเชื่อมโยงได้

จาก $|E(T(0,0))| = |V(T(0,0))| - 1$ ทำให้ได้ว่า $T(0,0)$ เป็นสับกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว $K_{m,n}$

นั่นคือ $T(x,y)$ เป็นสับกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว $K_{m,n}$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y ที่ $0 \leq x < \frac{m}{j}$ และ $0 \leq y < \frac{n}{k}$

ให้ $\mathcal{C} = \{T(x,y) | \ 0 \leq x < \frac{m}{j}, 0 \leq y < \frac{n}{k}\}$

จะแสดงว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ $K_{m,n}$ จาก $|E(T(x,y))| = m + n - 1$ และ $|\mathcal{C}| = \frac{mn}{jk}$ ดังนั้นผลรวมของ $|E(T(x,y))|$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y ที่ $0 \leq x < \frac{m}{j}$ และ $0 \leq y < \frac{n}{k}$ คือ $(m+n-1)\frac{mn}{jk} = mn$ ซึ่งเท่ากับจำนวนด้านของ $K_{m,n}$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ $K_{m,n}$ จึงเพียงพอที่จะแสดงเพียงว่า $T(x,y)$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y ที่ $0 \leq x < \frac{m}{j}$ และ $0 \leq y < \frac{n}{k}$ ไม่มีด้านที่ซ้ำกันเลย

สมมติให้ $T(x,y)$ และ $T(X,Y)$ มีด้านซ้ำกันอย่างน้อยหนึ่งด้าน ชื่อว่า e

กรณีที่1. e เป็นด้านที่เกิดจากสมการ (4.3) ของทั้ง $T(x,y)$ และ $T(X,Y)$ ดังนั้น $(xj,yk)+(i,i)=(Xj,Yk)+(I,I)$ สำหรับจำนวนเต็ม i และ I บางตัว ที่ $0\leq i\leq m-1$ และ $0\leq I\leq m-1$ ดังนั้น

$$(x-X)j\equiv I-i(mod\ m) \tag{4.5}$$

และ

$$(y-Y)k\equiv I-i(mod\ n) \tag{4.6}$$

จาก (4.5) และ (4.6) จะได้ว่า $j\mid I-i$ และ $k\mid I-i$ เพราะว่า $gcd(j,k)=1$ ดังนั้น $jk\mid I-i$ หรือ $m+n-1\mid I-i$ อย่างไรก็ตาม $|I-i|\leq m-1$ ทำให้ได้ว่า $I=i$ ดังนั้น $m\mid (x-X)j$ และ $n\mid (y-Y)k$ แต่ $|x-X|<\dfrac{m}{j}$ และ $|y-Y|<\dfrac{n}{k}$ ดังนั้น $x=X$ และ $y=Y$

กรณีที่2. e เป็นด้านที่เกิดจาก (4.4) ของทั้ง $T(x,y)$ และ $T(X,Y)$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีแรก ซึ่งจะได้ว่า $x=X$ และ $y=Y$

กรณีที่3. e เป็นด้านที่เกิดจาก (4.3) ของ $T(x,y)$ และเกิดจาก (4.4) ของ $T(X,Y)$ ดังนั้น $(xj,yk)+(i,i)=(Xj,Yk+1)+(I,I)$ สำหรับจำนวนเต็ม i และ I บางตัวที่ $0\leq i\leq m-1$ และ $0\leq I\leq n-2$ ดังนั้น

$$(x-X)j\equiv I-i(mod\ m) \tag{4.7}$$

และ

$$(y-Y)k\equiv I-i+1(mod\ n) \tag{4.8}$$

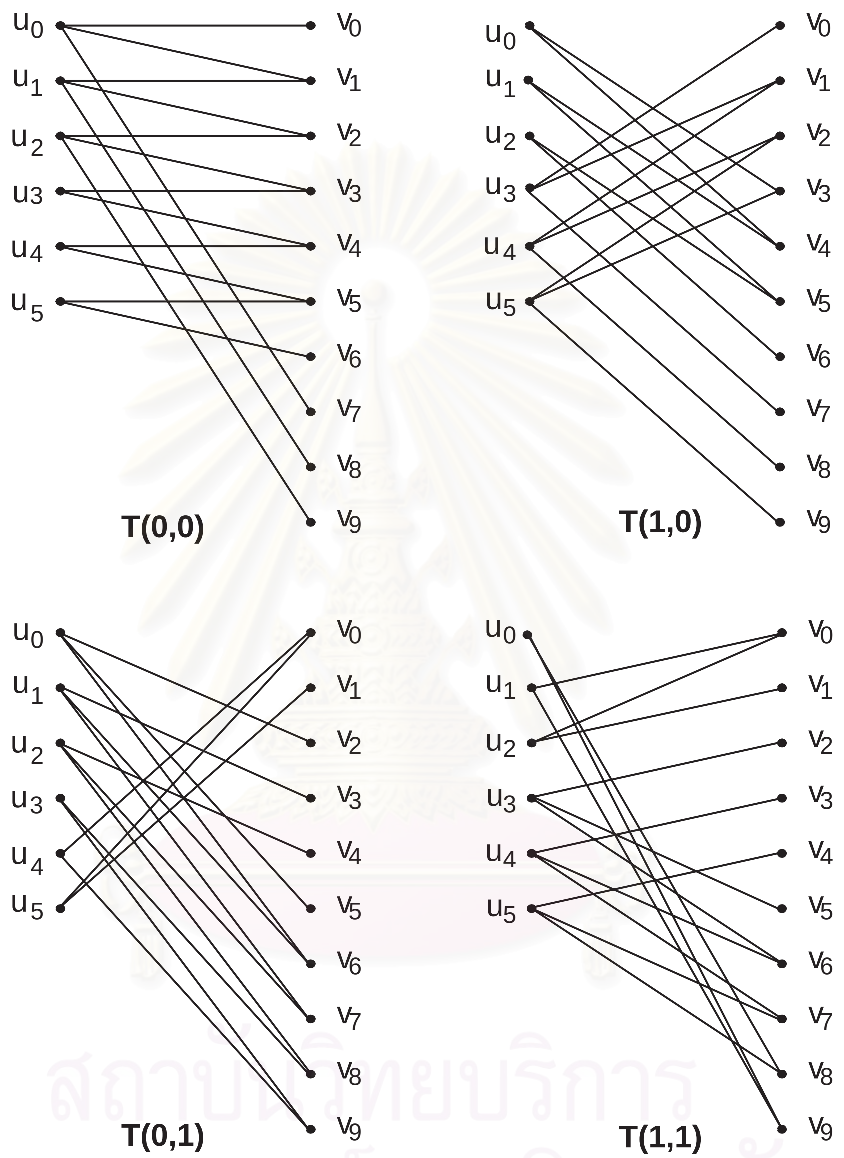
จาก (4.7) และ (4.8) ทำให้ได้ว่า $i-I\equiv 0(mod\ j)$ และ $i-I\equiv 1(mod\ k)$ ดังนั้น $i-I\equiv m(mod\ j)$ และ $i-I\equiv m(mod\ k)$ ดังนั้น

$$m\equiv i-I(mod\ jk) \tag{4.9}$$

สังเกตว่า $2-n\leq i-I\leq m-1$ นั่นคือ $-1\leq m-(i-I)\leq m+n-2<jk$ ซึ่งขัดแย้งกับ (4.9) ดังนั้น $T(x,y)$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y ที่ $0\leq x<\dfrac{m}{j}$ และ $0\leq y<\dfrac{n}{k}$ ไม่มีด้านที่ซ้ำกันจึงทำให้ได้ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ $K_{m,n}$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n ที่ $m+n-1\mid mn$ จะได้ว่า มีการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{m,n}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน $\dfrac{mn}{m+n-1}$ ต้น $\square$

ตัวอย่าง 4.1.1. การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{6,10}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน ในที่นี้ $m = 6, n = 10$ ทำให้ $j = 3, k = 5$ และ $x = 0, 1$ และ $y = 0, 2$



รูปที่ 4.4: การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{6,10}$

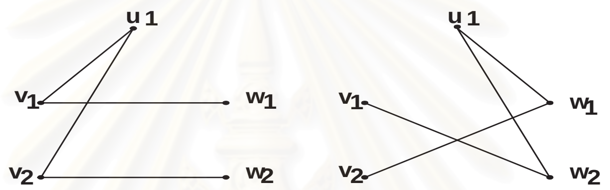
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.2 การแยกส่วนประกอบของกราฟ 3-ส่วนบริบูรณ์ $K_{1,m,m(m-1)}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว ที่ถอดแบบกัน

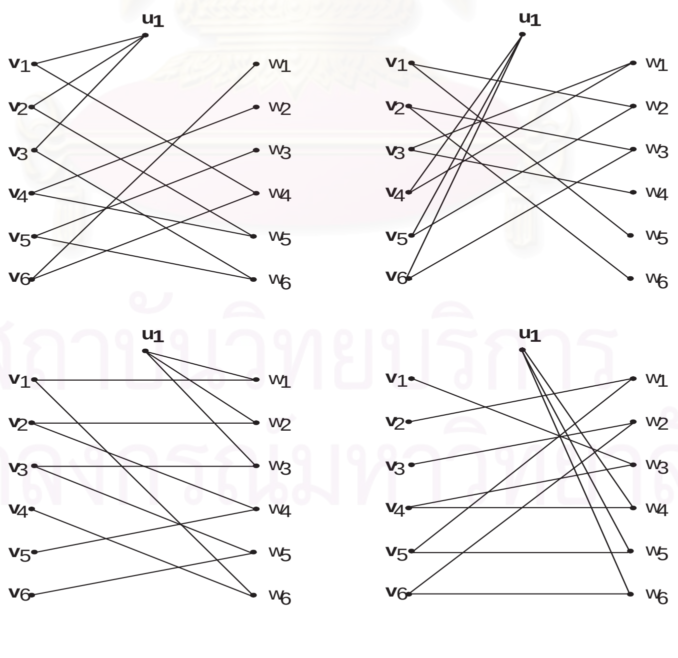
สังเกตว่ากราฟ $K_{1,m,n}$ เป็นกราฟที่มี $m+n+mn$ ด้าน และมี $m+n+1$ จุดยอด และสับกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว $K_{1,m,n}$ มีจุดยอด $m+n-1$ จุดยอด และ $m+n$ ด้าน

ดังนั้นถ้า $m=n$ และมีการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,m,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วเกิดขึ้นแล้ว จะได้ว่า $2m \mid m^2+2m$ หรือ $2 \mid m$

ตัวอย่าง 4.2.1. การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,2,2}$ และ $K_{1,6,6}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน



รูปที่ 4.5: การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,2,2}$



รูปที่ 4.6: การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,6,6}$

ทฤษฎีบท 4.2.1. สำหรับจำนวนเฉพาะ p และจำนวนเต็มบวก a ถ้ามีการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,p,a}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วเกิดขึ้นแล้ว จะได้ว่า $a = p(p-1)$

พิสูจน์. สมมติว่าเราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,p,a}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้ ดังนั้น $p+a \mid pa$ ให้ $p+a=k$ ดังนั้น $pa = kp - p^2$ นั่นคือ $k \mid kp - p^2$ ดังนั้น $k(p-l) = p^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก l บางตัว นั่นคือ $k \mid p^2$ ดังนั้น $p+a \mid p^2$ จาก $a \geq 1$ จะได้ว่า $p+a = p^2$ นั้นคือ $a = p(p-1)$ □

ทฤษฎีบท 4.2.2. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $m \geq 2$ จะได้ว่า มีการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,m,m(m-1)}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน m ต้น

พิสูจน์. ให้ (U,V,W) เป็นเซตแบ่งกั้นของ $K_{1,m,m(m-1)}$

และ $U = \{u_1\}$

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$

$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{m(m-1)}\}$

เราจะแบ่งเซตของ W ออกเป็น $m-1$ กลุ่มดังนี้

ให้ $M_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$

$M_2 = \{w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_{2m}\}$

$M_3 = \{w_{2m+1}, w_{2m+2}, \ldots, w_{3m}\}$

$\vdots$

$M_{m-1} = \{w_{m^2-2m+1}, w_{m^2-2m+2}, \ldots, w_{m(m-1)}\}$

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ สร้าง T_i เป็นสับกราฟที่แผ่ไปทั่ว $K_{1,m,m(m-1)}$ โดยมีด้านกำหนดดังนี้

ก. ด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับ v_i (4.10)

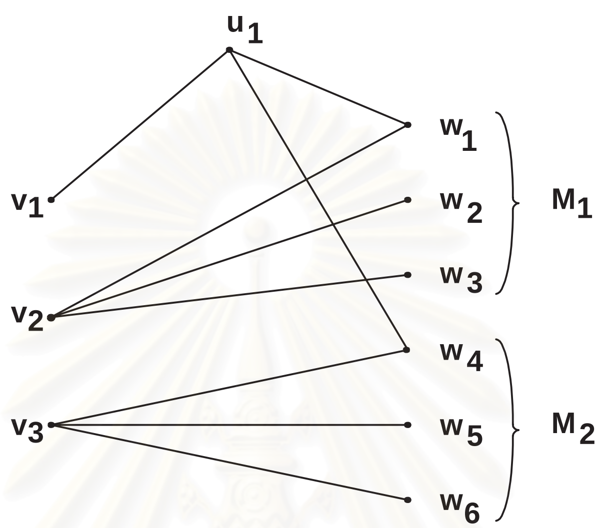
ข. ด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับ w_k เมื่อ $k \equiv i (mod\ m)$ และ $1 \leq k \leq m(m-1)$ (4.11)

ค. ด้านระหว่างจุดยอด v_{i+l} กับจุดยอดทุกจุดใน M_l ทุกจำนวนเต็มบวก l ที่
$l \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ โดยถ้า $a \equiv b (mod\ m)$ แล้ว $v_a = v_b$ (4.12)

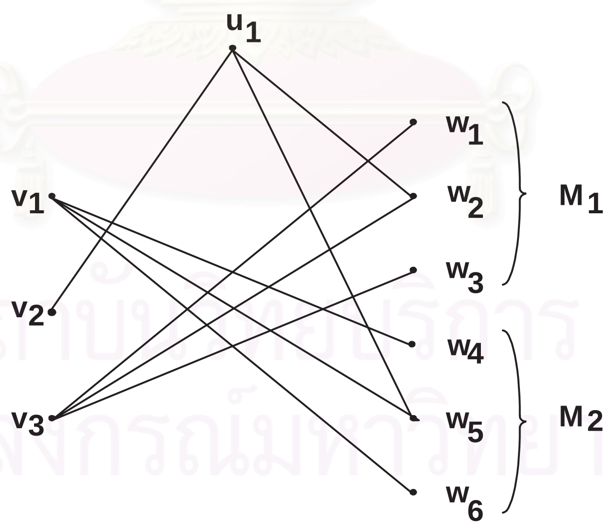
กล่าวคือ $E(T_i) = \{\{u_1, v_i\}\} \cup \{\{u_1, w_k\} \;/\; k \equiv i (mod\; m), 1 \leq k \leq m(m-1)\}$

$$\cup \{\{v_{i+l}, w\} \;/\; w \in M_l, l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}\}$$

เช่น กรณี $m = 3$ จะสร้างกราฟ T_1, T_2 และ T_3 ได้ดังรูป

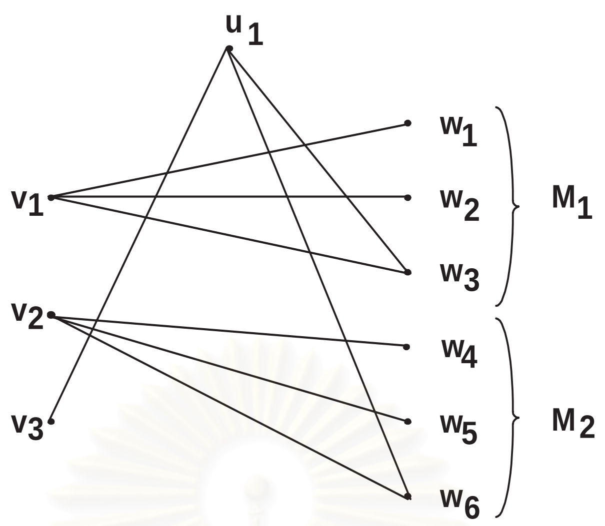


รูปที่ 4.7: แสดงกราฟ T_1



รูปที่ 4.8: แสดงกราฟ T_2

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.9: แสดงกราฟ T_3

เราจะแสดงว่า T_1 ถอดแบบกับ T_i ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

สร้าง $\Phi : V(T_1) \to V(T_i)$

กำหนดโดย $\Phi(u_1) = u_1$

$\Phi(v_a) = v_{a+i-1}$ ทุกจำนวนเต็มบวก a ที่ $a \in \{1, 2, \ldots, m\}$

และสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก c ที่ $c \in \{1, 2, \ldots, m(m-1)\}$ ถ้า $w_c \in M_l$

$$\text{ให้ } \Phi(w_c) = \begin{cases} w_{c+i-1} & \text{ถ้า } c+i-1 \leq ml \\ w_{c+i-1-m} & \text{ถ้า } c+i-1 > ml \end{cases}$$

เห็นได้ชัดว่าจุดยอดแต่ละจุดใน T_1 ถูกฟังก์ชัน Φ ส่งไปเป็นจุดยอดใน T_i ที่ต่างกัน และจาก $|V(T_1)| = |V(T_i)|$ ทำให้ได้ว่า Φ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับ $\{a, b\}$ ที่เป็นด้านของ T_1 จะได้ว่า $\{\Phi(a), \Phi(b)\}$ เป็นด้านของ T_i

ให้ $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_1

กรณีที่1. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_1 ที่เกิดจาก (4.10)

ให้ $a = u_1$ และ $b = v_1$ ดังนั้น $\{\Phi(u_1), \Phi(v_1)\} = \{u_1, v_i\}$ ซึ่งเป็นด้านใน T_i ที่เกิดจาก (4.10)

กรณีที่2. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_1 ที่เกิดจาก (4.11)

ให้ $a = u_1$ และ $b = w_d$ ซึ่งเป็นสมาชิกของ M_l สำหรับจำนวนเต็ม d และ l บางตัวที่

$d \equiv 1(mod\ m)$ และ $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ จาก $M_l = \{w_{(l-1)m+1}, w_{(l-1)m+1}, \ldots, w_{(l-1)m+m}\}$ ดังนั้น $d = (l-1)m+1$ ทำให้ $d+i-1 \leq ml$ จึงได้ว่า $\{\Phi(u_1), \Phi(w_d)\} = \{u_1, w_{d+i-1}\}$ และจาก $d+i-1 \equiv i(mod\ m)$ ทำให้ $\{u_1, w_{d+i-1}\}$ เป็นด้านของ T_i ที่เกิดจาก (4.11)

กรณีที่3. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_1 ที่เกิดจาก (4.12)

ให้ $a = v_{1+l}$ สำหรับจำนวนเต็ม l บางตัวที่ $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ จาก $M_l = \{w_{(l-1)m+1}, w_{(l-1)m+2}, \ldots, w_{(l-1)m+m}\}$ ให้ $b = w_{(l-1)m+t}$ สำหรับจำนวนเต็ม t บางตัวที่ $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$

ถ้า $(l-1)m+t+i-1 \leq ml$ จะได้ว่า $\{\Phi(v_{1+l}), \Phi(w_{(l-1)m+t})\} = \{v_{i+l}, w_{(l-1)m+t+i-1}\}$ จาก $t+i-1 \leq m$ ดังนั้น $w_{(l-1)m+t+i-1} \in M_l$ นั่นคือ $\{v_{i+l}, w_{(l-1)m+t+i-1}\}$ เป็นด้านของ T_i ที่เกิดจาก (4.12)

ถ้า $(l-1)m+t+i-1 > ml$ จะได้ว่า $\{\Phi(v_{1+l}), \Phi(w_{(l-1)m+t})\} = \{v_{i+l}, w_{(l-1)m+t+i-1-m}\}$ จาก $t \leq m$ และ $i \leq m$ ทำให้ $t+i-1-m \leq m-1$ นั่นคือ $w_{(l-1)m+t+i-1-m} \in M_l$ ดังนั้น $\{v_{i+l}, w_{(l-1)m+t+i-1-m}\}$ เป็นด้านของ T_i ที่เกิดจาก (4.12)

ดังนั้น T_1 ถอดแบบกับ T_i ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, ..., m\}$ เนื่องจากการถอดแบบกันของกราฟมีสมบัติถ่ายทอด จึงได้ว่ากราฟ T_i และ T_j ถอดแบบกันทุกจำนวนเต็มบวก i และ j ที่ $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$

เนื่องจาก สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ กราฟ T_i มีด้านที่เกิดจาก (4.11) จำนวน 1 ด้าน มีด้านที่เกิดจาก (4.12) จำนวน $m-1$ ด้าน และมีด้านที่เกิดจาก (4.13) จำนวน $m(m-1)$ ด้าน ดังนั้น $|E(T_i)| = m^2$

ต่อไปจะแสดงว่า T_1 เป็นกราฟต้นไม้โดยจะแสดงว่า T_1 เป็นกราฟเชื่อมโยงได้ที่มีจำนวนจุดยอดมากกว่าจำนวนด้านอยู่หนึ่งจุดเสมอ

เนื่องจากความเชื่อมโยงของจุดยอดมีสมบัติถ่ายทอด ดังนั้นจึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า

1. มีด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับจุดยอด v_{1+l} ทุกจำนวนเต็ม l ที่ $l \in \{0, 1, \ldots, m\}$
2. มีด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับจุดยอด w_j ทุกจำนวนเต็มบวก j ที่ $j \in \{1, 2, \ldots, m(m-1)\}$

ให้ l เป็นจำนวนเต็มที่ $l \in \{0, 1, \ldots, m\}$ ถ้า $l = 0$ เห็นได้ชัดว่ามีด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับจุดยอด v_1 ถ้า $l > 0$ โดย (4.12) จะได้ว่า มีด้านระหว่างจุดยอด v_{1+l} กับจุดยอด $w_{(l-1)m+1}$ และโดย (4.11) ได้ว่ามีด้านระหว่างจุดยอด $w_{(l-1)m+1}$ กับจุดยอด u_1 ดังนั้นมีด้านระหว่างจุดยอด u_1

กับจุดยอด v_{1+l}

ให้ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $j \in \{1, 2, \ldots, m(m-1)\}$ ถ้า $j \equiv 1(mod\ m)$ โดย (4.11) เห็นได้ชัดว่ามีด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับจุดยอด w_j ถ้า $j \not\equiv 1(mod\ m)$ เนื่องจาก $w_j \in M_l$ สำหรับจำนวนเต็มบวก l บางตัวที่ $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ ดังนั้น โดย (4.12) ได้ว่าจะต้องมีด้านระหว่างจุดยอด v_{1+l} กับจุดยอด w_j และในทำนองเดียวกับข้างต้น ได้ว่ามีด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับจุดยอด v_{1+l} ดังนั้นมีด้านระหว่างจุดยอด u_1 กับจุดยอด w_j นั่นคือ T_1 เป็นกราฟเชื่อมโยงได้

เนื่องจาก $|E(T_1)| = m^2$ และจาก T_1 เป็นสับกราฟที่แผ่ไปทั่ว $K_{1,m,m(m-1)}$ จึงได้ว่า $|E(T_1)| = |V(T_1)| - 1$

ดังนั้น T_1 เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว และจาก T_1 ถอดแบบกับ T_i ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ จึงทำให้ T_i เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

ให้ $\mathcal{C} = \{T_i |\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ จะพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ $K_{1,m,m(m-1)}$

เพราะว่า $\sum\limits_{i=1}^{m} |E(T_i)| = m^3 = |E(K_{1,m,m(m-1)})|$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ $K_{1,m,m(m-1)}$ จึงเพียงพอที่จะแสดงเพียงว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก i และ j ที่ $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ และ $i \neq j$ กราฟ T_i และ T_j ไม่มีด้านที่ซ้ำกัน

สมมติให้กราฟ T_i และ T_j มีด้านที่ซ้ำกันอย่างน้อยหนึ่งด้านให้ชื่อว่า $\{a, b\}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปสามารถแบ่งได้เป็น 6 กรณี

กรณีที่1. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i และ T_j ที่เกิดจาก (4.10)

กรณีที่2. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i ที่เกิดจาก (4.10) เป็นด้านของ T_j ที่เกิดจาก (4.11)

กรณีที่3. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i ที่เกิดจาก (4.10) เป็นด้านของ T_j ที่เกิดจาก (4.12)

กรณีที่4. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i ที่เกิดจาก (4.11) เป็นด้านของ T_j ที่เกิดจาก (4.12)

ซึ่งทั้ง 4 กรณีนี้ เห็นได้ชัดว่าเกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่5. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i และ T_j ที่เกิดจาก (4.11)

ดังนั้น $\{u_1, w_{k_1}\} = \{u_1, w_{k_2}\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k_1 และ k_2 ที่ $k_1 \equiv i(mod\ m)$ และ $k_2 \equiv j(mod\ m)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $i \equiv j(mod\ m)$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นกรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่6. $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i และ T_j ที่เกิดจาก (4.12)

จาก $\{a, b\}$ เป็นด้านของ T_i และ T_j ที่เกิดจาก (4.12) ดังนั้น $\{a, b\} = \{v_{i+l_1}, w_{(l_1-1)m+t_1}\} = \{v_{j+l_2}, w_{(l_2-1)m+t_2}\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก t_1, t_2, l_1 และ l_2 บางตัวที่ $t_1, t_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ และ

$l_1, l_2 \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$

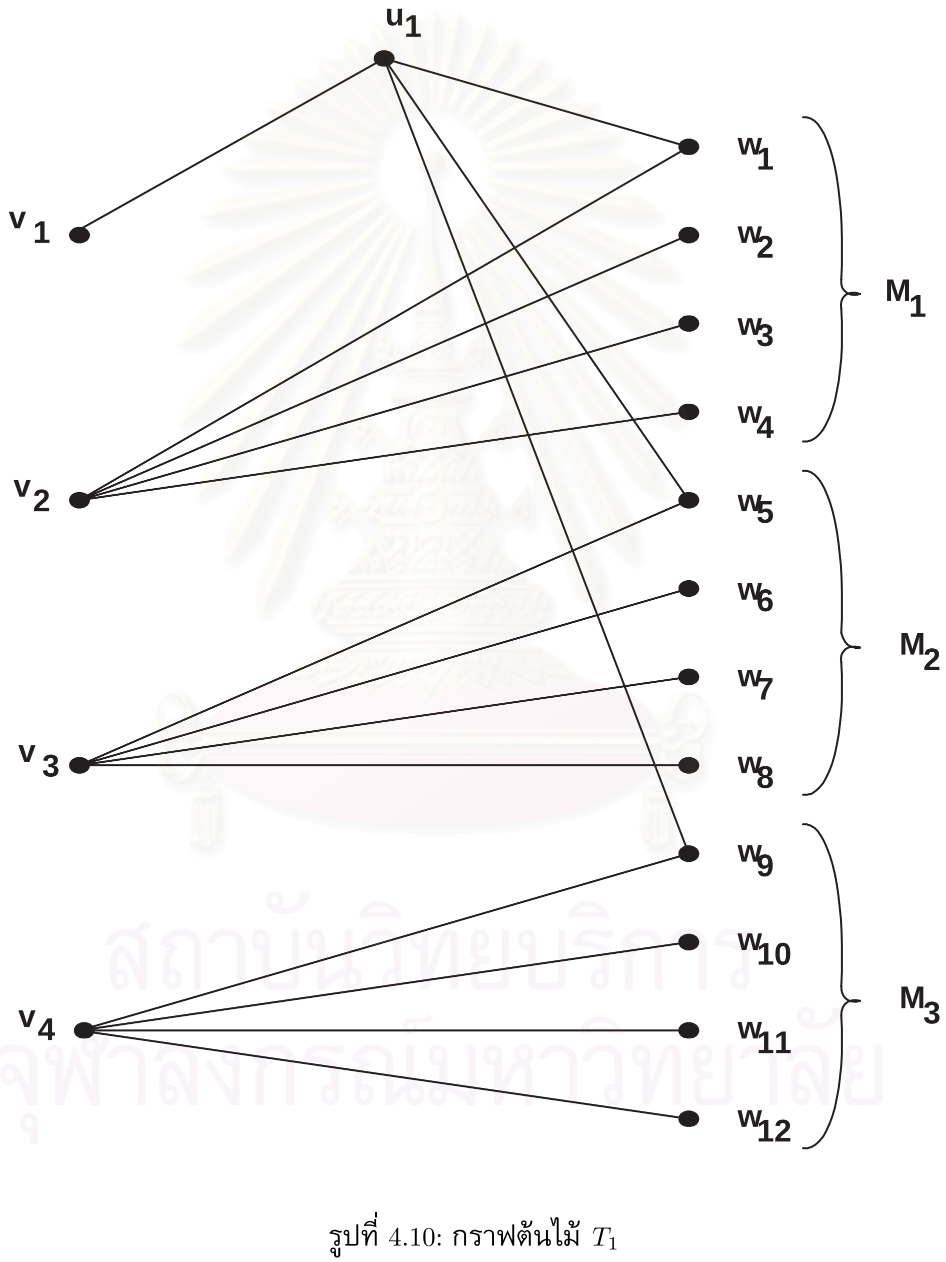
ดังนั้นในการพิสูจน์กรณีนี้ เพียงพอที่จะสมมติว่า $i + l_1 \equiv j + l_2 (mod\ m)$ จาก $w_{(l_1-1)m+t_1} \in M_{l_1}$ และ $w_{(l_2-1)m+t_2} \in M_{l_2}$ ทำให้ได้ว่า $M_{l_1} = M_{l_2}$ แต่ $i \neq j$ ทำให้ $l_1 \not\equiv l_2 (mod\ m)$ ดังนั้น $M_{l_1} \cap M_{l_2} = \phi$ เกิดข้อขัดแย้งทำให้กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก i และ j บางตัวที่ $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ที่ $i \neq j$ กราฟ T_i และ T_j ไม่มีด้านที่ซ้ำกัน

นั่นคือ มีการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,m,m(m-1)}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วที่ถอดแบบกัน จำนวน m ต้น $\square$

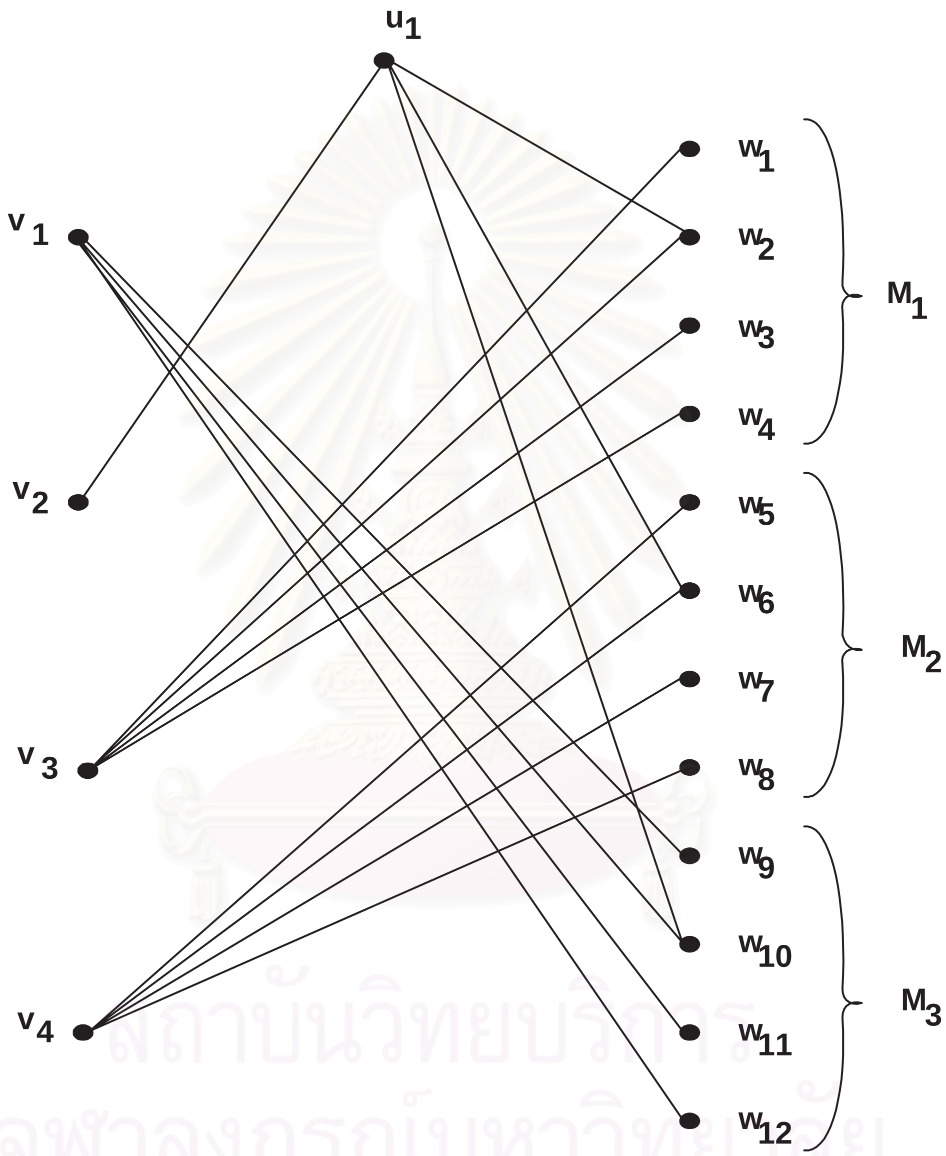
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง 4.2.2. เราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,4,12}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วชนิดถอดแบบกัน คือ T_1, T_2, T_3 และ T_4 ดังรูป

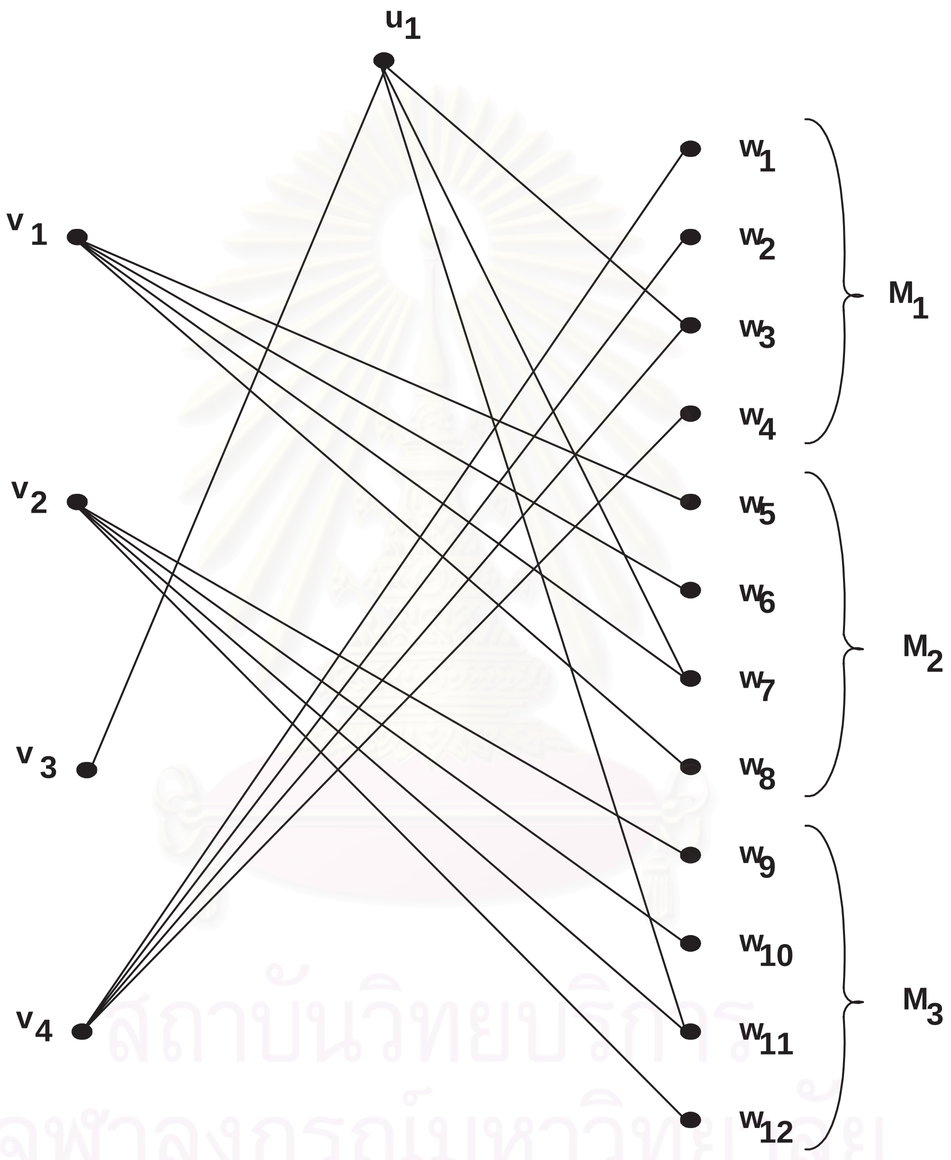


รูปที่ 4.10: กราฟต้นไม้ T_1

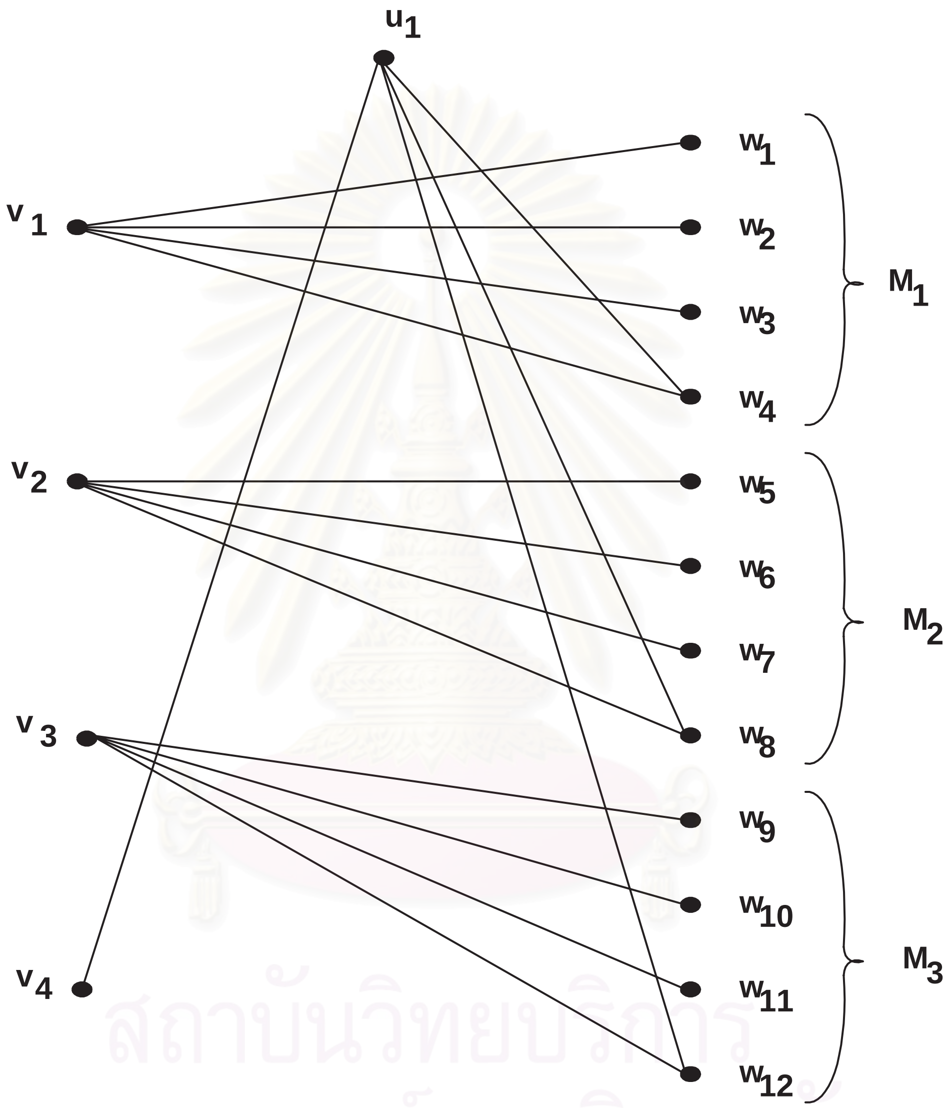
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.11: กราฟต้นไม้ T_2



รูปที่ 4.12: กราฟต้นไม้ T_3



รูปที่ 4.13: กราฟต้นไม้ T_4

ดังนั้น $C = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_{1,4,12}$

4.3 การแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเฉพาะกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดในแต่ละส่วนเท่ากัน กล่าวคือจะพิจารณาเฉพาะการแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว โดยที่ $p \geq 2$

หมายเหตุ สำหรับจำนวนเต็มบวก p ที่ $p \geq 2$ จำนวนด้านของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ คือ $\dfrac{p(p-1)m^2}{2}$

ทฤษฎีบท 4.3.1. สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ p ที่ $m, p \geq 2$ เราไม่สามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้

พิสูจน์. ให้ m และ p เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $m, p \geq 2$ สมมติว่าเราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้

จาก กราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ มีด้านทั้งหมด $\dfrac{p(p-1)}{2}m^2$ ด้าน และสับกราฟของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ ที่เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วจะมีด้าน $pm-1$ ด้าน

ทำให้ $pm - 1 \mid \dfrac{p(p-1)}{2}m^2$ นั่นคือ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว

$$\frac{p(p-1)}{2}m^2 = (pm-1)k \tag{4.10}$$

ให้ $Q = gcd\,(p, \frac{p(p-1)}{2})$ ดังนั้น

$$\frac{k}{m} = Q\left(\frac{pk}{Q} - \frac{p(p-1)}{2Q}m\right) \tag{4.11}$$

จาก $\dfrac{pk}{Q} - \dfrac{p(p-1)}{2Q}m$ เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ $\dfrac{k}{m} \in \{Q, 2Q, 3Q, \ldots\}$

จะแสดงว่า $\dfrac{k}{m} > Q$ สมมติให้ $\dfrac{k}{m} = Q$ ดังนั้น จาก (4.11) จะได้ว่า

$$\frac{pk}{Q} = 1 + \frac{p(p-1)}{2Q}m \tag{4.12}$$

จาก (4.10) จะได้ว่า

$$\frac{p}{Q}\left(\frac{p(p-1)}{2}m^2\right) = (pm-1)\frac{pk}{Q} \tag{4.13}$$

จาก (4.12) และ (4.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{p}{Q}\left(\frac{p(p-1)}{2}m^2\right) &= (pm-1)\left(1 + \frac{p(p-1)}{2Q}m\right) \\
&= \frac{p^2(p-1)}{2Q}m^2 + pm - \frac{p(p-1)}{2Q}m - 1 \\
&= \frac{p}{Q}\left(\frac{p(p-1)}{2}m^2\right) + \left(p - \frac{p(p-1)}{2Q}\right)m - 1
\end{aligned}$$

นั่นคือ $p - \frac{p(p-1)}{2Q} \;=\; \frac{1}{m}$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ $p - \frac{p(p-1)}{2Q}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $Q \;=\; gcd\,(p, \frac{p(p-1)}{2})$ ดังนั้น $\frac{k}{m} > Q$

จาก (4.10) จะได้ว่า $\frac{p(p-1)}{2}m \;=\; pk - \frac{k}{m}$

หรือ $$p \;=\; \frac{p(p-1)}{2}\frac{m}{k} + \frac{1}{m} \tag{4.14}$$

จาก $\frac{m}{k} < \frac{1}{Q}$ ทำให้ $$\frac{p(p-1)}{2}\frac{m}{k} \;<\; \frac{p(p-1)}{2}\frac{1}{Q} \tag{4.15}$$

กรณีที่1. p เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $gcd(p, \frac{p(p-1)}{2}) \;=\; \frac{p}{2}$

จาก (4.15) ทำให้ $\frac{p(p-1)}{2}\frac{m}{k} \;<\; p-1$ แต่ $\frac{1}{m} \;<\; 1$

ดังนั้น $\frac{p(p-1)}{2}\frac{m}{k} + \frac{1}{m} \;<\; p$ ซึ่งขัดแย้งกับ (4.14) ทำให้กรณีที่1. ไม่เกิดขึ้น

กรณีที่2. p เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $gcd(p, \frac{p(p-1)}{2}) \;=\; p$

จาก (4.15) ทำให้ $\frac{p(p-1)}{2}\frac{m}{k} \;<\; \frac{p-1}{2} <\; p-1$ แต่ $\frac{1}{m} \;<\; 1$

ดังนั้น $\frac{p(p-1)}{2}\frac{m}{k} + \frac{1}{m} \;<\; p$ ซึ่งขัดแย้งกับ (4.14) ทำให้กรณีที่2. ไม่เกิดขึ้น

นั่นคือ สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ p ที่ $m, p \geq 2$ เราไม่สามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้

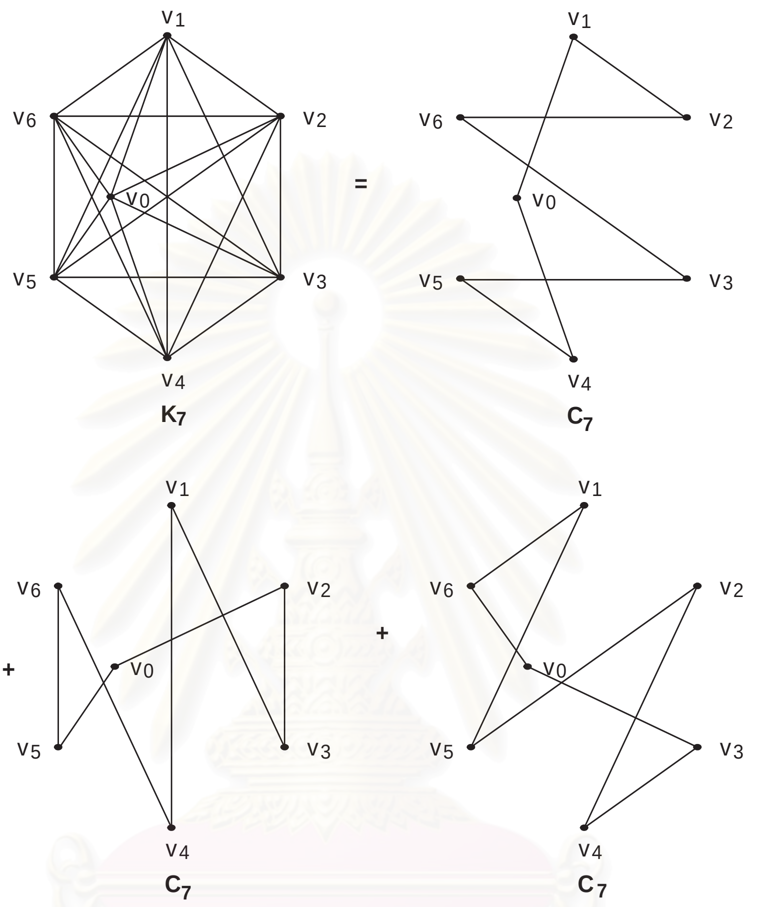
□

หมายเหตุ ถ้า $m = 1$ จะได้ว่า กราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m} \cong K_p$

ทฤษฎีบทต่อไป เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับการแยกส่วนของกราฟ K_{2n+1} ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี จึงขอนำมาแสดงไว้โดยไม่พิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.3.2. [5] สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะมีการแยกส่วนประกอบของกราฟ K_{2n+1} เป็นกราฟวัฏจักรยาว $2n+1$ จำนวน n วัฏจักร นั่นคือ $K_{2n+1} = nC_{2n+1}$

ตัวอย่าง 4.3.1. สำหรับ $n = 3$ จะสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ K_7 เป็นกราฟวัฏจักรจำนวน 3 วัฏจักรได้ดังรูป



รูปที่ 4.14: การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_7 = 3C_7$ เมื่อ C_7 คือวัฏจักรยาว 7

ทฤษฎีบท 4.3.3. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะมีการแยกส่วนประกอบของกราฟ K_{2n} เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว จำนวน n ต้น

พิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ให้ $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ เป็นจุดยอดของ K_{2n+1} โดยทฤษฎีบท 4.3.2. เราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ K_{2n+1} เป็นกราฟวัฏจักรยาว $2n+1$ จำนวน n วัฏจักรได้

ให้ $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ K_{2n+1} เมื่อ C_i เป็นกราฟวัฏจักร ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

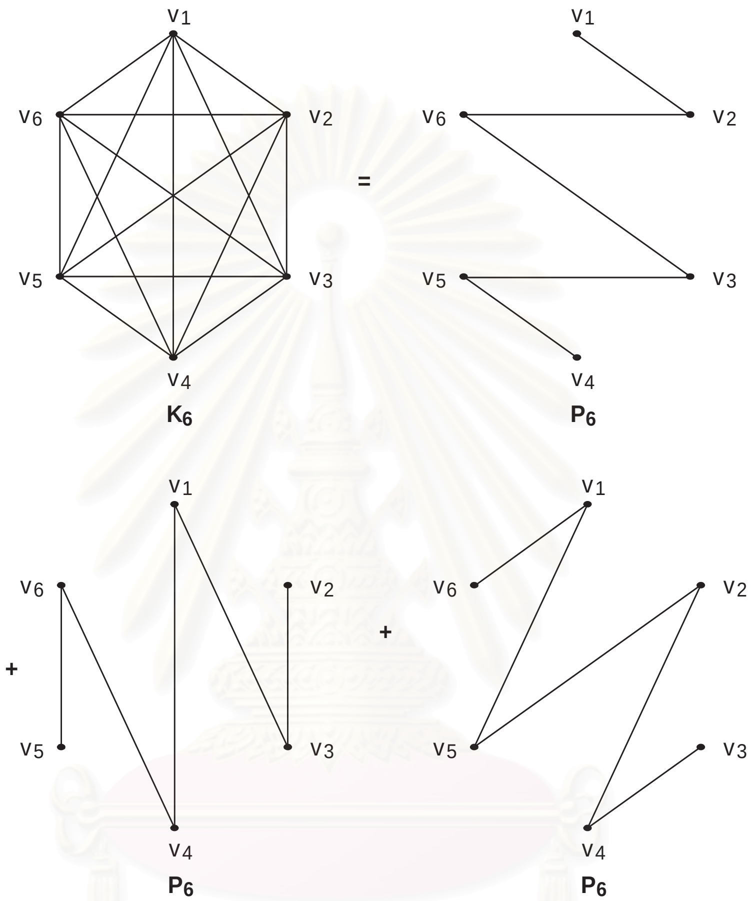
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จะแสดงว่า $\mathcal{C} = \{C_i \smallsetminus \{v_0\} | \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ K_{2n} แต่ละจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ จะได้ว่า $|V(C_i \smallsetminus \{v_0\})| = 2n$ และ $|E(C_i \smallsetminus \{v_0\})| = 2n-1$ ดังนั้น $\sum\limits_{i=1}^{m} |E(C_i \smallsetminus \{v_0\})| = n(2n-1)$ ซึ่งเท่ากับจำนวนด้านของ K_{2n} จาก $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของ K_{2n+1} ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก i และ j ที่ $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ และ $i \neq j$ จะได้ว่า C_i ไม่มีด้านซ้ำกับ C_j นั่นคือ $C_i \smallsetminus \{v_0\}$ ไม่มีด้านที่ซ้ำกับ $C_j \smallsetminus \{v_0\}$ แต่ C_i เป็นวัฏจักรที่มี $2n+1$ จุดยอด จะได้ว่า $C_i \smallsetminus \{v_0\}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว K_{2n} ทำให้ $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนประกอบของกราฟ K_{2n} สังเกตว่า กราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่ว คือ วิถี P_{2n} ที่ยาว $2n-1$ $\square$

หมายเหตุ สำหรับจำนวนเต็มบวก m ใดๆ ถ้าเราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ K_m เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้แล้ว จะได้ว่า m เป็นจำนวนคู่

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง 4.3.2. เราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ K_6 เป็นวิถียาว 5 ได้ โดยจากรูป 4.14 จะเห็นว่ากราฟ $K_7 = 3C_7$ และเมื่อพิจารณาว่า $V(K_6) = V(K_7) \setminus \{v_0\}$ จะได้ว่าเราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ K_6 เป็นวิถียาว 5 ได้ดังรูป



รูปที่ 4.15: การแยกส่วนประกอบของกราฟ $K_6 = 3P_6$ เมื่อ P_6 คือวิถียาว 5

ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก m, p ใดๆ ถ้า $m \geq 2$ และ $p \geq 2$ จะได้ว่า เราไม่สามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้
และถ้า $m = 1$ และ p เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า เราสามารถแยกส่วนประกอบของกราฟ p-ส่วนบริบูรณ์ $K_{m,m,\ldots,m}$ เป็นกราฟต้นไม้ที่แผ่ไปทั่วได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

การแยกส่วนของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{t,t}$ เป็นกราฟลูกบาศก์ที่ถอดแบบกัน

ในบทนี้เราจะศึกษาถึงการแยกส่วนของกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{t,t}$ เป็นกราฟ d-ลูกบาศก์ Q_d ที่ถอดแบบกัน จำนวน q ลูกบาศก์ เมื่อ $t = 2^{d-1} = dq$ สำหรับจำนวนเต็มบวก d ใดๆ ตลอดบทนี้กำหนดให้ (V_0, V_1) เป็นเซตแบ่งกั้นของ $K_{t,t}$ ที่ V_0 เป็นเซตของ d สิ่งอันดับที่มี 1 ปรากฏอยู่เป็นจำนวนคู่ และ V_1 เป็นเซตของ d สิ่งอันดับที่มี 1 ปรากฏอยู่เป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบทประกอบ 5.1. [1] ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวก และ $t = 2^{d-1}$ และ $A \subseteq V_1$ ให้ $G(A)$ เป็นสับกราฟของ $K_{t,t}$ โดยด้านของ $G(A)$ คือ $\{v, v+a\}$ เมื่อ $v \in V_0$ และ $a \in A$ ถ้า A เป็นฐานของ $\mathbb{Z}_2^d$ แล้ว $G(A)$ จะถอดแบบกับ Q_d

พิสูจน์. ให้ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$ เป็นฐานของ $\mathbb{Z}_2^d$ ที่ $A \subseteq V_1$

กำหนดให้ M เป็นเมทริกซ์ขนาด $d \times d$ โดยที่ m_{ij} คือ เลขที่ปรากฏในตำแหน่งที่ j ของ d สิ่งอันดับ a_i กล่าวคือ $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$

ให้ $f : V(Q_d) \to V(G(A))$ กำหนดโดย $f(x) = xM$ เนื่องจาก $\{a_1, a_2, ..., a_d\}$ เป็นเซต

อิสระเชิงเส้น ทำให้ M เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งที่เป็นการแปลงเชิงเส้น สังเกตว่า สำหรับ $x, y \in V_0$ จะได้ว่า $x + y \in V_0$ สำหรับ $x, y \in V_1$ จะได้ว่า $x + y \in V_0$ และสำหรับ $x \in V_0, y \in V_1$ จะได้ว่า $x + y \in V_1$ และเมื่อกำหนด e_i แทน d สิ่งอันดับที่ตำแหน่ง i เป็น 1 และตำแหน่งอื่นๆเป็น 0 จะได้ว่า $f(e_i) = a_i$ ดังนั้นสำหรับ x ที่เป็นสมาชิกของเซต V_0 จะได้ว่า $f(x)$ เป็นสมาชิกของ V_0

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $\{v, v + e_i\}$ เป็นด้านของ Q_d โดยที่ $v \in V_0$ และ i เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ เห็นได้ชัดว่า $f(v) \in V_0$ เนื่องจาก $f(v+e_i) = (v+e_i)M = vM + e_iM = f(v) + a_i$ และ $a_i \in A$ ดังนั้น $\{f(v), f(v + e_i)\}$ เป็นด้านของ $G(A)$ นั่นคือ $G(A)$ ถอดแบบกับ Q_d □

ทฤษฎีบท 5.2. [4] ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ S เป็นสับเซตของปริภูมิเวกเตอร์ สำหรับสับเซตจำกัด T ของ S ถ้า $|T| \leq k \cdot rank(T)$ จะได้ว่า S จะมีเซตแบ่งกั้น k เซต โดยที่แต่ละเซตเป็นเซตอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบทประกอบ 5.3. [1] ให้ d และ q เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $2^{d-1} = dq$ จะได้ว่า V_1 จะมีเซตแบ่งกั้น q เซต โดยที่แต่ละเซตเป็นฐานของ $\mathbb{Z}_2^d$

พิสูจน์. ให้ T เป็นสับเซตใดๆ ของ V_1 สมมติให้ $rank(T) = m$ จะแสดงว่า $|T| \leq qm$

กรณีที่1. $m = d$ เพราะว่า $|T| \leq 2^{d-1}$ ดังนั้น $|T| \leq qm$

กรณีที่2. $m < d$ จาก $rank(T) = m$ ให้ $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นที่ไม่เล็กกว่าใครที่ $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq T$ ดังนั้น $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ เป็นฐานของ $< T >$ ทำให้ได้ว่า $| < T > | = 2^m$ และเนื่องจาก $T \subseteq V_1$ ดังนั้น $|T| \leq 2^{m-1}$ จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $2^{m-1} \leq qm$ หรือ $\dfrac{2^{m-1}}{m} \leq \dfrac{2^{d-1}}{d}$

สังเกตว่า $\dfrac{2^{m-1}}{m}$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดในตัวแปร m และจาก $m < d$ ดังนั้นจึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $\dfrac{2^{d-2}}{d-1} \leq \dfrac{2^{d-1}}{d}$

กรณีที่1. $d \leq 5$ เห็นได้ชัดว่า $\dfrac{2^{d-2}}{d-1} \leq \dfrac{2^{d-1}}{d}$

กรณีที่2. $d > 5$

$$\begin{aligned}
\frac{2^{d-1}}{d} - \frac{2^{d-2}}{d-1} &= \frac{(d-2)(2^{d-2})}{d(d-1)} \\
&> \frac{(d-2)(d+2)}{d(d-1)} \\
&= \frac{(d^2-4)}{d^2-d} \\
&> 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า $|T| \leq qm$ นั่นคือ V_1 จะมีเซตแบ่งกั้น q เซต โดยที่แต่ละเซตเป็นเซตอิสระเชิงเส้น จาก $dim(\mathbb{Z}_2^d) = d$ และ $|V_1| = dg$ ดังนั้นจึงทำให้ได้ว่าแต่ละเซตแบ่งกั้นของ V_1 จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และเท่ากับ d ซึ่งทำให้แต่ละเซตแบ่งกั้นของ V_1 เป็นฐานของ $\mathbb{Z}_2^d$ □

ทฤษฎีบท 5.4. [1] ให้ d, t และ q เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $t = 2^{d-1} = dq$ จะได้ว่า มีการแยกส่วนของกราฟ $K_{t,t}$ เป็นกราฟ d-ลูกบาศก์ Q_d ที่ถอดแบบกัน จำนวน q ลูกบาศก์ได้ นั่นคือ $K_{t,t} = qQ_d$

พิสูจน์. โดยทฤษฎีบทประกอบ 5.3. ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_q$ ต่างเป็นฐานของ $\mathbb{Z}_2^d$ ที่เป็นเซตแบ่งกั้นของ V_1 โดยทฤษฎีบทประกอบ 5.1. ได้ว่า $G(A_i)$ ถอดแบบกับกราฟ d-ลูกบาศก์ ทุกจำนวนเต็มบวก i ที่ $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$

ให้ $\mathcal{C} = \{G(A_i)/i \in \{1, 2, \ldots, q\}\}$ จะพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของ $K_{t,t}$

สังเกตว่า $|E(K_{t,t})| = t^2$ และ $\sum_{i=1}^{q} |E(G(A_i))| = qd2^{d-1} = t^2$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของ $K_{t,t}$ จึงเพียงพอที่จะแสดงเพียงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก i และ j ที่ $i, j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ และ $i \neq j$ กราฟ $G(A_i)$ และกราฟ $G(A_j)$ ไม่มีด้านที่ซ้ำกัน

สมมติให้กราฟ $G(A_i)$ และกราฟ $G(A_j)$ มีด้านที่ซ้ำกันอย่างน้อยหนึ่งด้าน

ให้ $\{x, x + a_i\}$ เป็นด้านของ $G(A_i)$ และ $\{y, y + a_j\}$ เป็นด้านของ $G(A_j)$ ที่ $\{x, x + a_i\}$ เท่ากับด้าน $\{y, y + a_j\}$

กรณีที่1. $x = y$ และ $x + a_i = y + a_j$ นั่นคือ $a_i = a_j$ แต่ $A_i \cap A_j = \phi$ ทำให้ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่2. $x = y + a_j$ และ $y = x + a_i$ จาก $x \in V_0$ แต่ $y + a_j \in V_1$ ทำให้ เกิดข้อขัดแย้ง

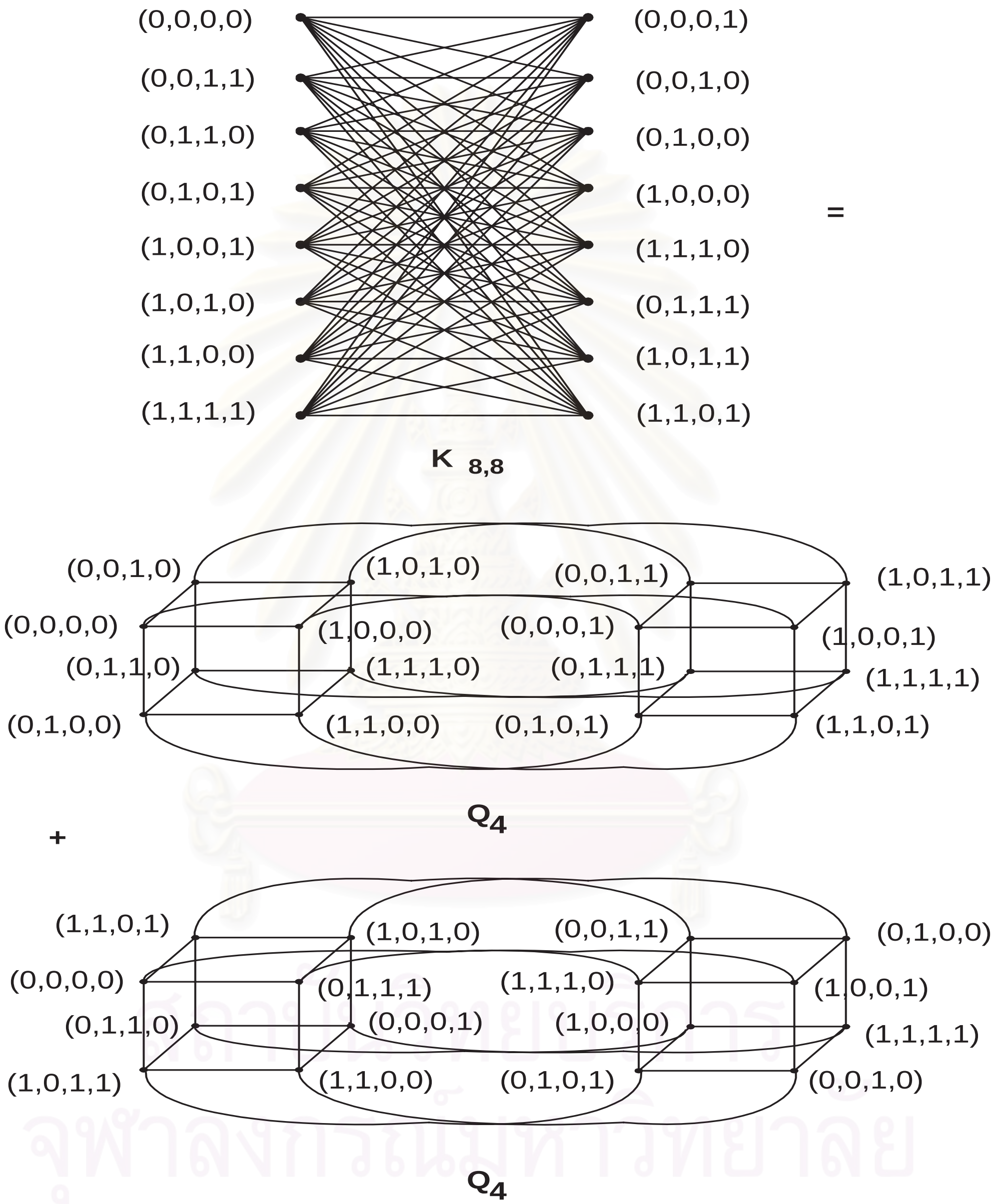
นั่นคือสำหรับจำนวนเต็มบวก i และ j ที่ $i, j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ ที่ $i \neq j$ กราฟ $G(A_i)$ และกราฟ $G(A_j)$ ไม่มีด้านที่ซ้ำกัน

ดังนั้น $\mathcal{C}$ เป็นการแยกส่วนของ $K_{t,t}$ นั่นคือ $K_{t,t} = qQ_d$ □

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง 5.1. การแยกส่วนของกราฟ $K_{t,t}$ เป็นกราฟ d-ลูกบาศก์ Q_d จำนวน q ลูกบาศก์เนื่องจาก $t = 2^{d-1} = dq$ ดังนั้น $d = 2^r$ สำหรับจำนวนเต็มบวก r บางตัว

สำหรับ $d = 4$ จะได้ว่า $K_{8,8} = 2Q_4$ ดังรูป



รูปที่ 5.1: การแยกส่วนของกราฟ $K_{8,8} = 2Q_4$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] EL-Zanati, S.; Eynden, C.V; Decompositions of $K_{m,n}$ into cubes. J. Comb. Designs. 4(1996): 51-57.

[2] EL-Zanati, S.; Eynden, C.V.; Factorizations of $K_{m,n}$ into spanning trees. Graphs and Combinatorics. 15(1999) : 287-293.

[3] Fink, J.F.; On the decomposition of $n-$ cubes into isomorphic tree. J. Graph Theory. 14(1990): 405-411.

[4] Horn, A. A characterization of unions of linearly independent sets. J. London Math. Soc. 30(1995): 494-496.

[5] Ringel, G.; Hartsfield, N.; Pearl in Graph Theory : A Comprehensive Introduction. California: Academic Press, 1990.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

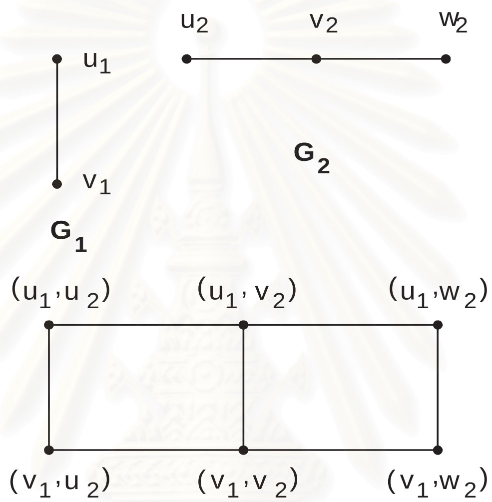
ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นิยาม 1. สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 ใดๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product)** ของกราฟ G_1 และ G_2 แทนด้วย $G_1 \times G_2$ หมายถึงกราฟที่มี $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2) =$ $\{(u,v)/u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ โดยที่สำหรับ ระหว่างจุดยอด $(u_1,u_2),(v_1,v_2)$ ของ $V(G_1 \times G_2)$ จะมีด้านก็ต่อเมื่อ 1. $u_1 = v_1$ และ $\{u_2,v_2\} \in E(G_2)$ หรือ

2. $u_2 = v_2$ และ $\{u_1,v_1\} \in E(G_1)$

ตัวอย่าง 1. ผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ G_1 และ G_2



$G_1 \times G_2$

ทฤษฎีบท 2. ให้ Gเป็นกราฟใดๆ จะได้ว่า G เป็นกราฟต้นไม้ ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงได้ที่ $|E(G)| = |V(G)| - 1$

ทฤษฎีบท 3. ให้ Gเป็นกราฟใดๆ จะได้ว่า G เป็นกราฟต้นไม้ ก็ต่อเมื่อ จุดยอดสองจุดใดๆ ของ G เชื่อมโยงกันได้ด้วยวิถีเพียงวิถีเดียว

นิยาม 4. ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนาม F ให้ S เป็นสับเซตจำกัดของ V **ค่าลำดับชั้นของS (*rankS*)** หมายถึง จำนวนของสมาชิกของสับเซตที่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ที่ไม่เล็กกว่าสับเซตใดที่เป็นเซตอิสระเชิงเส้นของ S

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายจิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เกิดเมื่อวันที่ 24 สิงหาคม พ.ศ. 2520 ที่จังหวัดปราจีนบุรี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2541 และในปีการศึกษา 2542 ได้เข้าศึกษาในระดับปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และได้รับทุนอุดหนุนการศึกษาโครงการพัฒนาอาจารย์ สาขาขาดแคลนเพื่อศึกษาในประเทศ สาขาคณิตศาสตร์ ในปีการศึกษา 2544

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย