บทที่ 4

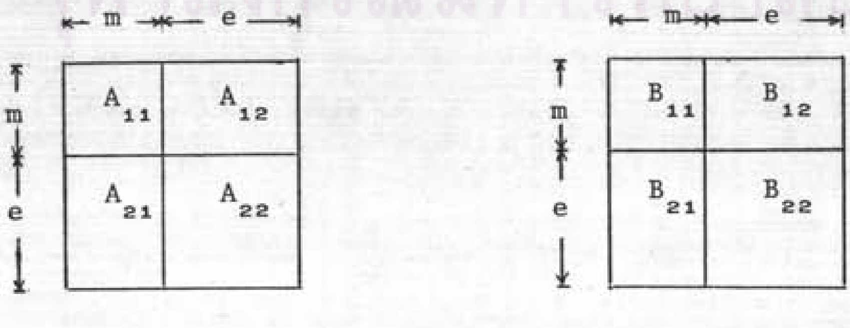
การหาส่วนกลับของเมตริกซ์โดยวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน

ในการหาค่าตอบของสมการปกตินั้นสามารถกระทำได้สองวิธีคือ วิธีแรกหาค่าตอบโดยตรงและวิธีที่สองหาเมตริกซ์ส่วนกลับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ก่อนแล้วจึงนำไปคูณกับเวคเตอร์ค่าคงที่จะได้ค่าของตัวไม่ทราบค่า การปรับแก้ถ้าใช้วิธีหาค่าตอบโดยตรงจะมีความสะดวกและรวดเร็ว แต่บ่อยครั้งอาจมีความต้องการจะหาค่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ ก็จะต้องหาเมตริกซ์ส่วนกลับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เพราะว่าเมตริกซ์ส่วนกลับของสัมประสิทธิ์ เมื่อคูณด้วยแวร์เรียนซ์ของหน่วยน้ำหนัก (Variance of Unit Weight) จะเป็นความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ (Variance - Covariance of Parameters) (วิชา จิวาลัย, 2524)

4.1 การหาส่วนกลับของเมตริกซ์โดยการแบ่งส่วน

การหาเมตริกซ์ส่วนกลับในบางครั้ง วิธีที่สะดวกวิธีหนึ่งก็คือ การแบ่งส่วนเมตริกซ์ออกเป็นเมตริกซ์ย่อย แล้วหาความสัมพันธ์ของเมตริกซ์เหล่านี้ วิธีนี้มีประโยชน์มากในกรณีที่คอมพิวเตอร์มีหน่วยความจำไม่พอที่จะบรรจุเมตริกซ์ทั้งตัวลงไป แต่ในบางกรณีรูปแบบของเมตริกซ์เองที่แสดงว่าวิธีหาส่วนกลับของเมตริกซ์ที่สะดวกควรเป็นวิธีนี้

สมมุติว่ามีเมตริกซ์จตุรัส A โดยที่ดีเทอร์มินันต์ $|A| \neq 0$ และให้เมตริกซ์ส่วนกลับของเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ B แบ่ง A เป็นเมตริกซ์ย่อยสี่ตัว และ B ก็แบ่งออกเป็นเมตริกซ์ย่อยขนาดเท่ากันดังรูป 4.1



รูป 4.1 เมตริกซ์ A และเมตริกซ์ B

โดยที่ $|A| \neq 0$, $|A_{11}| \neq 0$ และ $|A_{22}| \neq 0$

A_{11} จะมีขนาด $m \times m$, A_{22} มีขนาด $e \times e$ และ $m + e = n$ ซึ่งเป็นขนาดของ A และ B

จากกฎของเมตริกซ์ส่วนกลับ

$$A B = B A = I$$

$$A B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = I$$

ดังนั้น

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \qquad (4.1)$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \qquad (4.2)$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 \qquad (4.3)$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I \qquad (4.4)$$

ในทำนองเดียวกันจาก $B A = I$ เราจะได้

$$B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = I \qquad (4.5)$$

$$B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0 \qquad (4.6)$$

$$B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \qquad (4.7)$$

$$B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \qquad (4.8)$$

(4.1) $- A_{12}A_{22}^{-1}$ (4.3)

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{22}B_{21} = I$$

$$A_{11}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = I$$

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})B_{11} = I$$

$$B_{11} = (A_{11} - A_{11}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \qquad (4.9)$$

(4.4) $- A_{21}A_{11}^{-1}$(4.2)

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}B_{12} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = I$$

$$A_{22}B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = I$$

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22} = I$$

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \qquad (4.10)$$

แทนค่า B_{11} ใน (4.3)

$$A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} + A_{22}B_{21} = 0$$

$$B_{21} = - A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \qquad (4.11)$$

แทนค่า B_{22} ใน (4.2)

$$A_{11}B_{12} + A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = 0$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \qquad (4.12)$$

จาก (4.5)

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1} \qquad (4.13)$$

แทนค่า B_{12} จาก (4.12) ลงใน (4.13)

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \qquad (4.14)$$

จาก (4.6)

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \qquad (4.15)$$

แทนค่า B_{11} จาก (4.9) ลงใน (4.15)

$$B_{12} = -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \qquad (4.16)$$

จาก (4.7)

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \qquad (4.17)$$

แทนค่า B_{22} จาก (4.10) ลงใน (4.17)

$$B_{21} = -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \qquad (4.18)$$

จาก (4.8)

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - B_{21}A_{12}A_{22}^{-1} \qquad (4.19)$$

แทนค่า B_{21} จาก (4.11) ลงใน (4.19)

$$B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \qquad (4.20)$$

จาก (4.1)

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} \qquad (4.21)$$

จะเห็นว่าเมตริกซ์ย่อยและตัวของ B สามารถหาได้สองทางคือ

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$
$$= -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$B_{21} = -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$= -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$
$$= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

ดังนั้นเราสามารถแยกการคำนวณออกเป็นสองกลุ่มโดยอาศัยการสังเกตจากเมตริกซ์ย่อยที่จะต้องหาส่วนกลับดังนี้

วิธีแรก ถ้าดีเทอร์มินันต์ $A_{11} = 0$ หรือหา A_{22}^{-1} ง่ายกว่า A_{11}^{-1}

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$
$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$$
$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12}$$
$$B_{21} = A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

วิธีที่สอง ถ้าดีเทอร์มินันต์ $A_{22} = 0$ หรือหา A_{11}^{-1} ง่ายกว่า A_{22}^{-1}

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$
$$B_{12} = A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$$
$$B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$

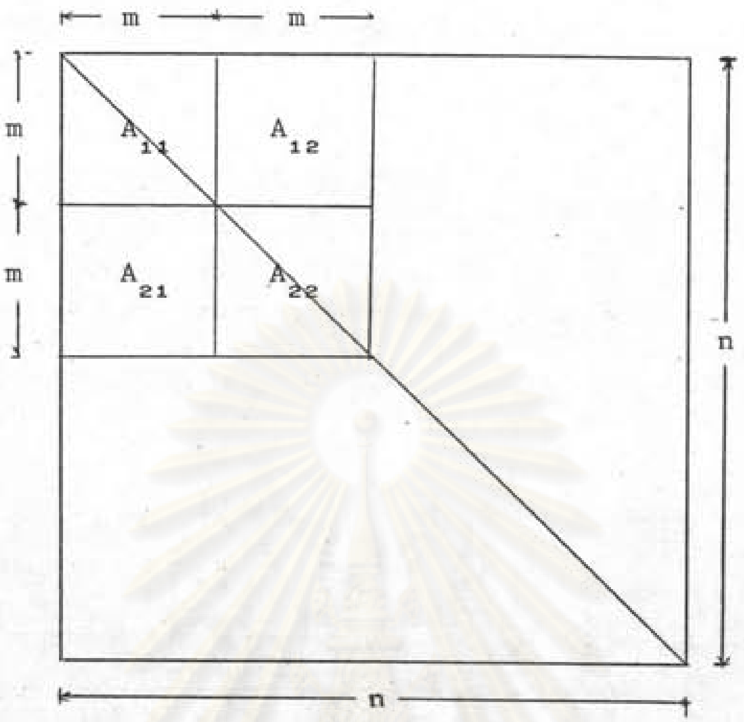
ในกรณีที่เป็นเมตริกซ์ขนาดใหญ่จะแบ่งเมตริกซ์เป็นส่วน ๆ หลายครั้งเพื่อหลีกเลี่ยงการหาเมตริกซ์ส่วนกลับขนาดใหญ่

4.2 การหาส่วนกลับของเมตริกซ์สมมาตรโดยการแบ่งส่วน

เมตริกซ์สมมาตรเป็นเมตริกซ์ซึ่งเหมาะกับการหาส่วนกลับโดยการแบ่งส่วน เพราะสามารถใช้ประโยชน์จากความสมมาตร เพียงแต่หา B_{12} หรือ B_{21} เมตริกซ์ย่อยหนึ่งก็จะได้เมตริกซ์ย่อยอีกเมตริกซ์หนึ่ง เพราะเมตริกซ์ย่อยทั้งสองเป็นทรานสโพส (Transpose) ซึ่งกันและกัน

ในกรณีที่เมตริกซ์สมมาตรมีขนาดใหญ่ จะแบ่งเมตริกซ์เป็นส่วน ๆ หลายครั้งโดยมีวิธีดังนี้

1. แบ่งเมตริกซ์ออกเป็นส่วนดังรูป 4.2



รูป 4.2 เมตริกซ์สมมาตรแบ่งเป็นส่วนครั้งแรก

2. หา A_{11}^{-1}

3. $B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$

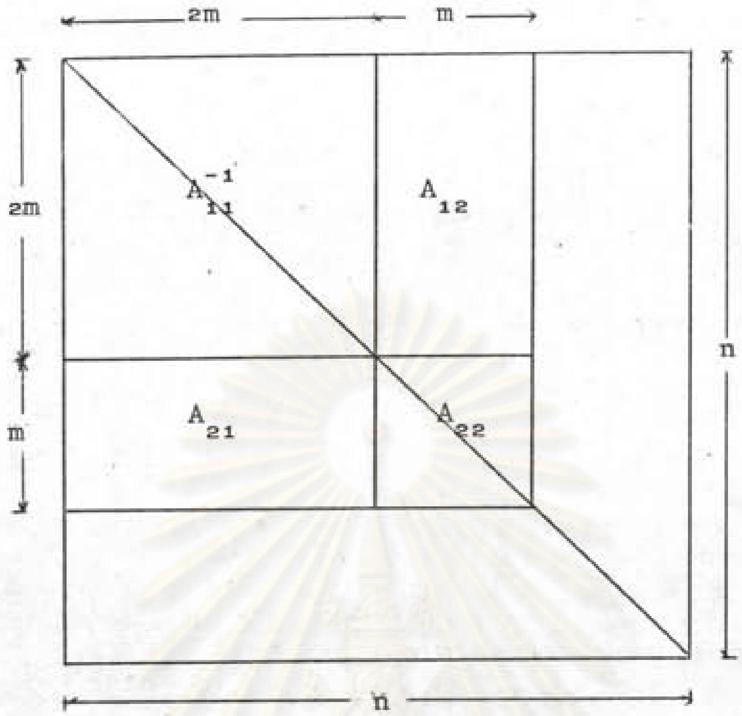
4. $B_{21} = - B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$

5. $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$

6. $B_{12} = B_{21}^{T}$

7. นำเมตริกซ์ย่อย B_{11} , B_{12} , B_{21} และ B_{22} ไปแทนในตำแหน่งของ A_{11} , A_{12} , A_{21} และ A_{22} ตามลำดับก็จะมีผลทำให้ได้เมตริกซ์ส่วนกลับมีขนาด $2m \times 2m$

แบ่งเมตริกซ์ออกเป็นส่วนอีก ดังรูป 4.3



รูป 4.3 เมตริกซ์สมมาตรแบ่งเป็นส่วนครั้งที่ 2

จะเห็นว่าเมตริกซ์ย่อย A_{11} เป็นเมตริกซ์ที่ได้หาส่วนกลับแล้วจากรอบแรก ค่าที่อยู่ใน A_{11} ก็คือค่า A_{11}^{-1} เมื่อใช้ดำเนินการในทำนองเดียวกันกับ (3) - (7) ก็จะได้เมตริกซ์ส่วนกลับขนาด 3m × 3m และถ้าใช้วิธีการแบ่งออกเป็นส่วนแล้วคำนวณในลักษณะต่อไป ในที่สุดก็จะได้เมตริกซ์ส่วนกลับที่ต้องการหา

ถ้าการแบ่งในรอบแรก ทำให้ A_{11} เป็น Singular Matrix แต่ A_{22} เป็น Nonsingular Matrix ก็หาเมตริกซ์ย่อยของ B จากสูตร

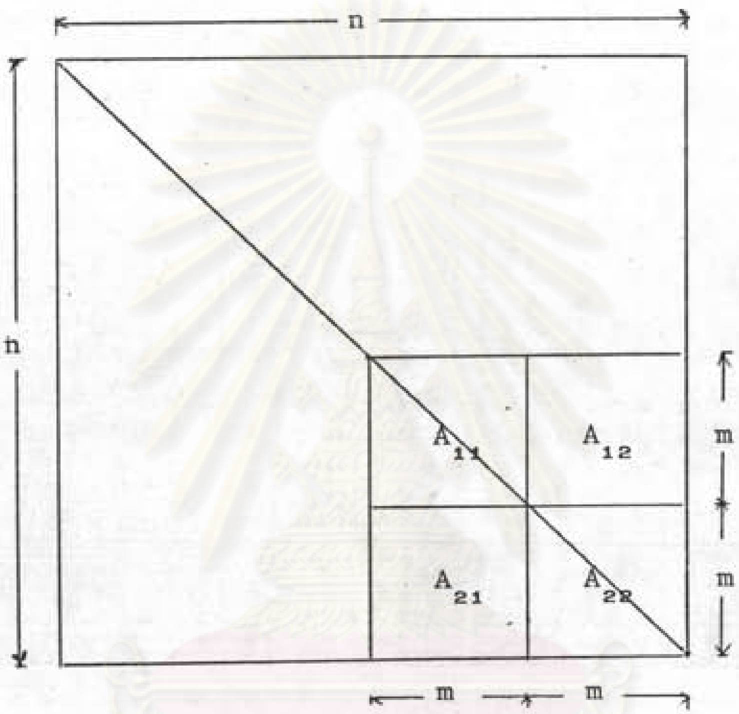
$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12}$$

ก็จะได้เมตริกซ์ส่วนกลับขนาด 2m × 2m เหมือนกับวิธีแรก แล้วดำเนินการในรอบต่อไปเช่นเดียวกับวิธีแรก จนได้เมตริกซ์ส่วนกลับทั้งตัว

การแบ่งเมตริกซ์ขนาดใหญ่ออกเป็นส่วนหลาย ๆ ครั้ง สามารถแบ่งอีกแบบหนึ่งคือ แบ่งจากมุมล่างขวาขึ้นมา ดังรูป 4.4



รูป 4.4 เมตริกซ์สมมาตรแบ่งออกเป็นส่วนจากมุมล่างขวา

แล้วดำเนินการคำนวณและแบ่งในรอบต่อไปในทำนองเดียวกับการแบ่งด้วยวิธีแรก จนได้เมตริกซ์ส่วนกลับทั้งเมตริกซ์

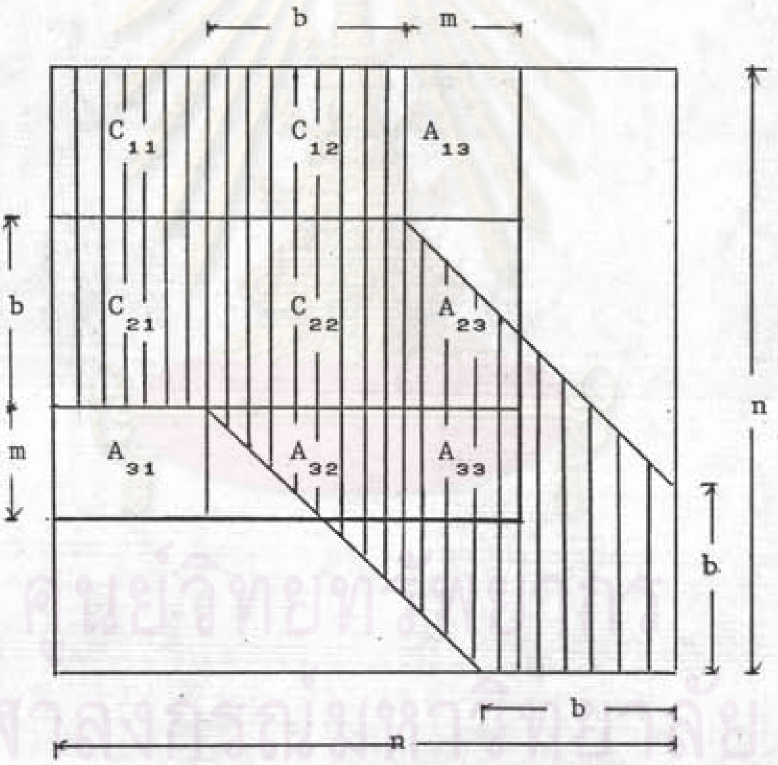
4.3 การหาส่วนกลับของเมตริกซ์แถบโดยวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน

ให้ A เป็นเมตริกซ์แถบขนาด n × n มีความกว้างแถบเท่ากับ b แบ่งเมตริกซ์ A ออกเป็นสามระดับดังรูป 4.5

โดยการแบ่งเมตริกซ์ A ออกเป็นสามระดับดังรูป 4.5 จะมีผลทำให้ A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์ ซึ่งมีประโยชน์ทำให้ลดจำนวนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ลงอีก

ให้ $$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

และ $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$



รูป 4.5 เมตริกซ์แถบแบ่งโดยวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน

แทนค่าในลักษณะเดียวกับสมการ (4.10)

$$B_{33} = \left[A_{33} - \begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[A_{33} - \begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}A_{13} + C_{12}A_{23} \\ C_{21}A_{13} + C_{22}A_{23} \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[A_{33} - A_{31}C_{11}A_{13} + A_{31}C_{12}A_{23} + A_{32}C_{21}A_{13} + A_{32}C_{22}A_{23}\right]^{-1}$$

A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$B_{33} = (A_{33} - A_{32}C_{22}A_{23})^{-1} \qquad (4.22)$$

แทนค่าในลักษณะเดียวกับสมการ (4.17)

$$\begin{bmatrix} B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = -B_{33} \begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} B_{33}A_{31}C_{11} + B_{33}A_{32}C_{21} & B_{33}A_{31}C_{12} + B_{33}A_{32}C_{22} \end{bmatrix}$$

A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$B_{31} = -B_{33}A_{32}C_{21} \qquad (4.23)$$

$$B_{32} = -B_{33}A_{32}C_{22} \qquad (4.24)$$

แทนค่าในลักษณะเดียวกับสมการ (4.21)

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13}B_{31} & A_{13}B_{32} \\ A_{23}B_{31} & A_{23}B_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}A_{13}B_{31} + C_{12}A_{23}B_{31} & C_{11}A_{13}B_{32} + C_{12}A_{23}B_{32} \\ C_{21}A_{13}B_{31} + C_{22}A_{23}B_{31} & C_{21}A_{13}B_{32} + C_{22}A_{23}B_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} - C_{11}A_{13}B_{31} - C_{12}A_{23}B_{31} & C_{12} - C_{11}A_{13}B_{32} - C_{12}A_{23}B_{32} \\ C_{21} - C_{21}A_{13}B_{31} - C_{22}A_{23}B_{31} & C_{22} - C_{21}A_{13}B_{32} - C_{22}A_{23}B_{32} \end{bmatrix}$$

A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$B_{11} = C_{11} - C_{12}A_{23}B_{31} \tag{4.25}$$

$$B_{21} = C_{21} - C_{22}A_{23}B_{31} \tag{4.26}$$

$$B_{22} = C_{22} - C_{22}A_{23}B_{32} \tag{4.27}$$

$$B_{12} = C_{12} - C_{12}A_{23}B_{32} \tag{4.28}$$

แทนค่าในลักษณะเดียวกับสมการ (4.22)

$$\begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix} B_{33}$$

$$= -\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13}B_{33} \\ A_{23}B_{33} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} C_{11}A_{13}B_{33} + C_{12}A_{23}B_{33} \\ C_{21}A_{13}B_{33} + C_{22}A_{23}B_{33} \end{bmatrix}$$

A_{13} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$B_{13} = - C_{12}A_{23}B_{33} \tag{4.29}$$

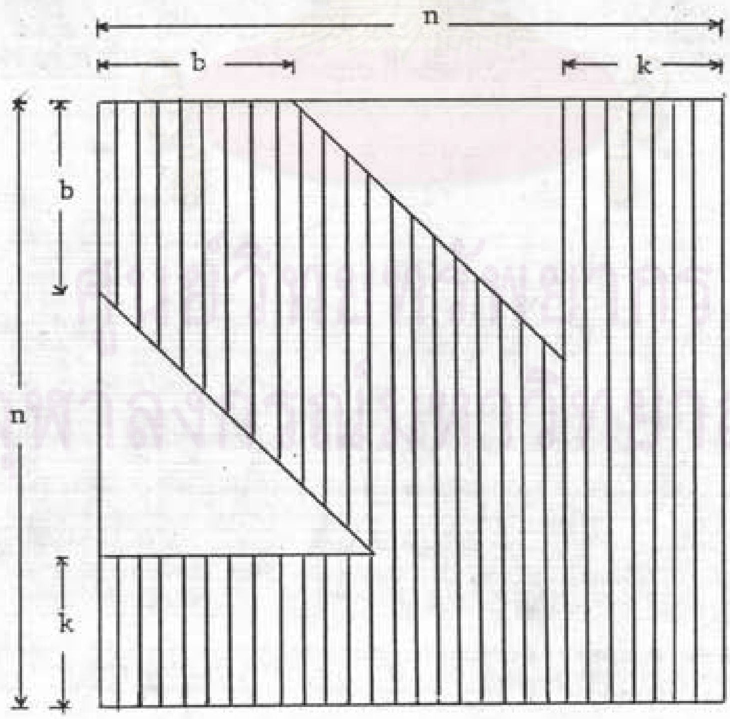
$$B_{23} = -C_{22}A_{23}B_{33} \tag{4.30}$$

ในการหาส่วนกลับของเมตริกซ์แถบขนาดใหญ่ จะแบ่งเมตริกซ์ออกเป็นส่วนหลาย ๆ ครั้ง แล้วคำนวณเป็นรอบ โดยแต่ละรอบจะได้เมตริกซ์ส่วนกลับใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ จนในที่สุดจะได้ส่วนกลับของเมตริกซ์ทั้งตัว การคำนวณในแต่ละรอบจะมีผลเฉพาะส่วนที่นำมาแบ่งเท่านั้น ส่วนที่เหลือยังคงเดิมอยู่ทั้งรูปแบบ ขนาดและค่าของธาตุมูล ในแต่ละรอบจะมีการหาส่วนกลับของเมตริกซ์หนึ่งครั้งเพื่อหา B_{33}

ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรแถบ จะให้ประโยชน์ของการสมมาตรคำนวณหาค่า B_{11} , B_{21} , B_{22} , B_{31} , B_{32} และ B_{33} โดยไม่ต้องหา B_{12} , B_{23} และ B_{13} เพราะเมตริกซ์ย่อยทั้งสามเป็นทรานสโพสของ B_{21} , B_{32} และ B_{31} ตามลำดับ

4.4 การหาส่วนกลับของเมตริกซ์แบนด์บอร์เดอร์

ให้ A เป็นเมตริกซ์แบนด์บอร์เดอร์ ขนาด $n \times n$ มีความกว้างแถบเท่ากับ b ความกว้างบอร์เดอร์เท่ากับ k ดังรูป 4.5



รูป 4.6 เมตริกซ์แบนด์บอร์เดอร์ A

เมื่อพิจารณาลักษณะของเมตริกซ์แบนด์บอร์เดอร์ จะพบว่าสามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับโดยทำเป็น 2 ขั้นตอนคือ

1. ใช้วิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชันหาเมตริกซ์ส่วนกลับจนมีขนาด $(n-k) \times (n-k)$

2. ใช้วิธีการแบ่งส่วนหาเมตริกซ์ส่วนกลับจนได้เมตริกซ์ส่วนกลับที่ต้องการ