# บทที่ 3

## การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในบทนี้ จะกล่าวถึง การสร้างและรวม สมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในรูปง่ายจากกราฟ โดยมีการกำหนดตัวแปรและค่าคงที่ ในลักษณะต่าง ๆ ตลอดถึงการใช้วิธี the method of least squares ในการหาค่าคงที่ของสมการ สำหรับในการทดลองนั้นจะกำหนดตัวคงที่ และ ตัวแปร ดังนี้

ตัวคงที่ (Fix Parameter) คือ

- Air flow (G)
- Specific heat of air ($C_{pw}$)
- Packing constants (c, n)

ตัวแปร (Variable Parameter) คือ

- Water inlet temperature ($t_1$)
- Water outlet temperature ($t_2$)
- Water flow rate (W)
- Wet-bulb temperature (WBT)

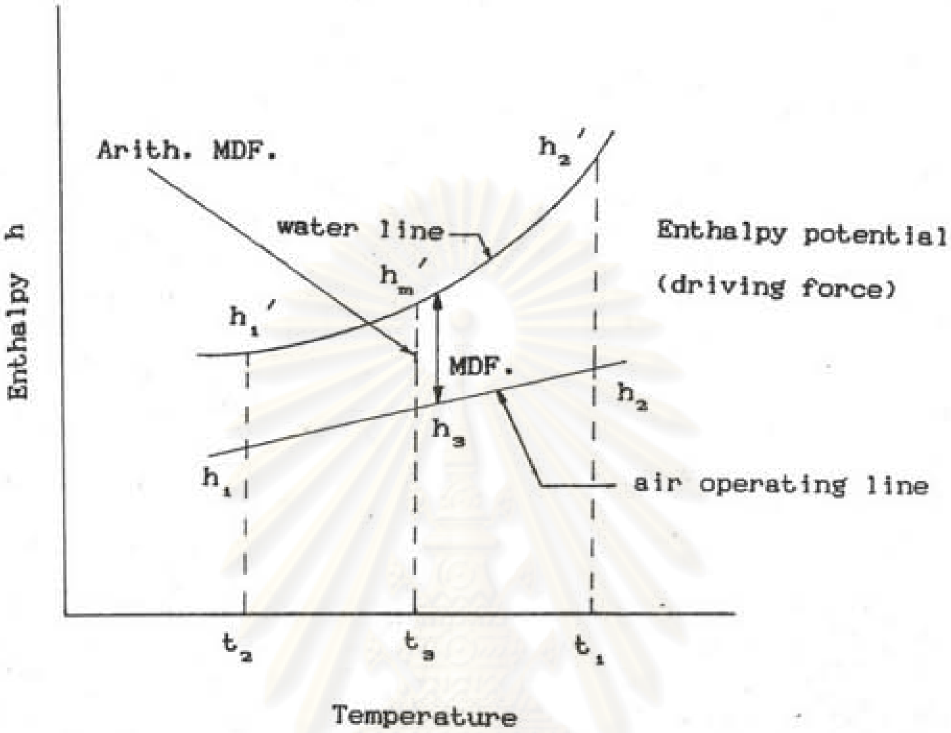
สำหรับค่า approach คือความสามารถในการทำความเย็นของหอผึ่งน้ำ ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่าง อุณหภูมิกระเปาะเปียกเป็นส่วนใหญ่ และมีผลต่ออุณหภูมิของน้ำที่ออกจากหอผึ่งน้ำ ซึ่งเขียนเป็นสมการแทนได้คือ

approach = อุณหภูมิของน้ำที่ออกจากหอผึ่งน้ำ - อุณหภูมิกระเปาะเปียก

ซึ่ง

$$\text{approach} = t_2 - \text{WBT} \qquad (3.1)$$

ค่า approach จะไม่นำมาคิด ในการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ เนื่องจากค่า approach นั้น ขึ้นกับค่า $t_2$ กับ WBT ซึ่งค่าทั้ง 2 นี้ ได้นำมาใช้เป็นตัวแปร ในการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อยู่แล้ว จึงไม่จำเป็นที่จะนำค่า approach มาใช้อีก




รูป 3.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง อุณหภูมิ กับ เอ็นทัลปี ที่ใช้คำนวณ



จาก สมการ (2.23) $\quad c * (W/G)^{-n} \quad = \quad \Delta t \,/\, (MDF.)$

ค่า $\quad \Delta t \quad = \quad t_1 - t_2 \quad = \quad R$

จากสมการ logarithmic mean temperature difference จะได้

$$MDF. = \frac{(h_2' - h_2) - (h_1' - h_1)}{\ln[(h_2' - h_2) / (h_1' - h_1)]} \qquad (3.2)$$

จากรูป 3.1 สามารถหาค่า $h_2$ ได้จาก

$$h_2 = h_1 + (W/G) * R \qquad (3.3)$$

จาก Psychrometric chart ค่า h จะเป็นฟังก์ชั่นของ $t_{db}$ และ $t_{wb}$

ซึ่งเขียนได้ว่า $h = f(t_{db}, t_{wb})$ (3.4)

$t_{db}$ คือ Dry-Bulb Temperture.

$t_{wb}$ คือ Wet-Bulb Temperture.

จากรูป 3.1 เนื่องจาก $h_2'$ และ $h_1'$ อยู่บนเส้น Water Line ซึ่งคือเส้น อากาศอิ่มตัวนั่นเอง (Saturated air) เส้นอากาศอิ่มตัวจะมีค่า $t_{db} = t_{wb}$ ดังนั้น $h_2'$ และ $h_1'$ จะเป็นฟังก์ชั่นของ $t_{wb}$ ในทำนองเดียวกัน $h_1$ คิดที่อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศที่เข้าหอผึ่งน้ำ $h_1$ จึงเป็นฟังก์ชั่นของ WBT ค่า $h_2$ หาได้โดยการคำนวณจากค่า $h_1$ ดังนั้น $h_2$ จึงเป็นฟังก์ชั่นของ R , W , WBT , G จะเขียนได้ว่า

$h_1' = f(t_2)$

$h_2' = f(t_1)$

$h_1 = f(WBT)$ ซึ่งค่า WBT อยู่บนเส้น air saturated line เหมือนกัน

$h_2 = f(t_1, t_2, W, WBT, G)$

เนื่องจาก $t_1 = t_2 + R$

จากฟังก์ชั่นข้างต้น สามารถเขียนในรูปฟังก์ชั่นของ MDF. ได้ว่า

$$MDF. = f(t_2, R, W, WBT, G) \quad (3.5)$$

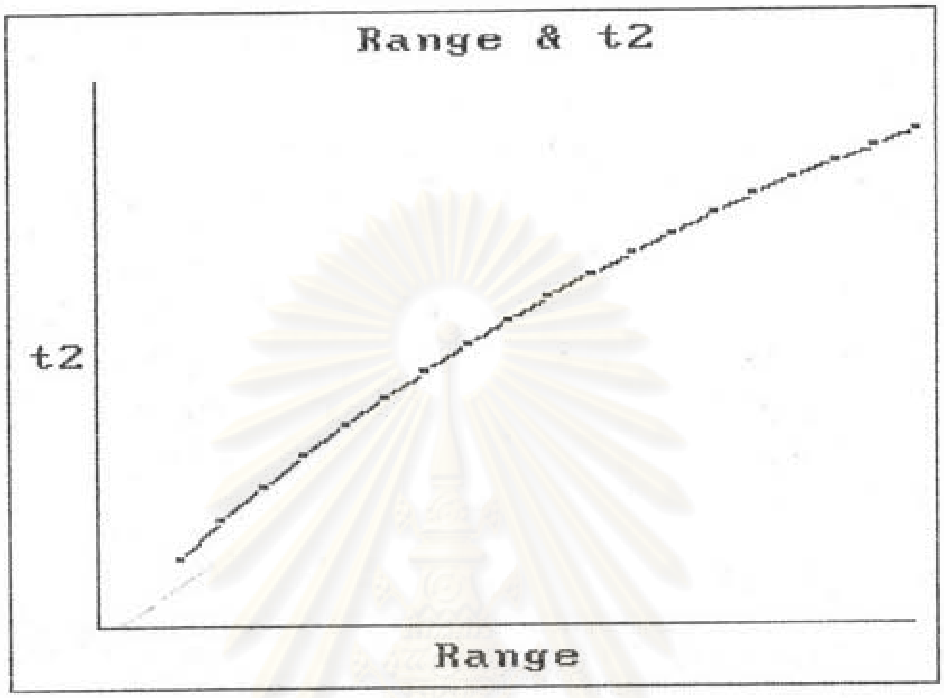
จาก สมการ (2.23) $c * (W/G)^{-n} = \Delta t / (MDF.)$

แทนค่า $\Delta t = R$ และ สมการ (3.5) ลงในสมการ (2.23) จะได้ว่า

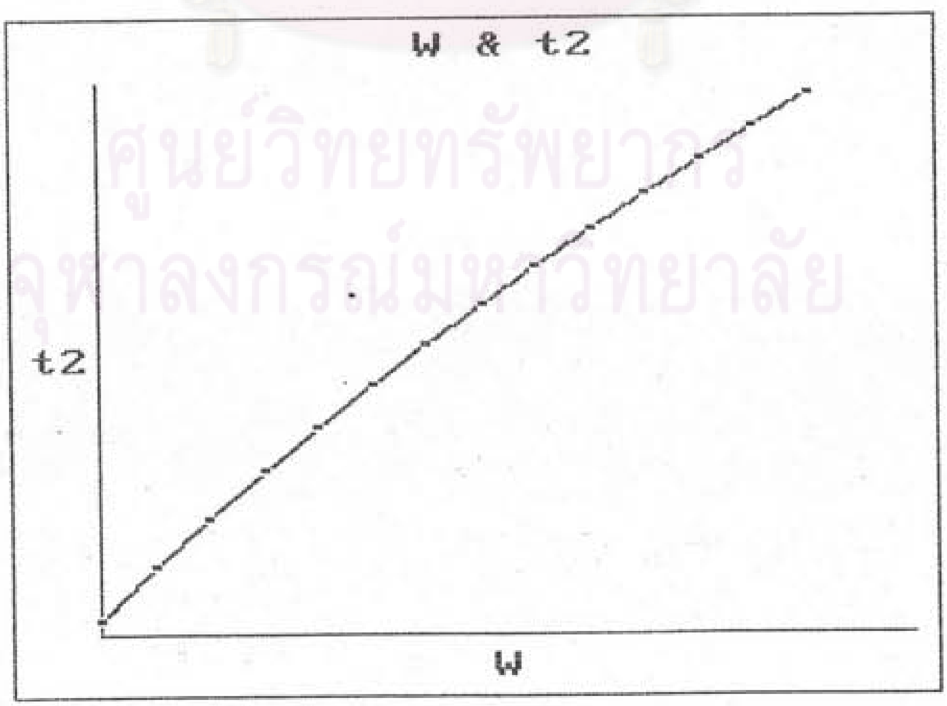
$$c * (W/G)^{-n} = R / f(t_2, R, W, WBT, G) \quad (3.6)$$

จากสมการ (3.6) ค่า c และ n เป็นค่าคงที่ของสมการ ที่สามารถหาค่าได้จากการทดลอง เพื่อสะดวกในการหาค่า จึงรวมค่าคงที่ c และ n เข้าในรูปของฟังก์ชั่น และจัดรูปใหม่ จะได้

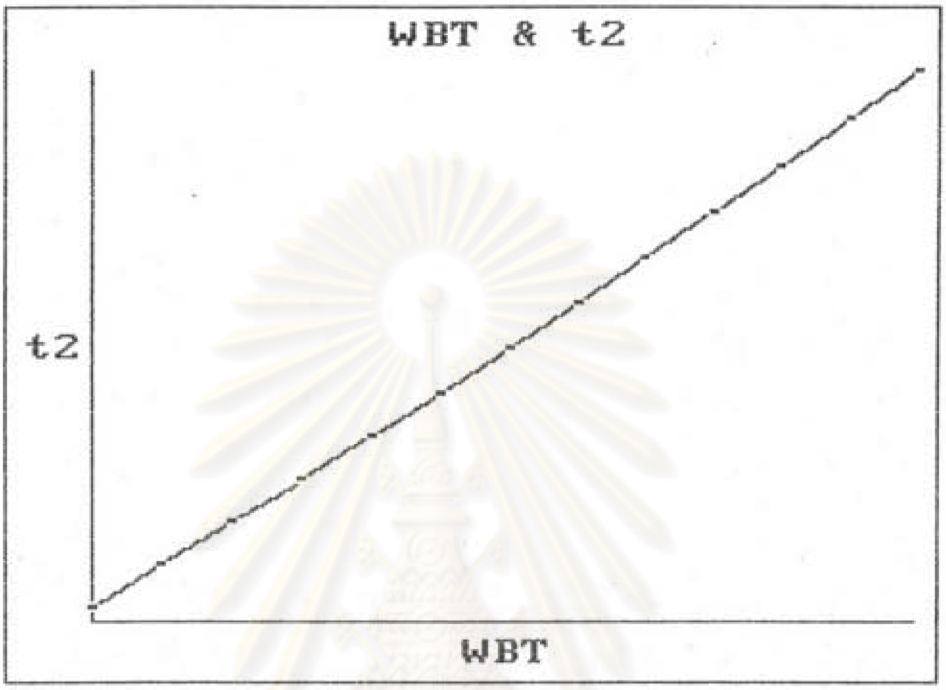
$$t_2 = f(R, W, WBT, G) \quad (3.7)$$




รูป 3.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Range กับ $t_2$ เมื่อ W , WBT , G คงที่




รูป 3.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง W กับ $t_2$ เมื่อ Range , WBT , G คงที่




รูป 3.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง WBT กับ $t_2$ เมื่อ Range , W , G คงที่

เนื่องจากรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์นั้น จะมีได้หลายรูปแบบ ขึ้นกับรูปใดจะสะดวกในการใช้งานนั้น ๆ มากที่สุด จึงขอเสนอรูปแบบไว้เพียง 5 แบบ ดังนี้ คือ

1. $t_2 = f(R , W , WBT)$

โดยที่ R , W , WBT เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variables)

$t_2$ เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

G เป็นตัวคงที่ (Fixed)

1.1 จากรูป 3.2 กราฟระหว่าง Range กับ $t_2$ มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งแบบ exponential จะมีสมการรูปง่ายที่สุดคือ

$$t_2 = a_1 + b_1*\ln(R)$$ (ดวงใจ วีสกุล และคณะ, 2526) (3.8)

โดยมี $R$ เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variable)

$t_2$ เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

และ $W$ , $WBT$ , $G$ เป็นตัวคงที่ (Fixed)

โดยที่ $a_1$ , $b_1$ = ค่าคงที่

$t_2$ = อุณหภูมิน้ำออกจากหอผึ่งน้ำ

$R$ = ผลต่างระหว่างอุณหภูมิของน้ำเข้าและออกจากหอผึ่งน้ำ

$W$ = อัตราการไหลของน้ำ

$WBT$ = อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศที่เข้าหอผึ่งน้ำ

$G$ = อัตราการไหลของอากาศ

1.2 ในทำนองเดียวกัน จากรูป 3.3 กราฟระหว่าง $W$ กับ $t_2$ มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งแบบ exponential จะมีสมการรูปง่ายที่สุดคือ

$$t_2 = a_2 + b_2*\ln(W) \qquad (3.9)$$

โดยมี $W$ เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variable)

$t_2$ เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

และ $R$ , $WBT$ , $G$ เป็นตัวคงที่ (Fixed)

โดยที่ $a_2$ , $b_2$ = ค่าคงที่

1.3 จากรูป 3.4 เป็นกราฟระหว่าง WBT กับ $t_2$ จะมีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งแบบ exponential จะมีสมการรูปง่ายที่สุดคือ

$$t_2 = a_3 b_3^{WBT} \qquad (3.10)$$

เนื่องจาก การทดลองมีความผิดพลาด เมื่อหาค่า $a_3 b_3^{WBT}$ จึงมีค่าความผิดพลาดเป็นอันดับเรขาคณิต และแนวโน้มของกราฟมีความโค้งน้อยมาก ดังนั้นจึงใช้สมการเส้นตรงแทนได้ว่า

$$t_2 = a_3 + b_3*WBT \qquad (3.11)$$

โดยมี WBT เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variable)

$t_2$ เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

และ W , R , G เป็นตัวคงที่ (Fixed)

โดยที่ $a_3$ , $b_3$ = ค่าคงที่

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น อาจเขียนในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในรูปของ

$$t_2 = f(R , W , WBT)$$

ได้ว่า

$$t_2 = c1 + c2*WBT + c3*\ln(W) + c4*WBT*\ln(W) + c5*\ln(R) + c6*WBT*\ln(R) + c7*\ln(W)*\ln(R) + c8*WBT*\ln(W)*\ln(R)$$

เมื่อ c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8 เป็นค่าคงที่

โดยมี R , W , WBT เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variables)

$t_2$ เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

และ G เป็นตัวคงที่ (Fixed)

จากสมการข้างต้นนี้ ได้มาจาก การรวมสมการ (3.8) , (3.9) , (3.11) ได้ว่า

$$t_2 = (a_1 + b_1 \ln(R)) * (a_2 + b_2 \ln(W)) * (a_3 + b_3 * WBT)$$

โดยมี $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ เป็นค่าคงที่

เมื่อกระจายเทอม จะได้

$$t_2 = a_1a_2a_3 + a_1a_2b_1 WBT + a_1a_3b_2 \ln(W) + a_1b_2b_3 WBT*\ln(W) + a_2a_3b_1 \ln(R) + a_2b_1b_3 WBT*\ln(R) + a_3b_1b_2 \ln(W)*\ln(R) + b_1b_2b_3 WBT*\ln(W)*\ln(R)$$

ถ้า $c1 = a_1a_2a_3$

$c2 = a_1a_2b_1$

$c3 = a_1a_3b_2$

$c4 = a_1b_2b_3$

$$c5 = a_2 a_3 b_1$$
$$c6 = a_2 b_1 b_3$$
$$c7 = a_3 b_1 b_2$$
$$c8 = b_1 b_2 b_3$$

จะได้

$$t_2 = c1 + c2*WBT + c3*\ln(W) + c4*WBT*\ln(W) + c5*\ln(R) + c6*WBT*\ln(R) + c7*\ln(W)*\ln(R) + c8*WBT*\ln(W)*\ln(R) \quad (3.12)$$

โดยวิธี the method of least squares

ข้อมูลที่ได้จากการทดลองจะอยู่ในรูป $(t_{2i}, R_i, W_i, WBT_i)$ มีอยู่ n จำนวน สมการที่ต้องการคือ :-

$$t_{2m} = c1 + c2*WBT + c3*\ln(W) + c4*WBT*\ln(W) + c5*\ln(R) + c6*WBT*\ln(R) + c7*\ln(W)*\ln(R) + c8*WBT*\ln(W)*\ln(R)$$

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น $e_i = t_{2i} - t_{2m}$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ที่ต้องการหาค่า c1 , c2 , c3 , c4 , c5 , c6 , c7 , c8 ซึ่งทำให้

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (t_{2i} - t_{2m})^2$$ มีค่าน้อยที่สุด

โดยที่ $t_{2i}$ = ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง
$t_{2i}$ = ข้อมูลที่ได้จากสมการ ที่สร้างขึ้น
$e_i$ = ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น
$E$ = ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยที่สุด

เนื่องจาก $E = \sum_{i=1}^{n} (t_{2i} - t_{2m})^2$

$$E = \sum_{i=1}^{n} [c1 + c2*WBT_i + c3*\ln(W_i) + c4*WBT_i*\ln(W_i) + c5*\ln(R_i) + c6*WBT_i*\ln(R_i) + c7*\ln(W_i)*\ln(R_i) + c8*WBT_i*\ln(W_i)*\ln(R_i) - t_{2i}]^2$$

ซึ่งสามารถหาค่า c1 , c2 , c3 , c4 , c5 , c6 , c7 , c8 ที่ทำให้ E มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ

$$\frac{\partial E}{\partial c1} = 2 \sum_{i=1}^{n} (c1 + c2*WBT_i + c3*\ln(W_i) + c4*WBT_i*\ln(W_i) + c5*\ln(R_i) + c6*WBT_i*\ln(R_i) + c7*\ln(W_i)*\ln(R_i) + c8*WBT_i*\ln(W_i)*\ln(R_i) - t_{2i})(1) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c2} = 2 \sum_{i=1}^{n} (c1 + c2*WBT_i + c3*\ln(W_i) + c4*WBT_i*\ln(W_i) + c5*\ln(R_i) + c6*WBT_i*\ln(R_i) + c7*\ln(W_i)*\ln(R_i) + c8*WBT_i*\ln(W_i)*\ln(R_i) - t_{2i})(WBT_i) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c3} = 2 \sum_{i=1}^{n} (c1 + c2*WBT_i + c3*\ln(W_i) + c4*WBT_i*\ln(W_i) + c5*\ln(R_i) + c6*WBT_i*\ln(R_i) + c7*\ln(W_i)*\ln(R_i) + c8*WBT_i*\ln(W_i)*\ln(R_i) - t_{2i})(\ln(W_i)) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้สมการ $\frac{\partial E}{\partial c4} = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial c5} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c6} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c7} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c8} = 0$$

จัดรูปจะได้

$$nc1 + c2\Sigma WBT_i + c3\Sigma \ln(W_i) + c4\Sigma WBT_i \ln(W_i) + c5\Sigma \ln(R_i) + c6\Sigma WBT_i \ln(R_i) + c7\Sigma \ln(W_i)\ln(R_i) + c8\Sigma WBT_i \ln(W_i)\ln(R_i) = \Sigma t_{2i}$$

$$c1\Sigma WBT_i + c2\Sigma (WBT_i)^2 + c3\Sigma WBT_i \ln(W_i) + c4\Sigma (WBT_i)^2 \ln(W_i) + c5\Sigma WBT_i \ln(R_i) + c6\Sigma (WBT_i)^2 \ln(R_i) + c7\Sigma WBT_i \ln(W_i)\ln(R_i) + c8\Sigma (WBT_i)^2 \ln(W_i)\ln(R_i) = \Sigma t_{2i} WBT_i$$

$$c1\Sigma \ln(W_i) + c2\Sigma WBT_i \ln(W_i) + c3\Sigma \ln(W_i)^2 + c4\Sigma WBT_i \ln(W_i)^2 + c5\Sigma \ln(W_i)\ln(R_i) + c6\Sigma WBT_i \ln(W_i)\ln(R_i) + c7\Sigma \ln(W_i)^2 \ln(R_i) + c8\Sigma WBT_i \ln(W_i)^2 \ln(R_i) = \Sigma t_{2i} \ln(W_i)$$

ในทำนองเดียวกัน จะกระจายเทอมอื่น ๆ ได้ รวมทั้งหมด 8 สมการ และมีค่าคงที่ทั้งหมด 8 ค่า ซึ่งสามารถหาค่า c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8 ได้

การทำวิจัยนี้ได้ใช้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป ทางสถิติ ชื่อ Micro TSP. Version 5.0 ในการหาค่า คงที่ c1, c2, c3, ...,c8 โดยวิธี the method of least squares นอกจากนี้ ยังสามารถหาค่า $R^2$ , S และ ค่าทางสถิติอื่น ๆ ได้อีกด้วย

2. Ton = f(WBT)

โดยที่ W , WBT เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variables)

Ton เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

$t_2$ , R , G เป็นตัวคงที่ (Fixed)

จากสมการ (2.24) $Ton = 0.3307\ W_m\ R_m$

เมื่อเปลี่ยนแปลงหน่วยที่ใช้ และเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชั่น จะได้ว่า

$$Ton = f(R , W) \qquad (3.13)$$

จาก สมการ (3.7) $t_2 = f(R , W , WBT , G)$

จากฟังก์ชั่นข้างต้น ถ้า มีตัวคงที่ (fixed) $t_2$ , R , G

มีตัวแปร (variable) Ton , W , WBT

จากสมการ (3.13) จะได้ Ton = f(W) (โดยคงที่ R)

จากสมการ (3.7) จะได้ W = f(WBT) (โดยคงที่ R , G , $t_2$)

ดังนั้น สามารถจัดรูปได้ Ton = f(WBT)

ในทำนองเดียวกันจะใช้กราฟที่ได้จากผลการทดลอง หาสมการรูปที่ง่ายจากกราฟ และใช้วิธี the method of least squares หาค่าคงที่ของสมการ ก็สามารถเขียนสมการได้ในเทอมของ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

3. Ton = f($t_2$)

โดยที่ $t_2$ , W เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variables)

Ton เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

R , WBT , G เป็นตัวคงที่ (Fixed)

ในทำนองเดียวกันกับ ข้อ 2. โดยใช้สมการ (3.7) และ (3.13) จะได้

จาก สมการ (3.13) Ton = f(R , W)

จาก สมการ (3.7) $t_2$ = f(R , W , WBT , G)

โดยกำหนดให้ ตัวคงที่ (Fixed) R , WBT , G

ตัวแปร (Variable) $t_2$ , Ton , W

จากสมการ (3.13) จะได้ Ton = f(W) (โดยคงที่ R)

จากสมการ (3.7) จะได้ W = f($t_2$) (โดยคงที่ R , WBT , G)

ดังนั้น สามารถจัดรูปได้ Ton = f($t_2$)

ในทำนองเดียวกันจะใช้กราฟที่ได้จากผลการทดลอง หาสมการรูปที่ง่ายจากกราฟ และใช้วิธี the method of least squares หาค่าคงที่ของสมการ ก็สามารถเขียนสมการได้ในเทอมของ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

4. $t_2$ = f(W , WBT)

| | | |
|---|---|---|
| โดยที่ | W , WBT | เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variables) |
| | $t_2$ | เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable) |
| | $t_1$ , G | เป็นตัวคงที่ (Fixed) |

ในการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ จะใช้ R เป็นตัวแปรหรือตัวคงที่ เพราะค่านี้เป็นค่าที่สำคัญ แต่ก็อาจใช้ตัวแปร $t_1$ แทนได้ ดังนี้

จาก สมการ (3.7) $t_2$ = f(R , W , WBT , G)

แต่ $t_1 - t_2 = R$

ซึ่งสามารถจัดใหม่ได้ว่า $t_2$ = f($t_1$ , W , WBT , G) (3.14)

ถ้า มีค่าคงที่ (Fixed) $t_1$, G

มีตัวแปร (Variables) $t_2$ , W , WBT

สามารถจัดรูปได้ $t_2 = f(W, WBT)$

ในทำนองเดียวกันจะใช้กราฟที่ได้จากผลการทดลอง หาสมการรูปที่ง่ายจากกราฟ และใช้วิธี the method of least squares หาค่าคงที่ของสมการ ก็สามารถเขียนสมการได้ในเทอมของ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

5. $t_2 = f(W)$

โดยที่ $W$ เป็นตัวแปรอิสระ (Independent Variables)
$t_2$ เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)
$t_1$ , WBT , G เป็นตัวคงที่ (Fixed)

จากสมการ (3.14) $t_2 = f(t_1 , W , WBT , G)$

ถ้า มีค่าคงที่ (Fixed) $t_1$ , WBT , G
มีตัวแปร (Variables) $t_2$ , W

สามารถจัดรูปได้ $t_2 = f(W)$

ในทำนองเดียวกันจะใช้กราฟที่ได้จากผลการทดลอง หาสมการรูปที่ง่ายจากกราฟ และใช้วิธี the method of least squares หาค่าคงที่ของสมการ ก็สามารถเขียนสมการได้ในเทอมของ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์