

เซมิกรุปการแปลงนัยทั่วไปซึ่งมีเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่น



นาย อมร วาสนาวิจิตร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2537

ISBN 974-584-946-4

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I1696756

**GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS
HAVING PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS**

Mr. Amorn Wasanawichit

ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1994
ISBN 974-584-946-4**

Thesis Title Generalized Transformation Semigroups Having
 Proper Dense Subsemigroups
By Mr. Amorn Wasanawichit
Department Mathematics
Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.
Thesis Co-advisor Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.



Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial
Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy.

.....*Santi Thoongsuwan*.....Dean of Graduate School
(Associate Professor Santi Thoongsuwan Ph.D.)

Thesis Committee

.....*P. Udomkavanich*.....Chairman
(Assistant Professor Patanee Udomkavanich Ph.D.)

.....*Yupaporn Kemprasit*.....Thesis Advisor
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

.....*Sidney S. Mitchell*.....Thesis Co-advisor
(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

.....*Mark E. Hall*.....Member
(Dr. Mark E. Hall Ph.D.)

.....*Chawewan Ratanaprasert*.....Member
(Associate Professor Chawewan Ratanaprasert Ph.D.)



พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสี่เหลี่ยมนี้เพียงแผ่นเดียว

อมร วาสนาวิจิตร : เซมิกรุปการแปลงนัยทั่วไปซึ่งมีเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่น
(GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS HAVING PROPER DENSE
SUBSEMIGROUPS) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.ยุพากรณ์ เข็มประสิทธิ์, อ.ที่ปรึกษาร่วม :
DR.SIDNEY S. MITCHELL, 44 หน้า. ISBN 974-584-946-4

สำหรับเซต X, Y ใด ๆ ให้

$\mathcal{T}(X, Y)$ = เซตของการส่งจาก X ไปยัง Y ทั้งหมด

$\mathcal{PT}(X, Y)$ = เซตของการส่งจากเซตย่อยของ X ไปยัง Y ทั้งหมด

$\mathcal{J}(X, Y)$ = เซตของการส่งหนึ่งต่อหนึ่งจากเซตย่อยของ X ไปยัง Y ทั้งหมด

ถ้า $\mathcal{S}(X, Y)$ เป็นเซตใดเซตหนึ่งของเซต $\mathcal{T}(X, Y), \mathcal{PT}(X, Y)$ หรือ $\mathcal{J}(X, Y)$ และ $\theta \in \mathcal{S}(Y, X)$
แล้วจะให้ $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$ แทนเซมิกรุป $(\mathcal{S}(X, Y), *)$ โดยที่ $\alpha * \beta = \alpha \theta \beta$ ทุก ๆ $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(X, Y)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลสำคัญของการวิจัยนี้

ทฤษฎีบท ให้ X และ Y เป็นเซต $\mathcal{S}(X, Y)$ แทนเซตใดเซตหนึ่งของเซต $\mathcal{T}(X, Y), \mathcal{PT}(X, Y)$ หรือ
 $\mathcal{J}(X, Y)$ และให้ $\theta \in \mathcal{S}(Y, X)$ จะได้ว่า $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$ มีเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่น ก็ต่อเมื่อ ทั้ง X
และ Y เป็นเซตอนันต์ และ $|\nabla \theta| =$ ค่าต่ำสุดของเซต $\{|X|, |Y|\}$ เมื่อ θ เป็นเรจันของ θ

ถ้า X และ Y เป็นเซตอนันต์ และ $|\nabla \theta| =$ ค่าต่ำสุดของเซต $\{|X|, |Y|\}$ แล้วข้อความ
ต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) สมมติว่า A เป็นเซตย่อยอนันต์ของ $\nabla \theta$ โดยที่ $|\nabla \theta - A| = |\nabla \theta|$ และสำหรับ $a \in A$
เลือก $y_a \in a\theta^{-1}$ จะได้ว่า เซต U ซึ่งถูกนิยามโดย
 $U = \{\alpha \in \mathcal{S}(X, Y) \mid |A \alpha \cap (Y - \{y_a \mid a \in A\})| < |A|\}$
เป็นเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่นของ $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$
- (2) $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$ มีเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่นจำนวนอนันต์ และคาร์ดินาลิตีของกลุ่มของ
เซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่นเช่นนั้นไม่น้อยกว่าค่าต่ำสุดของเซต $\{|X|, |Y|\}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา คณิตศาสตร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2537

ลายมือชื่อนิสิต
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม Sidney S. Mitchell

C425068 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD: GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS / DENSE SUBSEMIGROUPS OF SEMIGROUPS

AMORN WASANAWICHIT : GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS HAVING PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS. THESIS ADVISOR : ASSO.PROF.YUPAPORN KEMPRASIT, Ph.D. THESIS CO-ADVISOR : SIDNEY S. MITCHELL, Ph.D. 44 pp. ISBN 974-584-946-4

For any sets X, Y , let

$\mathcal{T}(X, Y)$ = the set of all mappings from X into Y ,

$\mathcal{PT}(X, Y)$ = the set of all mappings from subsets of X into Y and

$\mathcal{J}(X, Y)$ = the set of all 1-1 mappings from subsets of X in Y .

If $\mathcal{S}(X, Y)$ is any one of the sets $\mathcal{T}(X, Y)$, $\mathcal{PT}(X, Y)$ or $\mathcal{J}(X, Y)$ and $\theta \in \mathcal{S}(Y, X)$, let $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$ denote the semigroup $(\mathcal{S}(X, Y), *)$ with $\alpha * \beta = \alpha \theta \beta$ for all $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(X, Y)$.

The following theorem is the main result of this research.

Theorem. Let X and Y be sets. Let $\mathcal{S}(X, Y)$ denote any one of the sets $\mathcal{T}(X, Y)$, $\mathcal{PT}(X, Y)$ or $\mathcal{J}(X, Y)$ and let $\theta \in \mathcal{S}(Y, X)$. Then $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$ has a proper dense subsemigroup if and only if X and Y are both infinite and $|\mathcal{V}\theta| = \min\{|X|, |Y|\}$ where $\mathcal{V}\theta$ is the range of θ .

If X and Y are both infinite and $|\mathcal{V}\theta| = \min\{|X|, |Y|\}$, then the following statements hold :

(1) Suppose A is an infinite subset of $\mathcal{V}\theta$ such that $|\mathcal{V}\theta - A| = |\mathcal{V}\theta|$. For each $a \in A$, choose $y_a \in a\theta^{-1}$. Then the set U defined by $U = \{\alpha \in \mathcal{S}(X, Y) \mid |A\alpha \cap (Y - \{y_a \mid a \in A\})| < |A|\}$ is a proper dense subsemigroup of $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$.

(2) $(\mathcal{S}(X, Y), \theta)$ has infinitely many proper dense subsemigroups and the cardinality of the collection of such proper dense subsemigroups is not less than $\min\{|X|, |Y|\}$.

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์

สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา..... 2537

ลายมือชื่อนิสิต..... *Amorn Wasanawichit*

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..... *Assoc. Prof. Yupaporn Kemprasit*

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม..... *Sidney S. Mitchell*



ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Asso. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my dissertation. I am very grateful to Dr. Sidney S. Mitchell for giving me many helpful suggestions, especially, in writing the dissertation. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my parents for their encouragement throughout my graduate study.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI.....	iv
ABSTRACT IN ENGLISH.....	v
ACKNOWLEDGEMENT.....	vi
INTRODUCTION.....	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES.....	3
II CERTAIN PROPERTIES OF GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS.....	10
III GENERALIZED TRANSFORMATION SEMIGROUPS HAVING PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS.....	17
REFERENCES.....	36
VITA.....	38

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย