



## รายการอ้างอิง

1. ตำรวย สังข์สะอาด , วิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง , จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ,พ.ศ. 2528
2. Greenwood, A., Electrical Transients in Power Systems , Wileys-Interscience , 1971
3. Kato, S., Kokai, H., Nakajima, Y. and Kouno, T. "Finite Element Method for Calculation of Potential Distribution of The Porcelain Insulator with Semiconducting Surface Layer", 3rd I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper no 12.01
4. Haznadar, Z., Milojkovic, S., Kamenica, I., "Numerical Field Calculation of Insulator Chains for High Voltage Transmission Lines", 3rd I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper no 12.08
5. Haznadar, Z., Sadovic, S., "Macro Elements in The Finite Element Method - Application to The High-Voltage Insulating System Design", IEEE Trans., Vol. Mag-18, No.2, March 1982, pp 519-522
6. Steinbigler, H., "Combined Application of Finite Element Method and Charge Simulation Method for The Computation of Electric Fields", 3rd I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper no 11.11
7. Okubo, H., Ikeda, M., Honda, M., "Combination Method for Electric Field Calculation", 3rd I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper no 11.13
8. Imhoff, A, Meunier, G. and Abonnadiere, J.C. "Finite Element Modeling of Open Boundary Problems", IEEE Trans., Vol. Mag-26, No.2, March 1990
9. Stochniol, "A Gernal Transformation for Open Boundary Finite Element Method for Eletromagnetic Problems", IEEE Trans., Vol. Mag-28, No.2, March 1992

10. คมสัน เพ็ชรรักษ์, "การคำนวณหาสนามไฟฟ้าของอิเล็กโทรดแรงสูงด้วยวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์", วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า, คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พ.ศ. 2529
11. มอก. 279-2529 ลูกถ้วยก้านตรง : ปอร์ชเลน, สำนักงานมาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม
12. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., The Finite Element Method, McGRAW HILL, 1989
13. Brunotte, X., Meunier, G., Imhoff, J.F., "Finite Element Modeling of Unbounded Problems Using Transformations, A Rigorous, Powerful and Easy Solution", IEEE Trans. Vol.Mag-28, no.2, March 1992
14. Imhoff, J.F., G. Meunier, Brunotte, X. and Abonnadiere, J.C., "An Original Solution for Unbounded Electromagnetic 2D and 3D-Problems throughout The Finite Element Method", IEEE Trans., Vol.Mag-26, no.5, September 1990
15. Kuffel, E., Zaengl, W.S., High-Voltage Engineering Fundamentals, Pergamon Press, 1984
16. เดช สุชะพิริยะ, "การคำนวณหาสนามไฟฟ้าของอิเล็กโทรดแรงสูงด้วยวิธีจำลองแบบประจุ", วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า, คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พ.ศ. 2529
17. IEC Standard Publ. No.52, Measurement of Voltage by Mean of Sphere Gap, 1960
18. Rasolonjanahary, J.L., Krahenbuhl, L., Nicolas, A., "Computation of Electric Fields and Potential on Polluted Insulators Using a Boundary Element Method, IEEE Trans., Vol.Mag-28, no.2, March 1992
19. Maller, V.N., Srivastava, K.D., "Corona Inception Phenomena in Solid-Air Composite Systems", IEEE Trans., Vol.EI-18, no.4, August 1983
20. Faison, Ted, Borland C++3.1 Object-Oriented Programming, SAMS, 1992
21. Hager, W., Applied Numerical Linear Algebra, Prentice Hall, 1988

22. NamBiar, R.V., Valera, R.S., Lawrence K.L., "An Algorithm for Adaptive Refinement of Triangular Element Meshes, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.36, 1983, pp.499-509



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

### ขั้นตอนการคำนวณหาสนามไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

การคำนวณหาสนามไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้น จะพัฒนาโปรแกรมด้วยภาษาซีพลัสพลัส(C++) ใช้รูปแบบการโปรแกรมแบบ Object-Oriented Programming[20] โดยมี class สำคัญในการคำนวณดังรูปที่ ก.1

แต่ละ class จะมีสมาชิกและฟังก์ชันที่ใช้ในการจัดการกับสมาชิกของ class เป็นการแบ่งแยกการจัดการของข้อมูลแต่ละส่วนอย่างชัดเจน ทำให้แบ่งสามารถแก้ไข พัฒนาโปรแกรมในภายหลังได้สะดวก

ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมจะแบ่งได้เป็น 3 ขั้นตอน คือ

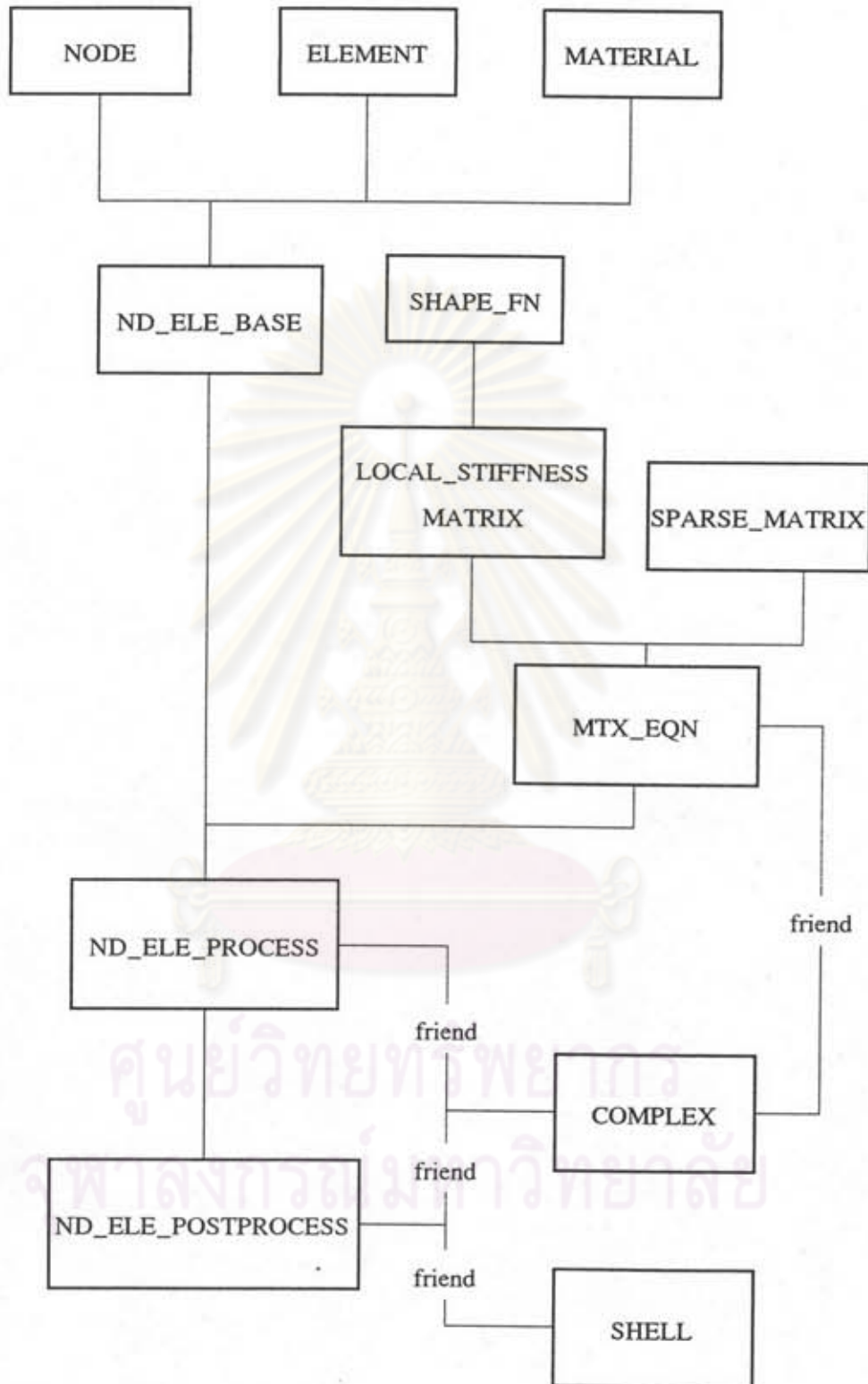
- ส่วนการรับข้อมูลเข้าและเตรียมการคำนวณ
- ส่วนการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า
- ส่วนการประมวลผลการคำนวณและหาค่าแรงดันเริ่มต้น

#### ก.1 ส่วนการรับข้อมูลเข้าและเตรียมการคำนวณ

โปรแกรมจะอ่านข้อมูลด้านเข้าจากแฟ้มข้อมูล ซึ่งประกอบด้วย

- จำนวนข้อมูลในการคำนวณ ได้แก่ จำนวนจุด, จำนวนอีลีเมนต์, จำนวนตัวกลางฉนวน, จำนวนจุดที่อยู่บนขอบเขตที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้า, จำนวนจุดในแนวอาร์ก และ อื่น ๆ
- ข้อมูลของจุด ได้แก่ พิกัด
- ข้อมูลของอีลีเมนต์ ได้แก่ หมายเลขของจุดที่ประกอบเป็นอีลีเมนต์, ชนิดของตัวกลาง
- ข้อมูลของตัวกลางฉนวน ได้แก่ ชื่อชนิดของตัวกลางและค่าคงตัวไดอิเล็กตริก
- ข้อมูลของเงื่อนไขขอบเขต ได้แก่ หมายเลขของจุดที่อยู่บนขอบเขตที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้า และ ค่าศักย์ไฟฟ้าที่กำหนด
- พิกัดของจุดตามแนวอาร์ก
- ค่าความนำไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำและหมายเลขของจุดตามแนวสารเคลือบกึ่งตัวนำ
- รัศมีของการแปลงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้





รูปที่ ก.1 แผนภาพแสดง Class ต่าง ๆ ตามลำดับชั้น

ตารางที่ ก.1 รูปแบบของเพิ่มข้อมูลด้านเข้า

Data Name							
NN	NE	NM	NB	NS	COND	NA	Ro
Nodes							
no.	x	y					
Elements							
no.	node#1	node#2	node#3	material	in/ex		
Materials							
no.	name	die. cons.					
Boundary							
no.	node no.						
Flashover Line							
x	y						
Semiconducting Nodes							
node no.							
END							

- NN หมายถึง จำนวนจุดทั้งหมด
- NE หมายถึง จำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมด
- NM หมายถึง จำนวนชนิดของตัวกลางฉนวน
- NB หมายถึง จำนวนจุดบนที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้า
- NS หมายถึง จำนวนจุดที่อยู่บนแนวสารเคลือบกึ่งตัวนำ
- COND หมายถึง ความนำไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำ
- NA หมายถึง จำนวนจุดบนแนวอาร์ก
- Ro หมายถึง ค่ารัศมีในการแปลงทางคณิตศาสตร์

แบบฟอร์มของข้อมูลด้านเข้าและตัวอย่างของข้อมูลด้านเข้าแสดงไว้ในตารางที่ ก.1 ในขณะที่อ่านข้อมูลจากแฟ้ม โปรแกรมจะตรวจสอบจำนวนของข้อมูลว่าถูกต้องหรือไม่ และตรวจสอบลำดับของจุดในอีลีเมนต์ซึ่งใน โปรแกรมนี้กำหนดว่าจะต้องอยู่ในลำดับทวนเข็มนาฬิกาเท่านั้น

หลังจากอ่านข้อมูลด้านเข้าเรียบร้อยแล้ว โปรแกรมจะแสดงภาพของข้อมูลเพื่อตรวจสอบความถูกต้องโดยทั่วไปอีกครั้งหนึ่ง และแยกให้หมายเลขตัวแปรสำหรับจุดที่อยู่บนขอบเขตที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้าและจุดที่ไม่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้า เพื่อใช้ในการคำนวณต่อไป

## ก.2 ส่วนการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า

การคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าจะมีขั้นตอนที่สำคัญอยู่ 3 ขั้นตอน คือ การสร้างสมการเมตริกซ์ที่จะใช้หาค่าตอบ การแก้สมการเชิงเส้นหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า การแบ่งอีลีเมนต์ย่อยเพื่อทำการคำนวณซ้ำ

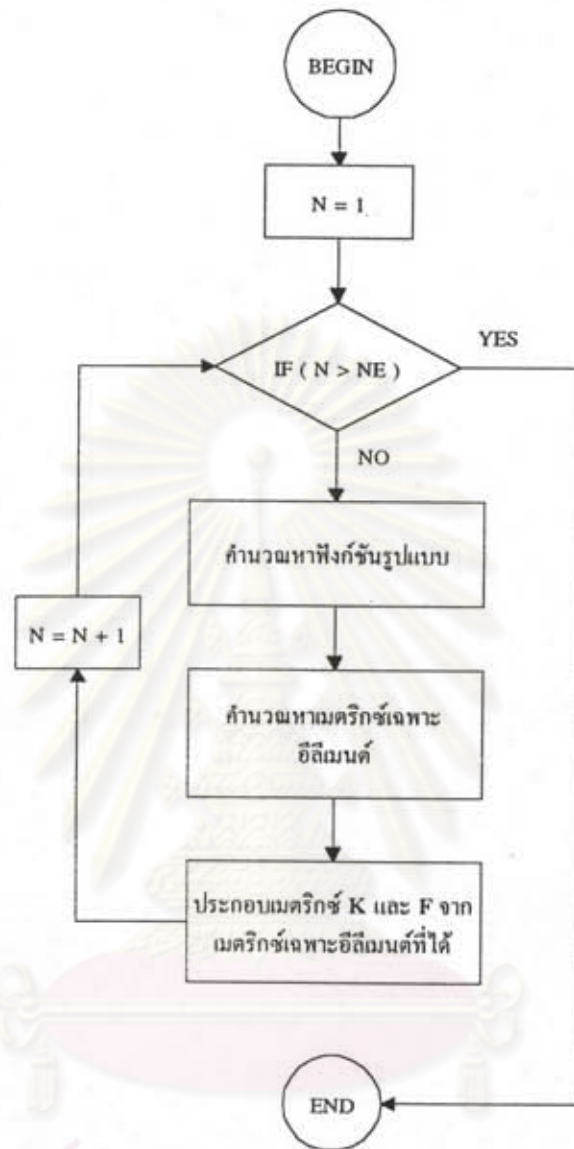
### ก.2.1 การสร้างสมการเมตริกซ์

รูปที่ ก.2 แสดงขั้นตอนในการสร้างสมการเมตริกซ์เพื่อแก้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ จะได้รูปของสมการเป็น

$$[K][\phi] = [F] \quad (ก.1)$$

โดยที่

- K หมายถึง Stiffness Matrix ที่ถูกตัดทอนเหลือเฉพาะส่วนของจุดที่ไม่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้า จะเป็นเมตริกซ์ของจำนวนเชิงซ้อนในกรณีที่มีสารกึ่งตัวนำในบริเวณการคำนวณ
- $\phi$  หมายถึง เมตริกซ์ของศักย์ไฟฟ้าของจุดที่ไม่ทราบค่า
- F หมายถึง เมตริกซ์ที่เกิดจากเงื่อนไขขอบเขต เป็นผลคูณของ Stiffness Matrix ในส่วนของจุดที่อยู่บนขอบเขตที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้ากับค่าเงื่อนไขขอบเขต



NE = จำนวนอิลีเมนต์ทั้งหมด

K และ F เป็นเมตริกซ์ในสมการที่ ก.1

รูปที่ ก.2 ขั้นตอนการสร้างสมการเมตริกซ์ด้วยวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์



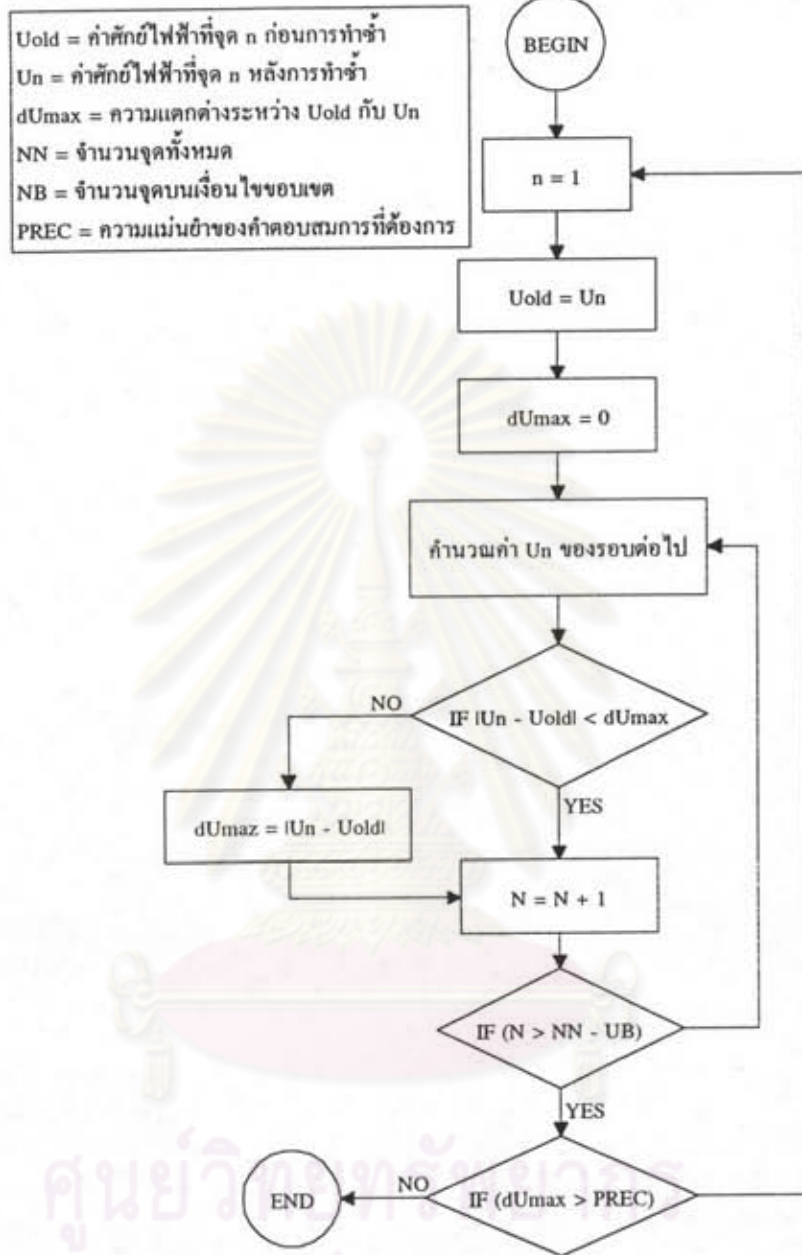
## ก.2.2 การแก้สมการเชิงเส้นหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า

เนื่องจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในสมการ (ก.1) จะมีสมาชิกที่มีค่าศูนย์อยู่มาก เพื่อให้ประหยัดพื้นที่ของหน่วยความจำ เราจะเก็บค่าเฉพาะสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์และค่าดัชนีที่แสดงหมายเลขแถวของมันเท่านั้น ในการคำนวณหาการใช้วิธีการแปลงแถวจะทำให้เกิดสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์เพิ่มขึ้น วิธีการหา เมตริกซ์ผกผันจะใช้เวลาในการคำนวณสูงมาก และเนื่องจากสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าสูงมากกว่าหรือเท่ากับผลรวมของสมาชิกอื่น ๆ ทั้งหมดในแต่ละแถว ทำให้สามารถใช้วิธีการทำซ้ำในการหาคำตอบของสมการได้แน่นอน[21] รวดเร็ว และไม่ทำให้เกิดสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์เพิ่มขึ้น ในที่นี้ได้เลือกใช้วิธีการทำซ้ำ(Iteration Method)ของ Gauss-Siedal[21]ในการหาคำตอบของสมการ ขั้นตอนการแก้สมการด้วยวิธีการทำซ้ำของ Gauss-Siedal แสดงไว้ในรูปที่ ก.3 เมื่อหาค่าศักย์ไฟฟ้าของจุดทั้งหมดได้แล้ว ค่าความเครียดสนามไฟฟ้าสามารถหาได้จากการแทนค่าศักย์ไฟฟ้าและ Shape Function ลงในสมการที่ (3.40) ก็จะได้ความเครียดสนามไฟฟ้าในแต่ละอีลีเมนต์ออกมา

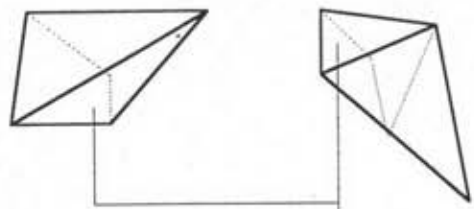
## ก.2.3 การแบ่งอีลีเมนต์ย่อยเพื่อทำการคำนวณซ้ำ

การป้อนข้อมูลหรือการสร้างเพิ่มข้อมูลด้านเข้าของการคำนวณทำได้ไม่สะดวก โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อต้องการอีลีเมนต์ย่อยในบริเวณที่มีความเครียดสนามไฟฟ้าสูงจำนวนมาก ๆ การแบ่งอีลีเมนต์ย่อยเพิ่มหลังการคำนวณเพื่อที่จะนำไปคำนวณซ้ำให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นจึงเป็นสิ่งจำเป็น เงื่อนไขที่จะใช้ในการแบ่งอีลีเมนต์ก็คือ การที่อีลีเมนต์นั้นมีความต่างศักย์ระหว่างจุดของอีลีเมนต์มากเกินกว่าค่าที่กำหนด

การแบ่งอีลีเมนต์ย่อยจะทำโดยการแบ่งจุดเพิ่มระหว่างด้านที่ยาวที่สุดของอีลีเมนต์ดังรูปที่ ก.4 จะเห็นได้ว่า เมื่อด้านยาวที่สุดของอีลีเมนต์ซึ่งต้องการแบ่งย่อยเป็นด้านยาวที่สุดของอีลีเมนต์ซึ่งอยู่ติดกัน ก็จะสามารถทำการแบ่งอีลีเมนต์ย่อยได้ทันที แต่หากด้านยาวที่สุดของอีลีเมนต์ที่ต้องการแบ่งย่อยไม่ใช่ด้านยาวที่สุดของอีลีเมนต์ที่อยู่ติดกัน จะต้องการแบ่งอีลีเมนต์ที่อยู่ติดกันก่อนเพื่อให้ได้ด้านที่ยาวที่สุดร่วมกัน ค่าศักย์ไฟฟ้าของจุดที่ถูกแบ่งเพิ่มจะเป็นค่าเฉลี่ยของศักย์ไฟฟ้าของจุดทั้งสองของด้านเพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำต่อไป ขั้นตอนการแบ่งอีลีเมนต์ย่อยแสดงไว้ในรูปที่ ก.5

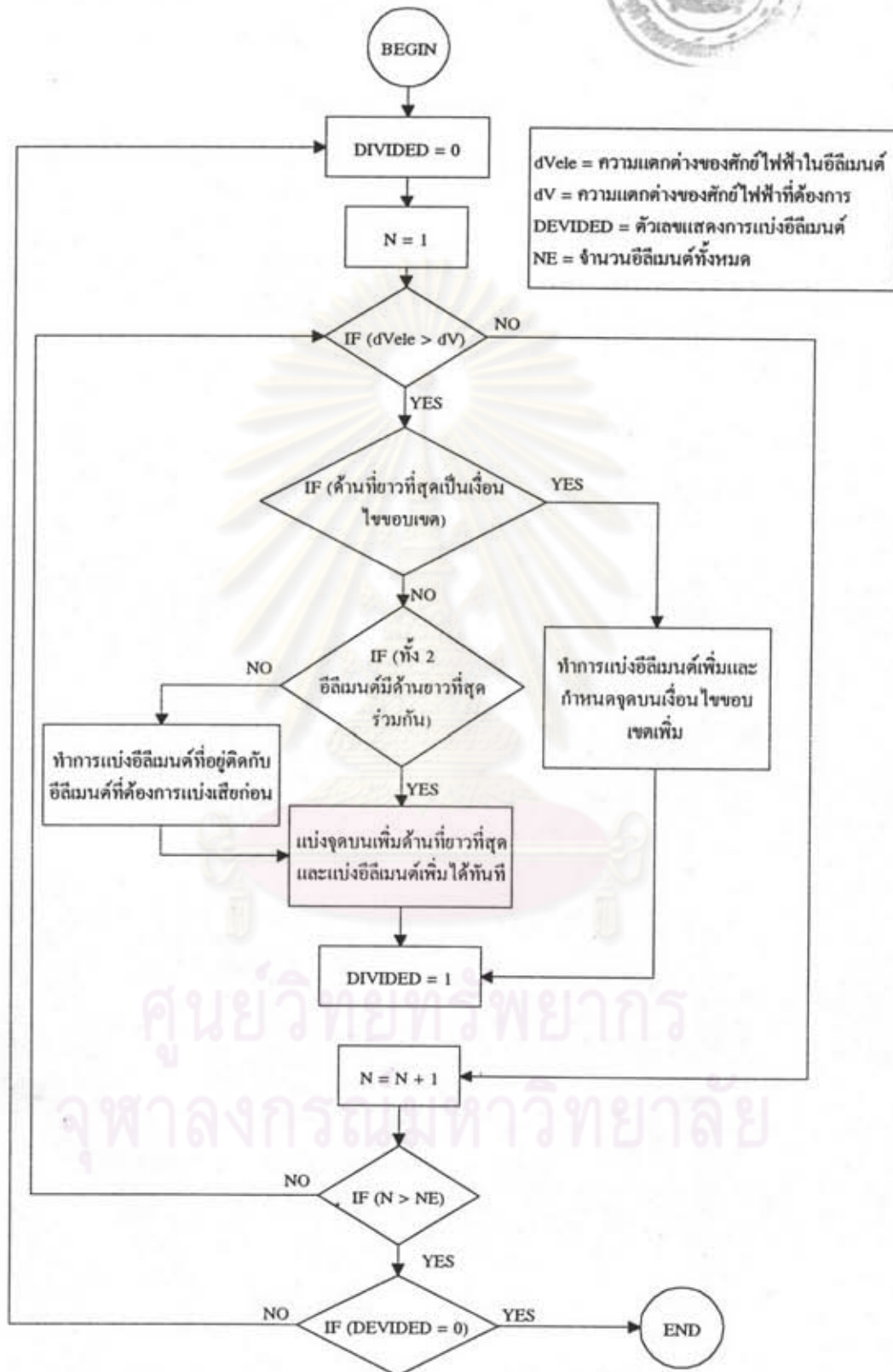


รูปที่ ก.3 ขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำของ Gauss-Siedal



อีลีเมนต์ที่ต้องการแบ่งย่อย

รูปที่ ก.4 การแบ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยม



รูปที่ ก.5 ขั้นตอนการแบ่งอิลีเมนต์ย่อย

### ก.3 ส่วนการประมวลผลการคำนวณและหาค่าแรงดันเริ่มต้น

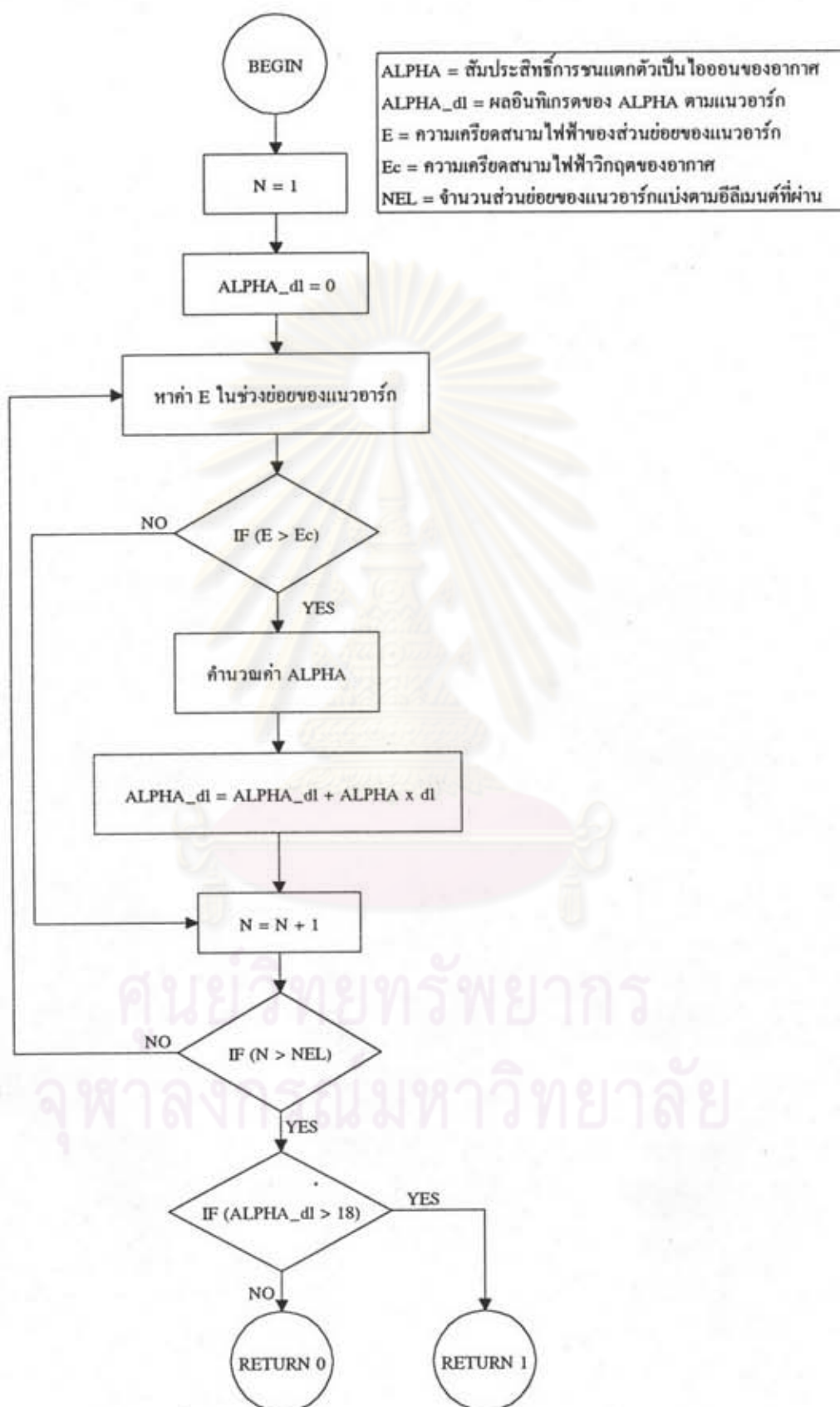
การประมวลผลการคำนวณจะเป็นการนำเสนอข้อมูลในแบบต่าง ๆ เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ผลการคำนวณได้ง่ายขึ้น ได้แก่ การแสดงรูปสัณยไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าตามแนวอาร์ก การแสดงรูปเส้นสัณยไฟฟ้าเท่า และการคำนวณหาค่าสัณยไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าตามจุดที่ต้องการ

การหาค่าแรงดันเริ่มต้นนั้นจะใช้เงื่อนไขของสตริมเมอร์ในการคำนวณ โดยปรับค่าของความต่างศักย์ระหว่างอิเล็กโทรดจนได้ค่าแรงดันเริ่มต้นที่สภาวะมาตรฐาน ขั้นตอนการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนตามเงื่อนไขสตริมเมอร์แสดงได้ดังรูปที่ ก.6



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





รูปที่ ก.6 ขั้นตอนการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนตามเงื่อนไขสตรีมเมอร์

## ภาคผนวก ข

### การหาค่าตัวประกอบแปลงผันความหนาแน่นอากาศ (Kd) และตัวประกอบแปลงผัน ความชื้น (Kh)

ความหนาแน่นและความชื้นของอากาศมีผลต่อแรงดันเริ่มต้นในอากาศ ในการทดลองหาแรงดันวาบไฟตามผิวแห้งความถี่ 50 Hz และการทดลองหาแรงดันวาบไฟตามผิวอิมพัลส์วิกฤตนั้น จะต้องทำการแปลงผันค่าแรงดันที่ได้จากการทดลองที่สภาวะห้องทดลองไปเป็นค่าที่สภาวะมาตรฐาน มอก.279-2521 กำหนดสภาวะมาตรฐานไว้ที่อุณหภูมิ 20°C ความดันอากาศ 760 มม.ปรอท ได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าที่สภาวะทดสอบกับค่าที่สภาวะมาตรฐานดังสมการ[1]

$$U_{bn} = U_b * K_h / K_d \quad (ข.1)$$

เมื่อ  $U_{bn}$  เป็น ค่าที่สภาวะมาตรฐาน

$U_b$  เป็น ค่าที่สภาวะห้องทดลอง

$K_d$  เป็น ตัวประกอบแปลงผันความหนาแน่นของอากาศ

$K_h$  เป็น ตัวประกอบแปลงผันความชื้น

#### ข.1 ตัวประกอบแปลงผันความหนาแน่นของอากาศ

ตัวประกอบแปลงผันความหนาแน่นของอากาศนั้น ขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของอากาศ

$\delta$  ที่คำนวณได้จากสมการ[1]

$$\delta = 0.386 \left( \frac{P}{273 + t} \right) \quad (ข.2)$$

เมื่อ  $p$  เป็น ความดันอากาศของห้องทดลอง มีหน่วยเป็น มม.ปรอท

$t$  เป็น อุณหภูมิห้องทดลองมีหน่วยเป็น องศาเซลเซียส

ตัวประกอบแปลงผันความหนาแน่นของอากาศ,  $K_d$  จะมีค่าเท่ากับความหนาแน่นของอากาศเมื่อ

$$0.9 < \delta < 1.05$$

## ข.2 ตัวประกอบแปลงผันความชื้น

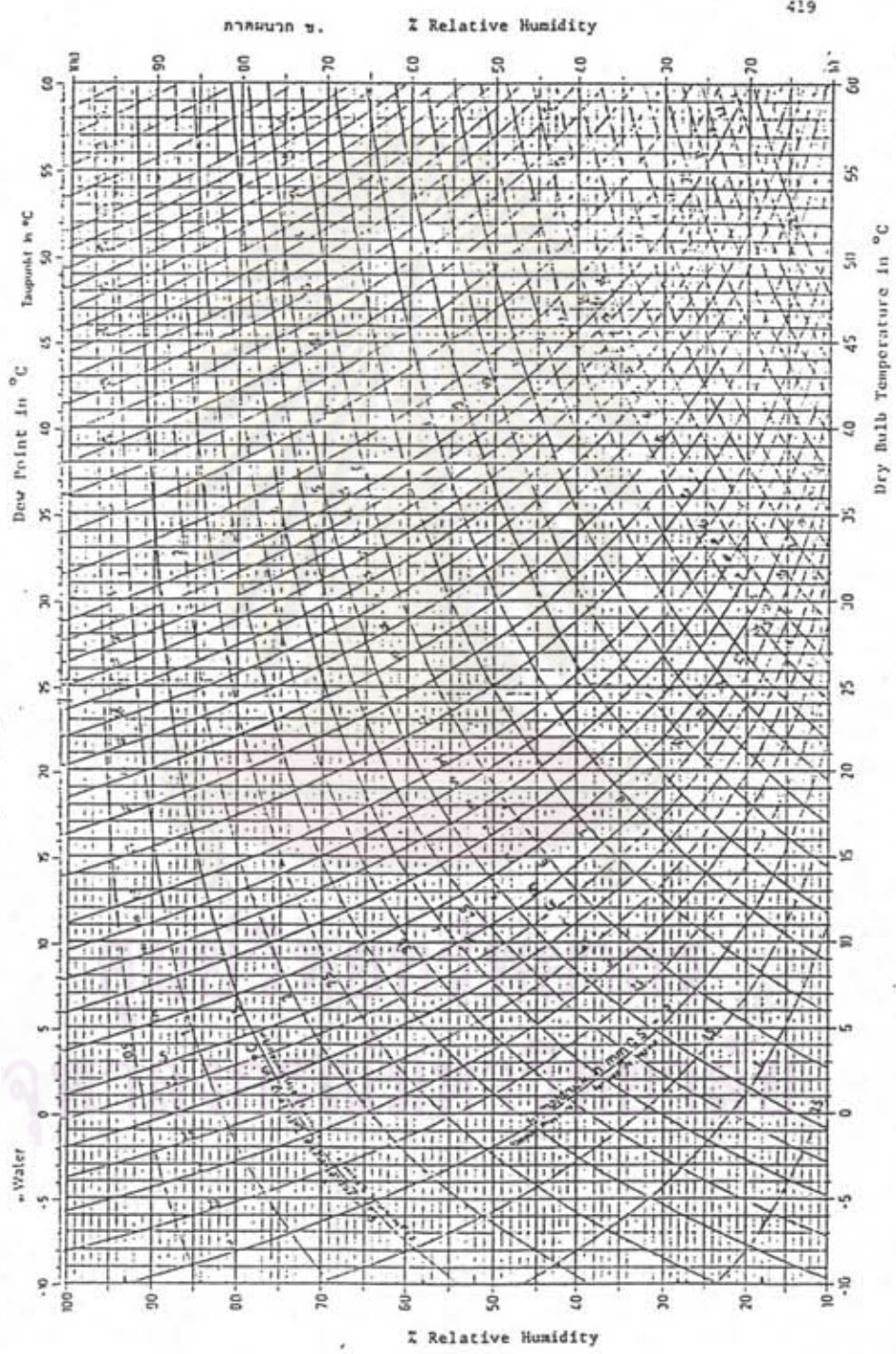
ตัวประกอบแปลงผันความชื้น,  $K_h$  นั้นจะขึ้นกับความดันไอของอากาศ รูปคลื่นแรงดัน และชนิดของลูกถ้วยฉนวน การหาค่าตัวประกอบแปลงผันความชื้น เราจะหาความดันไอของอากาศที่อุณหภูมิและความชื้นสัมพัทธ์ของห้องทดลองจากรูปที่ ข.1 [1] จากนั้นนำค่าความดันไอ (มม.ปรอท) ที่ได้ไปหาค่าตัวประกอบแปลงผันความชื้นจากรูปที่ ข.2 [1] ในกรณีแรงดันทดสอบ กระแสสลับความถี่ต่ำ และรูปที่ ข.3 [1] ในกรณีแรงดันทดสอบอิมพัลส์

จากค่าตัวประกอบแปลงผันความหนาแน่นของอากาศและตัวประกอบแปลงผันความชื้นที่ได้ เราจะแปลงผันค่าที่ได้จากการทดลองไปเป็นค่าที่สภาวะมาตรฐานด้วยสมการที่ ข.1 เพื่อที่จะสามารถนำค่าไปเปรียบเทียบกับมาตรฐานต่อไปได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

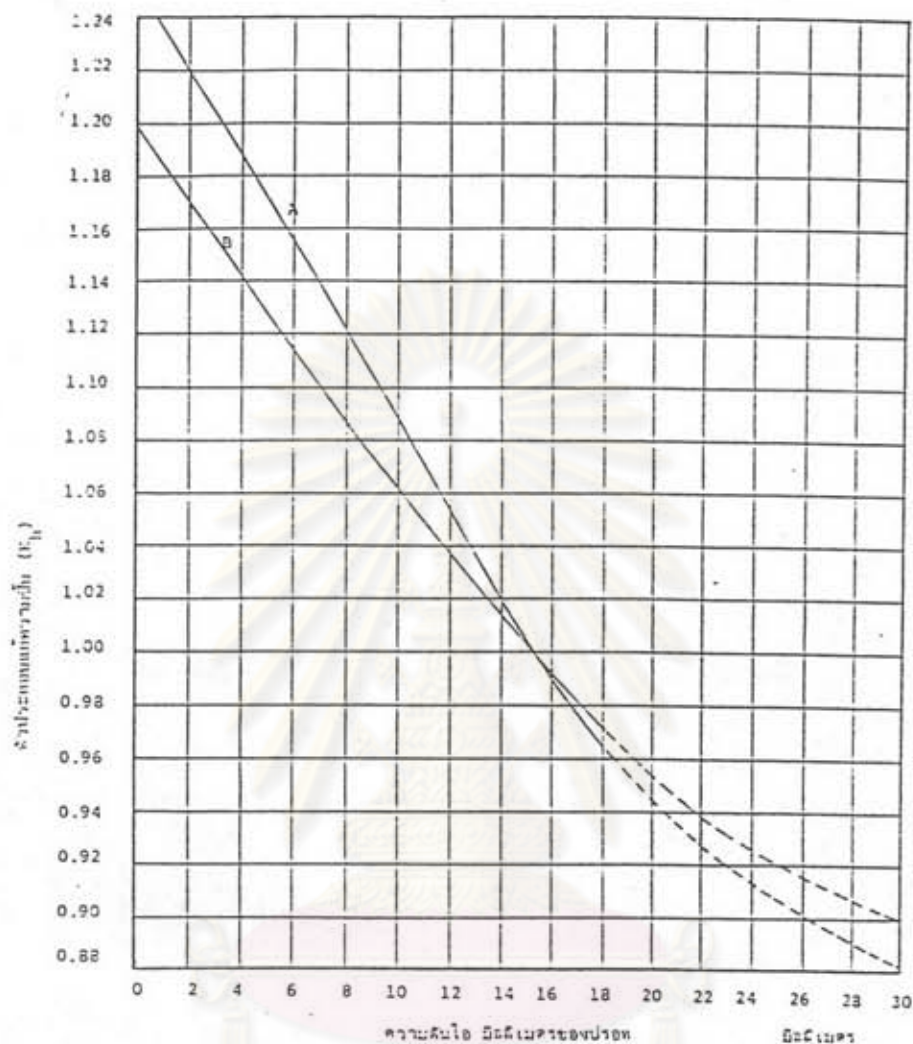


Psychrometer, Model No. 760b for Psychrometer with  $\rho$  : (in millimeters, velocity of air  $\geq 2$  m/sec)  
nach U.S.-Standard (W)



รูปที่ ข.1 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความชื้นไอกับความชื้นสัมพัทธ์และอุณหภูมิ





ตัวประกอบแก้ความชื้นสำหรับแรงดันทดสอบกระแสสลับความถี่ต่ำ  
(Low-frequency humidity correction factor)

เส้น A สำหรับชุดถ้วยก้านตรง ลูกถ้วยหลัก

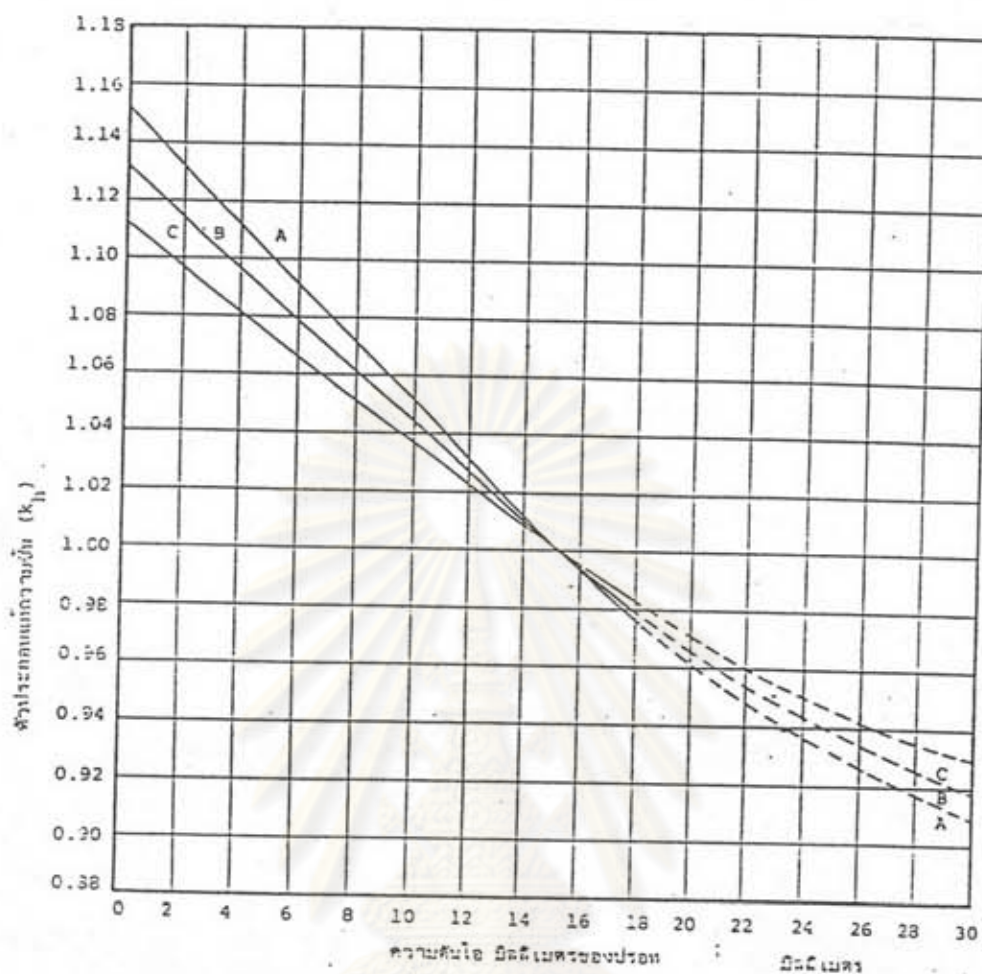
เส้น B สำหรับชุดถ้วยแขวน และชุดถ้วยรูปภาชนะน้ำแข็งรูป (apparatus insulators)

ในกรณีคำนวณความไวตามตัวต่ำกว่า 100 kV มหานครแก้ความชื้นจะเป็น

$$K'_h = 1 + \frac{U}{121} (K_h - 1)$$

เมื่อ U คือ แรงดันไฟฟ้าความถี่ต่ำ kV

รูปที่ ข.2 ตัวประกอบแปลงผันความชื้นสำหรับแรงดันทดสอบกระแสสลับความถี่ต่ำ



ตัวประกอบแก้ความชันสำหรับแรงดันทดสอบอิมพัลส์

- เส้น A สำหรับลูกถ้วยแขวน รูปสี่เหลี่ยม
- เส้น B สำหรับลูกถ้วยก้านตรง รูปสี่เหลี่ยม
- ลูกถ้วยแขวน รูปสี่เหลี่ยม
- ลูกถ้วยอุปกรณ์สำเร็จรูป รูปสี่เหลี่ยม
- เส้น C สำหรับลูกถ้วยก้านตรง รูปสี่เหลี่ยม
- ลูกถ้วยอุปกรณ์สำเร็จรูป รูปสี่เหลี่ยม

ในการวัดค่าแรงดันวาบให้ตามผิวค่ากว่า 141 kV แต่เซอร์แก้ความชันจะเป็น

$$k'_h = 1 + \frac{U}{141} (k_h - 1)$$

รูปที่ ข.3 ตัวประกอบแปลงผันความชันสำหรับแรงดันอิมพัลส์

ภาคผนวก ก

หลักการแปรผันในกรณีสนามไฟฟ้าสถิต

จากสมการพลังงาน

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega$$

ถ้าให้  $\phi' = \phi + \alpha \psi$

$\phi$  เป็นคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตและเป็นไปตามสมการลาปลาซ

$\psi$  เป็นฟังก์ชันหนึ่ง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

$\alpha$  เป็นตัวแปรที่แสดงถึงการแปรผันไปจากค่าคำตอบที่ถูกต้อง

จะพิสูจน์หลักการแปรผัน โดยแสดงให้เห็นว่า  $\phi'$  เป็นค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

ขอบเขต แต่จะได้  $\frac{\partial W}{\partial \phi'} = 0$  ก็ต่อเมื่อ  $\alpha$  มีค่าเป็นศูนย์ หรือ  $\phi' = \phi$  ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

ลาปลาซเท่านั้น

เมื่อ

$$\frac{\partial W}{\partial \phi'} = 0 \tag{ก.1}$$

และ

$$\alpha = 0 \quad (\phi' = \phi)$$

$$\partial \phi' = \partial (\phi + \alpha \psi)$$

$$\left( \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \alpha^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$W(\phi') = W(\phi) + \alpha^2 W(\psi) + 2\alpha \int_{\Omega} \epsilon \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$$

$$\int_{\Omega} \epsilon \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega = 0 \tag{ก.2}$$

จากทฤษฎีของ Green [12] และเงื่อนไขประจุในบริเวณฉนวนสมบูรณ์เท่ากับศูนย์ จะเขียนสมการที่ (ค.2) ใหม่ได้เป็น

$$\int_{\Omega} \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0$$

$$\varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (\text{ค.3})$$

สมการ (ค.1) เป็นเงื่อนไขค่าพลังงานไฟฟ้าต่ำที่สุด และสมการ (ค.3) เป็นสมการลาปลาซของบริเวณสนามไฟฟ้าสถิตย์ ดังนั้น จะเห็นได้ว่า สมการที่ (ค.1) และ (ค.3) จะเป็นจริงทั้งสองสมการได้ ก็ต่อเมื่อ  $\alpha$  มีค่าเท่ากับศูนย์ หรือ ค่า  $\phi'$  เป็นไปตามสมการลาปลาซเพียงกรณีเดียวเท่านั้น



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





### ประวัติผู้เขียน

นายบุญชัย เตชะอำนาจ เกิดวันที่ 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2513 ที่จังหวัด กรุงเทพมหานคร สำเร็จปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2532 และเข้าศึกษาต่อปริญญาโทในภาควิชาไฟฟ้า สาขาไฟฟ้ากำลัง และศึกษาวิจัยทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ภาคปีการศึกษา 2535



ศูนย์วิทยพัชการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย