

บทที่ 2

การคำนวณโหลดโพล์แบบดั้งเดิม

การคำนวณโหลดโพล์แบบดั้งเดิมมีด้วยกันหลายวิธี ซึ่งได้รับการพัฒนาเรื่อยมาตลอดระยะเวลา 40 ปี จนถึงปัจจุบันนี้และวิธีที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปคือวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่ 1 (First order newton-raphson method, FOLF) แบบอนุพันธ์อันดับที่ 2 (Second order newton-raphson method, SOLF) และวิธีฟาสต์ดีคัปเปิล (Fast-decoupled method, FDLF) ซึ่งทั้งสามวิธีได้รับการปรับปรุงแก้ไขเพื่อให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง [4,6-9] และสามารถหาคำตอบได้แม้ในกรณีที่ระบบไฟฟ้ากำลังมีค่าเริ่มต้นทางโหลดโพล์ที่ไม่เหมาะสม (Ill-condition)

2.1 ชนิดของบัส

ก่อนที่จะทำการศึกษาโหลดโพล์จำเป็นต้องทราบการแบ่งชนิดของบัสเสียก่อน [10,11] เพื่อจะได้ทราบว่าบัสแต่ละชนิดมีข้อกำหนดหรือค่าตัวแปร (Parameter) ใดที่มีค่าคงตัวบ้าง และต้องคำนวณโหลดโพล์เพื่อหาค่าอะไรออกมา ค่าตัวแปรต่างๆ ของแต่ละบัสประกอบไปด้วยขนาดของแรงดันไฟฟ้า ($|V|$) มุมของแรงดันไฟฟ้า ($\angle V$) กำลังไฟฟ้าบัสจริง (Bus real power, P) และ กำลังไฟฟ้าบัสรีแอกทีฟ (Bus reactive power, Q) กำลังไฟฟ้าบัสจริงหรือกำลังไฟฟ้าบัสรีแอกทีฟ หมายถึงกำลังไฟฟ้าที่ไหลเข้าบัส

ชนิดของบัสในระบบไฟฟ้ากำลังเพื่อศึกษาโหลดโพล์แบ่งออกได้เป็นสามชนิดโดยมีข้อกำหนดต่างๆ ในแต่ละชนิดดังนี้

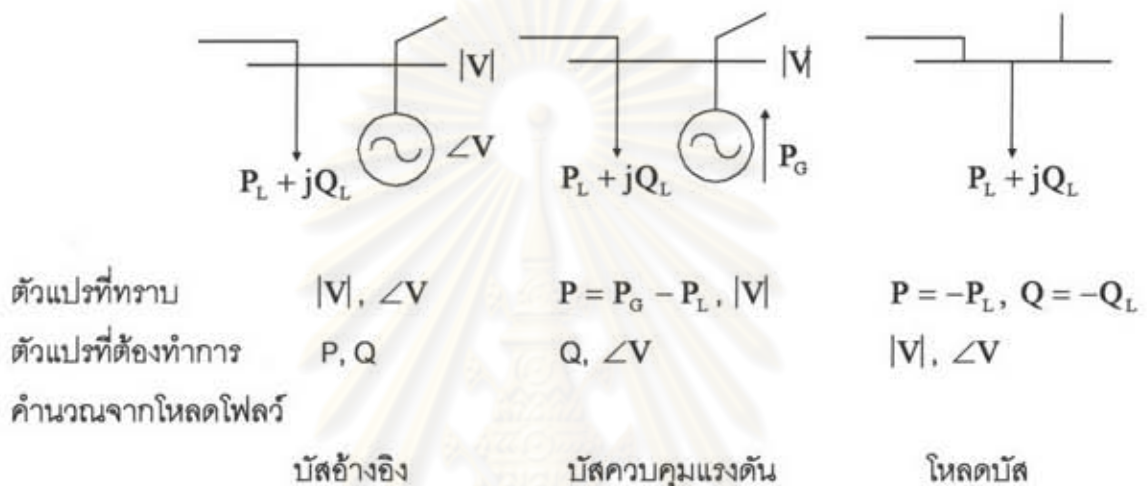
- 1) บัสอ้างอิง (Slack bus or swing bus or reference bus) จะกำหนดให้ขนาดและมุมของแรงดันไฟฟ้าคงที่ ส่วนกำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟารีแอกทีฟที่ไหลเข้าสู่บัสเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าบัสดังกล่าวนี้ถือว่าเป็นแหล่งกำเนิดขนาดใหญ่ที่สามารถให้กำลังไฟฟ้าออกมาตามต้องการได้โดยขนาดแรงดันไฟฟ้าและความถี่ไม่เปลี่ยนแปลง

- 2) บัสควบคุมแรงดัน (Voltage controlled bus, PV bus) จะกำหนดให้ขนาดของแรงดันไฟฟ้าและกำลังไฟฟ้าจริงที่ไหลเข้าสู่บัสคงที่ ส่วนมุมของแรงดันและกำลังไฟฟารีแอกทีฟที่ไหลเข้าสู่บัสเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า นอกจากนี้ในบางครั้งจะกำหนดให้บัสชนิดนี้ให้กำลังไฟฟ้าจริง

และกำลังไฟฟ้ารีแอกตีฟคงที่ในกรณีหลังนี้เรียกว่าโหลดบัส

3) โหลดบัส (Load bus, PQ bus) จะกำหนดให้กำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้ารีแอกตีฟที่บัสคงที่ ส่วนขนาดและมุมของแรงดันไฟฟ้าเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า

ดังนั้นไม่ว่าจะเป็นบัสชนิดใดก็ตามจะกำหนด 2 ค่าที่เป็นค่าคงที่ และอีก 2 ค่าที่เป็นตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งจะต้องอาศัยการวิเคราะห์โหลดโฟลว์ เพื่อคำนวณหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าดังกล่าวแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ชนิดของบัสในระบบไฟฟ้ากำลัง

โดยที่ $|V|$ คือขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส

$\angle V$ คือมุมของแรงดันไฟฟ้าที่บัส

P_G คือกำลังไฟฟ้าจริงที่ผลิตที่บัส

P_L คือกำลังไฟฟ้าจริงที่จ่ายให้กับโหลดที่บัส

Q_L คือกำลังไฟฟ้ารีแอกตีฟที่จ่ายให้กับโหลดที่บัส

2.2 สมการพื้นฐานในการคำนวณโหลดโฟลว์

สมการพื้นฐานที่จะกล่าวถึงนี้เป็นสมการที่ใช้ในการคำนวณโหลดโฟลว์ของระบบไฟฟ้ากำลัง สมการสำคัญที่ใช้มีสองสมการคือ สมการคำนวณกำลังไฟฟ้าและสมการคำนวณแรงดันไฟฟ้า [12]

สมการกำลังไฟฟ้าที่เข้าบัส p ใดๆ ในระบบไฟฟ้ากำลังมีความสัมพันธ์กับแรงดันและกระแสไฟฟ้าดังนี้

$$S_p = V_p I_p^* \quad (2.1)$$

โดยที่ S_p เป็นกำลังไฟฟ้าที่ไหลเข้าที่บัส p

V_p เป็นแรงดันไฟฟ้าที่บัส p

I_p เป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าบัส p

สมการแรงดันไฟฟ้าที่บัส p ใดๆ สามารถหาได้โดยพิจารณาจากสมการ (2.1) และคำนวณหากระแสไฟฟ้าได้จาก

$$S_p = P_p + jQ_p = V_p I_p^* \quad (2.2)$$

$$S_p^* = P_p - jQ_p = V_p^* I_p \quad (2.3)$$

$$I_p = \frac{P_p - jQ_p}{V_p^*} \quad (2.4)$$

จากสมการเมตริกซ์ $[I_{BUS}] = [Y_{BUS}][V_{BUS}]$ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้าบัสและแรงดันไฟฟ้าบัสโดยการใช้บัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ (Bus admittance matrix, Y_{BUS}) ดังนั้นสามารถเขียนสมการกระแสไฟฟ้าบัส p ได้สำหรับระบบไฟฟ้าที่มี n บัส ดังสมการที่ (2.5)

$$I_p = Y_{p1}V_1 + Y_{p2}V_2 + \dots + Y_{pn}V_n = \sum_{q=1}^n Y_{pq}V_q \quad (2.5)$$

แทนค่ากระแสจากสมการที่ (2.5) เข้าไปในสมการที่ (2.4) และจัดสมการเสียใหม่จะได้แรงดันไฟฟ้าที่บัส p ใดๆ ดังสมการที่ (2.6)

$$V_p = \frac{1}{Y_{pp}} \left[\frac{P_p - jQ_p}{V_p^*} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq}V_q \right] \quad (2.6)$$

กำลังไฟฟ้าในสมการที่ (2.3) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในเทอมของแรงดันไฟฟ้าบัสและแอดมิตแตนซ์ของระบบได้โดยแทนค่ากระแสไฟฟ้าในสมการที่ (2.5) เข้าไปในสมการที่ (2.3) จะได้

$$S_p^* = P_p - jQ_p = V_p^* \left[\sum_{q=1}^n Y_{pq}V_q \right] \quad (2.7)$$

กำลังไฟฟ้าจริง $P_p = \text{Re} \left[V_p^* \sum_{q=1}^n Y_{pq}V_q \right] \quad (2.8)$

กำลังไฟฟ้ารืแอกทีฟ $Q_p = -\text{Im} \left[V_p^* \sum_{q=1}^n Y_{pq}V_q \right] \quad (2.9)$

2.3 การสร้างบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์โดยวิธีอีลิเมนต์สแตมป์ (Element stamp method)

การสร้างบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์โดยวิธีอีลิเมนต์สแตมป์ [12,13] เป็นวิธีการคำนวณหาบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ โดยใส่องค์ประกอบของระบบไฟฟ้ากำลังเข้าไปที่ละตัวจนครบทุกตัว บัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ที่ได้หลังจากใส่องค์ประกอบตัวสุดท้ายจะเป็นบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ของระบบไฟฟ้ากำลังที่ต้องการ มีรายละเอียดการคำนวณดังนี้

2.3.1 สายส่งไฟฟ้า (Transmission line)

สายส่งไฟฟ้าที่เชื่อมระหว่างสองบัสใด ๆ สามารถแทนได้ด้วยวงจรสมมูลพายซึ่งประกอบด้วยความต้านทาน (Resistance, R) ต่ออนุกรมกับอินดักทีฟรีแอกแตนซ์ (Inductive reactance, X_L) เชื่อมอยู่ระหว่างสองบัสนั้น ๆ และมีขั้วชั้วคาปาซิแตนซ์ (Shunt capacitance, C) เท่ากับครึ่งหนึ่งของขั้วคาปาซิแตนซ์ของสายส่งทั้งหมดตลอดสายต่ออยู่ที่บัสแต่ละบัส ดังแสดงในรูปที่ 2.2

ถ้าใส่สายส่งไฟฟ้า pq (สายส่งไฟฟ้าที่ต่อระหว่างบัส p และบัส q) บัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ใหม่จะเป็นดังสมการ

$$\left. \begin{aligned} Y_{pp}^{new} &= Y_{pp}^{old} + y_{serpq} + \frac{1}{2} \cdot y_{shpq} \\ Y_{qq}^{new} &= Y_{qq}^{old} + y_{serpq} + \frac{1}{2} \cdot y_{shpq} \\ Y_{pq}^{new} &= Y_{pq}^{old} - y_{serpq} \\ Y_{qp}^{new} &= Y_{qp}^{old} - y_{serpq} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

โดยที่ Y_{pq}^{old} เป็นสมาชิกบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์แถวที่ p และหลักที่ q ก่อนใส่สายส่งไฟฟ้า pq

Y_{pq}^{new} เป็นสมาชิกบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์แถวที่ p และหลักที่ q หลังใส่สายส่งไฟฟ้า pq

y_{serpq} เป็นแอดมิตแตนซ์อนุกรม (Series admittance) ของสายส่งไฟฟ้า pq

y_{shpq} เป็นไลน์ชาร์จิจิงแอดมิตแตนซ์ (Line charging admittance) ของสายส่งไฟฟ้า pq



รูปที่ 2.2 วงจรสมมูลพายที่ใช้แทนสายส่งไฟฟ้า

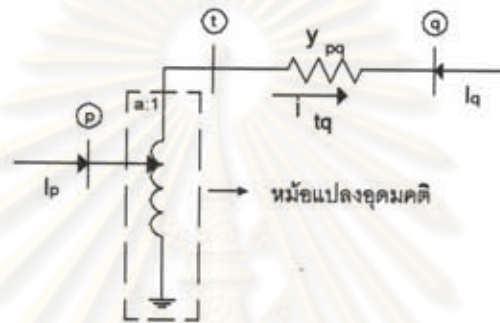
โดยที่ R คือความต้านทานของสายส่ง

X_L คืออินดักทีฟรีแอกแตนซ์ของสายส่ง

C คือชั้นหาคาปาซิแตนซ์ของสายส่ง

2.3.2 หม้อแปลงไฟฟ้า (Transformer)

แบบจำลองของหม้อแปลงไฟฟ้าสามารถแทนได้ด้วยอิมพีแดนซ์หรือแอดมิตแตนซ์ของหม้อแปลงไฟฟ้าต่ออนุกรมกับหม้อแปลงไฟฟ้าอุดมคติ ดังแสดงในรูปที่ 2.3

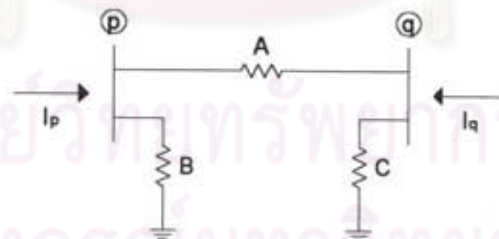


รูปที่ 2.3 แบบจำลองของหม้อแปลงไฟฟ้า

โดยที่ a คืออัตราส่วนจำนวนรอบของหม้อแปลงไฟฟ้า

y_{pq} คือค่าแอดมิตแตนซ์ของหม้อแปลงไฟฟ้า

โดยวงจรสมมูลที่สอดคล้องกับแบบจำลองดังกล่าวเป็นแบบพาย ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า

สำหรับตัวแปร A , B และ C ของวงจรสมมูลหม้อแปลงไฟฟ้าในรูปที่ 2.4 สามารถคำนวณได้ดังนี้

พิจารณาระแสไฟฟ้าที่บัส p จากรูปที่ 2.3

$$I_p = \frac{i_{tq}}{a} \quad (2.11)$$

โดยที่ a คืออัตราส่วนการแปลง (Transformation ratio) ของหม้อแปลงไฟฟ้า

a^* คือสังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ a

i_{tq} คือกระแสไฟฟ้าที่ไหลจากบัสสมมติ t ไปยังบัส q มีค่าดังนี้

$$i_{tq} = (V_t - V_q) \cdot y_{pq} \quad (2.12)$$

แทนค่า i_{tq} จากสมการที่ (2.12) ลงในสมการที่ (2.11) จะได้ว่า

$$I_p = (V_t - V_q) \cdot \frac{y_{pq}}{a^*} \quad (2.13)$$

อาศัยคุณสมบัติของหม้อแปลงไฟฟ้าอุดมคติ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าที่บัส p และ t ในเทอมของอัตราส่วนการแปลง a คือ

$$V_t = \frac{V_p}{a} \quad (2.14)$$

แทนค่า V_t จากสมการที่ (2.14) ลงในสมการที่ (2.13) จะได้ว่า

$$I_p = \left(\frac{V_p}{a} - V_q \right) \cdot \frac{y_{pq}}{a^*}$$

$$I_p = (V_p - aV_q) \cdot \frac{y_{pq}}{|a|^2} \quad (2.15)$$

โดยที่ $|a|^2 = a \cdot a^*$

ในทำนองเดียวกันพิจารณากระแสไฟฟ้าที่บัส q จากรูปที่ 2.3 จะได้ว่า

$$I_q = (V_q - V_t) \cdot y_{pq} \quad (2.16)$$

แทนค่า V_t จากสมการที่ (2.14) ลงในสมการที่ (2.16) จะได้ว่า

$$I_q = \left(V_q - \frac{V_p}{a} \right) \cdot y_{pq}$$

$$I_q = (aV_q - V_p) \cdot \frac{y_{pq}}{a} \quad (2.17)$$

สำหรับกระแสไฟฟ้าที่บัส p และ q ของวงจรสมมูลภายในรูปที่ 2.4 คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} I_p &= i_{pq} + i_{po} \\ I_p &= (V_p - V_q).A + V_p.B \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} I_q &= i_{qp} + i_{qo} \\ I_q &= (V_q - V_p).A + V_q.C \end{aligned} \quad (2.19)$$

กำหนดให้ $V_p = 0$ และ $V_q = 1$ แทนค่าในสมการที่ (2.15) และ (2.18) จะได้ค่าตัวแปร A ดังนี้

$$A = \frac{y_{pq}}{a^*} \quad (2.20)$$

ในทำนองเดียวกัน แทนค่า $V_p = 0$ และ $V_q = 1$ ลงในสมการที่ (2.17) และ (2.19) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A + C &= y_{pq} \\ \text{หรือ} \quad C &= y_{pq} - A \end{aligned} \quad (2.21)$$

แทนค่า A จากสมการที่ (2.20) ลงในสมการที่ (2.21) จะได้ค่าตัวแปร C คือ

$$\begin{aligned} C &= y_{pq} - \frac{y_{pq}}{a^*} \\ C &= \left(1 - \frac{1}{a^*}\right).y_{pq} \end{aligned} \quad (2.22)$$

เนื่องจากกระแสไฟฟ้า I_p จากสมการที่ (2.15) และ (2.18) มีค่าเท่ากันคือ

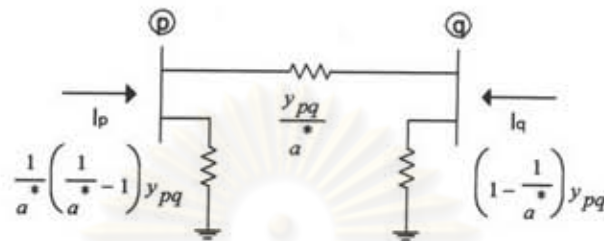
$$(V_p - aV_q) \cdot \frac{y_{pq}}{|a|^2} = (V_p - V_q).A + V_p.B \quad (2.23)$$

แทนค่า A จากสมการที่ (2.20) ลงในสมการที่ (2.23) จะได้ค่าตัวแปร B คือ

$$\begin{aligned} B &= \frac{(V_p - aV_q) \cdot \frac{y_{pq}}{|a|^2} - (V_p - V_q) \cdot \frac{y_{pq}}{a^*}}{V_p} \\ &= \frac{y_{pq}}{|a|^2} - \frac{y_{pq}}{a^*} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{a^*} \cdot \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \cdot y_{pq} \quad (2.24)$$

ดังนั้นวงจรสมมูลพายที่มีค่าตัวแปรในเทอมของอัตราส่วนการแปลง a และแอดมิตแตนซ์ y_{pq} ของหม้อแปลงไฟฟ้างแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้าที่แสดงค่าตัวแปรในเทอมของอัตราส่วนการแปลง a และค่าแอดมิตแตนซ์ y_{pq}

ถ้าใส่หม้อแปลงไฟฟ้า pq (หม้อแปลงไฟฟ้าที่ต่อระหว่างบัส p และบัส q) ตามรูปที่ 2.3 บัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ใหม่จะเป็นดังสมการ

$$\left. \begin{aligned} Y_{pp}^{new} &= Y_{pp}^{old} + \frac{1}{|a|^2} \cdot y_{pq} \\ Y_{qq}^{new} &= Y_{qq}^{old} + y_{pq} \\ Y_{pq}^{new} &= Y_{pq}^{old} - \frac{1}{a^*} y_{pq} \\ Y_{qp}^{new} &= Y_{qp}^{old} - \frac{1}{a} y_{pq} \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

2.3.3 ชั้นท์อิลิเมนต์ (Shunt element)

ชั้นท์อิลิเมนต์ที่ใช้งานในระบบไฟฟ้ากำลัง ได้แก่คาปาซิเตอร์ (Capacitor) และรีแอกเตอร์ (Reactor) ในระบบไฟฟ้ากำลังมักจะมีการติดตั้งคาปาซิเตอร์ที่สถานีไฟฟ้าย่อยปลายทางเพื่อยกระดับแรงดันไฟฟ้าปลายทางให้สูงขึ้นและลดกำลังสูญเสียในสายส่งเพราะคาปาซิเตอร์จะทำหน้าที่จ่ายกำลังไฟฟ้รีแอกตีฟเข้าที่บัส หรือในบางจุดจะมีการติดตั้งรีแอกเตอร์เพื่อลดระดับแรงดันไฟฟ้าที่บัสนั้น เพราะรีแอกเตอร์จะทำหน้าที่ดึงกำลังไฟฟ้รีแอกตีฟออกจากบัส จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าชั้นท์อิลิเมนต์เป็นอุปกรณ์ที่มีส่วนช่วยปรับแรงดันที่บัสให้เป็นไปตามที่กำหนดได้ สำหรับวงจรสมมูลที่ใช้แทนชั้นท์อิลิเมนต์ประกอบด้วย อิมพีแดนซ์คงที่ต่อเข้าที่บัสและลงพื้นดิน ถ้าใส่ชั้นท์อิลิเมนต์ที่ต่อกับบัส p บัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ใหม่จะเป็นดังสมการ

$$Y_{pp}^{new} = Y_{pp}^{old} + y_p \quad (2.26)$$

โดยที่ y_p เป็นแอดมิตแดนซ์ของชั้นทอิลิเมนต์ที่ต่อกับบัส p

2.4 การคำนวณโหลดโพล์ด้วยวิธีนิวตัน-กราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง [12-15]

วิธีของนิวตัน-กราฟสันใช้ทฤษฎีของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ช่วยในการแก้ปัญหา ดังแสดงในสมการที่ (2.27) สำหรับ $f(x)$ ที่แทน x ด้วย x_0

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(\Delta x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots \quad (2.27)$$

ถ้า Δx มีค่าน้อยมาก ตั้งแต่เทอมที่สามทางขวามือของสมการที่ (2.27) มีค่าน้อยมาก และอาจตัดทิ้งได้ สมการ $f(x)$ จึงเขียนโดยประมาณได้

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \Delta x \quad (2.28)$$

กรณีที่ฟังก์ชัน f มีตัวแปรหลายตัว สามารถประยุกต์เขียนสมการที่ (2.28) ใหม่ได้เป็น

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(0)} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(0)} \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(0)} \Delta x_n \quad (2.29)$$

$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ เป็นค่าเริ่มต้นที่แทนเข้าไปในฟังก์ชัน $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0)}$ เป็นค่าพาร์เชียลดิฟเฟอเรนเชียลที่แทนด้วยค่า $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ และจัดสมการที่ (2.29) ใหม่เขียนได้เป็น

$$\Delta y = y - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(0)} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{(0)} \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(0)} \Delta x_n \quad (2.30)$$

สำหรับสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นใดๆ n สมการ สามารถเขียนได้โดยใช้สมการที่ (2.30) และจัดรูปเมตริกซ์ใหม่จะได้

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

หรือเขียนแทนด้วยสมการเมตริกซ์เป็น

$$[\Delta y] = [J] \cdot [\Delta x] \quad (2.32)$$

โดยที่ $[J]$ คือจาโคเบียนเมตริกซ์ (Jacobian matrix)

กำหนดให้ $V_p = e_p + jf_p$ และ $Y_{pq} = G_{pq} + jB_{pq}$

โดยที่ e คือค่าส่วนจริงของแรงดันไฟฟ้าที่บัส

f คือค่าส่วนจินตภาพของแรงดันไฟฟ้าที่บัส

G คือค่าส่วนจริงของบัสแอดมิตแตนซ์

B คือค่าส่วนจินตภาพของบัสแอดมิตแตนซ์

แทนค่า V_p และ Y_{pq} ลงในสมการที่ (2.7) จะได้ว่า

$$P_p - jQ_p = (e_p - jf_p) \cdot \sum_{q=1}^n \left\{ (G_{pq} + jB_{pq})(e_q + jf_q) \right\} \quad (2.33)$$

แยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของสมการที่ (2.33) ได้กำลังไฟฟ้าจริง P_p และกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ Q_p สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นโหนดบัสคือ

$$\left. \begin{aligned} P_p &= \sum_{q=1}^n \left\{ e_p (e_q G_{pq} - f_q B_{pq}) + f_p (f_q G_{pq} + e_q B_{pq}) \right\} \\ Q_p &= \sum_{q=1}^n \left\{ f_p (e_q G_{pq} - f_q B_{pq}) - e_p (f_q G_{pq} + e_q B_{pq}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

สำหรับบัส p ที่เป็นบัสควบคุมแรงดัน จะคำนวณขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส $|V_p|$ แทนกำลังไฟฟ้ารี่เอกติฟที่บัส Q_p เพื่อให้สามารถตรวจสอบได้ว่าขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส $|V_p|$ มีความคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่กำหนดมากน้อยเพียงใดในการคำนวณแต่ละรอบ ดังนั้นสมการที่ใช้คำนวณสำหรับบัสควบคุมแรงดัน p คือ

$$\left. \begin{aligned} P_p &= \sum_{q=1}^n \left\{ e_p (e_q G_{pq} - f_q B_{pq}) + f_p (f_q G_{pq} + e_q B_{pq}) \right\} \\ |V_p|^2 &= e_p^2 + f_p^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

2.4.1 การประยุกต์วิธีนิวตัน-ราฟสันในการแก้ปัญหาทางโหลดโฟลว์

เนื่องจากสมการที่ (2.34) และ (2.35) มีลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear equations) ดังนั้นในการแก้สมการโหลดโฟลว์ดังกล่าวจะต้องอาศัยการวิเคราะห์เชิงเลข (Numerical analysis) ตามวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งในวิธีของนิวตัน-ราฟสันจะกำหนดค่าเริ่มต้นของแรงดันไฟฟ้าแต่ละบัสแล้วหาค่า P , Q และ $|V|$ จากสมการกำลังไฟฟ้าและสมการแรงดันไฟฟ้า และนำค่าที่คำนวณได้นี้ไปเปรียบเทียบกับค่า P , Q และ $|V|$ ที่กำหนดให้ (Scheduled) นำความคลาดเคลื่อนหรือค่าปรับแต่ง (Correction) เหล่านี้ไปคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงของแรงดันไฟฟ้าแต่ละบัสโดยอาศัยสมการที่ (2.36) และกระบวนการทำซ้ำ (Iterative techniques) จนกว่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบไม่เกินค่าความผิดพลาด (Tolerance) ที่กำหนดภายใต้จำนวนรอบที่ใช้คำนวณไม่เกินจำนวนรอบสูงสุดที่กำหนดไว้ และจะได้ค่าประมาณในรอบการคำนวณสุดท้ายคือ คำตอบของโหลดโฟลว์

$$[\Delta E] = [J][\Delta V] \quad (2.36)$$

โดยที่ $[\Delta E]$ คือเมตริกซ์ผลต่างของค่าที่กำหนดให้กับค่าที่คำนวณได้ในแต่ละบัส

$[J]$ คือจาโคเบียนเมตริกซ์

$[\Delta V]$ คือเมตริกซ์ผลต่างของแรงดันไฟฟ้า

2.4.2 วิธีนิวตัน-กราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยใช้ระบบพิกัดจาก

จากสมการที่ (2.36) จะได้สมการที่เป็นเชิงเส้นซึ่งใช้ในการคำนวณโหนดโพลาร์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta |V|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

- โดยที่ ΔP คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัสมีมิติเท่ากับ $(n-1) \times 1$ สำหรับบัส p ใดๆ ยกเว้นบัสอ้างอิง (n คือจำนวนบัสทั้งหมดในระบบไฟฟ้า)
- ΔQ คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัสมีมิติเท่ากับ $n_L \times 1$ สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นโหนดบัส (n_L คือ จำนวนโหนดบัส)
- $\Delta |V|^2$ คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของขนาดแรงดันไฟฟ้าที่บัสมีมิติเท่ากับ $(n - n_L - 1) \times 1$ สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นบัสควบคุมแรงดัน
- Δe คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของส่วนจริงของแรงดันไฟฟ้าที่บัสมีมิติเท่ากับ $(n-1) \times 1$
- Δf คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของส่วนจินตภาพของแรงดันไฟฟ้าที่บัสมีมิติเท่ากับ $(n-1) \times 1$
- J คือจาโคเบียนเมตริกซ์มีมิติเท่ากับ $(2 \times (n-1)) \times (2 \times (n-1))$

และจากสมการ (2.37) สามารถหา ΔP , ΔQ และ $\Delta |V|^2$ ได้คือ

$$\begin{aligned} \Delta P_p &= P_{p(scheduled)} - P_p && ; p \neq \text{slack bus} \\ &= (P_{p(gen)} - P_{p(load)}) - P_p && ; p \neq \text{slack bus} \end{aligned} \quad (2.38)$$

โดยที่ $P_{p(gen)}$ คือกำลังไฟฟ้าจริงที่ผลิตที่บัส p หน่วยเป็นเปอร์ยูนิต (p.u.)

$P_{p(load)}$ คือกำลังไฟฟ้าจริงที่จ่ายโหนดที่บัส p หน่วยเป็นเปอร์ยูนิต

P_p คือกำลังไฟฟ้าจริงสุทธิที่บัส p หน่วยเป็นเปอร์ยูนิต คำนวณจากสมการที่ (2.34)

$$\begin{aligned} \Delta Q_p &= Q_{p(scheduled)} - Q_p && ; p = \text{PQ bus} \\ &= (Q_{p(gen)} - Q_{p(load)}) - Q_p && ; p = \text{PQ bus} \end{aligned} \quad (2.39)$$

โดยที่ $Q_{p(\text{gen})}$ คือกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่ผลิตที่บัส p หน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

$Q_{p(\text{load})}$ คือกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่จ่ายโหลดที่บัส p หน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

Q_p คือกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟสุทธิที่บัส p หน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์คำนวณจากสมการ (2.34)

$$\Delta|V_p|^2 = |V_{p(\text{scheduled})}|^2 - |V_p|^2 \quad ; p = \text{PV bus} \quad (2.40)$$

โดยที่ $|V_{p(\text{scheduled})}|$ คือขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส p ซึ่งถูกกำหนดให้เป็นไปตามการควบคุม หน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

$|V_p|$ คือขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส p ได้จากการคำนวณจากสมการที่ (2.35) หน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

การคำนวณหาค่าจาโคเบียนเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยการแยกจาโคเบียนเมตริกซ์ออกเป็นจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย (Subjacobian matrix) ดังสมการที่ (2.41)

$$\begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

รายละเอียดการคำนวณของจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_1, J_2, \dots, J_6 สามารถทำได้ดังนี้
จาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_1

$$J_1 = \left[\frac{\partial P}{\partial e} \right]_{(n-1) \times (n-1)} \quad (2.42)$$

สมาชิกในตำแหน่ง (p,q) ของ J_1 สำหรับบัส p ใดๆ ยกเว้นบัสอ้างอิง คำนวณจาก

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_p}{\partial e_q} &= e_p G_{pq} + f_p B_{pq} & ; p \neq q \\ \frac{\partial P_p}{\partial e_p} &= e_p G_{pp} + f_p B_{pp} + \sum_{q=1}^n (e_q G_{pq} - f_q B_{pq}) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

จาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_2

$$J_2 = \left[\frac{\partial P}{\partial f} \right]_{(n-1) \times (n-1)} \quad (2.44)$$

สมาชิกในตำแหน่ง (p,q) ของ J_2 สำหรับบัส p ใดๆ ยกเว้นบัสอ้างอิง คำนวณจาก

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_p}{\partial f_q} &= f_p G_{pp} - e_p B_{pq} & ; p \neq q \\ \frac{\partial P_p}{\partial f_p} &= f_p G_{pp} - e_p B_{pp} + \sum_{q=1}^n (f_q G_{pq} + e_q B_{pq}) \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

จาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_3

$$J_3 = \left[\frac{\partial Q}{\partial e} \right]_{n_L \times (n-1)} \quad (2.46)$$

สมาชิกในตำแหน่ง (p,q) ของ J_3 สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นโหนดบัส คำนวณจาก

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_p}{\partial e_q} &= f_p G_{pq} - e_p B_{pq} & ; p \neq q \\ \frac{\partial Q_p}{\partial e_p} &= f_p G_{pp} - e_p B_{pp} - \sum_{q=1}^n (e_q B_{pq} + f_q G_{pq}) \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

จาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_4

$$J_4 = \left[\frac{\partial Q}{\partial f} \right]_{n_L \times (n-1)} \quad (2.48)$$

สมาชิกในตำแหน่ง (p,q) ของ J_4 สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นโหนดบัส คำนวณจาก

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_p}{\partial f_q} &= -e_p G_{pq} - f_p B_{pq} & ; p \neq q \\ \frac{\partial Q_p}{\partial f_p} &= -e_p G_{pp} - f_p B_{pp} + \sum_{q=1}^n (e_q G_{pq} - f_q B_{pq}) \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

จาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_5

$$J_5 = \left[\frac{\partial V^2}{\partial e} \right]_{(n-n_L-1) \times (n-1)} \quad (2.50)$$

สมาชิกในตำแหน่ง (p,q) ของ J_5 สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นบัสควบคุมแรงดันคำนวณจาก

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial |V_p|^2}{\partial e_q} &= 0 & ; p \neq q \\ \frac{\partial |V_p|^2}{\partial e_p} &= 2e_p \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

จาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย J_6

$$J_6 = \left[\frac{\partial |V|^2}{\partial f} \right]_{(n-n_L-1) \times (n-1)} \quad (2.52)$$

สมาชิกในตำแหน่ง (p,q) ของ J_6 สำหรับบัส p ใดๆ ที่เป็นบัสควบคุมแรงดัน คำนวณจาก

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial |V_p|^2}{\partial f_q} &= 0 & ; p \neq q \\ \frac{\partial |V_p|^2}{\partial f_p} &= 2f_p \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

จากสมการที่ (2.37) สามารถคำนวณค่าปรับแต่งแรงดันไฟฟ้าที่บัสในการคำนวณรอบที่ k ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta |V|^2 \end{bmatrix}^k \quad (2.54)$$

แต่ในทางปฏิบัติแล้วการคำนวณอินเวอร์สของจาโคเบียนเมตริกซ์ (J^{-1}) ในระบบไฟฟ้าขนาดใหญ่ จะทำได้ช้ามาก [11,12,16,17] การแก้สมการที่ (2.37) เพื่อคำนวณหา Δe และ Δf สามารถทำได้โดยใช้การแก้สมการเชิงเส้น ซึ่งจะทำให้การทำงานเร็วกว่าการใช้สมการ (2.54) ค่าปรับแต่งแรงดันไฟฟ้า ดังจะได้อธิบายถึงในหัวข้อต่อไป

แรงดันไฟฟ้าที่บัสของการคำนวณในรอบที่ k+1 สำหรับบัส p ใดๆ ยกเว้นบัสอ้างอิง คำนวณได้จาก

$$\left. \begin{aligned} e_p^{k+1} &= e_p^k + \Delta e_p^k \\ f_p^{k+1} &= f_p^k + \Delta f_p^k \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

เงื่อนไขการลู่เข้าของคำตอบ คือ

$$\left. \begin{aligned} \max(\Delta|P^k|) &\leq \varepsilon_p \\ \max(\Delta|Q^k|) &\leq \varepsilon_q \\ \max(\Delta|V^k|^2) &\leq \varepsilon_v \\ k &\leq k_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

โดยที่ $\max(\Delta|P^k|)$ คือขนาดของความคลาดเคลื่อนที่มีค่ามากที่สุดของกำลังไฟฟ้าจริง สำหรับการคำนวณในรอบที่ k ใดๆ

$\max(\Delta|Q^k|)$ คือขนาดของความคลาดเคลื่อนที่มีค่ามากที่สุดของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ สำหรับการคำนวณในรอบที่ k ใดๆ

$\max(\Delta|V^k|^2)$ คือขนาดของความคลาดเคลื่อนที่มีค่ามากที่สุดของขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส สำหรับการคำนวณในรอบที่ k ใดๆ

ε_p คือค่าผิดพลาดที่กำหนดให้ยอมรับได้ทางกำลังไฟฟ้าจริง

ε_q คือค่าผิดพลาดที่กำหนดให้ยอมรับได้ทางกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ

ε_v คือค่าผิดพลาดที่กำหนดให้ยอมรับได้ของขนาดแรงดันไฟฟ้า

k คือจำนวนรอบที่ใช้คำนวณเพื่อการลู่เข้าของคำตอบ

k_{\max} คือจำนวนรอบสูงสุดที่กำหนดให้คำนวณได้

โดยทั่วไปแล้วจะกำหนดให้ $\varepsilon_p = \varepsilon_q = \varepsilon$ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง 0.01 ถึง 0.0001 และ $\varepsilon_v = 0.0001$

2.4.3 วิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยใช้ระบบพิกัดเชิงขั้ว

สำหรับระบบไฟฟ้ากำลังขนาด n บัส และมีจำนวนโหนดบัสเท่ากับ n_L จะกำหนดให้

$$\begin{aligned} V_p &= |V_p| \angle \theta_p \quad ; \theta_{pq} = \theta_p - \theta_q \\ Y_{pq} &= G_{pq} + jB_{pq} \end{aligned}$$

โดยที่ θ_{pq} คือผลต่างของมุมแรงดันไฟฟ้าที่บัส p เทียบกับบัส q

เปลี่ยนสมการที่ (2.34) เป็นพิกัดเชิงขั้วจะได้กำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p ใดๆ ตามลำดับคือ

$$P_p = |V_p| |V_q| \sum_{q=1}^n (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) \quad (2.57)$$

$$Q_p = |V_p| |V_q| \sum_{q=1}^n (G_{pq} \sin \theta_{pq} + B_{pq} \cos \theta_{pq}) \quad (2.58)$$

เนื่องจากสมการที่ (2.57) และ (2.58) มีลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นในการวิเคราะห์โหนด โพลาร์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันจะเปลี่ยนสมการดังกล่าวให้อยู่ในลักษณะที่เป็นเชิงเส้นเช่นเดียวกับในระบบพิกัดฉาก โดยอยู่ในรูปของสมการความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าที่บัส ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta \theta}{|V|} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

โดยที่ ΔP และ ΔQ มีความหมายเช่นเดียวกับที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.4.2 โดยใช้สมการ (2.38) และ (2.39) ตามลำดับ

$\Delta \theta$ คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของมุมของแรงดันไฟฟ้าที่บัส
มีมิติเท่ากับ $(n-1) \times 1$

$\Delta |V|$ คือเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนของขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส
มีมิติเท่ากับ $n_L \times 1$

การคำนวณหาค่าจาโคเบียนเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยการแยกจาโคเบียนเมตริกซ์ออกเป็นจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย (Subjacobian matrix) ดังสมการที่ (2.60)

$$\begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

รายละเอียดการคำนวณของจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย H , N , M และ L สามารถทำได้ดังนี้
สำหรับ $p \neq q$

$$H_{pq} = L_{pq} = |V_p| |V_q| (G_{pq} \sin \theta_{pq} - B_{pq} \cos \theta_{pq}) \quad (2.61)$$

$$N_{pq} = -M_{pq} = |V_p| |V_q| (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) \quad (2.62)$$

สำหรับ $p = q$

$$H_{pq} = -Q_p - B_{pp} |V_p|^2 \quad (2.63)$$

$$L_{pq} = Q_p - B_{pp}|V_p|^2 \quad (2.64)$$

$$N_{pq} = P_p + G_{pp}|V_p|^2 \quad (2.65)$$

$$M_{pq} = P_p - G_{pp}|V_p|^2 \quad (2.66)$$

โดยที่ H คือจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อยที่มีขนาดมิติเท่ากับ $(n-1) \times (n-1)$

N คือจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อยที่มีขนาดมิติเท่ากับ $(n-1) \times (n_L)$

M คือจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อยที่มีขนาดมิติเท่ากับ $(n_L) \times (n-1)$

L คือจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อยที่มีขนาดมิติเท่ากับ $(n_L \times n_L)$

จากสมการที่ (2.59) สามารถคำนวณค่าปรับแต่งแรงดันไฟฟ้าที่บัสในการคำนวณรอบที่ k ได้คือ

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \frac{\Delta|V|}{|V|} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}^k \quad (2.67)$$

แต่ในทางปฏิบัติแล้วการคำนวณอินเวอร์สของจาโคเบียนเมตริกซ์ J^{-1} ในระบบไฟฟ้าขนาดใหญ่ จะทำได้ช้ามากเช่นเดียวกับระบบพิกัดฉาก การแก้สมการที่ (2.59) เพื่อคำนวณหา $\Delta\theta$ และ $\Delta|V|$ สามารถทำได้โดยการแก้สมการเชิงเส้น ซึ่งการคำนวณจะเร็วกว่า ดังจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

แรงดันไฟฟ้าที่บัสของการคำนวณในรอบที่ k+1 สำหรับบัส p ใดๆ ยกเว้นบัสอ้างอิง คำนวณได้จาก

$$\left. \begin{aligned} \theta_p^{k+1} &= \theta_p^k + \Delta\theta_p^k \\ |V_p|^{k+1} &= |V_p|^k + \Delta|V_p|^k \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

โดยที่การคำนวณค่ามุมของแรงดันไฟฟ้าจะคำนวณทุกบัสยกเว้นบัสอ้างอิง และการคำนวณค่าขนาดแรงดันไฟฟ้าจะคำนวณเฉพาะที่โหลดบัสเท่านั้น

เงื่อนไขการลู่เข้าของคำตอบ คือ

$$\left. \begin{aligned} \max(\Delta|P^k|) &\leq \varepsilon_p \\ \max(\Delta|Q^k|) &\leq \varepsilon_q \\ k &\leq k_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้ $\varepsilon_p = \varepsilon_q = \varepsilon$ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง 0.01 ถึง 0.0001

2.4.4 การแก้สมการเชิงเส้น (linear equation) [18-20]

การแก้ปัญหสมการเชิงเส้นในตัวแปรที่ไม่ทราบค่า n ตัวแปร และมี n สมการ จากสมการที่ (2.70) คือ

$$Ax = b \quad (2.70)$$

โดยที่ A คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีมิติเท่ากับ $n \times n$

x คือเวกเตอร์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่มีมิติเท่ากับ $n \times 1$

b คือเวกเตอร์อินโฮโมจีเนียส (Inhomogeneous terms) หรือตัวที่ทราบค่าที่มีมิติเท่ากับ $n \times 1$

การแก้สมการเชิงเส้นของสมการที่ (2.70) มีหลายวิธีด้วยกันแต่วิธีแอลยูดีคอมโพสิชัน (LU decomposition) เป็นวิธีที่ได้รับการนำมาใช้มากวิธีหนึ่ง เมื่อพิจารณาถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณและการใช้หน่วยความจำเมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณและใช้วิธีปฏิบัติการตามแถว (Row operations) และการเปลี่ยนรูป (Transformation) ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เพื่อคำนวณหาเมตริกซ์ L และเมตริกซ์ U ต่อจากนั้นใช้วิธีการแทนที่ไปข้างหน้า (Forward substitution) และการแทนที่ย้อนกลับ (Backward substitution) เพื่อคำนวณเวกเตอร์ของตัวแปร (x)

การปฏิบัติการตามแถวสามารถทำได้ 3 แบบด้วยกันคือ

- (1) สมาชิกของแถวหนึ่งสามารถบวกด้วยสมาชิกของอีกแถวหนึ่งที่คูณด้วยค่าคงที่ใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์
- (2) สามารถสลับแถวของเมตริกซ์ได้
- (3) สามารถคูณด้วยค่าคงที่ใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์กับแถวใดๆ ของเมตริกซ์ได้

2.4.4.1 วิธีแอลยูดีคอมโพสิชัน (LU decomposition)

วิธีแอลยูดีคอมโพสิชัน (LU decomposition) คือการเปลี่ยนรูปของเมตริกซ์ A ให้เป็นผลคูณของเมตริกซ์ L และเมตริกซ์ U ดังนี้

$$A = LU \quad (2.71)$$

โดยที่ L คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix)

U คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix)

เมื่อเขียนสมการที่ (2.71) ใหม่ในรูปแบบต่างๆ ไปจะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

จากสมการที่ (2.72) จะพบว่าทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมของ L จะมีค่าเป็นหนึ่ง และการคำนวณค่าของ u_{ij} และ l_{ij} ในสมการที่ (2.72) สามารถทำได้ดังนี้

(1) สมาชิกแถวแรกของ U คือ u_{1j}

$$u_{1j} = a_{1j} \quad \text{สำหรับ } j = 1, 2, \dots, n \quad (2.73)$$

(2) สมาชิกหลักแรกของ L คือ l_{i1}

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11} \quad \text{สำหรับ } i = 2, 3, \dots, n \quad (2.74)$$

(3) สมาชิกแถวที่ m^{th} ของ U คือ u_{mj}

$$u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj} \quad \text{สำหรับ } j = m, m+1, \dots, n \quad (2.75)$$

(4) สมาชิกหลักที่ m^{th} ของ L คือ l_{im}

$$l_{im} = \left[a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km} \right] / u_{mm} \quad \text{สำหรับ } i = m+1, m+2, \dots, n \quad (2.76)$$

จากสมการที่ (2.70) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$LUx = b \quad (2.77)$$

จาก $LU = A$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.77) สามารถคำนวณค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (x) ได้โดยกำหนดให้

$$Lz = b \quad (2.78)$$

และ
$$Ux = z \quad (2.79)$$

โดยที่ Z คือเวกเตอร์ของตัวแปรที่ได้จากขั้นตอนการแทนที่ไปข้างหน้า

จากสมการที่ (2.78) เรียกว่าการแทนที่ไปข้างหน้า (Forward substitution) และสมการที่ (2.79) เรียกว่าการแทนที่ย้อนกลับ (Backward substitution) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

(1) การแทนที่ไปข้างหน้า

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= b_1 \\ z_i &= b_i - \left[\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j \right], i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

(2) การแทนที่ย้อนกลับ

$$\left. \begin{aligned} x_n &= z_n / u_{nn} \\ x_i &= \left[z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right] / u_{ii}, i = n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

จากสมการที่ (2.81) จึงสามารถแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า x ได้ แต่การคำนวณ LU ที่กล่าวไว้ข้างต้นไม่ได้พิจารณาไพวอต (Pivot) โดยที่ตำแหน่งของไพวอตคือ $a_{kk}; k = 1, 2, \dots, n-1$ ของเมตริกซ์ A การที่พิจารณาไพวอตเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาที่เกิดจาก

- (1) ถ้า $a_{kk} = 0$ จะทำให้ไม่สามารถคำนวณหา LU ได้เนื่องจากเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (Singular matrix)
- (2) ถ้าค่า a_{kk} มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับสมาชิกตัวที่อยู่ในหลัก k ใดๆ เมื่อนำ LU ไปแก้สมการเชิงเส้นจะเกิดค่าความคลาดเคลื่อน ซึ่งความคลาดเคลื่อนจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับว่าค่าของ a_{kk} แตกต่างจากค่าสมาชิกตัวอื่นๆ มากเพียงใด ยิ่งมีค่าแตกต่างมากจะทำให้มีความคลาดเคลื่อนสูง

วิธีการแก้ไขคือจะตรวจสอบหาค่าสูงที่สุดของ $a_{jk} : j = k, k+1, k+2, \dots, n$ ว่าอยู่ที่แถวใดแล้ว นำสมาชิกทั้งแถวที่พบค่าสูงที่สุดของ a_{jk} นั้นมาสลับกับสมาชิกในแถวของไพวอต และเมื่อสลับแถวใดไปจะต้องไปสลับสมาชิกของเวกเตอร์ b ด้วย ซึ่งจะเรียกว่าการปฏิบัติการตามแถว (Row operation)

จากที่กล่าวมาสรุปขั้นตอนในการแก้สมการเชิงเส้น $Ax = b$ ได้ดังนี้

(1) การคำนวณหาเมตริกซ์ LU

(1.1) ให้ $k = 1$

(1.2) ตรวจสอบค่าไพวอต (a_{kk}) กับ $a_{jk}; j = k, k+1, \dots, n$ หาค่าสูงสุดของ a_{jk} แล้วสลับแถว k กับ j ของเมตริกซ์ A และเวกเตอร์ b หากพบว่าค่าสูงสุดของ $a_{jk} = 0$ แสดงว่าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน คือไม่สามารถแก้สมการได้ จากนั้นคำนวณหาสมาชิกตัวอื่นๆ ของแถวแรกและหลักแรกตามลำดับ โดยใช้ขั้นตอน 1.2 หากเป็นแถวอื่นหลักอื่นใช้ขั้นตอน (1.4) ตรวจสอบว่า $k = n - 1$ หรือไม่ ถ้าจริงให้ไปทำต่อที่ขั้นตอน 1.6

(1.3) คำนวณ LU แถวแรกและหลักแรก ($k = 1$) โดยใช้สมการที่ (2.73) และ (2.74) ตามลำดับ

(1.4) คำนวณหา LU แถวอื่นและหลักอื่น ($k = 2, 3, \dots, n - 1$) โดยใช้สมการที่ (2.75) และ (2.76) ตามลำดับ

(1.5) $k = k + 1$ แล้วย้อนกลับไปทำขั้นตอน 1.2

(1.6) ถ้า $a_{nn} = 0$ แสดงว่าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

(2) ทำการแทนที่ไปข้างหน้าโดยใช้สมการที่ (2.80) โดยที่เมตริกซ์ b ต้องทำการสลับแถวตามขั้นตอน 1.2 ก่อนจะทำขั้นตอนที่ 2

(3) ทำการแทนที่ย้อนกลับโดยใช้สมการที่ (2.81)

2.4.5 ขั้นตอนการคำนวณโหนดโพลีด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน แบบใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปขั้นตอนการคำนวณโหนดโพลีด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

- (1) สร้างบัสแอดมิตแดนซ์เมตริกซ์ ตามที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.3
- (2) สมมติค่าแรงดันเริ่มต้นที่บัสต่างๆ ยกเว้นที่บัสอ้างอิง $V_p^{(0)}$ โดยที่ $p = 1, 2, \dots, n$ และ $p \neq \text{slack bus}$
- (3) ให้ $k = 0$
- (4) คำนวณปริมาณทางไฟฟ้าที่บัส ดังนี้
 - สำหรับระบบพิกัดฉาก
 - คำนวณ P_p^k และ Q_p^k ตามสมการที่ (2.34) ยกเว้นบัสอ้างอิง
 - ถ้าบัส p บัสนั้นเป็นบัสควบคุมแรงดันให้คำนวณ $|V_p^k|^2$ ตามสมการที่ (2.35)
 - สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว
 - คำนวณ P_p^k และ Q_p^k ตามสมการที่ (2.57) และ (2.58) ตามลำดับ
- (5) สำหรับบัส p ที่เป็นบัสควบคุมแรงดันและค่าความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าในรอบก่อนหน้านี้น้อยกว่า 0.5 (เหตุที่ต้องใช้เงื่อนไขนี้ก็เพื่อไม่ให้เกิดปัญหาการสับเปลี่ยนชนิดของบัสไปมา (Bustype switching) [3]) หากว่าค่ากำลังไฟฟ้าวรีแอกตีฟเกินกว่าที่บัสนั้นสามารถจ่ายได้หรือรับได้ จะเปลี่ยนชนิดของบัสนั้นเป็นโหลดบัส หากไม่เกินให้ทำขั้นตอนที่ 6 ต่อไป
- (6) คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าที่บัส ดังนี้
 - สำหรับระบบพิกัดฉาก
 - ถ้าบัส p เป็นโหลดบัส แล้วคำนวณ ΔP_p^k และ ΔQ_p^k ตามสมการที่ (2.38) และ (2.39) ตามลำดับ
 - ถ้าบัส p เป็นบัสควบคุมแรงดัน แล้วคำนวณ ΔP_p^k และ $\Delta |V_p^k|^2$ ตามสมการที่ (2.38) และ (2.40) ตามลำดับ
 - สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว
 - ถ้าบัส p เป็นโหลดบัสแล้วคำนวณ ΔP_p^k และ ΔQ_p^k ตามสมการที่ (2.38) และ (2.39) ตามลำดับ
 - ถ้าบัส p เป็นบัสควบคุมแรงดัน แล้วคำนวณ ΔP_p^k ตามสมการที่ (2.38)
- (7) ตรวจสอบเงื่อนไข
 - สำหรับระบบพิกัดฉาก ถ้าเงื่อนไขตามสมการที่ (2.56) เป็นจริง แล้วให้ไปทำขั้นตอนที่ 12 มิฉะนั้นให้เริ่มต้นทำขั้นตอนที่ 8 สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้าเงื่อนไขตามสมการที่ (2.69) เป็นจริง แล้วให้ไปทำขั้นตอนที่ 12 มิฉะนั้นให้ทำขั้นตอนที่ 8

- (8) คำนวณจาโคเบียนเมตริกซ์ (J)
 สำหรับระบบพิกัดฉากจากหัวข้อ 2.4.2 ใช้สมการที่ (2.42) ถึงสมการที่ (2.53)
 สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วจากหัวข้อ 2.4.3 ใช้สมการที่ (2.61) ถึงสมการที่ (2.66)
- (9) คำนวณค่าปรับแต่งแรงดันไฟฟ้าที่บัส Δe และ Δf สำหรับระบบพิกัดฉากและ $\Delta \theta$ และ $\Delta |V|$ สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยใช้การแก้สมการเชิงเส้นในหัวข้อ 2.4.4
- (10) คำนวณแรงดันไฟฟ้าที่บัสใหม่ ดังนี้
 สำหรับระบบพิกัดฉาก ใช้สมการที่ (2.55)
 สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว ใช้สมการที่ (2.68)
- (11) ให้ $k=k+1$ แล้วย้อนกลับไปทำขั้นตอนที่ 4. โดยใช้ค่าแรงดันไฟฟ้าที่บัสใหม่ซึ่งได้จากขั้นตอนที่ 10
- (12) คำนวณกำลังไฟฟ้าที่ไหลในหม้อแปลงและสายส่งต่างๆ พร้อมทั้งพิมพ์ผลลัพธ์และสิ้นสุดการทำงาน

2.5 การคำนวณโหลดโพลว์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่สอง [3,4,21-23]

จากสมการที่ (2.27) ถ้าไม่ตัดเทอมของอนุพันธ์อันดับที่สองออก จะทำให้การวิเคราะห์โหลดโพลว์กับระบบไฟฟ้ากำลังที่มีข้อกำหนดเริ่มต้นทางโหลดโพลว์ที่ไม่เหมาะสม (Ill-condition) สามารถหาคำตอบได้ดีกว่าแบบที่ใช้แค่อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและจำนวนรอบในการคำนวณจะน้อยกว่าหรือการลู่เข้าสู่คำตอบเร็วขึ้น แต่เวลาในการคำนวณแต่ละรอบจะมากขึ้นตามไปด้วย เมื่อพิจารณาเวลาในการคำนวณทั้งหมดจะพบว่าใช้เวลาน้อยกว่าแบบใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

จากสมการที่ (2.27) เมื่อเป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วย n ตัวแปร สามารถกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ได้เป็น

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^i f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \quad (2.82)$$

จากสมการที่ (2.82) เนื่องจาก $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^i$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ มีค่าน้อยจึงตัดเทอมตั้งแต่ $i = 3, 4, \dots, m$ และจัดเทอมใหม่จะได้เป็น

$$\Delta f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} (\Delta x_i) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^2} (\Delta x_i)^2 \right\} \\ + \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} (\Delta x_i \Delta x_j) \right\} \\ \Delta f = Jf + Sf \quad (2.83)$$

โดยที่ Δf คือค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชัน f

Jf คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชัน f

Sf คืออนุพันธ์อันดับที่สองของค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชัน f

จากสมการที่ (2.83) จะเป็นที่มาของการคำนวณโหนดโพลาร์ตามวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยรวมความไม่เป็นเชิงเส้นของอนุพันธ์อันดับที่สอง

2.5.1 การคำนวณโหนดโพลาร์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่สองระบบพิกัดฉาก

สมการกำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p ใดๆ สำหรับระบบไฟฟ้ากำลังขนาด n บัส ยังคงมีรูปแบบเหมือนกับวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งระบบพิกัดฉากดังสมการที่ (2.34) สำหรับสมการความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าที่บัส เมื่อรวมความไม่เป็นเชิงเส้นของอนุพันธ์อันดับที่สองจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถทำได้ดังนี้

2.5.1.1 สมการความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส

$$\Delta P_p = JP_p + SP_p \quad ; p \neq \text{slack bus} \quad (2.84)$$

$$JP_p = \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial P_p}{\partial e_q} \Delta e_q \right\} + \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial P_p}{\partial f_q} \Delta f_q \right\} \quad ; p \text{ และ } q \neq \text{slack bus} \quad (2.85)$$

$$SP_p = (\Delta e_p) \sum_{q=1}^n \{ B_{pq} \Delta f_q + G_{pq} \Delta e_q \} + (\Delta f_p) \sum_{q=1}^n \{ G_{pq} \Delta f_q - B_{pq} \Delta e_q \} \\ ; p \text{ และ } q \neq \text{slack bus} \quad (2.86)$$

โดยที่ ΔP_p คือค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส p

JP_p คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส p

SP_p คืออนุพันธ์อันดับที่สองของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส p

2.5.1.2 สมการความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส

$$\Delta Q_p = JQ_p + SQ_p \quad ; p = \text{PQ bus} \quad (2.87)$$

$$JQ_p = \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial Q_p}{\partial e_q} \Delta e_q \right\} + \sum_{q=1}^n \left[\frac{\partial Q_p}{\partial f_q} \Delta f_q \right] ; p = \text{PQ bus} \text{ และ } q \neq \text{slack bus} \quad (2.88)$$

$$SQ_p = (\Delta f_p) \cdot \sum_{q=1}^n \{ B_{pq} \Delta f_q + G_{pq} \Delta f_q \} + (\Delta e_p) \cdot \sum_{q=1}^n \{ B_{pq} \Delta e_q - G_{pq} \Delta f_q \} \\ ; p = \text{PQ bus} \text{ และ } q \neq \text{slack bus} \quad (2.89)$$

โดยที่ ΔQ_p คือค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p

JQ_p คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p

SQ_p คืออนุพันธ์อันดับที่สองของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p

2.5.1.3 สมการความคลาดเคลื่อนของแรงดันไฟฟ้าที่บัส

$$\Delta |V_p|^2 = JV_p + SV_p \quad ; p = \text{PV bus} \quad (2.90)$$

$$JV_p = 2e_p \cdot \Delta e_p + 2f_p \cdot \Delta f_p ; p = \text{PV bus} \quad (2.91)$$

$$SV_p = \Delta e_p^2 + \Delta f_p^2 \quad ; p = \text{PV bus} \quad (2.92)$$

โดยที่ $\Delta |V_p|^2$ คือค่าความคลาดเคลื่อนของขนาดแรงดันไฟฟ้าที่บัส p

JV_p คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของค่าความคลาดเคลื่อนของขนาดแรงดันไฟฟ้าที่บัส p

SV_p คืออนุพันธ์อันดับที่สองของค่าความคลาดเคลื่อนของขนาดแรงดันไฟฟ้าที่บัส p

2.5.2 การคำนวณโหลดไฟลว์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่สองระบบพิกัดเชิงขั้ว

สมการกำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p ใดๆ สำหรับระบบไฟฟ้ากำลังขนาด n บัส ยังคงมีรูปแบบเหมือนกับวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งระบบพิกัดเชิงขั้วเช่นเดียวกัน ดังสมการที่ (2.57) และ (2.58) ตามลำดับ สำหรับสมการความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าที่บัส เมื่อรวมความไม่เป็นเชิงเส้นของอนุพันธ์อันดับที่สองจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถทำได้ดังนี้

2.5.2.1 สมการความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส

$$\Delta P_p = JP_p + SP_p \quad ; p = 1, 2, \dots, n \text{ และ } p \neq \text{slack bus} \quad (2.93)$$

$$JP_p = \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial P_p}{\partial \theta_q} (\Delta \theta_q) \right\} + \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial P_p}{\partial V_q} (\Delta V_q) \right\} ; p = 1, 2, \dots, n \text{ และ } p \neq \text{slack bus} \quad (2.94)$$

$$SP_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P_p}{\partial V_p^2} (\Delta V_p)^2 + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \left\{ \frac{\partial^2 P_p}{\partial \theta_p \partial V_q} (\Delta \theta_p \Delta V_q) \right\} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \left\{ \frac{\partial^2 P_p}{\partial \theta_q \partial V_q} (\Delta \theta_q \Delta V_q) \right\} \\ + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \left\{ \frac{\partial^2 P_p}{\partial \theta_q \partial V_p} (\Delta \theta_q \Delta V_p) \right\} ; p = 1, 2, \dots, n \text{ และ } p \neq \text{slack bus} \quad (2.95)$$

โดยที่ ΔP_p คือค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส p

JP_p คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส p

SP_p คืออนุพันธ์อันดับที่สองของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส p

2.5.2.2 สมการความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส

$$\Delta Q_p = JQ_p + SQ_p \quad ; p = \text{PQ bus} \text{ และ } p \neq \text{slack bus} \quad (2.96)$$

$$JQ_p = \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial Q_p}{\partial \theta_q} (\Delta \theta_q) \right\} + \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial Q_p}{\partial V_q} (\Delta V_q) \right\} ; p = \text{PQ bus} \text{ และ } p \neq \text{slack bus} \quad (2.97)$$

$$SQ_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Q_p}{\partial V_p^2} (\Delta V_p)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 Q_p}{\partial \theta_q^2} (\Delta \theta_q)^2 \right\} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \left\{ \frac{\partial^2 Q_p}{\partial \theta_p \partial \theta_q} (\Delta \theta_p \Delta \theta_q) \right\} \\ + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \left\{ \frac{\partial^2 Q_p}{\partial V_p \partial V_q} (\Delta V_p \Delta V_q) \right\} ; p = \text{PQ bus} \text{ และ } p \neq \text{slack bus} \quad (2.98)$$

โดยที่ ΔQ_p คือค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p

JQ_p คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p

SQ_p คืออนุพันธ์อันดับที่สองของค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส p

2.5.3 ขั้นตอนการคำนวณโหลดโพล์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน แบบอนุพันธ์อันดับที่สอง

สรุปขั้นตอนการคำนวณได้ดังนี้

- (1) สร้างบัสแอดมิตแดนซ์เมตริกซ์ ตามที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.3
- (2) สมมติแรงดันไฟฟ้าที่บัสต่างๆ ยกเว้นที่บัสอ้างอิง
- (3) ให้ $k = 0$
- (4) สำหรับระบบพิกัดฉาก
 - คำนวณ P_p^k สำหรับบัส p ที่เป็นบัสควบคุมแรงดันหรือโหลดบัส ตามสมการ (2.34)
 - คำนวณ Q_p^k สำหรับบัส p ที่เป็นโหลดบัส ตามสมการ (2.34)
 - คำนวณ $|V_p^k|^2$ สำหรับบัส p ที่เป็นบัสควบคุมแรงดัน ตามสมการ (2.35)

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว

- คำนวณ P_p^k สำหรับบัส p ที่เป็นบัสควบคุมแรงดันหรือโหลดบัส ตามสมการที่ (2.57)
 - คำนวณ Q_p^k สำหรับบัส p ที่เป็นโหลดบัส ตามสมการที่ (2.58)
- (5) สำหรับบัส p ที่เป็นบัสควบคุมแรงดันและค่าความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าในรอบก่อนหน้านี้น้อยกว่า 0.5 (เหตุที่ต้องใช้เงื่อนไขนี้ก็ไม่ให้เกิดปัญหา การสับเปลี่ยนชนิดของบัสไปมา (Bustype switching) [3]) หากค่ากำลังไฟฟ้ายิ่งเกินกว่าที่บัสนั้นสามารถจ่ายได้หรือรับได้จะเปลี่ยนชนิดของบัสนั้นเป็นโหลดบัส หากไม่เกินให้ทำขั้นตอนที่ 6 ต่อไป
 - (6) คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของปริมาณทางไฟฟ้าที่บัส ดังนี้
 - สำหรับระบบพิกัดฉาก
 - ถ้าบัส p เป็นโหลดบัส แล้วคำนวณ ΔP_p^k และ ΔQ_p^k ตามสมการที่ (2.38) และ (2.39) ตามลำดับ
 - ถ้าบัส p เป็นบัสควบคุมแรงดัน แล้วคำนวณ ΔP_p^k และ $\Delta |V_p^k|^2$ ตามสมการที่ (2.38) และ (2.40) ตามลำดับ
 - สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว
 - ถ้าบัส p เป็นโหลดบัส แล้วคำนวณ ΔP_p^k และ ΔQ_p^k ตามสมการที่ (2.38) และ (2.39) ตามลำดับ

- ถ้าบัส p เป็นบัสควบคุมแรงดัน แล้วคำนวณ ΔP_p^k ตามสมการที่ (2.38)
- (7) ตรวจสอบเงื่อนไข
สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วและระบบพิกัดฉากคำนวณ $\max(\Delta|P^k|)$ และ $\max(\Delta|Q^k|)$ แต่ระบบพิกัดฉากต้องคำนวณ $\max(\Delta|V^k|^2)$ ด้วย หากมีค่าไม่เกินค่าความคลาดเคลื่อน ϵ ที่กำหนดแล้วให้ไปทำขั้นตอนที่ 15 มิฉะนั้นให้ทำขั้นตอนที่ 8
- (8) คำนวณหาจาโคเบียนเมตริกซ์ (J) ตามวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งสำหรับระบบพิกัดฉากใช้สมการที่ (2.42) ถึง (2.53) สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วใช้สมการที่ (2.61) ถึง (2.66)
- (9) คำนวณค่าปรับแต่งแรงดันไฟฟ้าที่บัสสำหรับระบบพิกัดฉากคือ Δe_p^k และ Δf_p^k โดยการใช้การแก้สมการเชิงเส้นของสมการที่ (2.37) ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.4.4 สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $\Delta\theta_p^k$ และ $\Delta|V_p^k|$ โดยการใช้การแก้สมการเชิงเส้นของสมการที่ (2.59) ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.4.4 เช่นเดียวกัน
- (10) สำหรับระบบพิกัดฉากคำนวณ SP_p^k , SQ_p^k และ SV_p^k จากสมการที่ (2.86), (2.89) และ (2.92) ตามลำดับ โดยใช้ Δe_p^k และ Δf_p^k จากขั้นตอนที่ 9. สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วคำนวณ SP_p^k และ SQ_p^k จากสมการที่ (2.95) ถึง (2.98) ตามลำดับ โดยใช้ $\Delta\theta_p^k$ และ $\Delta|V_p^k|$ จากขั้นตอนที่ 9.
- (11) สำหรับระบบพิกัดฉากทำการปรับปรุงค่า ΔP_p^k , ΔQ_p^k และ $\Delta|V_p^k|^2$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 6. ด้วย SP_p^k , SQ_p^k และ SV_p^k สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วทำการปรับปรุงเฉพาะ ΔP_p^k และ ΔQ_p^k ดังนี้

$$\Delta P_p'^k = \Delta P_p^k - SP_p^k$$

$$\Delta Q_p'^k = \Delta Q_p^k - SQ_p^k$$

$$\Delta|V_p^k|^2' = \Delta|V_p^k|^2 - SV_p^k$$

- (12) สำหรับระบบพิกัดฉากทำการปรับค่า Δe_p^k และ Δf_p^k สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วทำการปรับค่า $\Delta\theta_p^k$ และ $\Delta|V_p^k|$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 9. ด้วย $\Delta P_p'^k$, $\Delta Q_p'^k$ และ $\Delta|V_p^k|^2'$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 11. โดยยังคงใช้จาโคเบียนเมตริกซ์ J เดิม ระบบพิกัดฉากเปลี่ยนจากสมการที่ (2.37) เป็นสมการที่ (2.99) ระบบพิกัดเชิงขั้วเปลี่ยนจากสมการที่ (2.59) เป็นสมการที่ (2.100)

$$\begin{bmatrix} \Delta P' \\ \Delta Q' \\ \Delta |V|^2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta e' \\ f' \end{bmatrix}^k \quad (2.99)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P' \\ \Delta Q' \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta \theta'}{|V|} \\ \frac{\Delta |V'|}{|V|} \end{bmatrix}^k \quad (2.100)$$

จากนั้นใช้การแก้สมการเชิงเส้นของสมการที่ (2.99) หรือสมการที่ (2.100) ขึ้นอยู่กับว่าจะเลือกใช้ระบบใดดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.4.4 และเนื่องจากการคำนวณภายในรอบเดียวกันแรงดันไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงน้อยมาก จึงสามารถประมาณให้ใช้จาโคเบียนเมตริกซ์ (J) เดิมได้

- (13) สำหรับระบบพิกัดฉาก คำนวณแรงดันไฟฟ้าที่บัสใหม่ โดยใช้ Δe_p^k และ Δf_p^k ที่ได้จากขั้นตอนที่ 12.

$$e_p^{(k+1)} = e_p^{(k)} + \Delta e_p^k$$

$$f_p^{(k+1)} = f_p^{(k)} + \Delta f_p^k$$

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว คำนวณแรงดันไฟฟ้าที่บัสใหม่โดยใช้ $\Delta \theta_p^k$ และ $\Delta |V_p^k|$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 12.

$$\theta_p^{(k+1)} = \theta_p^{(k)} + \Delta \theta_p^k$$

$$|V_p^{(k+1)}| = |V_p^{(k)}| + \Delta |V_p^k|$$

- (14) ให้ $k=k+1$ แล้วย้อนกลับไปเริ่มทำขั้นตอนที่ 4. โดยใช้แรงดันไฟฟ้าที่บัสใหม่ $e_p^{(k+1)}$ และ $f_p^{(k+1)}$ สำหรับระบบพิกัดฉาก และ $\Delta \theta_p^{(k+1)}$ และ $\Delta |V_p^{(k+1)}|$ สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วที่ได้จากขั้นตอนที่ 13.
- (15) คำนวณกำลังไฟฟ้าที่ไหลในหม้อแปลงและสายส่งต่างๆ พร้อมทั้งพิมพ์ผลลัพธ์และสิ้นสุดการทำงาน

2.6 ข้อเสนอแนะสำหรับการคำนวณโหลดโพลาร์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ในการคำนวณโหลดโพลาร์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและแบบอนุพันธ์อันดับที่สองนั้นเมื่อนำไปใช้งานจริง ควรเลือกใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วเพราะขนาดมิติของ

จาโคเบียนเมตริกซ์จะมีขนาดเล็กกว่าเท่ากับจำนวนบัสควบคุมแรงดันของระบบไฟฟ้านั้นๆ (ระบบพิกัดฉาก J มีมิติ $(2x(n-1))^2$ ระบบเชิงขั้วมีมิติ $((n-1)+(n-n_v-1))^2$, n คือจำนวนบัสทั้งหมด n_v คือจำนวนบัสควบคุมแรงดัน) แต่ถ้าใช้ระบบพิกัดฉากแล้วในการแก้สมการเชิงเส้นของสมการที่ (2.37) สำหรับระบบพิกัดฉากเพื่อคำนวณหา Δe_p^k และ Δf_p^k นั้นจะไม่สามารถแก้สมการได้ เพราะถึงแม้ว่าจะทำการสลับแถวแล้วค่าของไพวอดก็ยังคงเป็นศูนย์ ซึ่งสาเหตุเกิดมาจากสมาชิกจาโคเบียนเมตริกซ์ J_5 และ J_6 ซึ่งเป็นส่วนของบัสควบคุมแรงดันมีค่าเป็นศูนย์เป็นจำนวนมากและการสลับแถวในการคำนวณหาเมตริกซ์ LU จะทำการสลับแถวจากแถบบนลงสู่แถวล่างของเมตริกซ์ LU เท่านั้น ทำให้การคำนวณของ LU แสดงผลว่าจาโคเบียนเมตริกซ์เป็นเมตริกซ์เอกฐาน วิธีการแก้ปัญหานี้ทำได้โดยสลับแถวของ J_1 และ J_2 กับ J_3, J_4, J_5 และ J_6 ดังนี้

จาโคเบียนแถวที่ 1	สลับแถวกับจาโคเบียนแถวที่ $2x(n-1)$
จาโคเบียนแถวที่ 2	สลับแถวกับจาโคเบียนแถวที่ $2x(n-1)-1$
จาโคเบียนแถวที่ 3	สลับแถวกับจาโคเบียนแถวที่ $2x(n-1)-2$
"	:"
"	:"
จาโคเบียนแถวที่ $(n-3)$	สลับแถวกับจาโคเบียนแถวที่ $(n+2)$
จาโคเบียนแถวที่ $(n-2)$	สลับแถวกับจาโคเบียนแถวที่ $(n+1)$
จาโคเบียนแถวที่ $(n-1)$	สลับแถวกับจาโคเบียนแถวที่ n

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วไม่ต้องสลับแถวของจาโคเบียนเมตริกซ์ก่อนแก้สมการเชิงเส้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นข้อได้เปรียบของการใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วที่เหนือกว่าระบบพิกัดฉากอีกอย่างหนึ่งที่ทำให้การคำนวณเร็วขึ้น

2.7 การคำนวณโหลดไฟลด์ด้วยวิธีฟาสต์ดีคัปเปิล [3,7,9,10,14]

เนื่องจากวิธีนิวตัน-ราฟสันมีขั้นตอนการคำนวณที่ยุ่งยากซับซ้อนมาก โดยเฉพาะขั้นตอนการคำนวณจาโคเบียนเมตริกซ์ใหม่ทุกรอบการคำนวณทำให้ต้องใช้เวลาคำนวณค่อนข้างมากเมื่อใช้กับระบบไฟฟ้าขนาดใหญ่ วิธีฟาสต์ดีคัปเปิลเป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วเพื่อให้การคำนวณเร็วขึ้น ซึ่งจากการสังเกตจากวิธีนิวตัน-ราฟสันในการคำนวณโหลดไฟลด์จะพบว่า

(1) การเปลี่ยนแปลงมุมของแรงดันไฟฟ้าที่บัส ($\Delta\theta$) มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส (ΔP) ค่อนข้างมาก แต่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส (ΔQ) น้อยมาก

(2) การเปลี่ยนแปลงขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัส ($\Delta|V|$) มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่บัส (ΔQ) ค่อนข้างมาก แต่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงกำลังไฟฟ้าจริงที่บัส (ΔP) น้อยมาก จึงทำให้เมตริกซ์ของ $[M]$ และ $[N]$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจากสมการที่ (2.59) สามารถแยกได้เป็น 2 สมการย่อยคือ

$$[\Delta P] = [H] \cdot [\Delta\theta] \quad (2.101)$$

$$[\Delta Q] = [L] \cdot \left[\frac{\Delta|V|}{|V|} \right] \quad (2.102)$$

เนื่องจากการทำงานของระบบไฟฟ้าในทางปฏิบัติ จะสมมติฐานว่า

- (1) ขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัสต่างๆ มีค่าโดยประมาณ 1.0 เปอรูญิต
- (2) มุมของแรงดันไฟฟ้าที่บัสต่างๆ มีค่าแตกต่างกันไม่มาก

ดังนั้นจาโคเบียนเมตริกซ์ย่อย $[H]$ และ $[L]$ จะประมาณได้ดังนี้
สำหรับ $p \neq q$

$$H_{pq} = L_{pq} = |V_p| |V_q| (G_{pq} \sin \theta_{pq} - B_{pq} \cos \theta_{pq}) \quad (2.103)$$

และสำหรับ $p = q$

$$H_{pp} = -B_{pp} |V_p|^2 - Q_p \quad (2.104)$$

$$L_{pp} = -B_{pp} |V_p|^2 + Q_p \quad (2.105)$$

จากข้อสมมติฐานที่กล่าวข้างต้นจะได้ว่า

$$\cos \theta_{pq} \approx 1 ; G_{pq} \sin \theta_{pq} \ll B_{pq} ; Q_p \ll B_{pp} |V_p|^2 \quad (2.105)$$

สมการที่ (2.103) ถึง (2.105) จะเปลี่ยนใหม่ได้เป็น

สำหรับ $p \neq q$

$$H_{pq} = L_{pq} = -|V_p| |V_q| B_{pq} \quad (2.106)$$

และสำหรับ $p = q$

$$H_{pp} = L_{pp} = -B_{pp} |V_p|^2 \quad (2.107)$$

สมการที่ (2.101) ถึง (2.102) จะเปลี่ยนเป็น

$$[\Delta P] = [V_p \parallel V_q | B'_{pq}] \cdot [\Delta \theta] \quad (2.108)$$

$$[\Delta Q] = [V_p \parallel V_q | B''_{pq}] \cdot \left[\frac{\Delta |V|}{|V|} \right] \quad (2.109)$$

โดยที่ B'_{pq} และ B''_{pq} คือสมาชิกของเมตริกซ์ $[-B]$

เมื่อทำการปรับปรุงวิธีฟาสต์ดีคัปเปิล จะได้สมการสุดท้ายเป็น

$$\left[\frac{\Delta P}{|V|} \right] = [B'] \cdot [\Delta \theta] \quad (2.110)$$

$$\left[\frac{\Delta Q}{|V|} \right] = [B''] \cdot [\Delta |V|] \quad (2.111)$$

โดยที่ $[B']$ คือส่วนจินตภาพของบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวและหลักที่เกี่ยวข้องกับบัสอ้างอิงออกไป

$[B'']$ คือส่วนจินตภาพของบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ที่ได้จากการเลือกเอาเฉพาะแถวและหลักที่เกี่ยวข้องกับโหลดบัสเท่านั้น

2.7.1 การคำนวณเมตริกซ์ B' และ B'' [6]

วิธีการคำนวณ B' และ B'' จะมีเงื่อนไขดังนี้ในการคำนวณดังนี้

- ในการหาค่าเมตริกซ์ B' จะไม่พิจารณาองค์ประกอบที่จะทำให้เกิดผลกระทบต่อการใช้ของกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ (MVAR flows) เช่น ชั้นที่โอลิเมนต์และ Off - nominal in phase transformer taps
- ในการคำนวณหาเมตริกซ์ B'' จะไม่พิจารณาการเลื่อนเฟส (Phase shifters) ของหม้อแปลงไฟฟ้าเพราะจะทำให้เกิดผลกระทบต่อการเล่นของมุม (Angle shifting)

ในการคำนวณโหลดโพลวโดยใช้วิธีฟาสต์ดีคัปเปิลแบบเดิมจะคำนวณ B' และ B'' แบบ XB (XB scheme) คือการคำนวณ B' จะไม่พิจารณาความต้านทานคือ $R_{pq} = 0$ การคำนวณ B'' จะพิจารณาความต้านทานด้วยคือ $R_{pq} \neq 0$ แต่การคำนวณ B' และ B'' แบบ XB ถ้าอัตราส่วน R/X มีค่าสูงจะทำให้ไม่สามารถหาคำตอบของโหลดโพลวได้ วิธีการแก้ปัญหาคือคำนวณ B' และ B'' แบบ BX (BX scheme) แทนแบบ XB สำหรับแบบ BX ในการคำนวณหา B' จะพิจารณาความต้านทานด้วยคือ $R_{pq} \neq 0$ และการคำนวณหา B'' จะไม่พิจารณาความต้านทานคือ $R_{pq} = 0$ ซึ่งสรุปได้ดังตารางที่ 2.1 โดยที่ตัวแปรของสายส่งและหม้อแปลงไฟฟ้าใช้จากหัวข้อที่ 2.3

เนื่องจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[B']$ และ $[B'']$ มีค่าคงที่ ทำให้ไม่ต้องเสียเวลาในการคำนวณอินเวอร์สของ $[B']$ และ $[B'']$ ใหม่ในรอบการคำนวณยกเว้นกรณีที่เป็นบัลลูนควบคุมแรงดัน (เป็นบัลลูนที่มีการตรวจสอบกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟว่าเพียงพอจ่ายให้โหลดหรือไม่หากไม่เพียงพอจะกำหนดให้จ่ายเท่ากับค่าสูงสุดที่สามารถจ่ายได้และเปลี่ยนเป็นโหลดบัลลูนและคำนวณหาเมตริกซ์ $[B'']$ ใหม่) ซึ่งเป็นการลดขั้นตอนการคำนวณที่ใช้เวลามากออกไปจากวิธีนิวตัน-ราฟสันเดิม โดยยังคงได้คำตอบที่มีความละเอียดถูกต้องเป็นที่ยอมรับได้ สำหรับขั้นตอนการคำนวณอื่นๆ ยังคงเหมือนกับวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ตารางที่ 2.1 แสดงสูตรการคำนวณหา B' และ B'' แบบ BX

B'	B''
$B'_{pq} = \begin{cases} b'_{pq} \text{ Line}(p-q) = \frac{-X_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2} \\ b'_{jq} \text{ Transf}(p-q) = -y_{pq} \end{cases}$	$B''_{pq} = \begin{cases} b''_{pq} \text{ Line}(p-q) = -1/x_{pq} \\ b''_{pq} \text{ Transf}(p-q) = -y_{pq}/a \end{cases}$
$b'_{pp} \text{ Line}(p-q) = \frac{X_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2}$	$b''_{pp} \text{ Line}(p-q) = \frac{-1}{x_{pq}} + y_{shuntpq}$
$b'_{pp} \text{ Transf}(p-q) = y_{pq}$	$b''_{pq} \text{ Transf}(p-q) = \begin{cases} \frac{y_{pq}}{a} + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) y_{pq} & * \\ \frac{y_{pq}}{a} + \left(1 - \frac{1}{a} \right) y_{pq} & ** \end{cases}$
$B'_{pp} = \sum_{p \in p} b'_{pp} \text{ Line}(p-q) + \sum_{q \in p} b'_{pp} \text{ Transf}(p-q)$	$B''_{pp} = \sum_{q \in p} b''_{pp} \text{ Line}(p-q) + \sum_{q \in p} b''_{pp} \text{ Transf}(p-q) + \sum_{q \in p} Y_{shuntq}$
	<p>* ถ้าแทปอยู่ทางด้าน p, ** ถ้าแทปอยู่ทางด้าน q</p>

2.7.2 การคำนวณหาอินเวอร์สเมตริกซ์ A (A^{-1}) [34]

จากสมการเชิงเส้น $Ax = b$ ถ้ากำหนดให้ $X = A^{-1}$ จะได้ว่า $AX = I$ ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (2.70) ใหม่ได้เป็น

$$A[x_1 x_2 \dots x_n] = [e_1 e_2 \dots e_n] \quad (2.112)$$

เมื่อ x_1, \dots, x_n เป็นหลัก (Column) ของ A^{-1} และ e_1, \dots, e_n คือหลักของเมตริกซ์ I จะพบว่าสมการ $AX = I$ คือ

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.113)$$

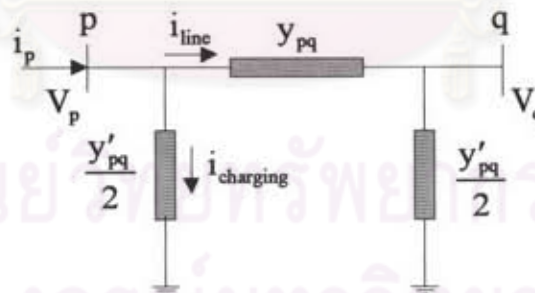
เมื่อใช้การแก้สมการเชิงเส้นที่กล่าวในหัวข้อ 2.4.4 จึงจะได้ A^{-1}

2.8 การคำนวณกำลังไฟฟ้าที่ไหลและกำลังสูญเสียในสายส่งและหม้อแปลง [11,12,15]

ภายหลังจากคำนวณหาแรงดันไฟฟ้าที่บัสต่างๆ แล้วจึงจะสามารถคำนวณกำลังไฟฟ้าที่ไหลและกำลังสูญเสียในสายส่งและหม้อแปลงต่างๆ ได้ดังนี้

2.8.1 กำลังไฟฟ้าที่ไหลในสายส่ง (Power flow in lines)

พิจารณาสายส่งที่เชื่อมต่อระหว่างบัส p กับบัส q ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 วงจรสมมูลของสายส่งเพื่อใช้ในการคำนวณกำลังไฟฟ้าที่ไหลในสายส่ง

กระแสไฟฟ้าที่บัส p , i_p

$$\begin{aligned} i_p &= i_{line} + i_{charging} \\ &= (V_p - V_q)y_{pq} + V_p \frac{y'_{pq}}{2} \end{aligned} \quad (2.114)$$

โดยที่ V_p และ V_q คือแรงดันไฟฟ้าที่บัส p และ q ตามลำดับ

i_{line}	คือกระแสไฟฟ้าที่ไหลในสายส่ง
$i_{charging}$	คือกระแสไฟฟ้าที่รั่วไหลจากบัส p ลงสู่พื้นดิน
y_{pq}	คือค่าแอดมิตแตนซ์ของสายส่ง pq
$\frac{y'_{pq}}{2}$	คือครึ่งหนึ่งของค่าไลน์ชาร์จิจึงแอดมิตแตนซ์ทั้งหมดของสายส่ง

กำลังไฟฟ้าที่ไหลในสายส่ง pq จากบัส p ไปสู่อบัส q คือ

$$P_{pq} - jQ_{pq} = V_p^* i_p \quad (2.115)$$

แทนค่า i_p จากสมการที่ (2.114) ลงในสมการที่ (2.115) จะได้ว่า

$$P_{pq} - jQ_{pq} = V_p^* (V_p - V_q) y_{pq} + V_p^* V_p \frac{y'_{pq}}{2} \quad (2.116)$$

ในทำนองเดียวกันกำลังไฟฟ้าที่ไหลในสายส่ง pq จากบัส q ไปสู่อบัส p คำนวณได้ดังนี้

$$P_{qp} - jQ_{qp} = V_q^* (V_q - V_p) y_{pq} + V_q^* V_q \frac{y'_{pq}}{2} \quad (2.117)$$

กำลังสูญเสียในสายส่ง pq มีค่าเท่ากับผลรวมทางพีชคณิตของกำลังไฟฟ้าจริงที่ไหลจากบัส p ไปสู่อบัส q และที่ไหลจากบัส q ไปสู่อบัส p คือ

$$P_{loss(pq)} = P_{pq} + P_{qp} \quad (2.118)$$

2.8.2 กำลังไฟฟ้าที่ไหลในหม้อแปลงไฟฟ้า (Power flow in transformers)

พิจารณาวงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้าในรูปที่ 2.5 กำลังไฟฟ้าที่ไหลจากบัส p ไปสู่อบัส q คือ

$$P_{pq} - jQ_{pq} = \left(\frac{1}{a}\right) V_p^* \left[\left(\frac{1}{a}\right) V_p - V_q \right] y_{pq} \quad (2.119)$$

ในทำนองเดียวกัน กำลังไฟฟ้าที่ไหลจากบัส q ไปสู่อบัส p คือ

$$P_{qp} - jQ_{qp} = V_q^* \left[V_q - \frac{V_p}{a} \right] y_{pq} \quad (2.120)$$

สำหรับกำลังสูญเสียในหม้อแปลงไฟฟ้า pq คำนวณได้จากสมการที่ (2.118) เหมือนกับสายส่ง