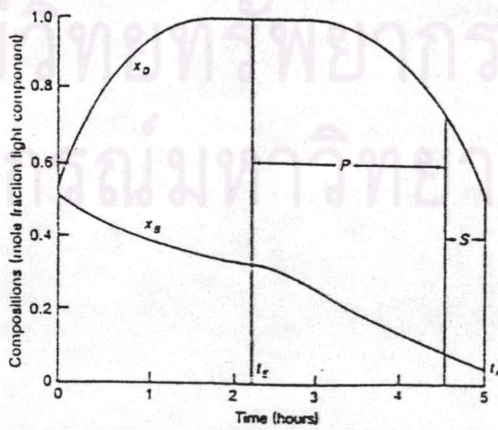
บทที่ 2

วารสารปริทัศน์

2.1 กระบวนการกลั่นแบบกะ [1]

กระบวนการกลั่นแบบกะมีความสำคัญในอุตสาหกรรมเคมีที่มีการผลิตสารปริมาณน้อยแต่ต้องการค่าความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์มาก ประโยชน์ของการกลั่นแบบกะคือ ใช้คอลัมน์เพียงหนึ่งคอลัมน์ในการแยกสารผสมออกเป็นสารบริสุทธิ์และการกลั่นแบบกะมีความยืดหยุ่นในการใช้งานมากกว่าการกลั่นแบบต่อเนื่องเพราะสามารถใช้งานกับช่วงองค์ประกอบของสารป้อนเข้าที่กว้างกว่า และให้ผลิตภัณฑ์ที่มีความบริสุทธิ์มากกว่า โดยเฉพาะกับกระบวนการการนำกลับมาใช้ใหม่ของตัวทำละลาย ในกระบวนการกลั่นแบบกะโดยทั่วไปของผสมจะป้อนเข้าสู่หม้อต้มแล้วให้ความร้อนจนของผสมกลายเป็นไอเข้าสู่ส่วนของเรกติฟลายอิ้งคอลัมน์ ไอจากด้านบนของคอลัมน์จะถูกทำให้เป็นของเหลวโดยเครื่องควบแน่น ของเหลวที่ได้บางส่วนจะส่งกลับเข้าสู่ด้านบนของคอลัมน์เป็นรีฟลักซ์ ของเหลวส่วนที่เหลือจะเก็บเป็นผลิตภัณฑ์ ในการกลั่นแบบกะองค์ประกอบของสารทุกจุดในคอลัมน์จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา จากรูปที่ 2.1 แสดงการเปลี่ยนแปลงองค์ประกอบของดีสทิลเลท (x_D) และองค์ประกอบก้นหอ (x_B) ของระบบการกลั่นสาร 2 องค์ประกอบ ที่ทำงานแบบรีฟลักซ์ทั้งหมดจะได้ผลิตภัณฑ์ 2 ชนิดและ 1 ช่วงตัดความชัน (slop cut) คือผลิตภัณฑ์ด้านบนที่ได้ขณะที่มีองค์ประกอบของสารที่หนักกว่ามากเกินไป



รูปที่ 2.1 การเปลี่ยนแปลงองค์ประกอบของดีสทิลเลท (x_D) และองค์ประกอบก้นหอ (x_B) ของระบบการกลั่นสาร 2 องค์ประกอบ [1]

การกลั่นแบบกะมีวัตถุประสงค์หลายอย่าง เช่น การลดเวลาของกะ, การผลิตสารผลิตภัณฑ์ให้ได้มากที่สุดในเวลาที่กำหนด เป็นต้น ค่าที่มีความสำคัญอย่างหนึ่งในการวัดศักยภาพก็คือ ค่าวิสัยความสามารถ (capacity factor : CAP) ซึ่งให้คำจำกัดความโดยลูเบน (Luyben)[2] ไว้ว่า ค่าวิสัยความสามารถ คือ ปริมาณผลิตภัณฑ์ที่ได้ตามต้องการทั้งหมดต่อเวลาทั้งหมดของกะ โดยสมมติให้เวลาในการป้อนสารใส่หม้อต้มเป็น T ชั่วโมง

$$CAP = \frac{\sum_{j=1}^{NC} P_j}{t_F + T} \tag{2.1}$$

จากคำจำกัดความนี้สมมติว่าผลิตภัณฑ์ทั้งหมดมีค่าทางเศรษฐศาสตร์ (economic value) เหมือนกัน เวลาทั้งหมดของกะ (t_F) เป็นชั่วโมงโดยรวมเวลาที่เป็นรีฟลักซ์ทั้งหมด เวลาที่ได้ผลิตภัณฑ์และเวลาในช่วงตัดความชัน ผลิตภัณฑ์ที่ได้ทั้งหมดจะเท่ากับปริมาณสารที่ป้อนเข้าสู่หม้อต้ม (H_{BO}) ลบด้วยปริมาณสารช่วงตัดความชัน เมื่อ P_j คือ ปริมาณผลิตภัณฑ์เป็นจำนวนโมลของสาร j

$$\sum_{j=1}^{NC} P_j = H_{BO} - \sum_{j=1}^{NC-1} S_j \tag{2.2}$$

ค่าวิสัยความสามารถ จะใช้งานในการออกแบบคอลัมน์ที่เหมาะสม โดยที่วิสัยความสามารถ จะเพิ่มมากขึ้นเมื่อจำนวนชั้นในหอกลั่นมากขึ้นเมื่อใช้อัตราการกลายเป็นไอเท่าเดิม

2.2 การประมาณค่าตัวแปรสภาวะ (State Estimation)

เป็นวิธีการหาค่าตัวแปรสภาวะจากการรู้ค่าตัวแปรขาเข้าและค่าตัวแปรขาออก[3] ของระบบ มีหลักการในการประมาณ 3 แบบดังนี้

2.2.1 Smoothing คือการประมาณค่าที่เวลา t โดยใช้ข้อมูลทั้งก่อนและหลังเวลา t เป็น การประมาณการแบบไม่เป็นลำดับ (nonsequential technique)

2.2.2 Filtering คือการประมาณค่าที่เวลา t โดยใช้ข้อมูลถึงเวลา t วิธีนี้เป็นเทคนิคที่ใช้กับการควบคุมแบบป้อนกลับและเป็นการประมาณค่าตัวแปรสภาวะ (state estimators) ที่ทันสมัยที่สุดและจัดว่าเป็นการประมาณค่าแบบเป็นลำดับ (sequential technique)

2.2.3 Prediction คือการประมาณค่าที่เวลา t โดยใช้ข้อมูลถึงเวลา t_1 เมื่อ $t > t_1$ โดยจะ extrapolate ข้อมูลที่วัดไปในเวลาอนาคตได้ การประมาณค่าแบบนี้จัดว่าเป็นการประมาณค่าแบบเป็นลำดับ(sequential technique)

โครงสร้างการคาดการณ์ค่า (prediction) [4] มีดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} \breve{x}(1/0) &= F[\hat{x}(0), u(0), 0] \\ \breve{y}(1/0) &= g[\hat{x}(0), u(0), 0] \end{aligned} \tag{2.3}$$

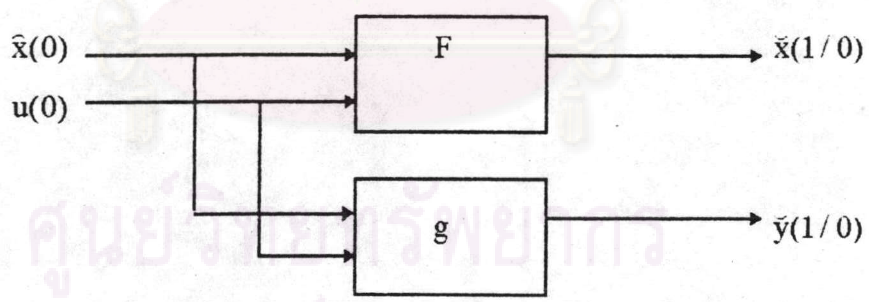
เมื่อ $\hat{x}$ คือ ค่าตัวแปรสภาวะที่ได้จากการคาดการณ์ (estimator)

$\breve{x}$ คือ ค่าตัวแปรสภาวะที่ได้จากการประมาณค่าจากข้อมูลก่อนหน้านี้(predictor)

$\breve{x}(1/0)$ คือ ค่าตัวแปรสภาวะที่ได้จากการประมาณค่าที่เวลา t=1 จากข้อมูลการการคาดการณ์ที่เวลา t=0

u คือ ค่าตัวแปรขาเข้าที่รู้ค่า

รูปที่ 2.2 แสดงแผนภูมิแบบการประมาณค่าตัวแปรสภาวะ



รูปที่ 2.2 การประมาณค่า 1 ขั้นตอนไปข้างหน้า [4]

ที่เวลา t=1 ค่าตัวแปรวัดค่าที่ได้จากการวัดค่าใหม่เป็น $y(1)$ และค่าความแตกต่างระหว่างตัวแปรวัดค่าได้กับค่าที่ได้จากการประมาณค่าก่อนล่วงหน้า $\breve{y}(1/0)$ เรียกว่าค่าความคลาดเคลื่อน (innovation)

$$\breve{e}_y(1/0) = y(1) - \breve{y}(1/0) \tag{2.4}$$

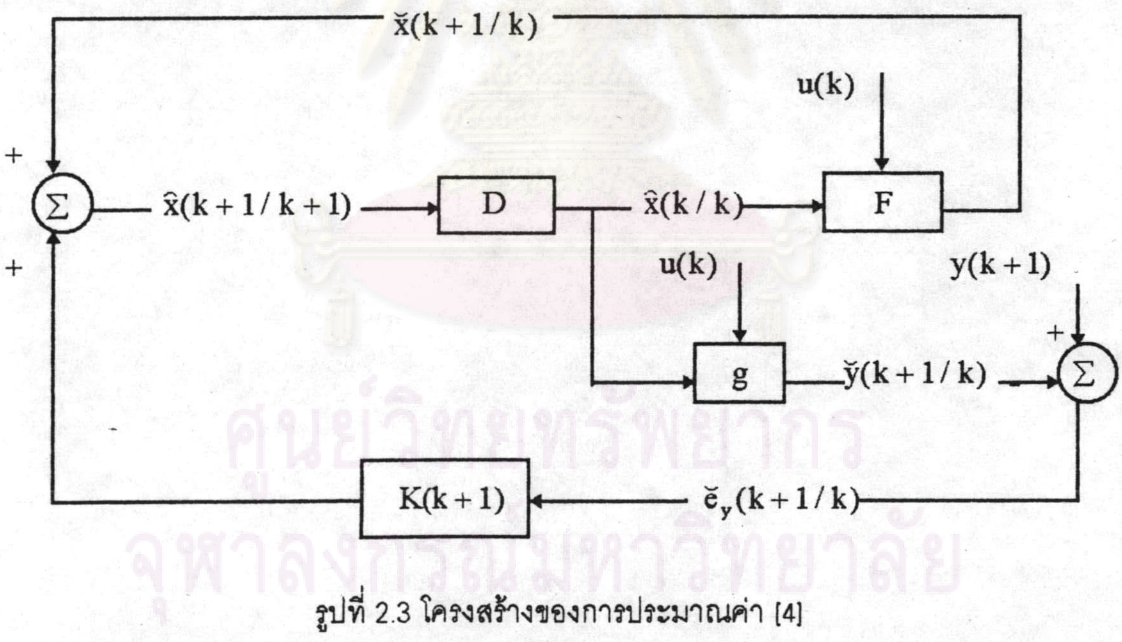
ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นค่าที่แสดงถึงความจำเป็นในการแก้ไขการประมาณค่า ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนน้อย แสดงว่าสามารถนำค่าจากการประมาณค่ามาใช้งานได้

$$\hat{x}(1/1) = \breve{x}(1/0) + K(1) \cdot \breve{e}_y(1/0) \tag{2.5}$$

$\hat{x}(1/1)$ คือค่าประมาณการที่เวลา t=1 เทียบกับค่าการประมาณค่าและค่าที่วัดได้จริงที่เวลา t=1 และเมื่อเขียนในรูปทั่วไปที่เวลา t=k+1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \breve{x}(k+1/k) &= F[\hat{x}(k/k), u(k), k] \\ \breve{y}(k+1/k) &= g[\hat{x}(k/k), u(k), k] \\ \breve{e}(k+1/k) &= y(k) - \breve{y}(k+1/k) \\ \hat{x}(k+1/k) &= \breve{x}(k+1/k) + K(k+1) \cdot \breve{e}_y(k+1/k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

ดูตามรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 โครงสร้างของการประมาณค่า [4]

ในรูปที่ 2.3 เริ่มจากค่าคาดการณ์ $\hat{x}(k/k)$ ถูกส่งผ่านกระบวนการและฟังชั่นการวัดได้ค่าการประมาณของตัวแปรสภาวะ $\breve{x}(k+1/k)$ และตัวแปรวัดค่าได้ $\breve{y}(k+1/k)$ และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่วัดได้จริง $y(k+1)$ จะได้ค่าความคลาดเคลื่อน $\breve{e}_y(k+1/k)$ และค่าเพื่อแก้ไข คือ $K(k+1/k) \cdot \breve{e}_y(k+1/k)$ และเมื่อนำค่าการแก้ไขมารวมกับค่าการประมาณ $\breve{x}(k+1/k)$ จะได้ค่าประมาณการค่าใหม่ $\hat{x}(k+1/k+1)$ ซึ่งเมื่อผ่านดีเลย์ออบเปอร์เรเตอร์ D

แล้วจะได้ค่าการประมาณที่เวลา t=k ซึ่งค่าประมาณการค่าใหม่นี้จะถูกนำมาเป็นค่าเริ่มต้นในการคาดการณ์ของตัวแปรสภาวะที่เวลาต่อไป กระบวนการนี้จะดำเนินการไปเรื่อยๆจนกว่าตัวแปรวัดค่าได้ $\breve{y}(k+1/k)$ จะเข้าใกล้ค่าที่วัดได้จริง $y(k+1)$ ภายในขอบเขตที่กำหนด การแก้ไขก็จะสิ้นสุดลง

2.3 ออบเซิร์ฟเวอร์และความสำคัญของออบเซิร์ฟเวอร์ [2]

หลักสำคัญในการกลั่นแบบกะคือความจำเป็นที่จะต้องทราบองค์ประกอบของสารที่กลั่นได้ที่เวลาต่างๆเพื่อใช้ในกระบวนการควบคุม แต่เนื่องจากอุปกรณ์ที่ใช้วัดค่าองค์ประกอบนั้นยังมีราคาแพง ดังนั้นตัวประมาณค่าตัวแปรสภาวะ (state estimator) จึงได้ถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าองค์ประกอบเหล่านี้ การศึกษาเกี่ยวกับการใช้ตัวประมาณค่าตัวแปรสภาวะนั้นมีมานานแล้ว แต่สำหรับการใช้ตัวประมาณค่าตัวแปรสภาวะกับระบบการกลั่นซึ่งมีความยุ่งยากซับซ้อนเพราะ กระบวนการเป็นระบบที่มีลำดับสูงและความสัมพันธ์ของตัวแปรไม่เป็นเชิงเส้น เพิ่งเริ่มเป็นที่สนใจในเมื่อไม่กี่ปีมานี้ เช่นในปี 1991 ควินเทอโร และ ลูเบน (Quintero and Luyben) [2] ได้ศึกษาการใช้ออบเซิร์ฟเวอร์ซึ่งเป็นตัวประมาณการสภาวะชนิดหนึ่ง เพื่อประมาณค่าองค์ประกอบในการกลั่นแบบกะของสารหลายชนิด โดยใช้แบบจำลองที่มีความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นในออบเซิร์ฟเวอร์เพื่อใช้ในการประมาณค่า ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป ดังนี้

ออบเซิร์ฟเวอร์เป็นแบบจำลองเชิงพลวัต (dynamic model) ที่ใช้ประมาณค่าตัวแปรสภาวะของกระบวนการ ออบเซิร์ฟเวอร์ได้ถูกนำมาใช้งานกับระบบบางระบบที่ค่าตัวแปรสภาวะไม่สามารถวัดได้หรือวัดได้แค่เพียงผลรวมของค่าตัวแปรสภาวะ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนก็คือ ในหอกลั่นสารหลายชนิด เราสามารถวัดอุณหภูมิในแต่ละชั้นได้ ซึ่งอุณหภูมินี้มีความสัมพันธ์กับองค์ประกอบและความดันของสารในแต่ละชั้นการกลั่น

คำว่า ออบเซิร์ฟเวอร์ เป็นคำที่ถูกเสนอขึ้นมาโดยลูอินเบอร์ก (Luenberger) [2] ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์สภาวะ (state vector) ของระบบที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้น (linear system) สามารถสร้างขึ้นมาจากการสังเกตค่าป้อนเข้า (input) และค่าขาออก (output) ของระบบ เทคนิคการออกแบบนั้นคล้ายคลึงกับการทำงานระบบการควบคุมแบบป้อนกลับ (feedback control) ค่าอัตราการขยาย (gain) ได้มาจากการกำหนดตำแหน่งรากของสมการ (poles) ของออบเซิร์ฟเวอร์วงจรปิด (closed loop observer) ให้อยู่ด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อน (complex plane) เพื่อที่จะกำจัดค่าความคลาดเคลื่อน (error:ผลต่างระหว่างค่าขาออกของกระบวนการที่วัดได้กับค่าขาออกของแบบจำลองที่ได้จากออบเซิร์ฟเวอร์)

ในปัจจุบันยังไม่มีทฤษฎีที่ดีพอที่จะอธิบายถึงออบเซิร์ฟเวอร์ที่มีความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear observer) และเนื่องจากความยุ่งยากซับซ้อนของระบบการกลั่นที่มีลำดับสูง ดังนั้นแบบจำลองที่ใช้จึงเป็นแบบจำลองที่ถูกทำให้มีความสัมพันธ์เชิงเส้น (linearized model) เพื่อที่จะใช้หาค่าอัตราการขยายของออบเซิร์ฟเวอร์ ซึ่งค่าอัตราการขยายเหล่านี้จะถูกใช้ร่วมกับแบบจำลองที่มีความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบและค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณการ (estimation error : ผลต่างระหว่างอุณหภูมิจริงกับอุณหภูมิที่ประมาณการ) เพื่อทำนายค่าตัวแปรสภาวะ

ในหอกลั่นแบบกะค่าตัวแปรสภาวะก็คือค่าองค์ประกอบของสารในแต่ละชั้นการกลั่น (หม้อไอน้ำ, ชั้นของคอลัมน์และหม้อเก็บรีฟลักซ์) ในกรณีที่รู้ค่าตัวแปรบ้างบางตัวเช่น อัตราการไหล ความดันและอุณหภูมิบางชั้นในคอลัมน์จะสามารถสร้างแบบจำลองเพื่อประมาณค่าองค์ประกอบของสารในแต่ละชั้นการกลั่นได้

2.3.1 โครงสร้างของออบเซิร์ฟเวอร์

สมการทั่วไปของระบบพลวัตที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้น (linear dynamic system) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{2.8}$$

เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์ของค่าตัวแปรสภาวะ, $\mathbf{u}$ คือ เวกเตอร์ของค่าป้อนเข้าที่รู้ค่า, $\mathbf{y}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่วัดค่าได้ (measured variable vector), $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ เป็นค่าคงที่ในรูปเมตริก โดยทั่วไปจะมีตัวแปรสภาวะมากกว่าตัวแปรขาออก และเวกเตอร์ $\mathbf{y}$ จะต้องเล็กกว่าเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ โดยที่เมตริก $\mathbf{A}$ จะต้องเป็นเมตริกจัตุรัส (square matrix)

$\mathbf{A}$ และ $\mathbf{C}$ เป็นเมตริกซึ่งมีสมาชิกตัวที่ ij เป็น

$$a_{ij} = \partial F_i / \partial x_j \tag{2.9}$$

$$c_{ij} = \partial g_i / \partial x_j \tag{2..10}$$

สมการ (2.9) และ (2.10) ใช้หาค่าที่ $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$

สำหรับหอกลั่นที่ใช้กับสาร 2 ชนิดที่ใช้ในการทดลอง ค่าเมตริก $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{C}$ ให้ไว้ในภาคผนวก ค

สมการออบเซิร์ฟเวอร์ของระบบนี้ คือ

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \tag{2.11}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{y} \tag{2.12}$$

หรือ

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A_0}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{y} \tag{2.13}$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{x}}$ คือ เวกเตอร์ของค่าตัวแปรสภาวะจากการประมาณค่า (estimated state variable vector) และ $\mathbf{K}$ คือ เมตริกอัตราการขยายของออบเซิร์ฟเวอร์

เพราะว่า $\hat{\mathbf{x}}$ คือ เวกเตอร์ของค่าตัวแปรสภาวะจากการประมาณค่า ดังนั้น

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \tag{2.14}$$

จึงเป็นเวกเตอร์ขาออกจากการประมาณค่า ความต้องการคือต้องการให้ $\hat{\mathbf{x}}$ เข้าใกล้ $\mathbf{x}$ ให้มากที่สุด ซึ่งถ้าออบเซิร์ฟเวอร์ทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพจะทำให้พจน์ $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ หรือ $\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ มีค่าน้อยจนเข้าใกล้ศูนย์ โดยที่จะเรียกพจน์

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \tag{2.15}$$

ว่า ค่าความคลาดเคลื่อนขาออกจากการประมาณค่า (output estimation error)

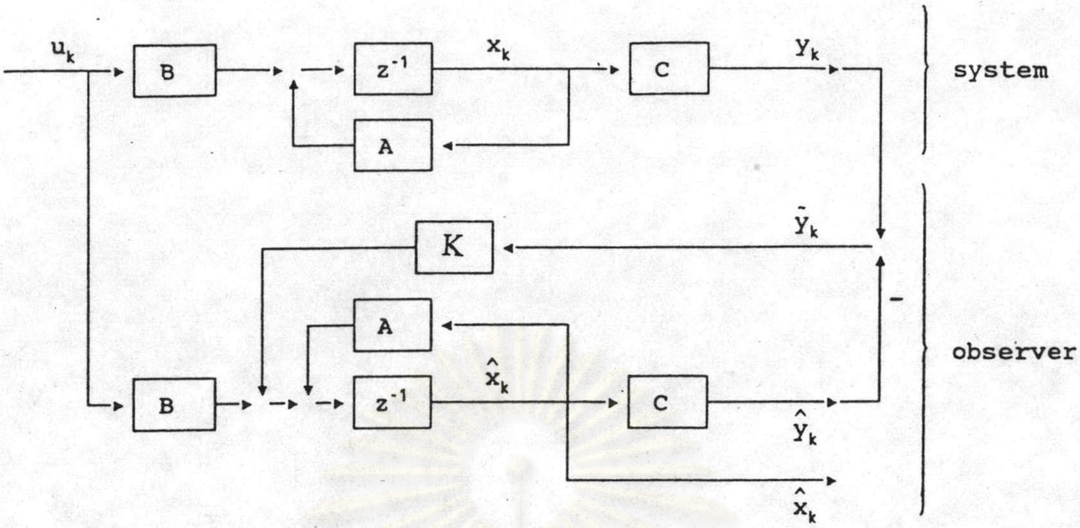
ค่าความคลาดเคลื่อนสภาวะจากการประมาณค่า (state estimation error) คือ

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \tag{2.16}$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k+1}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A_0}\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} \tag{2.17}$$

ค่า $\mathbf{K}$ ถูกเลือกเพื่อให้ค่าไอเก็น (eigenvalue) ของ $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ อยู่ด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อน ส่งผลคือถ้าค่าความคลาดเคลื่อนจะเข้าสู่ศูนย์ สภาวะการประมาณค่า (estimate state) จะเข้าสู่สภาวะจริง (actual state) ถ้า n เป็นลำดับของระบบและ m เป็นจำนวนตำแหน่งที่วัด เมตริก $\mathbf{A}$ จะเป็น nxn เมตริก, เมตริก $\mathbf{K}$ จะเป็น nxm เมตริกและเมตริก $\mathbf{C}$ จะเป็น mxn เมตริก



รูปที่ 2.4 ออบเซิร์ฟเวอร์สภาวะ (state observer) [5]

ถ้าใช้แบบจำลองที่มีความสัมพันธ์แบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นในงานออบเซิร์ฟเวอร์เพื่อประมาณค่าตัวแปรสภาวะ ออบเซิร์ฟเวอร์นั้นจะเรียกว่าออบเซิร์ฟเวอร์พิเศษ (extended observer) และสมการของแบบจำลองที่มีความสัมพันธ์แบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะเป็น

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{2.16}$$

$$y = g(x) \tag{2.17}$$

โดย F และ g เป็นฟังชั่นที่ไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้น (nonlinear function)

สมการของออบเซิร์ฟเวอร์ จะเป็น

$$\dot{\hat{x}} = F(\hat{x}, u) + K[y - h(\hat{x})] \tag{2.18}$$

$$\hat{y} = g(\hat{x}) \tag{2.19}$$

2.3.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ข้อสมมติในการสร้างแบบจำลอง มีดังนี้

- จำนวนชั้นและสารตกค้าง (hold up) ในหม้อเก็บรีฟลักซ์คงที่
- จำนวนโมลของสารที่ไหลเข้าและไหลออกจากชั้นเท่ากัน (equimolal overflow)

- ความสามารถในการกลายเป็นไอ (relative volatility) คงที่

- อัตราการระเหยเป็นไอของของผสม (vapor boilup rate) คงที่

ภายใต้ข้อสมมติเหล่านี้จะได้สมการดังนี้

หม้อต้มไอน้ำ

$$\mathrm{d}H_{\mathrm{B}} / \mathrm{d}t = -(V - R) \tag{2.22}$$

$$\mathrm{d}[H_{\mathrm{B}} x_{\mathrm{B},j}] / \mathrm{d}t = R x_{1j} - V y_{\mathrm{B},j} \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ NC-1 \tag{2.23}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (2.23) โดยใช้สมการ (2.22) จะได้

$$H_{\mathrm{B}} \mathrm{d}x_{\mathrm{B},j} / \mathrm{d}t = R[x_{1,j} - x_{\mathrm{B},j}] - V[y_{\mathrm{B},j} - x_{\mathrm{B},j}]$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ NC-1 \tag{2.24}$$

ชั้นที่ i

$$H_i \mathrm{d}x_{ij} / \mathrm{d}t = R[x_{i+1,j} - x_{ij}] - V[y_{i\text{-}1,j} - x_{ij}]$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ NC-1 \tag{2.25}$$

หม้อเก็บรีฟลักซ์

$$H_{\mathrm{D}} \mathrm{d}x_{\mathrm{D,j}} / \mathrm{d}t = V[y_{\mathrm{N,j}} - x_{\mathrm{D,j}}]$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ NC-1 \tag{2.26}$$

$$R = V - D \tag{2.27}$$

สมการสมดุลไอ-ของเหลว

$$y_{ij} = a_j x_{ij} / \sum_{k=1}^{NC} a_k x_{ik}$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ NC-1 \tag{2.28}$$

อัตราส่วนโดยโมล

$$x_{i,NC} = 1 - \sum_{k=1}^{NC\text{-}1} x_{ik} \tag{2.29}$$

เมื่อ *NC* คือ จำนวนขององค์ประกอบในของผสม และ N_t คือจำนวนชั้นในหอกลั่น

ค่าวิสัยความสามารถ (capacity factor : จำนวนผลิตภัณฑ์ที่ได้ตามความต้องการทั้งหมดหารด้วยเวลาทั้งหมดของกะ) หมายถึง

$$\mathrm{CAP} = \sum_{i=1}^{NC} P_i \,/\, (t_F + T) \tag{2.30}$$

อุณหภูมิบนชั้นที่ *m* สามารถคำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้

$$T_m = b_{1j} \Big/ \left[\ln(\alpha_j P / \sum_{k=1}^{NC} \alpha_k x_k) - b_{2j} \right] \tag{2.31}$$

m เป็นชั้นที่ติดตั้งเทอร์โมคัปเปิล (thermocouple) ไว้ สมการ (2.31) ได้มาจากการใช้กฎของเราท์ (Raoult's law) โดยที่ความดันไอของสารบริสุทธิ์ *j* สามารถเขียนโดยใช้สมการแอนโทนีน (Antonine equation) ได้เป็น

$$\ln P_j^{\circ} = \frac{b_{1j}}{T} + b_{2j} \tag{2.32}$$

2.3.3ความสามารถในการสังเกตการค่าตัวแปรสภาวะโดยใช้ค่าตัวแปรขาออก (observability)

เพื่อที่จะวางตำแหน่งค่าไอเก็นของเมตริกวงจรปิด $\mathbf{A_c} = \mathbf{A} - \mathbf{KC}$ที่ตำแหน่งใดๆ ระบบจะต้องมีความสามารถในการสังเกตการค่าตัวแปรสภาวะโดยใช้ค่าตัวแปรขาออก ถ้าเมตริก

$$\Xi = [\mathbf{C\ CA\ CA^2 \ldots\ CA^{k+1}}]^T \tag{2.33}$$

อยู่ในช่วง (rank) ของ *k*

ยู (Yu) และ ลูเบน (Luyben) [3] ใช้ข้อโต้แย้งเกี่ยวกับองศาความอิสระ (degree-of freedom argument) เพื่อแสดงว่าการสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรสภาวะของหอกลั่นสามารถทำได้ ถ้ามีจำนวนตัวแปรวัดค่าได้อย่างน้อย *NC*-1 ค่า โดย *NC* คือ จำนวนองค์ประกอบในของผสม สำหรับหอกลั่นที่ใช้กลั่นสาร 3 ชนิดมีชั้นการกลั่น 20 ชั้น ในการคำนวณหาค่าประมาณ

การพบว่าค่า condition number ซึ่งได้แก่ อัตราส่วนระหว่างค่าที่มากที่สุดกับค่าที่น้อยที่สุดของค่าซิงกูลา (singular value) ของเมตริกแสดงความสามารถในการสังเกตค่าตัวแปรสภาวะโดยใช้ค่าตัวแปรขาออก (observability matrix) มักมีค่าสูงมากๆ คือ 10^{30} การเพิ่มจำนวนค่าวัดได้ให้มากขึ้นจะทำให้ระบบมีค่า condition number ของเมตริกดังกล่าวลดลง (ภาคผนวก ง)

ตามทฤษฎี ออบเซิร์ฟเวอร์ที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นต้องการจำนวนค่าในการวัดอุณหภูมิเพียง *NC*-1 ค่า แต่สำหรับออบเซิร์ฟเวอร์ที่มีความสัมพันธ์แบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นต้องใช้การวัดอย่างน้อย *NC* ตำแหน่ง แต่เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้ถูกต้องและเสถียร (robust convergence) ต้องมีจำนวนการวัด *NC*+2 ค่า

ดังนั้นจำนวนตำแหน่งที่วัดจะไม่ขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นของหอกลั่น แต่จะขึ้นอยู่กับชนิดของสมการที่ใช้ในการสร้างแบบจำลอง การพบครั้งนี้มีความสำคัญมากเพราะในอุตสาหกรรมส่วนมากหอกลั่นจะมีจำนวนชั้นมากๆ

2.3.4 ตำแหน่งของรากของสมการแบบจำลองพลวัตรวงจรปิด

ถ้าระบบมีความสามารถในการสังเกตการค่าตัวแปรสภาวะโดยใช้ค่าตัวแปรขาออกและมีความสัมพันธ์เชิงเส้นแล้วตามทฤษฎีก็จะสามารถกำหนดค่าไอเก็นของเมตริกวงจรปิด $\mathbf{A_c = A - KC}$ ที่ตำแหน่งใดๆก็ได้ ระบบการกลั่นแบบกะจะมีความสามารถในการประมาณค่าตัวแปรสภาวะโดยใช้ค่าตัวแปรขาออกถ้ามีจำนวนค่าตัวแปรวัดค่าได้ *NC*-1 ค่า แต่ถ้ามีมากกว่านั้นองศาความอิสระที่เกินมา (extra degree of freedom) จะถูกนำมาใช้เพื่อลดค่าความไวต่อการเปลี่ยนแปลงของเมตริกวงจรปิด $\mathbf{A_c}$ ในกรณีนี้ตำแหน่งของรากสามารถหาได้จากการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ซึ่งใช้ลำดับการคำนวณ (algorithm) ของเคาสกี้ (Kautsky) [9]

ลูเบน (Luyben) [3] กล่าวเสริมว่าคำถามที่จะเกิดขึ้นก็คือ ตำแหน่งใดที่จะเหมาะสมที่จะกำหนดค่ารากของเมตริกวงจรปิด ค่าไอเก็นโดยทั่วไปสำหรับหอกลั่นแบบกะจะอยู่ในช่วง -10^{3} ถึง -10^{-15} (บางครั้งอาจเกิดความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณได้ค่าที่เป็นบวกเล็กน้อยคือ $+10^{-15}$) เป็นที่ทราบกันดีว่าออบเซิร์ฟเวอร์ให้ค่าตัวแปรสภาวะจากการประมาณออกมาเร็วกว่าระบบวงจรเปิดของจริง ดังนั้นค่าไอเก็นวงจรปิดควรมีตำแหน่งอยู่ทางด้านซ้ายของค่าไอเก็นวงจรเปิดในระนาบเชิงซ้อน แต่ยังไม่ทราบว่าค่าไอเก็นกี่ค่าที่จำเป็นต้องกำหนดตำแหน่งใหม่และควรจะเคลื่อนออกไปทางด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อนไกลแค่ไหนและต้องจำไว้อยู่เสมอว่าหอกลั่นเป็นระบบที่ซับซ้อน ดังนั้น ค่าตัวแปรสภาวะจึงมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ (ภาคผนวก จ)

หลังจากการทำทดลองหลายๆครั้ง ยู (Yu) และ ลูเบน (Luyben) [3] พบว่าวิธีที่ดีที่สุดที่จะวางตำแหน่งค่าไอเก็นใหม่ คือ เลือกเปลี่ยนค่าไอเก็นที่มีการตอบสนองช้าเป็นค่าใหม่ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น ตัวอย่างเช่น ถ้าระบบมีลำดับ 6 มีค่าไอเก็นวงจรเปิดของเมตริก $\mathbf{A}$ เป็น [-250,-190,-105, -38.5,-5.3,-2×10^{-14}] เมื่อเปลี่ยนค่าไอเก็นที่เล็กกว่า (การตอบสนองช้ากว่า : slower dynamic) และคงค่าที่ใหญ่กว่าไว้ (การตอบสนองเร็วกว่า: faster dynamic) ค่าของเมตริกวงจรปิดที่เปลี่ยนค่าใหม่แล้วจะมีค่าไอเก็นเป็น [-250,-190,-105,-38.5,-38,-37.5] ซึ่งทำให้แน่ใจได้ว่าค่าประมาณการจะไม่ออกจากช่วงการตอบสนองและจะมีค่าเข้าใกล้ค่าที่ถูกต้องในเวลาอันสั้นนับจากช่วงเวลาที่เริ่มทำการทดลองจนถึงเวลาก่อนที่จะปล่อยดิสทิลเลทในการกลั่นแบบกะ แต่ปัญหาที่จะพบเมื่อเปลี่ยนค่าไอเก็นให้ใหญ่ขึ้นก็คืออาจทำให้ระบบขาดเสถียรภาพได้

2.3.5 ตำแหน่งในการวัด

ผลจากการทดลองในช่วงแรกๆ ยู (Yu) และ ลูเบน (Luyben) [3] พบว่าต้องมีเทอร์โมคัปเปิล 1 ตัวเพื่อวัดอุณหภูมิในหม้อต้มไอน้ำ เนื่องจากหม้อต้มไอน้ำเป็นส่วนที่มีความเฉื่อยมากที่สุดในระบบ คำถามต่อมาก็คือ มีตำแหน่งใดอีกบ้างที่ต้องวัด คำตอบสามารถหาได้จากการใช้สามัญสำนึกในการวางเทอร์โมคัปเปิลให้มีระยะห่างเท่าๆกันทั้งด้านบนและด้านล่างของหอกลั่น

2.3.6 จำนวนตำแหน่งในการวัดและค่าคาดเดาสภาวะเริ่มต้น

ปัญหาสำคัญในการใช้ค่าประมาณการกับการกลั่นแบบกะก็คือ สภาวะเริ่มต้นในหอกลั่นและองค์ประกอบเริ่มต้นในหม้อต้มมักเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละกะ ดังนั้นถ้ารู้องค์ประกอบเริ่มต้นที่แท้จริงและมีแบบจำลองที่สมบูรณ์สำหรับหอกลั่นแล้ว การประมาณค่า (prediction) จากแบบจำลองก็จะสมบูรณ์มากขึ้น แต่ถ้าการคาดเดา (guess) องค์ประกอบเริ่มต้นในแบบจำลองไม่ตรงกับค่าจริงที่ใช้ถึงแม้ว่าจะมีแบบจำลองที่สมบูรณ์ก็จะได้ผลที่ไม่ถูกต้อง นอกจากนี้ค่าประมาณการจะต้องใช้ร่วมกับค่าคาดเดาสภาวะเริ่มต้นและผลที่ได้จะต้องเข้าใกล้ค่าจริงในหอกลั่นขณะอยู่ในช่วงเริ่มต้นของการทำงานแบบรีฟลักซ์ทั้งหมดโดยที่ยังไม่ปล่อยให้ดิสทิลเลทออกมา

2.3.7 การปรับค่าอัตราการขยายให้มีความถูกต้องมากขึ้น (gain updating)

ขณะที่อยู่ในช่วงการทำงานแบบกะ เมื่อหอกลั่นทำงานแบบรีฟลักซ์ทั้งหมดพบว่าค่าไอเก็นของระบบที่ทำให้มีความสัมพันธ์เชิงเส้นจะไม่เปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนองค์ประกอบซึ่งทำให้ได้ค่าอัตราการขยายตามสภาวะเริ่มต้น หลังจากค่าคาดเดาตรงกับค่าจริงแล้ว

ไม่จำเป็นต้องมีค่าอัตราการขยาย เนื่องจากไม่มีความแตกต่างของอุณหภูมิ (ไม่มีความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองและไม่มีการรบกวนระบบ)

สำหรับการกลั่นที่มีสภาวะเริ่มต้นที่ต่างกันแต่ค่าความสามารถในการระเหยได้ตลอดจนค่าไอเก็นระบบเปิดใกล้เคียงกันจะได้ชุดของค่าอัตราการขยาย ที่เหมือนกัน เช่น เมื่อเปลี่ยนค่าความสามารถในการระเหยได้ของระบบสาร 3 ชนิดจาก α = 9/ 3/ 1 เป็น α = 2.25/ 1.5/ 1 โดยใช้ค่าอัตราการขยายค่าเดียวกันจะได้ผลเช่นเดียวกันทั้ง 2 กรณี ถ้าค่าสภาวะเริ่มต้นที่คาดเดาไม่ไกลจากสภาวะเริ่มต้นจริงมากนัก ($\pm$20 %) การลู่เข้าของค่าจากการประมาณการของออบเซิร์ฟเวอร์จะไม่ขึ้นกับสภาวะเริ่มต้นตลอดเมตริกเชิงเส้นที่ใช้สำหรับหาค่าอัตราการขยาย ตัวอย่างเช่น ถ้าเริ่มต้นการทำงานที่ค่าเริ่มต้นค่าหนึ่ง ออบเซิร์ฟเวอร์จะให้ผลที่เพียงพอและสามารถใช้ค่าอัตราการขยาย ค่าเดิมกับการเปลี่ยนกะใหม่ได้

เมื่อพิจารณาสมการ (2.18) จะพบว่า สำหรับอุปกรณ์การวัดหนึ่งๆจะมีค่าอัตราการขยาย หนึ่งค่าสำหรับทุกๆตัวแปรสภาวะ เช่น หอกลั่น 22 ชั้น กลั่นสาร 2 ชนิดมีอุปกรณ์วัด 4 ตำแหน่งจะมีค่าอัตราการขยาย 88 ค่าคือค่าอัตราการขยาย 4 ค่าทุกๆตัวแปรสภาวะ

2.3.8 วิธีการออกแบบ

หลังจากการใช้ลำดับการคำนวณแบบลองผิดลองถูกหลายๆครั้ง ลำดับขั้นตอนที่ดีที่สุดในการออกแบบออบเซิร์ฟเวอร์สำหรับหอกลั่นแบบกะควรมีขั้นตอนดังนี้

1. เลือกตำแหน่งในการวัดอุณหภูมิ (อุปกรณ์วัดอุณหภูมิ *NC*+2 ตำแหน่งช่วยทำให้ระบุขอบเขตของคำตอบที่สมเหตุสมผลมากขึ้น)

2. สร้างแบบจำลองความสัมพันธ์เชิงเส้น (การ linerize model)

3. ใช้ค่าองค์ประกอบเฉลี่ยเพื่อหาเมตริก $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{C}$ เช่นในระบบสาร 3 ชนิด $x_1 = x_2 = x_3 =$ 1/ 3

4. หาค่าไอเก็นของ $\mathbf{A}$ (ค่าไอเก็นของระบบวงจรเปิด)

5. เลือกค่าไอเก็นวงจรปิด เปลี่ยนค่าไอเก็นวงจรเปิดที่มีค่าน้อย (การตอบสนองช้ากว่า) ให้มีค่ามากขึ้น (ตอบสนองเร็วขึ้น) จากกฎนิ้วหัวแม่มือ (rule of thumb) สามารถเปลี่ยนค่าไอเก็น ได้ *NC*-1 ค่าสำหรับทุกๆการวัดค่าที่เกิน *NC*-2 ค่า

6. หาค่าอัตราการขยาย $\mathbf{K}$ ที่ทำให้ค่าไอเก็นของ $\mathbf{A}-\mathbf{KC}$ ได้ตำแหน่งตามที่ต้องการ (ค่าไอเก็นวงจรปิด)

7. ใช้ค่าอัตราการขยาย ที่ได้จากขั้นตอนที่ 6 กับสมการที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นของแบบจำลอง (สมการ 2.10)

8.ถ้าค่าที่ได้จากการประมาณการมีค่าใกล้ค่าจริงก่อนจะดึงดิสทิลเลทออกและการตอบสนองของออบเซิร์ฟเวอร์ไม่แกว่งมากจนเกินไป การออกแบบออบเซิร์ฟเวอร์ก็ถือว่าเสร็จสิ้น

9.ถ้าค่าจากการประมาณการเข้าใกล้ค่าจริงไม่เร็วพอ ให้เลื่อนตำแหน่งค่าไอเก็นวงจรปิดไปทางซ้ายของระนาบเชิงซ้อนให้มากขึ้นแล้วกับไปทำขั้นตอนที่ 6 ใหม่ ถ้าค่าจากการประมาณการได้ค่าต่ำกว่าค่าที่ต้องการมากเกินไป (ระบบไม่เสถียร) ให้เพิ่มตำแหน่งในการวัดอุณหภูมิแล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 2 ใหม่

ในขณะทำการทดลองในขั้นตอนที่ 5 จะไม่มีผลของจำนวนชั้นเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ถ้าใช้จำนวนตำแหน่งในการวัดอุณหภูมิเท่ากันจะได้จำนวนค่าไอเก็นเท่าเดิมถึงแม้ว่าจำนวนชั้นในหอกลั่นจะเพิ่มขึ้นก็ตาม

2.3.9 สรุปผลการศึกษาในอดีต

การสร้างออบเซิร์ฟเวอร์แบบพิเศษ (extended Luenberger observer) จำเป็นต้องวัดค่าขาเข้า (อัตราการไหลของรีฟลักซ์, อัตราการไหลของไอน้ำ) และวัดอุณหภูมิในชั้นต่างๆ ข้อมูลที่วัดได้นี้จะถูกส่งไปยังออบเซิร์ฟเวอร์ โดยที่ค่าความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิที่วัดได้จริงกับอุณหภูมิที่ประมาณการจากแบบจำลองเมื่อคูณกับเมตริกของอัตราการขยาย K จะใช้เป็นค่าป้อนกลับสำหรับการคำนวณค่าองค์ประกอบของทุกๆชั้น ซึ่งผลต่างนี้เองที่ใช้ในการปรับแบบจำลองประมาณการค่าองค์ประกอบให้เข้าสู่ค่าจริง หลังจากนั้นจึงนำค่าองค์ประกอบที่ประมาณการได้มาใช้เพื่อการควบคุมต่อไป

การเข้าสู่ค่าจริงของค่าองค์ประกอบที่ประมาณการได้จะเร็วหรือช้าขึ้นอยู่กับเมตริกของอัตราการขยาย K ถ้าขนาดของเมตริกของอัตราการขยาย K ใหญ่จะทำให้ค่าเวลาคงที่วงจรปิดน้อย (small closed-loop time contant) และค่าไอเก็นเป็นลบมาก ระบบจะเคลื่อนเข้าสู่สภาวะจริงเร็ว แต่ถ้าเมตริกอัตราการขยาย K มีค่าใหญ่เกินไปผลการประมาณค่าจะเกิดการแกว่ง (underdamp) ทำให้ระบบไม่เสถียร

การหาเมตริกของอัตราการขยาย K ทำได้โดยวิธีการ pole-placement โดยการออกแบบออบเซิร์ฟเวอร์แบบพิเศษมีขั้นตอนคร่าวๆ ดังนี้

1. สมมติจำนวนตำแหน่งในการวัดอุณหภูมิ

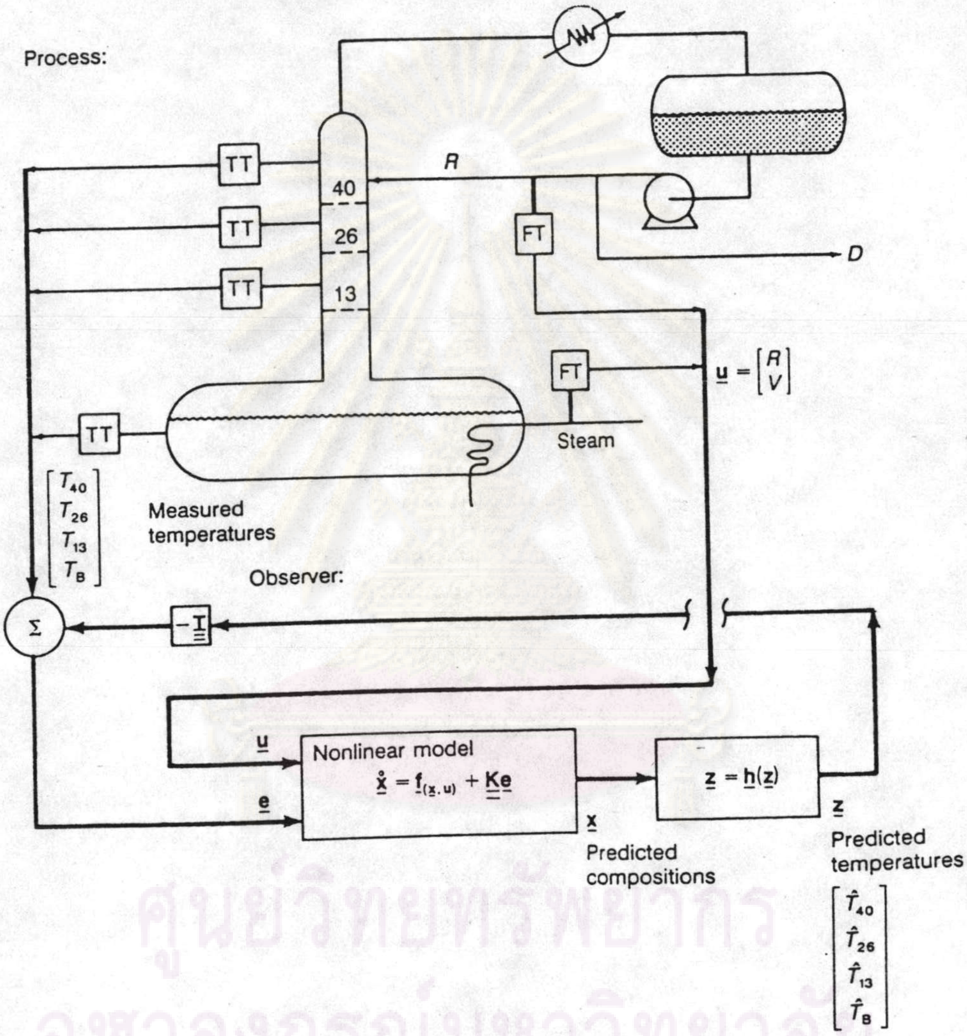
2. วางตำแหน่งการวัดอุณหภูมิที่ชั้นบนสุดของหอกลั่น, ชั้นหม้อต้มไอน้ำ และชั้นระหว่างนี้โดยให้มีระยะห่างของตำแหน่งการวัดเท่าๆกัน

3. ใช้แบบจำลองที่ทำให้มีความสัมพันธ์เชิงเส้นและใช้วิธีการ Pole-placement โดยการใช้ค่ารากสมการวงจรปิด แทนค่ารากสมการวงจรเปิดแต่เปลี่ยนค่ารากสมการที่เล็กๆของค่ารากสมการวงจรเปิดให้มีค่าเป็นลบ (อยู่ฝั่งซ้ายของระนาบเชิงซ้อน)

4. ถ้าการประมาณค่าของออบเซิร์ฟเวอร์ให้ค่าที่ลู่เข้าสู่ค่าจริงไม่เร็วพอให้เพิ่มจำนวนตำแหน่งในการวัดอุณหภูมิแล้วทำขั้นตอน 2 และ 3 ใหม่

นอกจากนี้ ควินเทอโร (Quintero) และ ลูเบน (Luyben) [2] พบว่าสามารถใช้เมตริกอัตราการขยาย K ค่าเดียวกันได้ตลอดการทำการทดลองโดยไม่ต้องเปลี่ยนค่า เนื่องจากค่าเมตริกอัตราการขยายที่ได้นี้สามารถให้ค่าประมาณการของค่าองค์ประกอบได้ดีตลอดการทำการทดลอง

รูปที่ 2.5 แสดงการนำข้อมูลเพื่อใช้งานกับออบเซิร์ฟเวอร์โดยใช้แบบจำลองที่มีความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น



รูปที่ 2.5 การนำข้อมูลเพื่อใช้งานกับออบเซิร์ฟเวอร์ [1]

2.3.10 Linear Quadratic Estimator (LQE) [4]

เป็นวิธีการประมาณค่าตัวแปรสภาวะอีกวิธีหนึ่งที่พิจารณาถึงการรบกวนระบบของสิ่งรบกวนภายนอก (noise) ในที่นี้จะขอกล่าวถึง คาลแมน ฟิลเตอร์ริง (Kalman filtering) [4] ซึ่งมีโครงสร้างคล้ายกันกับออบเซิร์ฟเวอร์ ดังรายละเอียดดังนี้

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F[x(k), u(k), w(k), k] \\ y(K+1) &= g[x(k), u(k), k] \end{aligned} \tag{2.34}$$

เมื่อ x(k) = เวกเตอร์ตัวแปรสภาวะของกระบวนการ

u(k) = เวกเตอร์ตัวแปรขาเข้าของกระบวนการ

w(k) = เวกเตอร์ของสิ่งรบกวนกระบวนการ

y(k) = เวกเตอร์ตัวแปรขาออก

k = เวลาในรูปแบบไม่ต่อเนื่อง

โดยทั่วไปแบบจำลองจะไม่แกว่งมากนักถ้า w(k) เป็นเวกเตอร์ของสิ่งรบกวนที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา สามารถเขียนในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$E\left[w(k)\right] = 0 \qquad \text{สำหรับทุกค่า } k \tag{2.35}$$

$$E\left[w(k)w^T(j)\right] = 0 \qquad \text{สำหรับทุกค่า } k \neq j \tag{2.36}$$

เมื่อ E เป็น expectation และ T หมายถึง transpose และเมื่อคิดว่าระบบมีสิ่งรบกวนจากการวัด (measurement noise) จะได้ว่า

$$y_m(k+1) = y(k+1) + v_y(k+1) \tag{2.37}$$

เมื่อ y = เวกเตอร์ของตัวแปรการวัด (ตัวแปรขาออก)

y_m = เวกเตอร์ของค่าการวัด

และเมื่อคิดว่าตัวแปรขาเข้ามีสิ่งรบกวนจากการวัดเช่นเดียวกันจะได้ว่า

$$u_m = u(k) + v_u(k) \tag{2.38}$$

สมมุติว่า v_y และ v_u เป็นสัญญาณของสิ่งรบกวน ดังนั้นสามารถเขียนสมการ 2.34 เมื่อต้องการประมาณค่าล่วงหน้าที่เวลา k+1 โดยใช้ข้อมูลอุณหภูมิที่เวลา k ได้เป็น

$$\begin{aligned} \breve{x}(k+1/k) &= F[\hat{x}(k/k), u_m(k/k), 0, k] \\ \breve{y}(k+1/k) &= g[\breve{x}(k/k), u_m(k/k), k] \end{aligned} \tag{2.39}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณสภาวะที่เวลา k+1 จะเป็น

$$\hat{e}(k+1/k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1/k+1) \tag{2.41}$$

และเมื่อแทนค่าลงในสมการ 2.6 ได้เป็น

$$\hat{e}(k+1/k+1) = x(k+1) - \breve{x}(k+1/k) - K(k+1)\breve{e}_y(k+1/k) \tag{2.42}$$

โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณการเขียนได้เป็น

$$\breve{e}(k+1/k) = x(k+1) - \breve{x}(k+1/k) \tag{2.43}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\hat{e}(k+1/k+1) = \breve{e}(k+1/k) - K(k+1)\breve{e}_y(k+1/k) \tag{2.44}$$

และเมื่ออ้างถึงสมการ 2.34 และ 2.39 จะได้ว่า

$$\breve{e}(k+1/k) = F\big[x(k), u(k), w(k), k\big] - F\big[\hat{x}(k/k), u_m(k), 0, k\big] \tag{2.45}$$

พจน์แรกด้านขวามือของสมการเมื่อเขียนใหม่ด้วยการใช้การกระจายพจน์โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ได้เป็น

$$F\big[x(k), u(k), w(k), k\big] = F\big[\hat{x}(k/k), u_m(k), 0, k\big] + \phi(k)\hat{e}(k/k) - \psi(k)v_u(k) + \Gamma(k)w(k) \tag{2.46}$$

แทนลงในสมการ 2.45 โดยไม่แสดงเวลาที่ k ได้เป็น

$$\breve{e}(k+1/k) = \phi\breve{e} - \psi v_u + \Gamma w \tag{2.47}$$

เมื่อ $\phi(k) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{x(k)=\hat{x}(k/k)}$ $\psi(k) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial u}\right|_{u(k)=u_m(k)}$

$$\Gamma(k) = \left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{w(k)=0} \qquad H(k) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x(k)=\hat{x}(k/k)}$$

$$\Omega(k) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u(k)=u_m(k)}$$

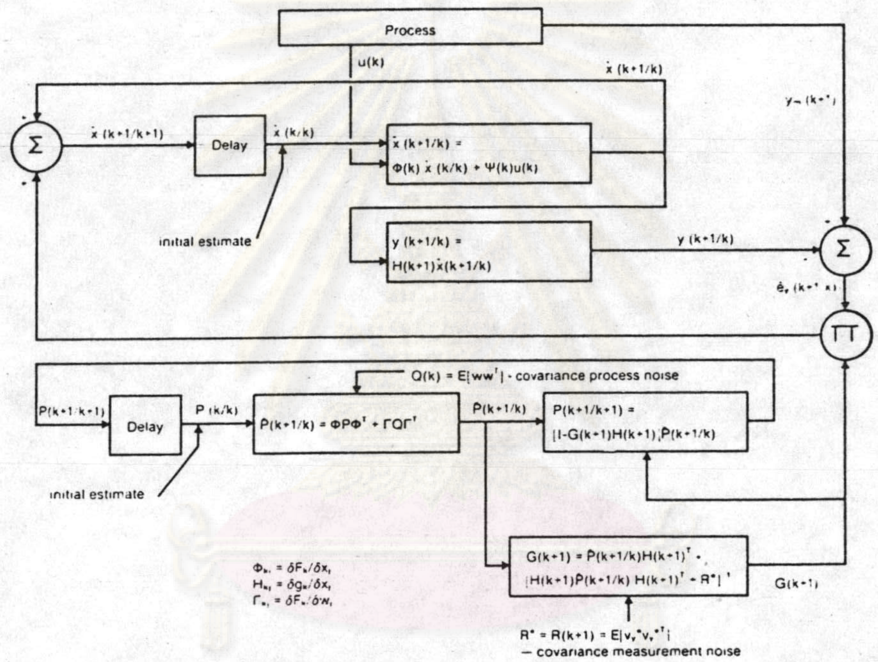
จากการหาค่าความแปรปรวน (variance) ของค่าความคลาดเคลื่อนการประมาณค่า จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \breve{P}(k+1/k) &= \phi P \phi^T + \psi N \psi^T + \Gamma Q \Gamma^T \\ \breve{P}_y(k+1/k) &= HPH^T + \Omega N \Omega^T + R^* \end{aligned} \tag{2.48}$$

โดยที่ $P(k) = E[\hat{e}\hat{e}^T]$

$$\begin{aligned} Q(k) &= E[ww^T] \\ N(k) &= E[v_u v_u^{\,T}] \\ R(k+1) &= R^* = E[v_y v_y^{\,T}] \end{aligned} \tag{2.49}$$

การคำนวณหาค่าเมตริกต่างๆสามารถทำได้โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB เช่นเดียวกันกับการกำหนดค่าอัตราการขยายของระบบวงจรปิดถูกกำหนดโดยอาศัยการคำนวณผ่านโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ดังที่แสดงไว้ในภาคผนวก ฉ



รูปที่ 2.6 แผนภูมิอย่างง่ายของคาลแมน ฟิลเตอร์ [4]