

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

ความนำ

จากการศึกษาการวิเคราะห์ที่อ่อนาคลื่นด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่สร้างคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กให้อยู่ในรูปของสนามที่โนดของแต่ละอีลีเมนต์พบว่า การสร้างคำตอบในลักษณะเช่นนี้ทำให้เกิดความต่อเนื่องของสนามในทุกองค์ประกอบระหว่างอีลีเมนต์ที่อยู่ติดกันซึ่งในทางกายภาพแล้วสนามมีความต่อเนื่องในแนวสัมผัสกับอีลีเมนต์เท่านั้น เพราะฉะนั้นวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่อาศัยการสร้างคำตอบทดลองในลักษณะนี้ ต้องมีการให้เงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อระหว่างตัวกลางไม่ต่อเนื่องเข้าไปด้วย นอกจากนั้นแล้วยังต้องมีการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์ เพื่อใช้ในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่จะเกิดขึ้น ซึ่งในบางวิธียังไม่สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด และอาจทำให้ความแม่นยำของผลเฉลยที่ได้รับมีค่าลดลง

ด้วยเหตุที่กล่าวมานี้ แนวทางสำหรับการสร้างคำตอบอีกรูปแบบหนึ่งจึงได้ถูกเสนอขึ้น โดยให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าตามขวางอยู่ในรูปของสนามในแนวสัมผัสกับอีลีเมนต์ แนวทางนี้ได้เสนอขึ้นโดย Whitney เมื่อ ค.ศ. 1957 แต่อย่างไรก็ตามวิธีนี้เริ่มนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่อ่อนาคลื่นได้ไม่นานนัก ประโยชน์ของการสร้างคำตอบในลักษณะดังที่กล่าวมามีดังนี้ (Bossavit, 1988; Lee และคณะ, 1991; Webb, 1993)

1. ทำให้เกิดความต่อเนื่องในแนวสัมผัสของสนามตามขวางระหว่างอีลีเมนต์ที่อยู่ติดกัน
2. ทำให้เกิดความต่อเนื่องของความหนาแน่นฟลักซ์ในแนวตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์ โดยไม่ต้องให้เงื่อนไขขอบเขตเพิ่มเติมแต่อย่างใด
3. สามารถให้เงื่อนไขบังคับ บนผนังที่อ่อนาคลื่นได้ง่าย เมื่อเทียบกับวิธีที่สร้างคำตอบทดลองให้อยู่ในรูปตัวแปรไม่ทราบค่าที่โนด จึงสามารถใช้กับปัญหาที่อ่อนาคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆได้โดยไม่ยากนัก
4. ให้คำตอบที่ไม่มีผลเฉลยปลอมเทียมออกมาเลย โดยไม่ต้องให้เงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์เพิ่มเติม

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ที่เสนอโดย Lee ใน ค.ศ. 1994 เป็นวิธีหนึ่งที่มีการใช้สนามในแนวสัมผัสกับอีลีเมนต์ Lee (1994) ได้เสนอวิธีนี้เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ที่อ่อนาคลื่นไดอิเล็กตริกที่มีการสูญเสีย ซึ่งขั้นตอนของวิธีนี้เริ่มจากการแยกองค์ประกอบของสมการคลื่นที่อยู่ในรูปของสนามไฟฟ้าออกเป็นองค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบในแนวแกน z จากนั้นจะทำการจัดรูปกาแลกอินของทั้ง 2 องค์ประกอบ โดยกำหนดให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าและฟังก์ชันให้น้ำหนักในแนว

ตามขวางอยู่ในรูปสนามไฟฟ้าแนวสัมผัสกับอิลิเมนต์ และกำหนดให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าและฟังก์ชัน
 ให้นำหนักในแนวแกน z อยู่ในรูปสนามไฟฟ้าที่โนดของอิลิเมนต์ สมการระบบสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นได้
 จากผลรวมของรูปกาเลอกินทั้งสอง

เนื่องจากวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ที่เสนอโดย Lee (1994)
 เป็นวิธีที่มีการสร้างคำตอบทดลองในลักษณะที่แตกต่างจากคำตอบทดลองที่ตำแหน่งโนด ดังที่ใช้ในบทที่ 2 ถึง
 บทที่ 5 และมีข้อดีหลายประการดังที่กล่าวมาข้างต้น ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงนำวิธีนี้มาศึกษาว่า วิธีนี้สามารถ
 วิเคราะห์ท่อนำคลื่น 4 ประเภทต่อไปนี้ได้หรือไม่

1. ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์
2. ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง
3. ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ความซาชิมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูป

ของ

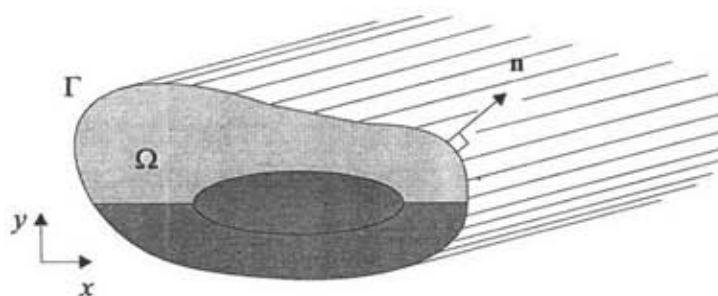
$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

4. ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปของ

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

รูปกาเลอกิน

Lee (1994) ได้เสนอวิธีการจัดรูปกาเลอกินสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีการสูญเสีย และมีความ
 สมมาตรในแนวแกน z ที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆในระนาบ xy และขอบเขตของ Ω คือ Γ ดังแสดงในรูป
 6.1 ดังนี้



รูป 6.1 ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ และมีความสม่ำเสมอในแนวแกน z

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการของแมกซ์เวลล์รูปฮาร์มอนิกในบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด คือ

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = j\omega\bar{\epsilon}\mathbf{E} \quad (6.2)$$

เมื่อ $\bar{\epsilon} = \epsilon + \sigma/j\omega$, σ คือสภาพนำ (conductivity), ϵ และ μ คือสภาพยอม และความซาบซึมได้ของตัวกลาง ตามลำดับ

จากสมการ (6.1) และ (6.2) สมการคลื่นในรูปสนามไฟฟ้าสามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E} = 0 \quad (6.3)$$

โดยที่ $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอากาศว่าง, $\mu_r = \mu/\mu_0$ คือความซาบซึมได้สัมพัทธ์, $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ คือสภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง, ϵ_0 และ μ_0 คือสภาพยอม และความซาบซึมได้ของอากาศว่าง ตามลำดับ

เนื่องจากตัวดำเนินการอนุพันธ์ (differential operator) ในสมการ (6.3) ไม่เป็นโพซิทีฟเดฟิไนท์ (positive definite) วิธีหนึ่งของการจัดรูปสมการระบบสำหรับวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำได้โดยอาศัยวิธีของกาลูคิน ซึ่งรูปกาลูคินของสมการ (6.3) คือ

$$\gamma^2 \iint \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla_i w_z + w_i) \cdot (\nabla_i e_z + e_i) - k_0^2 \bar{\epsilon}_r w_i e_i \right] d\Omega - \iint \frac{1}{\mu_r} (\nabla_i \times w_i) \cdot (\nabla_i \times e_i) d\Omega + k_0^2 \iint \bar{\epsilon}_r w_i \cdot e_i d\Omega = 0 \quad (6.4)$$

เมื่อ w_r และ $w_z = w_r a_z$ คือฟังก์ชันให้น้ำหนัก (weighting function) ที่อยู่ในแนวตามขวางและในแนวแกน z ตามลำดับ

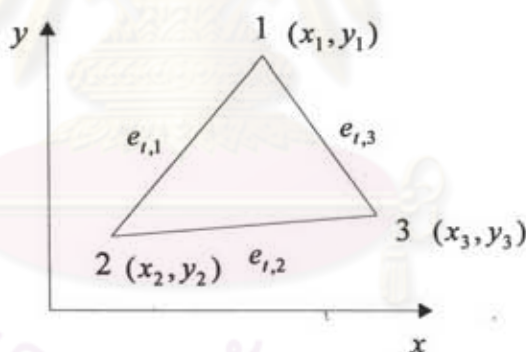
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม และให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าตามขวาง e_r และฟังก์ชันให้น้ำหนัก w_r ในสมการ (6.4) ในแต่ละอีลิเมนต์ อยู่ในรูปของ (Lee, 1994)

$$e_r = \{N\}^T \{e_r\}_e \quad (6.5a)$$

$$w_r = \{N\} \quad (6.5b)$$

เมื่อ T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน, $\{e_r\}_e = [e_{r,1} \ e_{r,2} \ e_{r,3}]^T$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่มีอันดับเป็น 3×1 และองค์ประกอบของเมตริกซ์นี้คือขนาดสนามในแนวขวางที่แต่ละด้านของอีลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 6.2



รูป 6.2 อีลิเมนต์สามเหลี่ยม และสนามไฟฟ้าตามขวางที่แต่ละด้านของอีลิเมนต์

คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในแนวแกน z และฟังก์ชันให้น้ำหนัก w_z ในสมการ (6.4) ในแต่ละอีลิเมนต์ อยู่ในรูปของ (Lee, 1994)

$$e_z = \{N\}^T \{e_z\}_e \quad (6.6a)$$

$$w_z = \{N\} \quad (6.6b)$$

เมื่อ $\{e_z\}_e$ คือ เมตริกซ์แถวตั้งที่มีอันดับเป็น 3×1 และองค์ประกอบของเมตริกซ์นี้คือสนามไฟฟ้าในแนวแกน z ที่โนด 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์ ดังแสดงในรูป 6.2, $\{N\}$ คือฟังก์ชันรูปร่าง

รวมทุกอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากรูปกาเลขกินที่เป็นเมตริกซ์ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} [S_{yy}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_y\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} [M_{yy}] & [M_{yz}] \\ [M_{zy}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_y\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} = \{0\} \quad (6.7)$$

$$\text{เมื่อ} \quad [S_{yy}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{\nabla_t \times \mathbf{N}\} \cdot \{\nabla_t \times \mathbf{N}\}^T - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{N}\}^T \right] dx dy \quad (6.8)$$

$$[M_{yy}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{N}\}^T \right] dx dy \quad (6.9)$$

$$[M_{yz}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{\mathbf{N}\} \cdot \{\nabla_t \mathbf{N}\}^T \right] dx dy \quad (6.10)$$

$$[M_{zy}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{\nabla_t \mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{N}\}^T \right] dx dy = [M_{yz}]^T \quad (6.11)$$

$$[M_{zz}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{\nabla_t \mathbf{N}\} \cdot \{\nabla_t \mathbf{N}\}^T - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{N}\}^T \right] dx dy \quad (6.12)$$

สมการ (6.7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปัญหาค่าเฉพาะจางมาตรฐานได้เป็น

$$\begin{bmatrix} [M_{yy}] & [M_{yz}] \\ [M_{zy}] & [M_{zz}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [S_{yy}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_y\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \{e_y\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} = \{0\} \quad (6.13)$$

สำหรับท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย ค่าคงตัวเฟสสามารถพิจารณาได้จากค่าคงตัวการกระจายที่ค่าคงตัวลดทอนมีค่าเท่ากับศูนย์

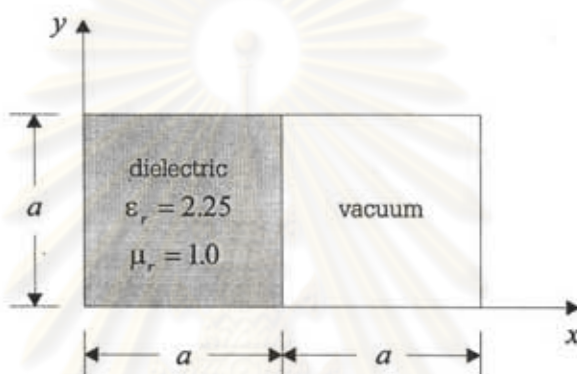
ตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

เช่นเดียวกับในบทที่ 2 ในส่วนนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จะทำการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและสนามไฟฟ้าในแนวแกน ในปัญหาท่อนำคลื่น 4 ประเภท คือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปร่างกลม ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ และท่อนำแสงแบบฝังในฉนวน

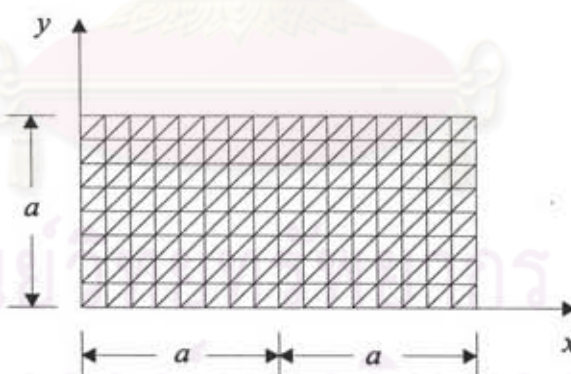
การตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นมีรายละเอียดดังนี้

1. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ϵ_r และความขามซึมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 6.3



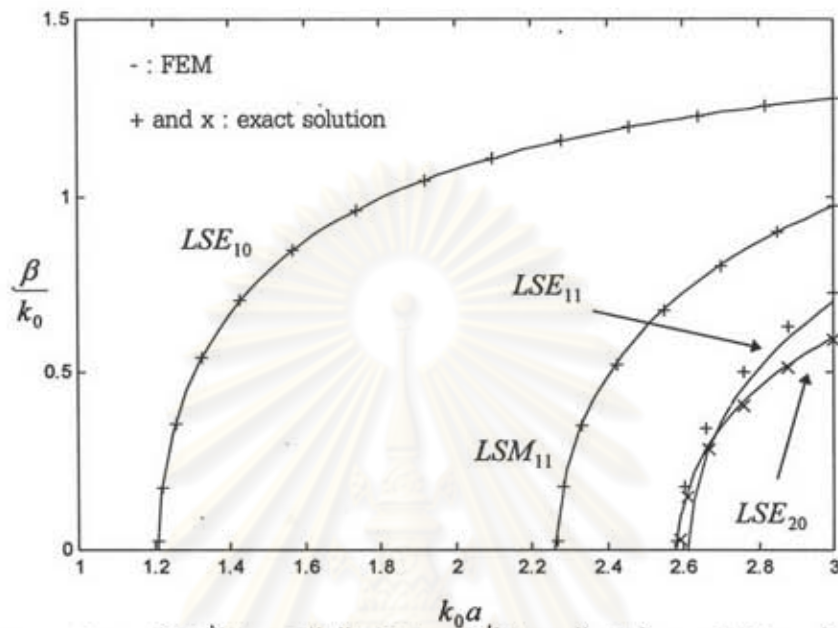
รูป 6.3 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก



รูป 6.4 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกออกเป็น 256 อีลีเมนต์ 153 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 และมีจำนวนโหนดเท่ากับ 153 ดังแสดงในรูป 6.4 การแบ่งอีลีเมนต์ในลักษณะนี้จะทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับ $\{e_x\}$ และ $\{e_y\}$ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต เท่ากับ 408 และ 153 ตามลำดับ รูป 6.5 แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้ โดยเส้นทึบเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สัญลักษณ์ $+$ และ \times คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ของ

โมดมูลฐาน (LSE_{10}), LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 6.4 แสดงในตาราง 6.1



รูป 6.5 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 6.1 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน รวมขนาดความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 6.4

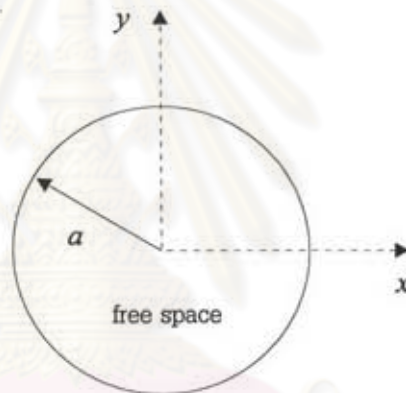
โมด	ผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
LSE_{10}	1.275756	1.275278	0.037 %
LSM_{11}	0.971538	0.971899	0.037 %
LSE_{11}	0.728649	0.701975	3.661 %
LSE_{20}	0.593897	0.600459	1.105 %

จากรูป 6.5 พบว่าโมเดลฐาน (LSE_{10}), LSM_{11} และ LSE_{20} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโมเดล LSE_{11} ยังไม่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำมากนัก แต่อย่างไรก็ตามโมเดลนี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น และจากผลการคำนวณที่ได้พบว่าไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแต่อย่างใด

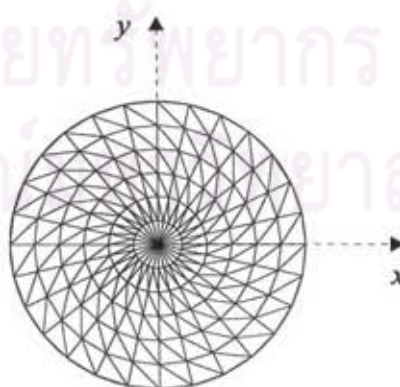
จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนที่เสนอโดย Lee (1994) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ได้

2. ท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

พิจารณาท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ภายในเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 6.6

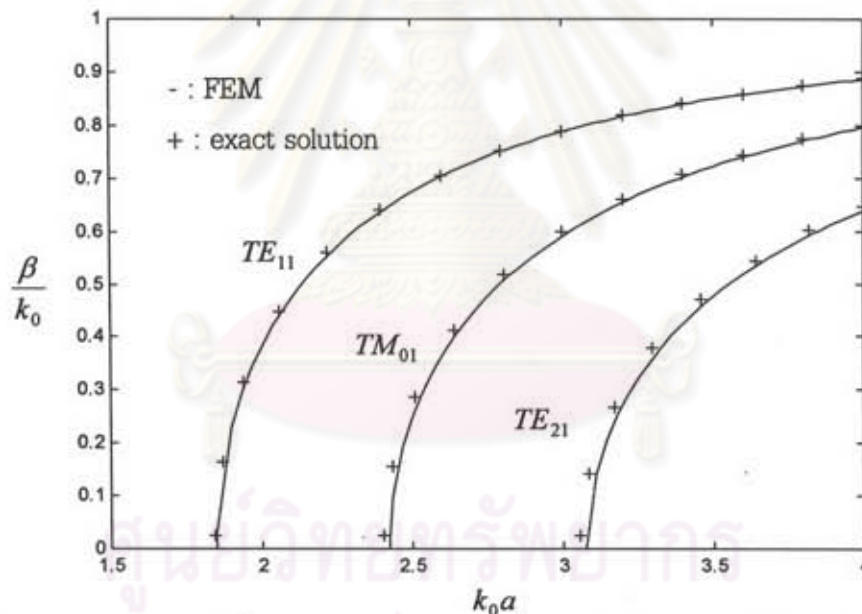


รูป 6.6 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น



รูป 6.7 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
ออกเป็น 308 อีลีเมนต์ 169 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 มีจำนวนโนดเท่ากับ 169 ดังแสดงในรูป 6.7 การแบ่งอีลีเมนต์ในลักษณะนี้ทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับ $\{e_1\}$ และ $\{e_2\}$ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต เท่ากับ 408 และ 153 ตามลำดับ รูป 6.8 แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้ โดยเส้นทึบเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สัญลักษณ์ + คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ ของโหมดมูลฐาน (TE_{11}), TM_{01} และ TE_{21} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์วิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 6.7 แสดงในตาราง 6.2



รูป 6.8 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 6.2 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน รวมขนาดความผิดพลาด เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลิเมนต์ดังแสดงในรูป 6.7

โหมด	ผลเฉลยแม่นยำตรง ของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์	ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์
TE_{11}	0.887766	0.886579	0.134 %
TM_{01}	0.799094	0.795692	0.426 %
TE_{21}	0.645738	0.638541	1.114 %

จากรูป 6.8 พบว่าโหมดมูลฐาน (TE_{11}) ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโหมด TM_{01} และ TE_{21} ต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโหมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้น เมื่อเพิ่มจำนวนอีลิเมนต์ให้สูงขึ้น

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนที่เสนอโดย Lee (1994) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเป็นผิวโค้งได้

3. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์

เมื่อพิจารณาสมการ (6.4) พบว่า วิธีที่ได้เสนอมานี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟไอโซทรอปิกที่มีความซับซ้อนได้ μ อยู่ในรูปสเกลาร์ได้ แต่ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กได้ ซึ่งสำหรับกรณีนี้จะต้องทำการปรับปรุงรูปกาเลอกินเพิ่มเติม ตามขั้นตอนที่จะเสนอในหัวข้อถัดไป

3.1 การปรับปรุงสำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก

เพื่อที่จะให้วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กได้ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทำการปรับปรุงรูปกาเลอกิน โดยมีขั้นตอนดังนี้

พิจารณาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก ที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ $\bar{\epsilon}_r$ อยู่ในรูปสเกลาร์ และความซับซ้อนได้ $[\mu_r]$ อยู่ในรูปเทนเซอร์ ดังสมการ

$$[\mu_r] = \begin{bmatrix} [\mu_{r,rr}] & [\mu_{r,rz}] \\ [\mu_{r,zr}] & [\mu_{r,zz}] \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

เมื่อ $[\mu_{r,rr}]$, $[\mu_{r,rz}]$, $[\mu_{r,zr}]$ และ $[\mu_{r,zz}]$ คือเมตริกซ์ย่อยของ $[\mu_r]$ ที่มีอันดับเป็น 2×2 , 2×1 ,

1×2 และ 1×1 ตามลำดับ

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้า ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\nabla \times ([\mu_r]^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})) - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E} = 0 \quad (6.15)$$

กำหนดให้ตัวผกผันของ $[\mu_r]$ มีค่าดังนี้

$$[\nu] = [\mu_r]^{-1} = \begin{bmatrix} [\nu_{xx}] & [\nu_{xz}] \\ [\nu_{zx}] & [\nu_{zz}] \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

เมื่อ $[\nu_{xx}]$, $[\nu_{xz}]$, $[\nu_{zx}]$ และ $[\nu_{zz}]$ คือ เมทริกซ์ย่อยของ $[\nu]$ ที่มีอันดับเป็น 2×2, 2×1, 1×2, และ 1×1 ตามลำดับ

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \mathbf{a}_z \quad (6.17a)$$

$$\nabla = \nabla_t - \gamma \mathbf{a}_z \quad (6.17b)$$

เมื่อ $\gamma = \alpha + j\beta$ คือค่าคงตัวการกระจาย, α คือค่าคงตัวลดทอน (attenuation constant) และ β คือค่าคงตัวเฟส, ∇ คือตัวดำเนินการเดล (del operator), $\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y$, \mathbf{a}_z คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ z

องค์ประกอบตามขวาง และองค์ประกอบในแนวแกน z ของสมการ (6.15) ตามลำดับ คือ

$$\begin{aligned} \nabla_t \times ([\nu_{zz}] \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_t)) + \nabla_t \times [[\nu_{xz}] \cdot ((\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \mathbf{a}_z)] - \gamma \mathbf{a}_z \times ([\nu_{xz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t)) \\ - \gamma \mathbf{a}_z \times [[\nu_{xx}] \cdot ((\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \mathbf{a}_z)] - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E}_t = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\nabla_t \times ([\nu_{xz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t)) + \nabla_t \times [[\nu_{xx}] \cdot ((\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \mathbf{a}_z)] - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E}_z = 0 \quad (6.19)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ

$$\mathbf{e}_t = \gamma \mathbf{E}_t \quad (6.20a)$$

$$\mathbf{e}_z = E_z \quad (6.20b)$$

สมการ (6.18) และ (6.19) ได้รับการแปลงให้อยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} \nabla_t \times ([v_{zz}] \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \nabla_t \times ([v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)) - \gamma \mathbf{a}_z \times ([v_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) \\ - \gamma^2 \mathbf{a}_z \times ([v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)) - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{e}_t = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\nabla_t \times ([v_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \nabla_t \times ([v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)) - \gamma k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{e}_z = 0 \quad (6.22)$$

สนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตบนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ Γ_2 และตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ Γ_1 ดังนี้

เงื่อนไขขอบเขตบนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ Γ_2 คือ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_t &= 0 \\ e_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ } \Gamma_2 \quad (6.23)$$

เงื่อนไขขอบเขตบนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ Γ_1 คือ $\mathbf{n} \times ([\mu_r]^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) = 0$ เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (6.17) และ (6.20) เงื่อนไขขอบเขตนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times ([v_{zz}] \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_t)) + \gamma [v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z) &= 0 \\ \mathbf{n} \times ([v_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma [v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{บนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ } \Gamma_1 \quad (6.24)$$

รูปภาคโลกขององค์ประกอบตามขวางของสมการคลื่นดังที่แสดงในสมการ (6.21) คือ

$$\begin{aligned} \iint [\mathbf{w}_t \cdot (\nabla_t \times [v_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \mathbf{w}_t \cdot [v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega \\ + \iint [-\gamma \mathbf{w}_t \cdot (\mathbf{a}_z \times [v_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) - \gamma^2 \mathbf{w}_t \cdot (\mathbf{a}_z \times [v_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z))] d\Omega \\ - \iint k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{e}_t d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ของเอกลักษณ์เวกเตอร์

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (6.26)$$

และทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ อินทิกรัลพจน์ที่หนึ่งของสมการ (6.25) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
& \iint [\mathbf{w}_t \cdot (\nabla_t \times [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \mathbf{w}_t \cdot [\nabla_t \times [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] d\Omega \\
& = \iint [(\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma (\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega \\
& \quad - \int_{\Gamma} [\mathbf{w}_t \times [[\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] \cdot \mathbf{n} dl
\end{aligned} \tag{6.27}$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ของเอกลักษณ์เวกเตอร์

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \tag{6.28}$$

พจน์ $[\mathbf{w}_t \times [[\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] \cdot \mathbf{n}$ ในอินทิกรัลวงรอบปิดในสมการ (6.27) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{w}_t \times [[\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] \cdot \mathbf{n} \\
& = (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_t) \cdot [[\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] \tag{6.29a}
\end{aligned}$$

$$= -[\mathbf{n} \times [[\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] \cdot \mathbf{w}_t \tag{6.29b}$$

\mathbf{e}_t และ \mathbf{e}_z ในสมการ (6.29) สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตชนิดที่สองบนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ Γ_1 ดังแสดงในสมการ (6.24) และ \mathbf{w}_t สอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันให้น้ำหนัก $\mathbf{n} \times \mathbf{w}_t = 0$ บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ Γ_2 (Hughes, 1987) จากที่กล่าวมาทำให้อินทิกรัลวงรอบปิดในสมการ (6.27) มีค่าเท่ากับ ศูนย์ เพราะฉะนั้นสมการ (6.27) จึงลดรูปเป็น

$$\begin{aligned}
& \iint [\mathbf{w}_t \cdot (\nabla_t \times [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \mathbf{w}_t \cdot [\nabla_t \times [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] d\Omega \\
& = \iint [(\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma (\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega
\end{aligned} \tag{6.30}$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ของเอกลักษณ์เวกเตอร์ในสมการ (6.28) อินทิกรัลพจน์ที่สองทางด้านซ้ายของสมการ (6.25) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
& \iint [-\gamma \mathbf{w}_t \cdot (\mathbf{a}_z \times [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) - \gamma^2 \mathbf{w}_t \cdot [\mathbf{a}_z \times [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] d\Omega \\
& = \iint [-\gamma (\mathbf{w}_t \times \mathbf{a}_z) \cdot [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) - \gamma^2 (\mathbf{w}_t \times \mathbf{a}_z) \cdot [\nu_{zt}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega
\end{aligned} \tag{6.31}$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (6.30) และ (6.31) สมการ (6.25) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \iint [(\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma (\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega \\ & - \iint [\gamma (\mathbf{w}_t \times \mathbf{a}_z) \cdot [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma^2 (\mathbf{w}_t \times \mathbf{a}_z) \cdot [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega \\ & - \iint [k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{e}_t] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

เมื่อให้ฟังก์ชันให้หน้าหนักของสมการ (6.22) มีค่าเท่ากับ $\mathbf{w}_z = w_z \mathbf{a}_z$ รูปกาเลขกินขององค์ประกอบในแนวแกน z ของสมการคลื่นในสมการ (6.22) คือ

$$\begin{aligned} & \iint [-\gamma \mathbf{w}_z \cdot (\nabla_t \times [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) - \gamma^2 \mathbf{w}_z \cdot [\nabla_t \times [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] d\Omega \\ & + \iint [\gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{w}_z \cdot \mathbf{e}_z] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

ใช้ความสัมพันธ์ของเอกลักษณ์เวกเตอร์ในสมการ (6.26) อินทิกรัลพจน์ที่หนึ่งทางด้านซ้ายของสมการ (6.33) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \iint [-\gamma \mathbf{w}_z \cdot [\nabla_t \times [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)] - \gamma^2 \mathbf{w}_z \cdot [\nabla_t \times [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)]] d\Omega \\ & = \iint [-\gamma (\nabla_t \mathbf{w}_z \times \mathbf{a}_z) \cdot [\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) - \gamma^2 (\nabla_t \mathbf{w}_z \times \mathbf{a}_z) \cdot [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] d\Omega \\ & \quad - \gamma \oint_{\Gamma} [\mathbf{w}_z \times ([\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \mathbf{w}_z \times ([\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z))] \cdot \mathbf{n} dl \end{aligned} \quad (6.34)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ของเอกลักษณ์เวกเตอร์

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (6.35)$$

พจน์ $[\mathbf{w}_z \times ([\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \mathbf{w}_z \times ([\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z))] \cdot \mathbf{n}$ ในอินทิกรัลวงรอบปิดในสมการ (6.34) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & [\mathbf{w}_z \times ([\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t)) + \gamma \mathbf{w}_z \times ([\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z))] \cdot \mathbf{n} \\ & = (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_z) \cdot [[\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z)] \end{aligned} \quad (6.36a)$$

$$= -[\mathbf{n} \times ([\nu_{zz}] \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) + \gamma [\nu_{zz}] \cdot ((\nabla_t \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z))] \cdot \mathbf{w}_z \quad (6.36b)$$

e_r และ e_z ในสมการ (6.36) สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตชนิดที่สอง บนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ Γ_1 ดังแสดงในสมการ (6.24) และ w_z จะสอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันให้น้ำหนัก $w_z = 0$ บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ Γ_2 (Hughes, 1987) จากที่กล่าวมาทำให้อินทิกรัลวงรอบปิดมีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นสมการ (6.34) จึงลดรูปเป็น

$$\begin{aligned} & \iint [-\gamma w_z \cdot [\nabla_r \times [v_{rz}] \cdot (\nabla_r \times e_r)] - \gamma^2 w_z \cdot [\nabla_r \times [v_{rz}] \cdot ((\nabla_r e_z + e_r) \times a_z)]] d\Omega \\ & = \iint [-\gamma (\nabla_r w_z \times a_z) \cdot [v_{rz}] \cdot (\nabla_r \times e_r) - \gamma^2 (\nabla_r w_z \times a_z) \cdot [v_{rz}] \cdot ((\nabla_r e_z + e_r) \times a_z)] d\Omega \end{aligned} \quad (6.37)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (6.37) สมการ (6.33) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \iint [-\gamma (\nabla_r w_z \times a_z) \cdot [v_{rz}] \cdot (\nabla_r \times e_r) - \gamma^2 (\nabla_r w_z \times a_z) \cdot [v_{rz}] \cdot ((\nabla_r e_z + e_r) \times a_z)] d\Omega \\ & + \iint [\gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r w_z \cdot e_z] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

รูปกาเลขอินของสมการ (6.21) และ (6.22) ได้จากผลรวมของสมการ (6.32) และ (6.38) ซึ่งก็คือ

$$\begin{aligned} & \iint [(\nabla_r \times w_r) \cdot [v_{rz}] \cdot (\nabla_r \times e_r) + \gamma (\nabla_r \times w_r) \cdot [v_{rz}] \cdot ((\nabla_r e_z + e_r) \times a_z)] d\Omega \\ & - \gamma \iint [((\nabla_r w_z + w_r) \times a_z) \cdot [v_{rz}] \cdot (\nabla_r \times e_r) - \gamma k_0^2 \bar{\epsilon}_r w_z \cdot e_z] d\Omega \\ & - \iint [\gamma^2 ((\nabla_r w_z + w_r) \times a_z) \cdot [v_{rz}] \cdot ((\nabla_r e_z + e_r) \times a_z) + k_0^2 \bar{\epsilon}_r w_r \cdot e_r] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

ให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าและฟังก์ชันให้น้ำหนักในแต่ละอีลีเมนต์ อยู่ในรูปตามสมการ (6.5) และ (6.6) ตามลำดับ จากนั้นรวมทุกอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากรูปกาเลขอินที่เป็นเมตริกซ์ดังสมการต่อไปนี้

$$-\gamma^2 [C^2] \{e\} + \gamma [C^1] \{e\} + [C^0] \{e\} = \{0\} \quad (6.40)$$

$$\text{เมื่อ } \{e\} = \begin{bmatrix} \{e_r\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$[C^2] = \begin{bmatrix} [C_{rr}^2] & [C_{rz}^2] \\ [C_{rz}^2] & [C_{zz}^2] \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$[C^1] = \begin{bmatrix} [C_{rr}^1] & [C_{rz}^1] \\ [C_{rz}^1] & [0] \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$[C^0] = \begin{bmatrix} [C_{nn}^0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

$$[C_{nn}^2] = \sum_e \iint_e [(\mathbf{N} \times \mathbf{a}_z) \cdot \{v_n\} \cdot \{\mathbf{N} \times \mathbf{a}_z\}^T] dx dy \quad (6.45)$$

$$[C_{nz}^2] = \sum_e \iint_e [(\mathbf{N} \times \mathbf{a}_z) \cdot \{v_n\} \cdot \{\nabla, N \times \mathbf{a}_z\}^T] dx dy \quad (6.46)$$

$$[C_{zn}^2] = \sum_e \iint_e [\{\nabla, N \times \mathbf{a}_z\} \cdot \{v_n\} \cdot \{\mathbf{N} \times \mathbf{a}_z\}^T] dx dy \quad (6.47)$$

$$[C_{zz}^2] = \sum_e \iint_e [\{\nabla, N \times \mathbf{a}_z\} \cdot \{v_n\} \cdot \{\nabla, N \times \mathbf{a}_z\}^T - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \{N\} \{N\}^T] dx dy \quad (6.48)$$

$$[C_{nn}^1] = \sum_e \iint_e [\{\nabla, \times \mathbf{N}\} \cdot \{v_{zn}\} \cdot \{\mathbf{N} \times \mathbf{a}_z\}^T - \{\mathbf{N} \times \mathbf{a}_z\} \cdot \{v_{zn}\} \cdot \{\nabla, \times \mathbf{N}\}^T] dx dy \quad (6.49)$$

$$[C_{nz}^1] = \sum_e \iint_e [\{\nabla, \times \mathbf{N}\} \cdot \{v_{zn}\} \cdot \{\nabla, N \times \mathbf{a}_z\}^T] dx dy \quad (6.50)$$

$$[C_{zn}^1] = \sum_e \iint_e [-\{\nabla, N \times \mathbf{a}_z\} \cdot \{v_{zn}\} \cdot \{\nabla, \times \mathbf{N}\}^T] dx dy \quad (6.51)$$

$$[C_{nn}^0] = \sum_e \iint_e [\{\nabla, \times \mathbf{N}\} \cdot \{v_{zn}\} \cdot \{\nabla, \times \mathbf{N}\}^T - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \{N\} \cdot \{N\}^T] dx dy \quad (6.52)$$

สมการ (6.40) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปัญหาค่าเฉพาะจางมาตรฐานได้เป็น

$$[A] \{\psi\} - \gamma \{\psi\} = \{0\} \quad (6.53)$$

เมื่อ $[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \quad (6.54)$

$[I]$ คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์

$$[A_{21}] = [C^2]^{-1} [C^0] \quad (6.55)$$

$$[A_{22}] = [C^2]^{-1} [C^1] \quad (6.56)$$

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} \{e\} \\ \gamma \{e\} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

สมการ (6.53) ต้องใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าประมาณ $2E_p$ เทียบกับสมการ (6.13) ซึ่งใช้เพียง E_p เท่านั้น เมื่อ E_p คือผลรวมของจำนวนด้านของสามเหลี่ยมและจำนวนโนดที่อยู่บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น

3.2 ผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ซึ่งเป็นอุปกรณ์ทางไมโครเวฟที่มีคุณสมบัติไร้ภาวะย้อนกลับ ที่มีโครงสร้างดังแสดงในรูป 6.9 โดยเฟอร์ไรต์บรรจุอยู่ในท่อนำคลื่นในลักษณะที่ไม่สมมาตร และได้รับการไบแอสด้วยสนามแม่เหล็กสถิตในแนว y เทนเซอร์ความซึมได้ $[\mu]$ ของเฟอร์ไรต์ซึ่งขึ้นอยู่กับความถี่ และสภาพยอม ϵ มีค่าดังนี้ (Collin, 1992)

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & j\kappa \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -j\kappa & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

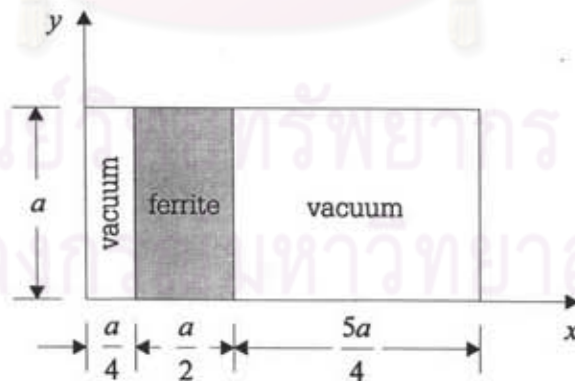
$$\epsilon = 10\epsilon_0 \quad (6.59)$$

เมื่อ ϵ_0 และ μ_0 คือสภาพยอม และความซึมได้ของอากาศว่าง ตามลำดับ โดยที่องค์ประกอบของเทนเซอร์ $[\mu]$ มีค่าเป็น

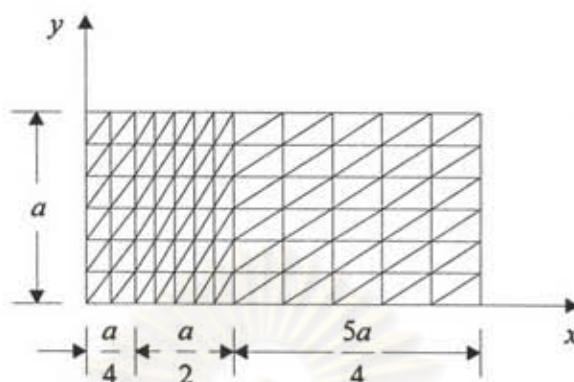
$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (6.60)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.61)$$

$$\omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} a = \omega_m \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} a = 0.5 \quad (6.62)$$



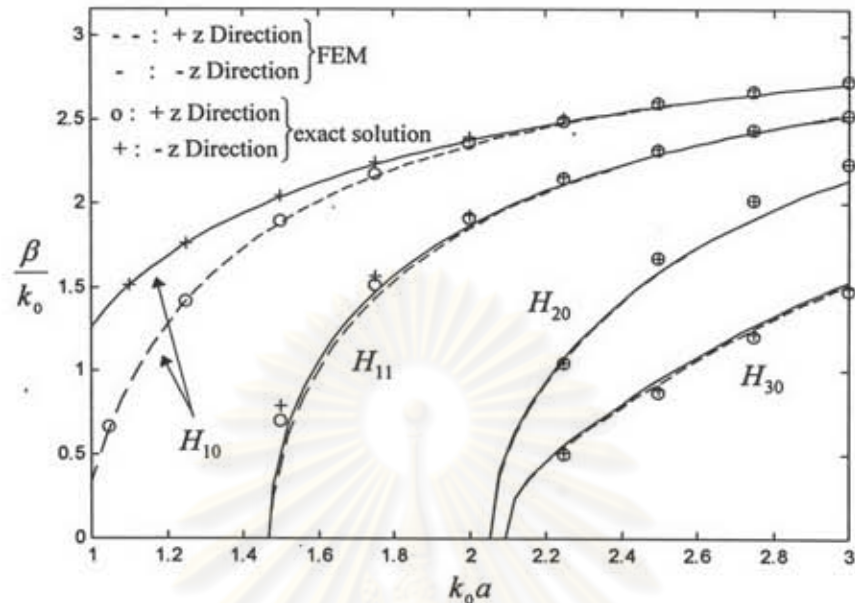
รูป 6.9 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์



รูป 6.10 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
บรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ออกเป็น 144 อีลีเมนต์ 91 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144 และมีจำนวน โหนดเท่ากับ 91 ดังแสดงในรูป 6.10 การแบ่งอีลีเมนต์ในลักษณะนี้ทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับ $\{e_r\}$ และ $\{e_z\}$ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต เท่ากับ 234 และ 91 ตามลำดับ รูป 6.11 แสดงผลการ คำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้ โดยใช้สมการ (6.53) เส้นประและเส้นทึบแสดงผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ และ $-z$ ตามลำดับ สัญลักษณ์ o และ $+$ คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธี เชิงวิเคราะห์ (Collin, 1991) ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ของโหมดมูลฐาน (H_{10}) , H_{11} , H_{20} และ H_{30} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดง ในรูป 6.10 แสดงในตาราง 6.3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูป 6.11 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนของท่อนำคลื่นเฟอร์ไรต์ เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 6.3 ตัวอย่างค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน รวมขนาดความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 6.10

ทิศการแพร่กระจาย	โหมด	ผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
+z	H_{10}	2.733965	2.713889	0.734 %
	H_{11}	2.524651	2.529706	0.200 %
	H_{20}	2.241712	2.139698	4.551 %
	H_{30}	1.481972	1.517643	2.407 %
-z	H_{10}	2.736537	2.711617	0.911 %
	H_{11}	2.527221	2.526695	0.021 %
	H_{20}	2.241712	2.140055	4.535 %
	H_{30}	1.496158	1.531846	2.385 %

จากรูป 6.11 พบว่าโมดมูลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ และ $-z$ ที่ได้จากวิธีไฟไนต์ อีลีเมนต์จะสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ โมด H_{11} และ H_{20} เมื่อพิจารณาในช่วง ประมาณ $k_0 a = 1.5$ ถึง $k_0 a = 2.0$ และ $k_0 a = 2.5$ ถึง $k_0 a = 3.0$ ตามลำดับพบว่ายังไม่สอดคล้องกับ ผลเฉลยแม่นยำตรงมากนัก และเมื่อพิจารณาที่โมด H_{30} พบว่าผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะต่าง จากผลเฉลยแม่นยำตรงไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้น เมื่อใช้ จำนวนอีลีเมนต์ที่สูงขึ้น

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า เมื่อปรับปรุงรูปของกาเลอกินตามที่ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ เสนอไว้ข้างต้น ทำให้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน สามารถวิเคราะห์ ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่แทนเซอร์ความซบซิมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปสมการ

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

ได้

4. ท่อนำแสงแบบฝังในซิปสเตรท

เมื่อพิจารณาสมการ (6.13) พบว่า วิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ท่อนำแสงแบบฝังในซิปสเตรทที่เป็น แอนไอโซทรอปิกแนวทแยงและแกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางได้ ซึ่งสำหรับกรณีนี้จะต้องทำการปรับปรุง รูปของกาเลอกินเพิ่มเติม ตามขั้นตอนที่จะเสนอในหัวข้อถัดไป

4.1 การปรับปรุงสำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า

เพื่อให้วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าได้ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึง ได้ทำการปรับปรุงรูปของกาเลอกิน โดยมีขั้นตอนดังนี้

พิจารณาท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่มีความซบซิมได้สัมผัส μ_r อยู่ในรูปสเกลาร์ และ สภาพยอมสัมผัส $[\epsilon_r]$ อยู่ในรูปเทนเซอร์ ดังสมการ

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} [\epsilon_{r,rr}] & [0] \\ [0] & [\epsilon_{r,zz}] \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

เมื่อ $[\epsilon_{r,rr}]$, $[\epsilon_{r,zz}]$ คือเมตริกซ์ย่อยของ $[\epsilon_r]$ ที่มีอันดับเป็น 2×2 และ 1×1 ตามลำดับ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการคลื่นในรูปสนามไฟฟ้า คือ

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 [\varepsilon_r] \mathbf{E} = 0 \quad (6.65)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (6.17) และ (6.20) สมการ (6.65) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบในแนวตามขวาง และองค์ประกอบในแนวแกน z ตามลำดับ ได้เป็น

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{e}_t \right) - \gamma^2 \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \cdot \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) - k_0^2 [\varepsilon_{r,tt}] \cdot \mathbf{e}_t = 0 \quad (6.66)$$

$$\gamma^2 \nabla_t \times \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \cdot \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \times \mathbf{a}_z \right] - \gamma^2 k_0^2 [\varepsilon_{r,zz}] \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{a}_z = 0 \quad (6.67)$$

สนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_t = 0 \\ e_z = 0 \end{array} \right\} \text{บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ } \Gamma_2 \quad (6.68)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\nabla_t \cdot \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \nabla_t \times \mathbf{e}_t = 0 \end{array} \right\} \text{บนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ } \Gamma_1 \quad (6.69)$$

รูปของกาเลอจินของสมการ (6.66) และ (6.67) คือ

$$\begin{aligned} \gamma^2 \iint \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \cdot \mathbf{w}_z + \mathbf{w}_t) \cdot (\nabla_t \cdot \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_t) - k_0^2 \mathbf{w}_z \cdot [\varepsilon_{r,zz}] \cdot \mathbf{e}_z \right] d\Omega \\ + \iint \left[k_0^2 \mathbf{w}_t \cdot [\varepsilon_{r,tt}] \cdot \mathbf{e}_t - \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \times \mathbf{w}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.70)$$

ให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าและฟังก์ชันให้น้ำหนักในแต่ละอีลีเมนต์ อยู่ในรูปตามสมการ (6.5) และ (6.6) จากนั้นรวมทุกอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากรูปกาเลอจินที่เป็นเมตริกซ์ตั้งสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} [S_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_t\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} [M_{tt}] & [M_{tz}] \\ [M_{zt}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_t\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} = \{0\} \quad (6.71)$$

$$\text{เมื่อ } [S_{xx}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{ \nabla_x \times \mathbf{N} \} \cdot \{ \nabla_x \times \mathbf{N} \}^T - k_0^2 \{ \mathbf{N} \} \cdot [\epsilon_{r,xx}] \cdot \{ \mathbf{N} \}^T \right] dx dy \quad (6.72)$$

$$[M_{xx}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{ \mathbf{N} \} \cdot \{ \mathbf{N} \}^T \right] dx dy \quad (6.73)$$

$$[M_{xz}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{ \mathbf{N} \} \cdot \{ \nabla_x N \}^T \right] dx dy \quad (6.74)$$

$$[M_{zx}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{ \nabla_x N \} \cdot \{ \mathbf{N} \}^T \right] dx dy \quad (6.75)$$

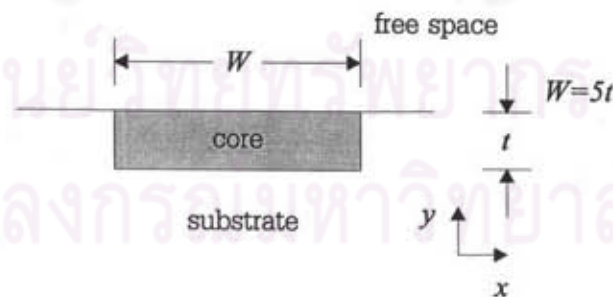
$$[M_{zz}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \{ \nabla_x N \} \cdot \{ \nabla_x N \}^T - k_0^2 \{ N \} [\epsilon_{r,zz}] \{ N \}^T \right] dx dy \quad (6.76)$$

สมการ (6.71) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปัญหาค่าเฉพาะจางมาตรฐานได้เป็น

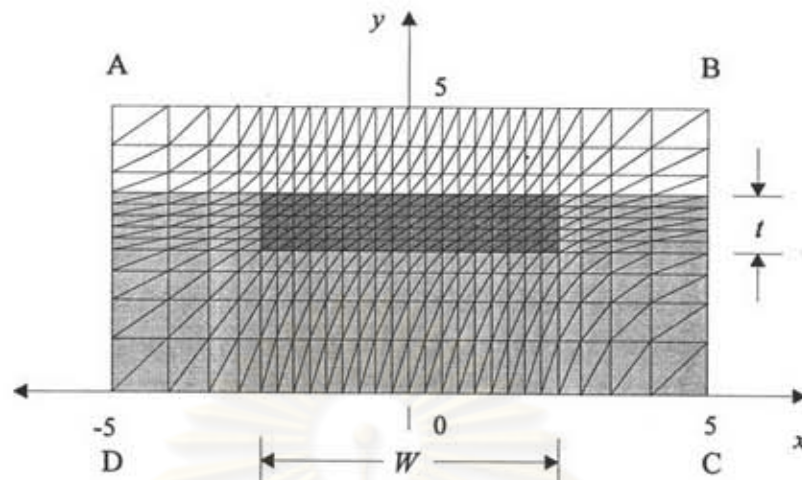
$$\begin{bmatrix} [M_{xx}] & [M_{xz}] \\ [M_{zx}] & [M_{zz}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [S_{xx}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{ e_x \} \\ \{ e_z \} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \{ e_x \} \\ \{ e_z \} \end{bmatrix} = \{ 0 \} \quad (6.77)$$

4.2 ผลการวิเคราะห์ที่ท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรท

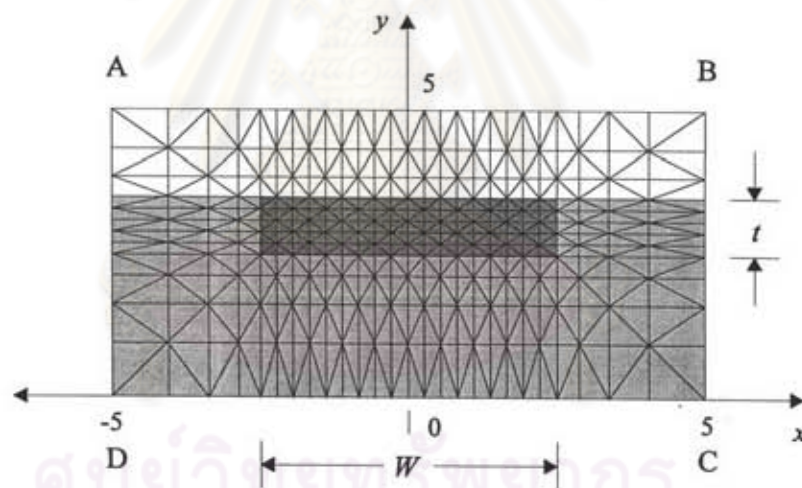
พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่ประกอบด้วยแกนฝังในชั้นสเตรท และด้านบนเป็น อากาศว่างดังแสดงในรูป 6.12 การศึกษาในส่วนนี้จะแบ่งออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ท่อนำแสงเป็น แอนไอโซทรอปิกแนวทแยง และกรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง



รูป 6.12 ภาคตัดขวางของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรท



รูป 6.13 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
แบบที่ 1 ออกเป็น 624 อีลีเมนต์ 351 โหนด



รูป 6.14 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
แบบที่ 2 ออกเป็น 624 อีลีเมนต์ 351 โหนด

4.2.1 กรณีที่ท่อนำแสงเป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง

พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีภาคตัดขวางดังแสดงในรูป 6.12 แกนและชั้นสเตรทของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกเนกาทิฟยูนิเอกเซียล (Kong, 1986) โดยที่แกนทางแสงขนานกับแกน x สภาพยอมสัมพันธ์ $[\epsilon_r]$ และความขบขี้มได้สัมพันธ์ μ_r ของแกนมีค่าดังนี้

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.222^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3129^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3129^2 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (6.79)$$

สภาพยอมสัมพัทธ์ และความขานซึมได้ของชั้นสเตรทมีค่าเป็น

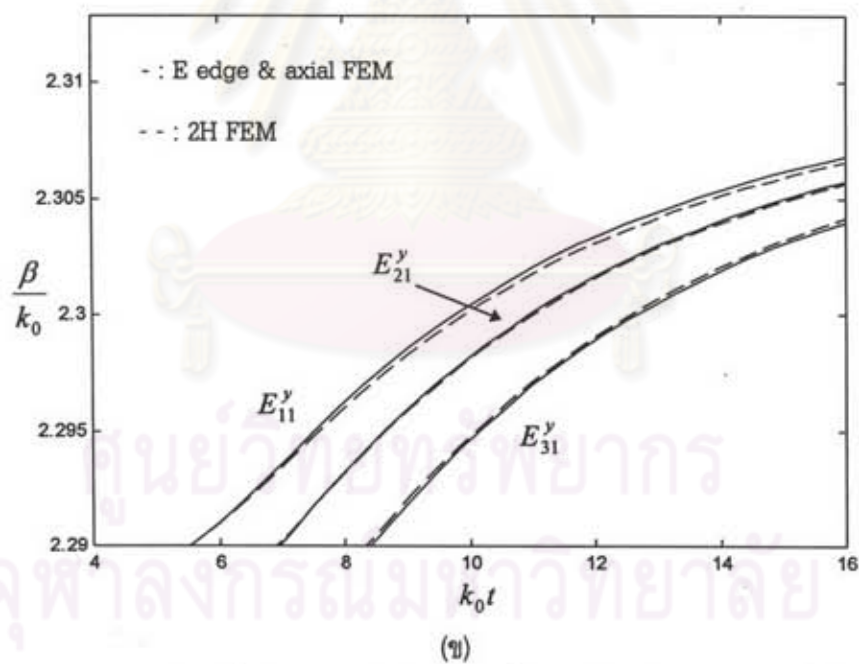
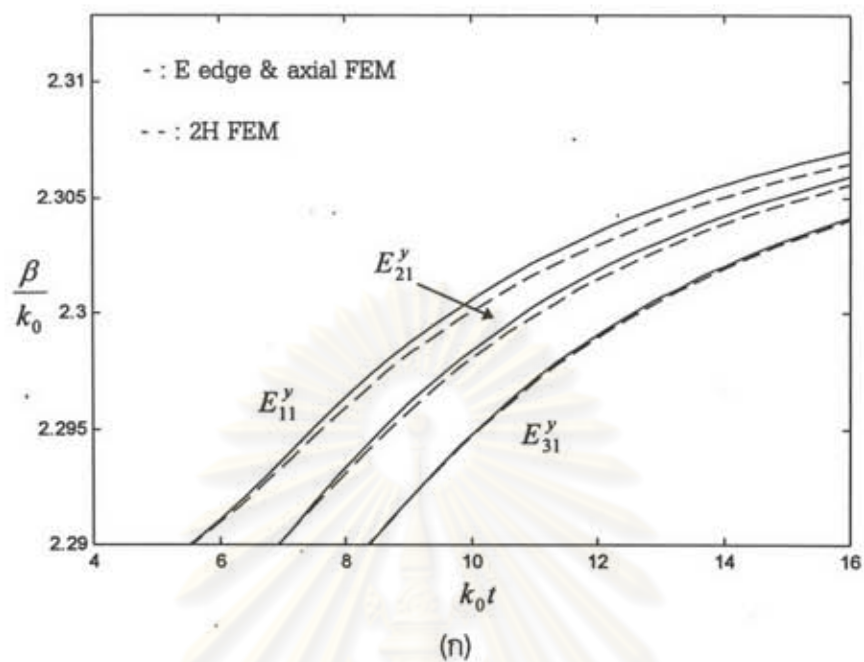
$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.29^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.29^2 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (6.81)$$

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม 624 อีลีเมนต์ ในแบบที่ 1 และแบบที่ 2 ดังแสดงในรูป 6.13 และ 6.14 โดยที่ขอบเขต AB, BC, CD และ DA คือขอบเขตเสมือนซึ่งสมมุติให้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ การแบ่งอีลีเมนต์ในทั้งสองลักษณะนี้จะทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับ $\{e_x\}$ และ $\{e_y\}$ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต เท่ากับ 974 และ 351 ตามลำดับ

รูป 6.15(ก) และ 6.15(ข) แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยใช้สมการ (6.77) เมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 ดังแสดงในรูป 6.13 และแบบที่ 2 ดังแสดงในรูป 6.14 ตามลำดับ เส้นทึบเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน เส้นประเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ

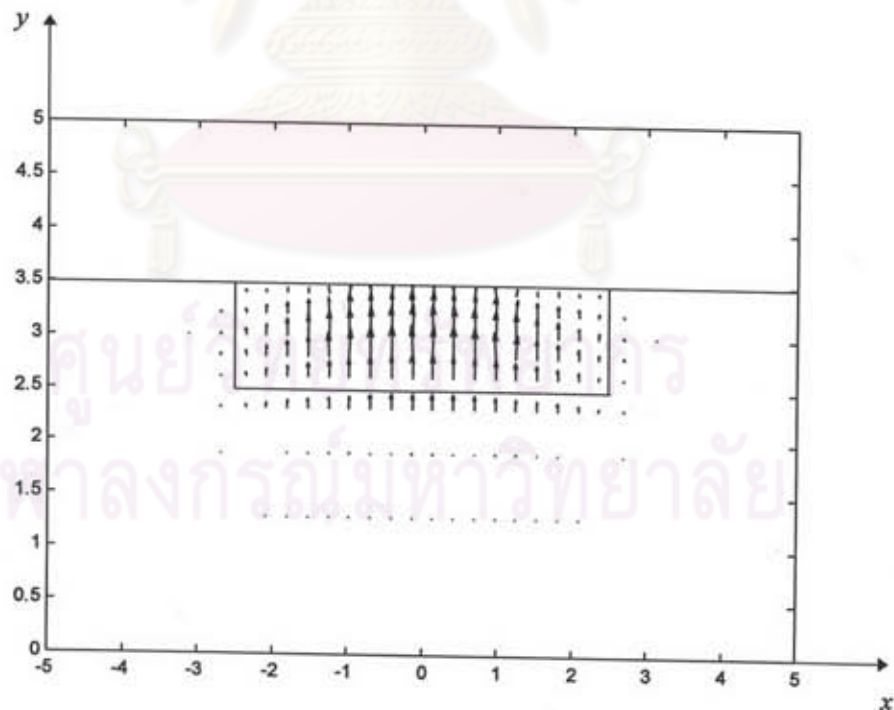
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



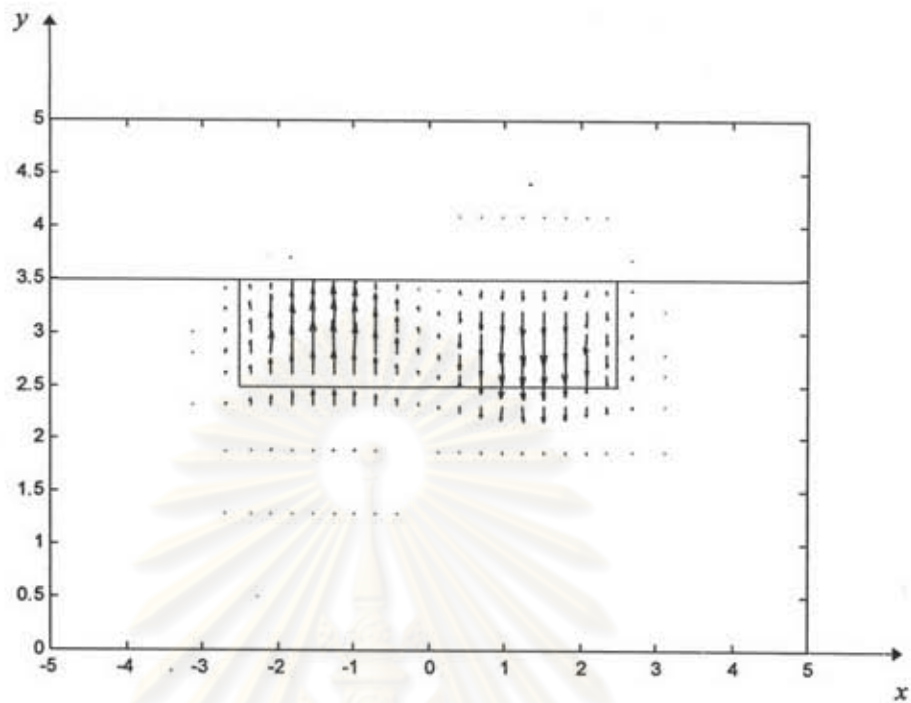
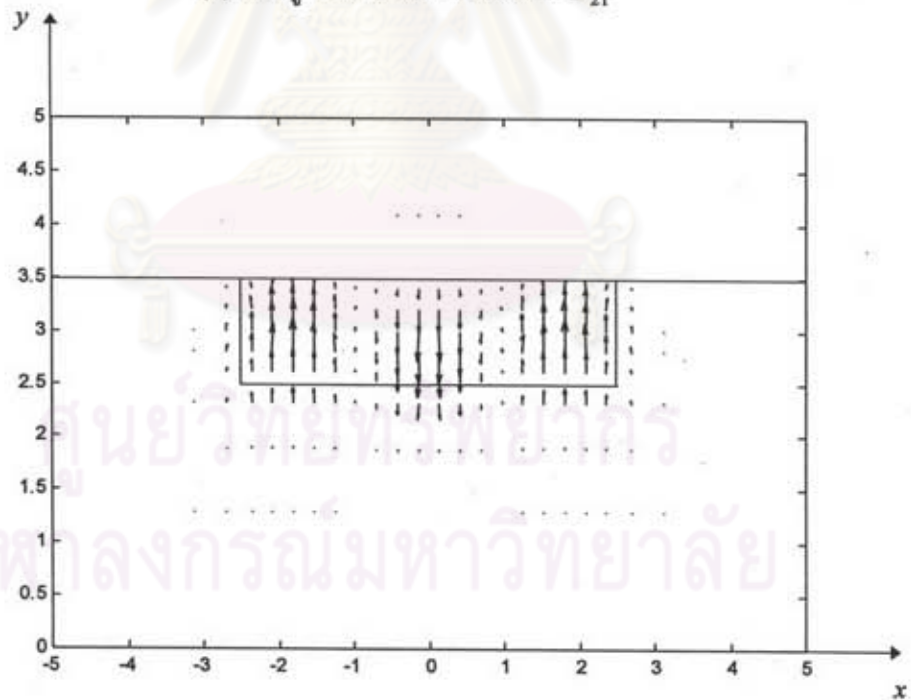
รูป 6.15 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ ของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีแกนและชั้นสเตรทเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล เมื่อใช้ (ก) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 (ข) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 2

จากรูป 6.15 โมด 3 อันดับแรกที่เลือกมาแสดงคือโมด E_{11}' , E_{21}' และ E_{31}' เมื่อ E_{pq}' คือโมดที่มีองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าหลักคือ E_y และ H_x ดัชนีล่าง p และ q แทนอันดับของโมดในทิศ x และ y ตามลำดับ โดย p และ q มีค่าเท่ากับจำนวนสูงสุดหรือต่ำสุดที่เกิดขึ้นในการกระจายขององค์ประกอบหลักในทิศ x และ y ตามลำดับ (Marcuse, 1974; Koshiba, 1992) จะเห็นได้ว่าเมื่อใช้การแบ่งอิลิเมนต์แบบที่ 2 โมด E_{11}' , E_{21}' และ E_{31}' ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน จะสอดคล้องกับผลที่ได้จากวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ ส่วนผลการวิเคราะห์เมื่อใช้การแบ่งอิลิเมนต์แบบที่ 1 พบว่าโมดมูลฐาน (E_{11}') ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน เมื่อพิจารณาที่ $k_0 a = 12.0$ ถึง $k_0 a = 16.0$ จะต่างจากผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบมากเมื่อเทียบกับผลที่ได้จากการใช้การแบ่งอิลิเมนต์แบบที่ 2 และผลการคำนวณที่ได้จากทั้งสองกรณีนี้ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแต่อย่างใด

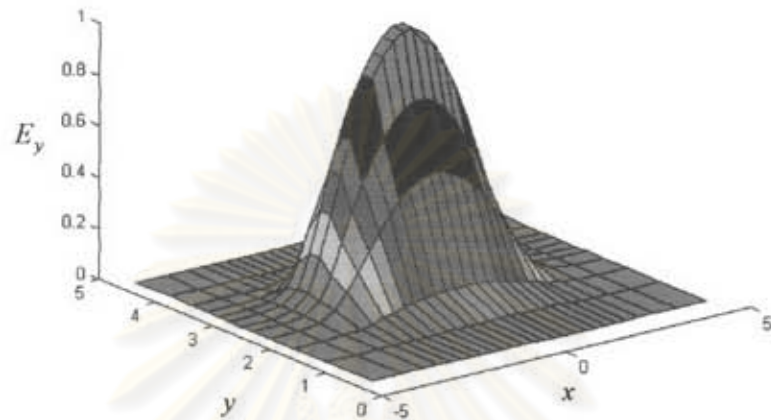
รูป 6.16 และ 6.17 แสดงแบบรูปของสนามไฟฟ้า และการกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ตามลำดับ ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}' , E_{21}' และ E_{31}' โดยกำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1



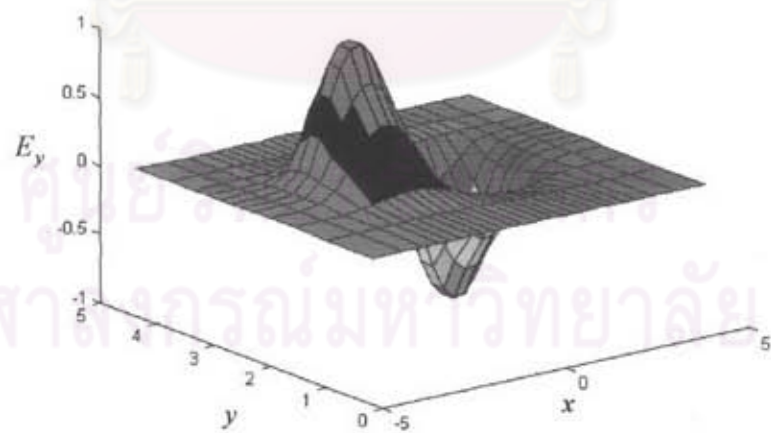
(ก) แบบรูปของสนามไฟฟ้าในโมด E_{11}'

(ข) แบบรูปของสนามไฟฟ้าในโหมด E_{21}^y (ค) แบบรูปของสนามไฟฟ้าในโหมด E_{31}^y

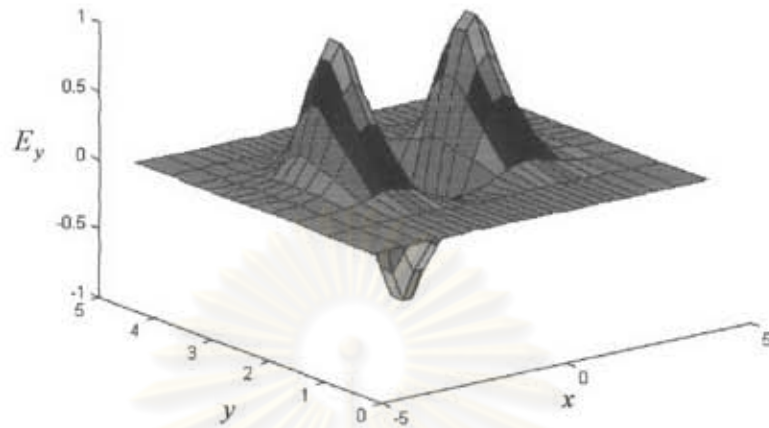
รูป 6.16 แบบรูปของสนามไฟฟ้าที่ $k_0 t = 16.0$ ใน (ก) โหมด E_{11}^y (ข) โหมด E_{21}^y (ค) โหมด E_{31}^y ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ของท่อนำแสงแบบ ผังในชั้นสเตรทที่แกนและชั้นสเตรทเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลีเมนต์ แบบที่ 2



(ก) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ในโหมด E_{11}^y



(ข) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ในโหมด E_{21}^y



(ค) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ในโหมด E_{31}'

รูป 6.17 การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ที่ $k_0 l = 16.0$ ใน (ก) โหมด E_{11}' (ข) โหมด E_{21}'

(ค) โหมด E_{31}' ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่แกนและชั้นสเตรทเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล โดยการใช้การแบ่งอีลิเมนต์แบบที่ 2

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า เมื่อปรับปรุงรูปกาเลือกตามที่คุณเสนอวิทย์ได้เสนอไว้ข้างต้น ร่วมกับการแบ่งอีลิเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแบบที่ 2 ทำให้วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน สามารถวิเคราะห์ท่อนำแสงที่เป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยงได้

4.2.2 กรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง

พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีภาคตัดขวางดังแสดงในรูป 6.12 แกนของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง โดยที่แกนทางแสงอยู่ในระนาบ xy และทำมุม $-\pi/8$ เรเดียนกับแกน x เทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์ $[\epsilon_r]$ และความซึมได้สัมพัทธ์ μ_r ของแกนคือ

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_{r,xx} & \epsilon_{r,xy} & 0 \\ \epsilon_{r,yx} & \epsilon_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r,zz} \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (6.83)$$

เมื่อองค์ประกอบของเทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์มีค่าดังสมการต่อไปนี้ (Koshiba, 1992)

$$\varepsilon_{r,xx} = n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta \quad (6.84a)$$

$$\varepsilon_{r,yy} = n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta \quad (6.84b)$$

$$\varepsilon_{r,zz} = n_o^2 \quad (6.84c)$$

$$\varepsilon_{r,xy} = \varepsilon_{r,yx} = (n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta \quad (6.84d)$$

$$n_o = 2.3129 \quad (6.84e)$$

$$n_e = 2.222 \quad (6.84f)$$

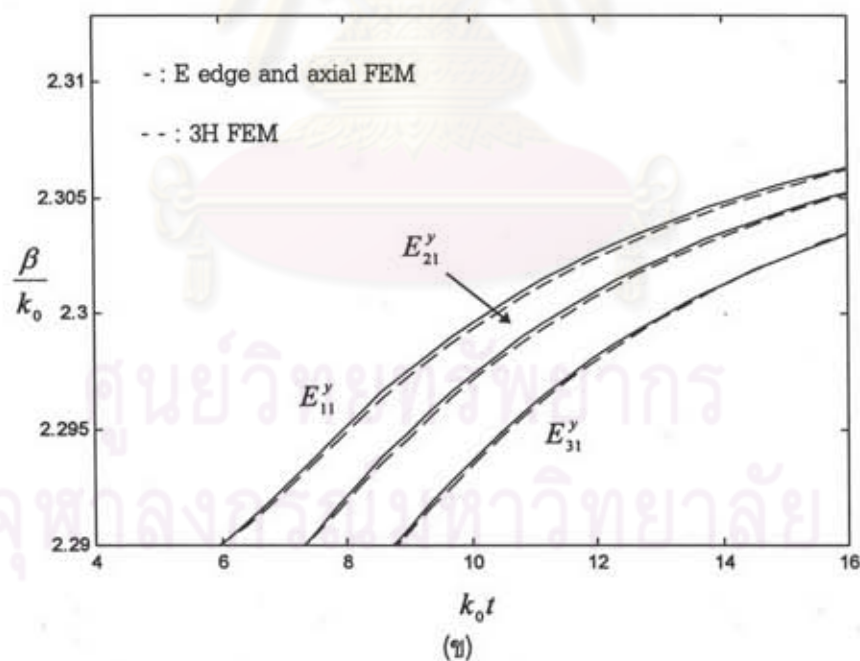
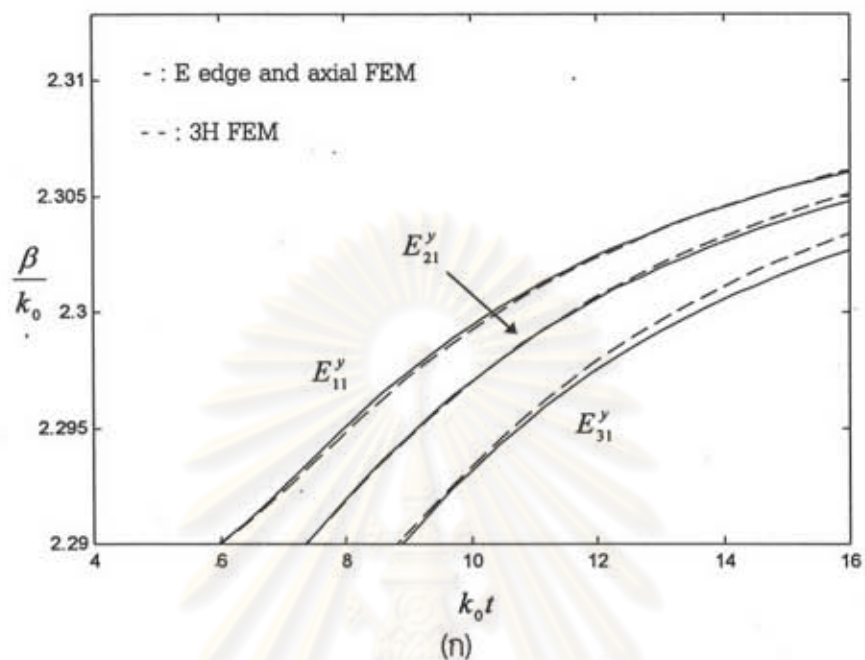
n คือดัชนีหักเห, θ คือมุมระหว่างแกนทางแสงและแกน x ในที่นี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ $-\pi/8$ เรเดียน ชั้นสเตรทของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกเนกาทิฟยูนิแอกเซียลที่แกนทางแสงขนานกับแกน x ที่มีสภาพยอมสัมพันธ์ และความขบขี้มได้สัมพันธ์เป็น

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.29^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.29^2 \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (6.86)$$

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยมอันดับที่หนึ่ง 624 อีลีเมนต์ ในแบบที่ 1 และแบบที่ 2 ดังแสดงในรูป 6.13 และ 6.14 โดยที่ขอบเขต AB, BC, CD และ DA คือขอบเขตเสมือนซึ่งสมมุติให้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ การแบ่งอีลีเมนต์ในทั้งสองลักษณะนี้ทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับ $\{e_x\}$ และ $\{e_y\}$ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต เท่ากับ 974 และ 351 ตามลำดับ

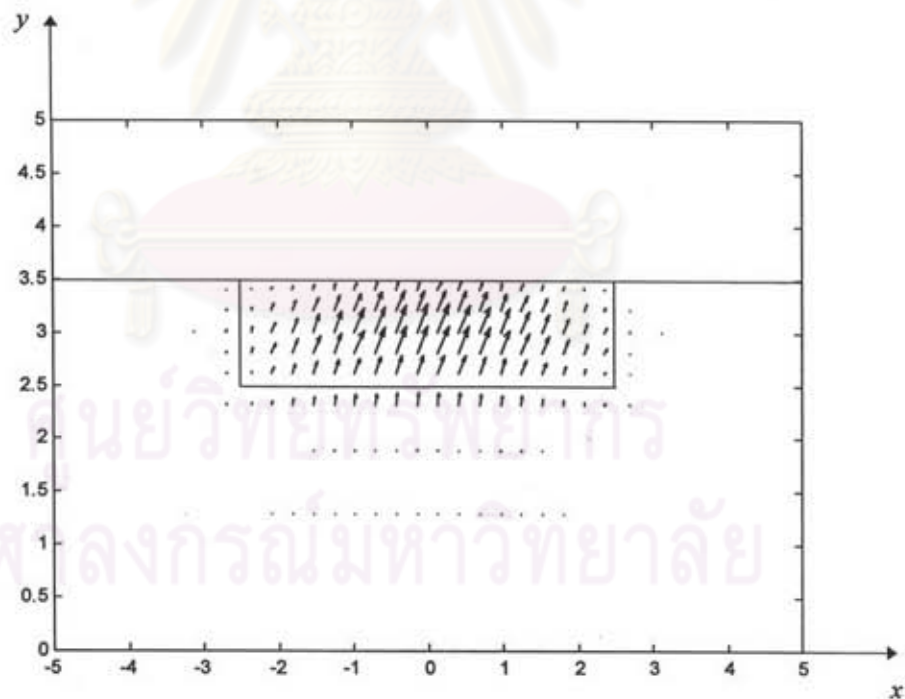
รูป 6.18(ก) และ 6.18(ข) แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยใช้สมการ (6.77) เมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 ดังแสดงในรูป 6.13 และแบบที่ 2 ดังแสดงในรูป 6.14 ตามลำดับ เส้นทึบเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน เส้นประเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ



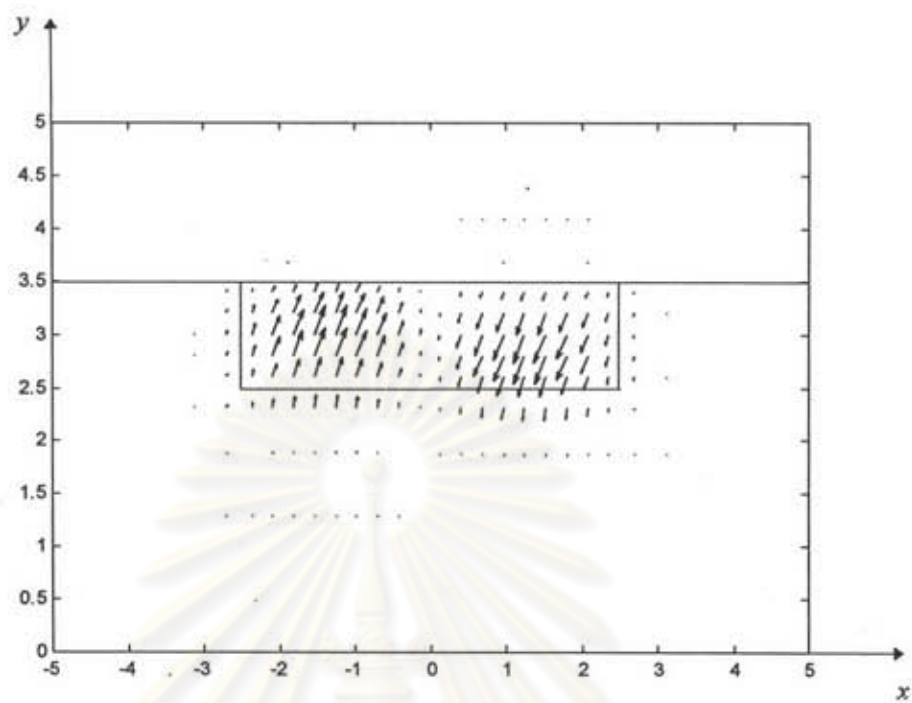
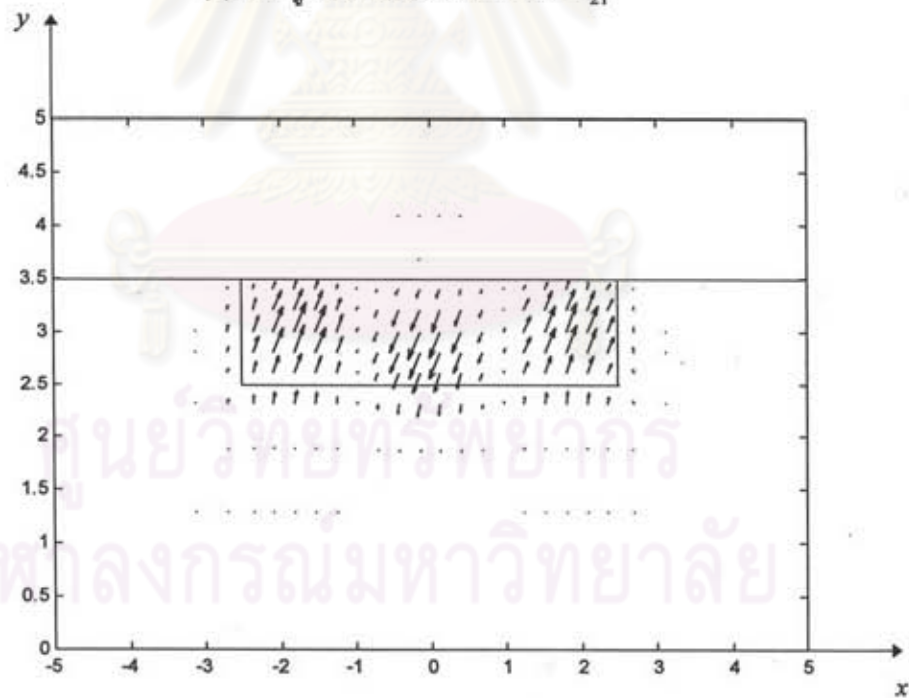
รูป 6.18 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อสัมประสิทธิ์ที่นอลติเท่ากับ $1/2.289$ ($p = 1/2.289$) ของท่อนำแสงแบบฝังในฉนวนที่มีแกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง และฉนวนเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล เมื่อใช้ (ก) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 (ข) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 2

จากรูป 6.18 โมด 3 อันดับแรกที่เลือกมาแสดงคือโมด E_{11}' , E_{21}' และ E_{31}' จะเห็นได้ว่าเมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 2 โมด E_{11}' , E_{21}' และ E_{31}' ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน จะสอดคล้องกับผลที่ได้จากวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ส่วนผลการวิเคราะห์เมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 พบว่าโมด E_{31}' ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน เมื่อพิจารณาที่ $k_0 a = 14.0$ ถึง $k_0 a = 16.0$ จะต่างจากผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบมากเมื่อเทียบกับผลที่ได้จากการใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 2 และผลการคำนวณที่ได้จากทั้งสองกรณีนี้ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแต่อย่างใด

รูป 6.19 และ 6.20 แสดงแบบรูปของสนามไฟฟ้าและการกระจายของ E_y ในลักษณะ 3 มิติ ตามลำดับ ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}' , E_{21}' และ E_{31}' โดยกำหนดขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นให้มีค่าเท่ากับ 1

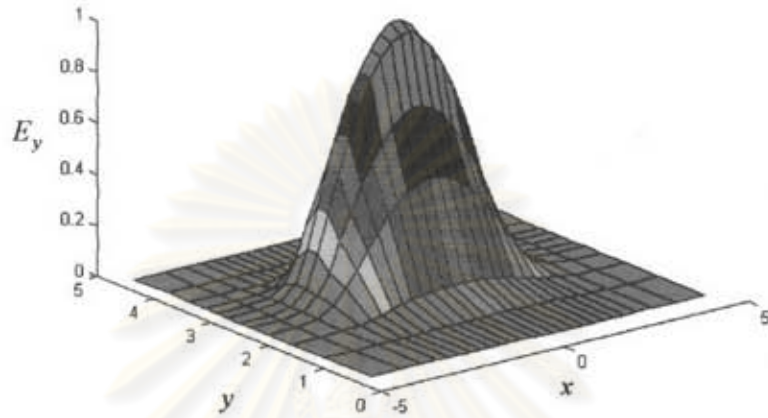


(ก) แบบรูปของสนามไฟฟ้าในโมด E_{11}'

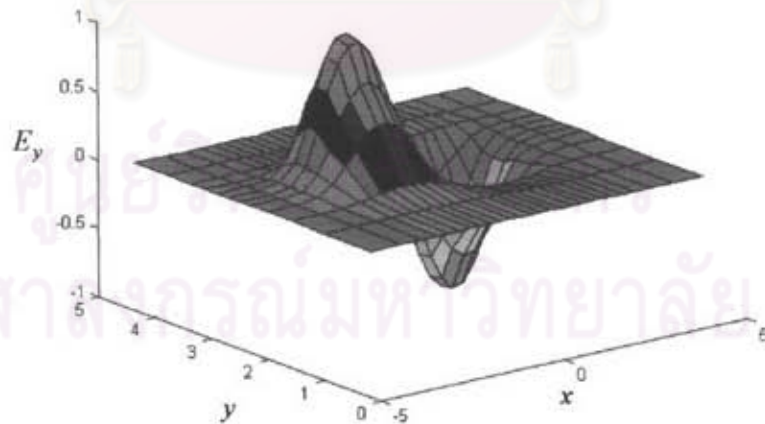
(ข) แบบรูปของสนามไฟฟ้าในโหมด E_{21}^y (ค) แบบรูปของสนามไฟฟ้าในโหมด E_{31}^y

รูป 6.19 แบบรูปของสนามไฟฟ้าที่ $k_0 t = 16.0$ ใน (ก) โหมด E_{11}^y (ข) โหมด E_{21}^y

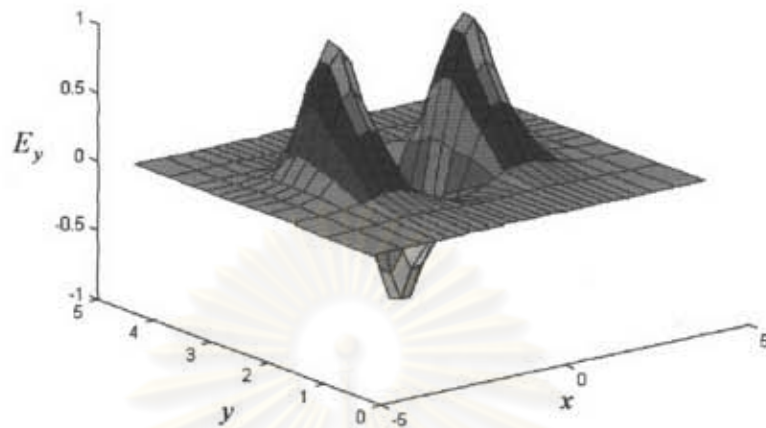
(ค) โหมด E_{31}^y ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกนของท่อนำแสงแบบฝังในฉนวนที่มีแกนเป็นแอนไอโซทรอปิก ตามขวาง และฉนวนเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลิเมนต์แบบที่ 2



(ก) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ในโหมด E_{11}^y



(ข) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ในโหมด E_{21}^y



(ค) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ในโหมด E_{31}^y

รูป 6.20 การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ E_y ที่ $k_0 l = 16.0$ ใน (ก) โหมด E_{11}^y (ข) โหมด E_{21}^y

(ค) โหมด E_{31}^y ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง และชั้นสเตรทเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลิเมนต์แบบที่ 2

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า เมื่อปรับปรุงรูปกาเลอกินตามที่ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้เสนอไว้ข้างต้น ทำให้วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน สามารถวิเคราะห์ท่อนำแสงที่เป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางได้โดยใช้การแบ่งอีลิเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแบบที่ 2 ส่วนผลการวิเคราะห์ที่ได้จากการใช้อีลิเมนต์แบบที่ 1 พบว่ายังให้คำตอบที่ไม่ดีนัก

สรุป

ผลจากการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนที่เสนอโดย Lee (1994) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกพบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ได้
2. ในปัญหาท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม พบว่าวิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้

3. ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ความซึมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปของ

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ พบว่าวิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นในกรณีได้โดยตรง ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงได้ทำการปรับปรุงรูปกาเลอกินเพิ่มเติม ซึ่งผลจากการปรับปรุงดังกล่าวทำให้วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ความซึมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปดังที่กล่าวมาข้างต้นได้

4. ในปัญหาท่อนำคลื่นแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปของ

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำแสงแบบฝังในฉนวนที่เป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง และกรณีที่เป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางพบว่า วิธีนี้ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นในกรณีได้โดยตรง ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงได้ทำการปรับปรุงรูปกาเลอกินเพิ่มเติม ซึ่งผลจากการปรับปรุงดังกล่าว ทำให้วิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปดังที่กล่าวมาข้างต้นได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย