บทที่ 5

สรุปวิธีวิจัย

จากการที่ได้ทำการวิจัยจากเริ่มต้นมาจนถึงจุดนี้ จะขอสรุปให้ได้ใจความโดยทั่วไปก่อนว่า สิ่งที่ต้องการหาในครั้งนี้ คือส่วนโค้งของเส้นทาง ที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุด จากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้าย โดยใช้วิธีการ แคลคูลัสของการแปรผัน โดยใช้วัตถุทรงกระบอกเป็นตัวแทน และเป็นการกลิ้งในระนาบเดียว คือ(X,Y)และกลิ้งโดยไม่มีการไถลแน่นอนว่าการกลิ้งย่อมเกิดการหมุนรอบตัวเอง ย่อมต้องมีโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของวัตถุมาเกี่ยวข้องด้วย เพราะวัตถุแต่ละชนิด จะมีโมเมนต์ของความเฉื่อยไม่เท่ากัน ความเร็วของวัตถุก็มีผลต่อการกลิ้งของวัตถุเมื่อวัตถุเคลื่อนที่มาได้ช่วงหนึ่ง ความเร็วลดลง มันจะเริ่มกลิ้งโดยไม่ไถลอีกต่อไป

เมื่อได้ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยมาแล้ว ก็สรุปได้ว่า ถ้าวัตถุกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถลแล้วจะได้ $F = \mu_s N$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่แบบกลิ้งด้วยไถลด้วย $F = \mu_k N$

เมื่อ μ_s = สัมประสิทธิ์ แบบสถิตย์

μ_k = สัมประสิทธิ์ แบบจลน์

จะได้ความเร่งเปรียบเทียบ

$$g\,(\sin\theta - 3\,\mu\cos\theta) = 0$$

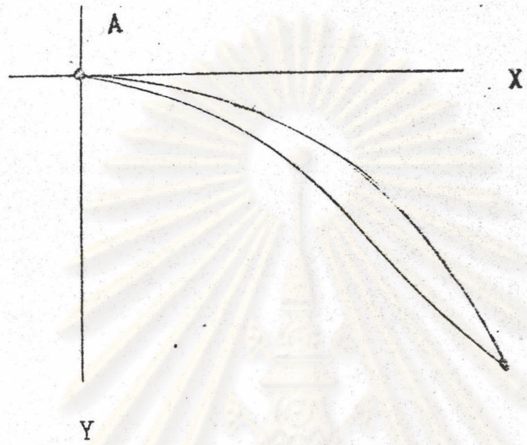
$$(\sin\theta - 3\,\mu\cos\theta) = 0$$

$$\mu = 1/3\,\tan\theta$$

นั่นคือถ้าวัตถุกลิ้งอย่างเดียวแล้วจะได้ $\mu \geq 1/3\,\tan\theta$

ถ้า μ น้อยกว่านี้วัตถุจะไถล

ถ้าพื้นเอียงมีมุมเกิน 72 องศาไปแล้ว วัตถุจะมีการเคลื่อนที่ โดยการกลิ้งโดยไม่มีการไถลไม่ได้ เมื่อมีการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถล แล้วจะไม่มีการสูญเสียงานไประหว่างผิวสัมผัสของเส้นทาง ดังนั้นเราจะสามารถเขียนสมการของการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น A ไปยังจุดสุดท้าย B โดยอาศัยหลักการอนุรักษ์พลังงานจะได้ว่า พลังงานที่ A = พลังงานที่ B ถ้าให้จุดเริ่มต้น y = 0



รูปที่ 4 แสดงการเคลื่อนที่ของงวัตถุระหว่างจุด A และ B

พลังงานที่ A หาได้จากวัตถุเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง รวมกับพลังงานที่เกิดจากการหมุน เมื่อวัตถุวิ่งมาด้วยความเร็วต้น U เขียนพลังงานรวมได้เป็น

$$(1/2)mu^2 + (1/2)I\omega_1^2 + mgy = (1/2)mv^2 + (1/2)I\omega_2^2 \qquad (5.1)$$

สมการที่ (1) คือสมการที่ได้จากการเคลื่อนที่แบบมีการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถล แต่ ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ด้วยไถลด้วย สมการเริ่มต้นจะตั้งเป็น

$$(1/2)mu^2+(1/2)I\omega_1^2+ mgy = (1/2)mv^2+(1/2)I\omega_2^2 + \text{งานระหว่างเส้นทาง} \qquad (5.2)$$

สมการที่ (5.2) ไม่ใช้เพราะการวิจัยเป็นการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถล

จากรูปจะเห็นได้ว่า เส้นทางที่กลิ้งจาก A ไป B นั้น มีได้หลายเส้นทางที่จะไปถึงจุด B ได้ ทั้งๆที่มีจุดเริ่มต้นเหมือนกัน แต่พอเคลื่อนที่ไปได้ระยะหนึ่ง แต่ละเส้นทางจะแยกกันไปจนมาถึงจุดสุดท้าย B เหมือนกัน สมการที่ใช้คำนวนแต่ละเส้นทางก็ยังคงใช้สมการที่ (5.1) เหมือนกัน คือ

$$(1/2)mu^2 + (1/2)I\omega_1^2 + mgy = (1/2)mv^2 + (1/2)I\omega_2^2$$

เพราะจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายเหมือนกัน เส้นทางใดจะใช้เวลาน้อยที่สุด จะเห็นได้ว่าสมการที่ (5.1) นั้นไม่เพียงพอที่จะแยกแยะแก้ปัญหาได้เพราะมันใช้ได้ทุกเส้นทางเหมือนกันหมด ต่อไปจะต้องหากฎษฎี หรือสมมติฐานอะไรก็ได้ที่สอดคล้องกับเรื่องที่ต้องการศึกษาอยู่ขณะนี้ คือ การหาค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด และก็พบว่าวิชา แคลคูลัสของการแปรผัน(Calculus of variations) นั้น มีเนื้อหาตรงกับที่กำลังศึกษาอยู่ วิชาแคลคูลัสของการแปรผันมีเนื้อหากว้างขวาง ครอบคลุมหลายรูปแบบ แต่จะเลือกที่ตรงกับการวิจัยจริงๆ ซึ่งมีความสัมพันธ์ว่า ถ้าต้องการจะหาส่วนโค้ง $Y_{(x)}$ ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุด คือจุด X = Aและ จุด X = B แล้วทำให้ $\int F(x,y,y')$ มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุดแล้วเราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า เงื่อนไขที่จำเป็นคือ

$$[(d/dx)(\partial F/\partial y') - \partial F/\partial y] = 0 \qquad (5.3)$$

$$(\partial F/\partial x) - (d/dx)[F - y'(\partial F/\partial y')] = C \qquad (5.4)$$

นั่นคือถ้าสามารถหาฟังก์ชั่นของ F ที่ได้จากสมการที่ (5.1) แล้วนำมาแทนค่าผ่านกระบวนการให้เสร็จสิ้นตามสมการที่(5.3),(5.4) แล้วจะได้ว่า สมการที่ได้ค่าออกมานั้น มีค่า extremum คือมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดจริงตามวิชา แคลคูลัสของการแปรผัน นั่นคือสมการที่หาได้นี้จะใช้เวลาในการเคลื่อนที่น้อยที่สุดจากจุด Aไปยังจุด B กระบวนการที่ทำจากสมการที่ (5.3),

(5.4)นี้ยุ่งยากมาก เป็นหัวใจหลักของการทำวิจัยในครั้งนี้ โดยที่ต้องผ่านวิธีการนี้ วิธีการแคลคูลัสของการแปรผัน ดังนั้น การวิจัยครั้งนี้จึงได้ชื่อเป็นภาษาไทยว่า การหาเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดสำหรับการกลิ้งของทรงกระบอก โดยวิธี แคลคูลัส ของการแปรผัน

เมื่อได้สมการออกมาแล้ว ต่อไปก็แสดงว่าค่าที่ได้ออกมานี้เป็นค่าต่ำสุดไม่ใช่ค่าสูงสุด โดยค่าต่ำสุดนั้นมีเงื่อนไขคือ

$$F_{y'y'} \geqslant 0$$

ตามทฤษฎีของ Legendre หรือจะใช้สมการแฮมิลตัน พิสูจน์ค่าสูงสุดต่ำสุดก็ได้ซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 4 เริ่มต้นของการวิจัย หาเส้นทางของการกลิ้งโดยใช้เวลาน้อยที่สุด หา Fจากสมการที่(5.1) แล้วไปแทนค่าลงในสมการที่(5.3)เมื่อทำตามกระบวนการจากสมการที่(5.3) จนเสร็จสิ้นแล้ว จะได้สมการสุดท้ายออกมาซึ่งติดอยู่ในรูป Differential equations ต่อไปแก้สมการ Differential นี้หาค่า x ,y ออกมา เมื่อได้ค่าx ,y ออกมาแล้วนำมาเขียนกราฟ เปรียบเทียบว่าเส้นทางการเคลื่อนที่นั้นเป็นอย่างไร

ให้วัตถุกลิ้งด้วยความเร็วต้น u ไปยังจุดสุดท้ายที่อยู่ต่ำกว่าสมการเริ่มต้นเป็น

$$(1/2)mu^2 + (1/2)Iw_1^2 + mgy = (1/2)mv^2 + (1/2)Iw_2^2 \qquad (5.5)$$

จะได้
$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{u^2+(4/3)gy}} \qquad (5.6)$$

แทน F ลงในสมการออยเลอร์ $[(d/dx)(\partial F/\partial y') - \partial F/\partial y] = 0 \qquad (5.7)$

แทนสมการที่ (5.6) ลงในสมการที่ (5.7) จะได้

แทนสมการที่ (5.6) ลงในสมการที่ (5.7) จะได้

$$[u^2+(4/3)gy][1+y'^2] = C \quad (5.8)$$

จากสมการที่ 5.8 จะได้ว่า

$$x = (3u^2/8g)[\phi-\sin\phi]/[1-\cos\phi_o] + a \quad (5.9)$$

$$y = (3u^2/8g)[1-\cos\phi]/[1-\cos\phi_o] - (3u^2/4g) \quad (5.10)$$

จะได้ว่า ค่า x ,y ที่ได้เป็นรูป cycloid ซึ่งถ้าความเร็วต้นเป็นศูนย์ เทอม $3u^2/4g$ จะกลายเป็นศูนย์ ค่า x ,y ที่ได้ จะลดรูปเป็น

$$x = b[\phi-\sin\phi] \quad (5.11)$$

$$y = b[1-\cos\phi] \quad (5.12)$$

สรุปความสัมพันธ์แต่ละรูปแบบ

ถ้าในกรณีอื่นของการกลิ้งถ้าไม่ใช่ทรงกระบอก แต่เป็นวงแหวนจะได้สมการเป็น

$$x = (u^2/2g)[\phi-\sin\phi]/[1-\cos\phi_o] + a \quad (5.13)$$

$$y = (u^2/2g)[1-\cos\phi]/[1-\cos\phi_o] - (u^2/g) \quad (5.14)$$

ถ้าในกรณีของทรงกลมที่มี $I = 2/5\ mR^2$ บ้าง จะได้สมการเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดเป็น

$$x = (7u^2/20g)[\phi-\sin\phi]/[1-\cos\phi_o] + a \tag{5.15}$$

$$y = (7u^2/20g)[1-\cos\phi]/[1-\cos\phi_o] - (7u^2/10g) \tag{5.16}$$

สรุปได้ว่า ถ้าใช้วงแหวน ทรงกระบอก ทรงกลม ซึ่งมีโมเมนต์ของความเฉื่อย I เป็น mR^2, $1/2\ mR^2$, $2/5\ mR^2$ ตามลำดับ มากลิ้งโดยให้หาเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดแล้ว จะได้เส้นทางที่ไม่เหมือนกันเลยในแต่ละแบบ ถ้าเริ่มกลิ้งด้วยความเร็วต้นเท่ากันและจุดเริ่มต้นเหมือนกันเพราะขึ้นอยู่กับค่า b ของแต่ละแบบ ในกรณีทั่วๆไปการกลิ้งของวัตถุทุกชนิดจะเป็น วงแหวน, ทรงกระบอก ทรงกลม หรือรูปทรงอื่นๆก็ดี ถ้าเคลื่อนที่โดยการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถลแล้ว จะได้เส้นทางที่ใช้เคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B โดยใช้เวลาน้อยที่สุดแล้ว จะเป็นรูปคล้ายๆกัน คือ cycloid

สรุปความสัมพันธ์ทุกรูปแบบ

สมการต่างๆที่ได้แสดงมาแล้ว สามารถนำมาเขียนเป็นรูปสมการมาตรฐานได้เป็น

$$x = b\left[\cos^{-1}\left\{-\left|(y+d-b)/b\right|\right\} - \sin\left[\cos^{-1}\left\{-\left|(y+d-b)/b\right|\right\}\right]\right] \tag{5.17}$$

	ทรงกระบอก	ทรงกลม	วงแหวน
a	$\frac{(\phi_o-\sin\phi_o)\,3u^2}{(1-\cos\phi_o)\,4g}$	$\frac{(\phi_o-\sin\phi_o)\,7u^2}{(1-\cos\phi_o)\,10g}$	$\frac{(\phi_o-\sin\phi_o)\,u^2}{(1-\cos\phi_o)\,g}$
b	$\frac{3u^2}{8g(1-\cos\phi_o)}$	$\frac{7u^2}{20g(1-\cos\phi_o)}$	$\frac{u^2}{2g(1-\cos\phi_o)}$
d	$3u^2/4g$	$7u^2/10g$	u^2/g

$$x = b[\phi-\sin\phi] + a \tag{5.18}$$

$$y = b[1-\cos\phi] - d \tag{5.19}$$

นั่นคือ วงกลมที่ใช้กลิ้งไปบนพื้นนั้น วงแหวนจะใช้วงกลมใหญ่ที่สุด และทรงกระบอก และทรงกลมจะใช้วงกลมการกลิ้งเล็กลงตามลำดับ ทรงกระบอก,วงแหวนและวงกลม เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นเท่ากันหมด u และอยู่สูงจากแนวระดับเท่ากันหมด และเริ่มเคลื่อนที่พร้อมกัน ที่จุดเดียวกัน จะได้ว่าเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดของทรงกลมจะอยู่เส้นในสุด ขณะที่เส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดของวงแหวนจะอยู่นอกสุด นั่นคือกลิ้งไปได้ไกลที่สุดก่อนที่จะเริ่มโค้งลง ส่วนทรงกระบอกจะใช้เส้นทางอยู่ระหว่างทรงกลมและวงแหวน หมายเหตุในที่นี้ความเร็วต้นทุกตัวต้องเท่ากัน ถ้าความเร็วต้นไม่เท่ากันจะใช้รูปนี้ไม่ได้ต้องหาแต่ละตัวไป ดูง่ายๆทรงกลมต้องมีความเร็วต้นมากกว่าทรงกระบอกและวงแหวนจึงจะทำให้มันเคลื่อนที่ไปได้ ไกลเท่าทรงกระบอกและวงแหวน ที่เป็นเช่นนี้เพราะวัตถุต้องเสียพลังงานไปในการหมุนส่วนหนึ่ง ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แล้วแต่โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุแต่ละชนิด ซึ่งได้เห็นแล้วในชีวิตประจำวันว่า ทรงกลม , ทรงกระบอก และวงแหวนนั้น เคลื่อนที่ไม่เหมือนกันเลย ทั้งเส้นทางที่ใช้ และเวลา

สำหรับกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นมากๆ เส้นทางการเคลื่อนที่จะเป็นอย่างไร ต้องไปดูถึงส่วนประกอบลึกของสมการว่า A และ B มีอะไรเป็นองค์ประกอบบ้างจาก

$$x = (3u^2/8g)[\phi-\sin\phi] + a \tag{5.20}$$

$$y = (3u^2/8g)[1-\cos\phi] - (3u^2/4g) \tag{5.21}$$

ดูที่เทอม b จะเห็นว่า เทอม b นั้นมีความเร็วเป็นส่วนประกอบ เป็นความเร็วยกกำลังสอง ดังนั้นเมื่อต้องการจะสร้างส่วนโค้งให้รองรับการกลิ้ง ที่มีความเร็วมาก หรือน้อย สามารถทำได้โดยแทนค่า u ต่างๆ ที่เราต้องการลงไป มันจะเป็นผลให้ค่า b เปลี่ยนไปถ้าวิ่งเร็วมาก เทอม $3u^2/8g$ จะมากขึ้น เป็นผลให้ b มีค่ามากขึ้น นั่นคือรัศมีของการกลิ้ง b จะมีค่ามากขึ้น

$$y = b[1-\cos\phi] - d \qquad (5.19)$$

นั่นคือ วงกลมที่ใช้กลิ้งไปบนพื้นนั้น วงแหวนจะใช้วงกลมใหญ่ที่สุด และทรงกระบอก และทรงกลม จะใช้วงกลมการกลิ้งเล็กลงตามลำดับ ทรงกระบอก,วงแหวนและวงกลม เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นเท่ากันหมด u และอยู่สูงจากแนวระดับเท่ากันหมด และเริ่มเคลื่อนที่พร้อมกัน ที่จุดเดียวกัน จะได้ว่าเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดของทรงกลมจะอยู่เส้นในสุด ขณะที่เส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดของวงแหวนจะอยู่นอกสุด นั่นคือกลิ้งไปได้ไกลที่สุดก่อนที่จะเริ่มโค้งลง ส่วนทรงกระบอกจะใช้เส้นทางอยู่ระหว่างทรงกลมและวงแหวน หมายเหตุในที่นี้ความเร็วต้นทุกตัวต้องเท่ากัน ถ้าความเร็วต้นไม่เท่ากันจะใช้รูปนี้ไม่ได้ต้องหาแต่ละตัวไป ดูง่ายๆทรงกลมต้องมีความเร็วต้นมากกว่าทรงกระบอกและวงแหวนจึงจะทำให้มันเคลื่อนที่ไปได้ ไกลเท่าทรงกระบอกและวงแหวน ที่เป็นเช่นนี้เพราะวัตถุต้องเสียพลังงานไปในการหมุนส่วนหนึ่ง ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แล้วแต่โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุแต่ละชนิด ซึ่งได้เห็นแล้วในชีวิตประจำวันว่า ทรงกลม , ทรงกระบอก และวงแหวนนั้น เคลื่อนที่ไม่เหมือนกันเลย ทั้งเส้นทางที่ใช้ และเวลา

<u>สรุป</u>

การวิจัยครั้งนี้ ทำให้ทราบว่า เส้นทางที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดจากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้ายจะเป็นส่วนหนึ่งของเส้นโค้งที่เรียกว่าไซคลอยแต่ไม่สามารถบังคับทิศทางของความเร็วต้นได้เพราะมีข้อบังคับมากเกินไปถ้าบังคับจุดเริ่มต้นและทิศทางของความเร็วต้นจะบังคับจุดสุดท้ายไม่ได้ ถ้าบังคับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายจะบังคับทิศทางของความเร็วต้นไม่ได้ แต่ในทุกกรณีที่กล่าวมานี้ต้องเป็นการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถล และจะได้เส้นทางที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดจากจุดสองจุดเป็นส่วนหนึ่งของไซคลอยไม่ว่าวัตถุที่ใช้กลิ้งนั้นจะเป็นทรงกลม หรือวงแหวน เมื่อเปลี่ยนค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยก็จะสามารถหาเส้นทางที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดได้

หวังว่าการวิจัยครั้งนี้ คงเป็นประโยชน์บ้างไม่มากก็น้อยสำหรับผู้สนใจอย่างน้อยที่สุด ก็เป็นการทบทวน Classical mechanics สมการ Hamilton ระยะทาง เวลาและความเร็วของการกลิ้ง การหาค่าสูงสุดต่ำสุด สิ่งที่กล่าวมาทั้งหมดนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างลึกซึ้ง จนรวมกันเป็นหนึ่งเดียวโดยเป็นแนวทาง ที่ทำให้การวิจัยครั้งนี้บรรลุได้ตามจุดหมายปลายทางโดยสมบูรณ์ และหวังว่าการวิจัยครั้งนี้ คงเป็นประโยชน์บ้างสำหรับผู้สนใจรุ่นต่อไปที่จะได้พัฒนาวิชานี้ให้ยิ่งยืนและมั่นคงตลอดไป