บทที่ 2

ตัวสถิติและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ จะกล่าวถึงรายละเอียด ของตัวสถิติที่ใช้ ในการทดสอบการแจกแจงแบบแกมม่า พร้อมทั้ง ตัวอย่างการใช้ตัวสถิติทดสอบ และนำเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ

2.1.1 ตัวสถิติทดสอบ Gini (Gini test statistic) : G_n

Gail และ Gastwirth (ค.ศ. 1978) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ Gini(G_n) สำหรับทดสอบการแจกแจงแบบแกมม่า ซึ่งตัวสถิติทดสอบนี้ เป็นตัวสถิติทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (Goodness of fit test) ที่ใช้สำหรับทดสอบลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นของข้อมูลที่ได้จากตัวอย่าง ว่ามีการกระจายของกลุ่มประชากรเป็นแบบใด ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$G_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\, W_{i+1} \right) / (n-1) \sum_{i=1}^{n} W_i$$

เมื่อ $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ เป็นข้อมูลอันดับขนาด n

กำหนด $W_i = (n-i+1)(t_i - t_{i-1})$; $i=1, 2, \ldots, n$

$t_o = 0$

n = ขนาดตัวอย่าง

สำหรับค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบ Gini (G_n) จะแยกออกเป็น 2 กรณีคือ

1. เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) < 20, $|G_n| > G_{1-\alpha/2}$ โดยใช้ค่าจากตาราง Quantiles of the test statistics (G_n^*)

2. เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) > 20 จะต้องปรับค่า G_n ก่อน เรียกว่าการปรับรูปแบบ เขียนแทนด้วย $P(G_n)$ ซึ่ง $P(G_n) = [12(n-1)]^{1/2} * (G_n - 0.5)$ จะมีการแจกแจงแบบ N(0,1) ดังนั้น $|P(G_n)| > Z_{1-\alpha/2}$, $Z_{1-\alpha/2} \sim N(0,1)$

นั่นคือ ทั้ง 2 กรณี จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง H_o : ข้อมูลมีการแจกแจงเป็นแบบแกมม่า เมื่อค่าสถิติทดสอบ G_n ที่คำนวณได้ มีค่ามากกว่าค่า G_n^* หรือ ค่า Z จากตาราง ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

2.1.2 <u>ตัวสถิติทดสอบ Q</u> (Q Test Statistics)

Dahiya และ Gurland (ค.ศ 1970, 1972) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ Q ซึ่งเป็นตัวสถิติทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (Goodness of fit test) โดยอาศัยเทคนิคของ Minimum Chi - Square ของ Pearson Chi - Square test of fit สำหรับทดสอบการแจกแจงแบบแกมม่า ตัวสถิติทดสอบคือ

$$Q = nh'Ah$$

โดยที่ n = ขนาดตัวอย่าง

$$h = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i \\ \frac{\sum^{n} X_i^2}{\sum_{1}^{n} X_i} \\ \frac{\sum^{n} X_i^3}{\sum_{1}^{n} X_i^2} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i & \frac{\sum^{n} X_i^2}{\sum_{1}^{n} X_i} & \frac{\sum^{n} X_i^3}{\sum_{1}^{n} X_i^2} \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$\hat{A} = \hat{\Sigma}^{-1}_{3\times3}\,(I - \hat{R}_{3\times3})$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\hat{R}_{s\times s} = W_{s\times q} \left(W'_{q\times s} \; \hat{\Sigma}^{-1}_{s\times s} \; W_{s\times q}\right)^{-1} W'_{q\times s} \; \hat{\Sigma}^{-1}_{s\times s}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$W' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\hat{\Sigma} = J \, G \, J'$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mu_1'}{\partial \mu_1'} & \dfrac{\partial \mu_1'}{\partial \mu_2'} & \dfrac{\partial \mu_1'}{\partial \mu_3'} \\[2ex] \dfrac{\partial(\mu_2'/\mu_1')}{\partial \mu_1'} & \dfrac{\partial(\mu_2'/\mu_1')}{\partial \mu_2'} & \dfrac{\partial(\mu_2'/\mu_1')}{\partial \mu_3'} \\[2ex] \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial \mu_1'} & \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial \mu_2'} & \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial \mu_3'} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$
J' = \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial\mu_1'}{\partial\mu_1'} & \dfrac{\partial(\mu_2'/\mu_1')}{\partial\mu_1'} & \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial\mu_1'} \\[2ex]
\dfrac{\partial\mu_1'}{\partial\mu_2'} & \dfrac{\partial(\mu_2'/\mu_1')}{\partial\mu_2'} & \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial\mu_2'} \\[2ex]
\dfrac{\partial\mu_1'}{\partial\mu_3'} & \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial\mu_3'} & \dfrac{\partial(\mu_3'/\mu_2')}{\partial\mu_3'}
\end{bmatrix}_{3\times 3}
$$

$$
G = \begin{bmatrix}
\mu_2'-\mu_1'\mu_1' & \mu_3'-\mu_1'\mu_2' & \mu_4'-\mu_1'\mu_3' \\[2ex]
\mu_3'-\mu_2'\mu_1' & \mu_4'-\mu_2'\mu_2' & \mu_5'-\mu_2'\mu_3' \\[2ex]
\mu_4'-\mu_3'\mu_1' & \mu_5'-\mu_3'\mu_2' & \mu_6'-\mu_3'\mu_3'
\end{bmatrix}_{3\times 3}
$$

โดยที่ $\mu_\nu = E[x^\nu]$ = ค่าโมเมนต์ของ x ลำดับที่ ν (ถ้าการแจกแจงต่างกันค่าโมเมนต์ลำดับต่างๆ จะแตกต่างกัน)

การคิดค่า $\hat{\Sigma}$ ของแต่ละการแจกแจง (แสดงในภาคผนวก)

สำหรับค่าวิกฤต ของตัวสถิติทดสอบ Q ในที่นี้ จะใช้ค่าจากตารางของ Chi - Square ($X^2_{s-q,\ 1-\alpha}$) จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อค่า $Q > x^2_{1,\ 1-\alpha}$ (Q ที่คำนวณได้มากกว่าค่า Chi - Square จากตาราง) ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

2.1.3 <u>ตัวสถิติทดสอบ Savage</u> (Savage test statistic) : T_n

Chernoff และ Savage (ค.ศ. 1958) กับ Hajek และ Sidak (ค.ศ. 1967) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบแบบจัดลำดับ สำหรับข้อมูล ที่มีการแจกแจงแบบแกมม่าขึ้น ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$
T_n = \sum_{i=1}^{N} J(i/N+1)\, Z_{Ni}
$$

โดยที่ $N = n + m$

n = ขนาดตัวอย่าง $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$

m = ขนาดตัวอย่าง $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$

i = ลำดับที่ของค่าสังเกตุ

Z_{Ni} = ค่าสังเกตุ $Z_1, Z_2, \ldots\ldots\ldots, Z_n$ ซึ่งเกิดจากการนำ ตัวอย่างสุ่ม $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ และ $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$ มาเรียงเข้าด้วยกัน แล้วนำมาจัดลำดับ จากน้อยไปมาก และ ให้ δ_i เป็นดัชนีบ่งชี้ โดยที่

$$\delta_i = \begin{cases} 1 \; ; \text{ ถ้า } Z_i \text{ เป็นค่าสังเกตุ } X; \; i=1, 2, \ldots, N \\ 0 \; ; \text{ อื่นๆ} \end{cases}$$

กำหนดให้ $u = i/N+1$

และ Savage กำหนดค่าฟังก์ชั่น $J(u) = -\ln(1-u)-1$

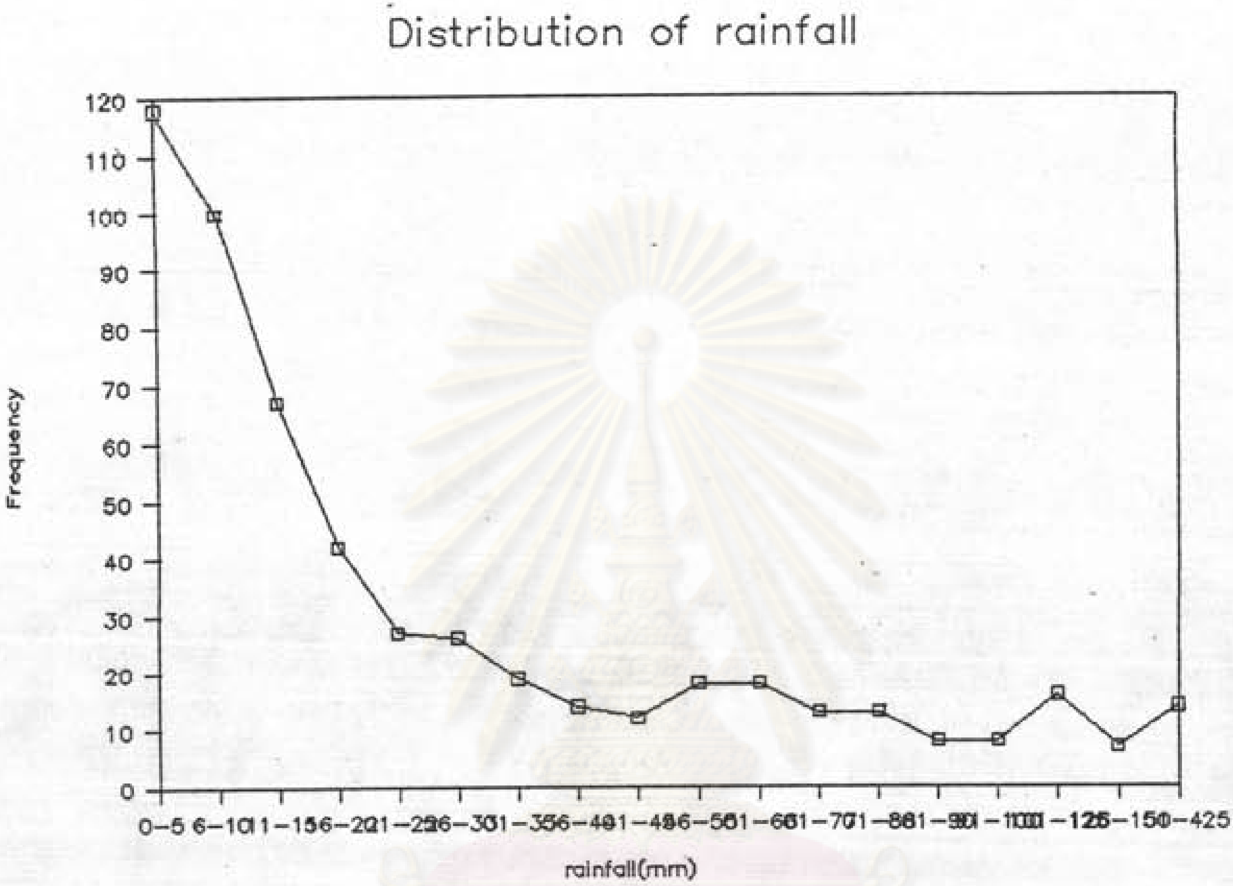
สำหรับค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบ T_n ในที่นี้จะใช้ค่าจากตาราง Exponential score ซึ่งจะปฏิเสธสมมติฐานว่าง H_0 เมื่อค่า $T_n > T_{1-\alpha/2}$ ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

2.2 ตัวอย่างการใช้ตัวสถิติทดสอบ

ตัวอย่างที่ 1 รายงานประจำวัน เรื่องฝนตกของท้องที่หนึ่งจากช่วงวันที่ 17 มิถุนายน ถึง 7 กรกฎาคม ได้ถูกรวบรวมไว้ตั้งแต่ ปี พ.ศ.2515 ถึง พ.ศ.2530 ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าข้อมูลเหล่านี้น่าจะมีการแจกแจงแบบแกมม่าได้ เหตุผลในการอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นนี้คือถ้าเม็ดฝนสามารถรวมตัวกันเป็นมวลเดียวกัน การรวมตัวในลักษณะสะสมกันเช่นนี้ของฝน คล้ายคลึงกันเรื่องของ "waiting - time" ซึ่งคาดว่ามันจะเป็นรูปแบบการแจกแจงของแกมม่า ดังข้อมูลในตารางที่ 2.2.1

ตารางที่ 2.2.1 แสดงข้อมูลการแจกแจงของปริมาณฝนตก

ปริมาณฝนตก (ม.ม)	ความถี่ของค่าสังเกต (วัน)
0-5	118
6-10	100
11-15	67
16-20	42
21-25	27
26-30	26
31-35	19
36-40	14
41-45	12
46-50	18
51-60	18
61-70	13
71-80	13
81-90	8
91-100	8
101-125	16
126-150	7
151-425	14



รูปที่ 2.1 แสดงกราฟของข้อมูลที่ได้จากตัวอย่าง

กำหนด H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงแบบแกมม่า

H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงแบบแกมม่า

จากตัวอย่าง $n = 18$ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10

2.2.1 ตัวอย่างการใช้ตัวสถิติทดสอบ Gini (G_n)

สามารถจัดเรียงข้อมูลใหม่ได้ดังตาราง

ตารางที่ 2.2.2 แสดงการแจกแจงของข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณตัวสถิติทดสอบ G_n, Q, และ T_n

ลำดับที่	ความถี่ของค่าสังเกต (วัน)	ลำดับที่ของการจัดเรียงข้อมูลใหม่ (จากน้อยไปมาก)
1	118	18
2	100	17
3	67	16
4	42	15
5	27	14
6	26	13
7	19	12
8	12	4
9	7	1
10	18	10
11	18	10
12	13	5
13	13	5
14	8	2
15	8	2
16	16	9
17	14	7
18	14	7

ตัวสถิติทดสอบ

$$G_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\,W_{i+1}\right) \Big/ (n-1)\sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$W_i = (n-i+1)(t_i - t_{i-1}) \; ; \; i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$t_0 = 0$$

n = ขนาดตัวอย่าง = 18

ตารางที่ 2.2.3 แสดงการจัดเรียงลำดับข้อมูลสำหรับตัวอย่าง ของตัวสถิติทดสอบ G_n

i	t_i	t	t_{i-1}	$n-i+1$ (1)	t_i-t_{i-1} (2)	w_i 1*2	w_{i+1}	$i*w_{i+1}$
1	7	t_0	0	18	7	126	126	126
2	8	t_1	7	17	1	17	17	34
3	8	t_2	8	16	0	0	0	0
4	12	t_3	8	15	4	60	60	240
5	13	t_4	12	14	1	14	14	70
6	13	t_5	13	13	0	0	0	0
7	14	t_6	13	12	1	12	12	84
8	14	t_7	14	11	0	0	0	0
9	16	t_8	14	10	2	20	20	180
10	18	t_9	16	9	2	18	18	180
11	18	t_{10}	18	8	0	0	0	0
12	19	t_{11}	18	7	1	7	7	84
13	26	t_{12}	19	6	7	42	42	546
14	27	t_{13}	26	5	1	5	5	70
15	42	t_{14}	27	4	15	50	60	900
16	67	t_{15}	42	3	25	75	75	1200
17	100	t_{16}	67	2	33	66	66	1632
18	118	t_{17}	100	1	18	18	-	-
						540		= 5,346

$$G_n = \frac{5,346}{(18-1)*540}$$

$$= \frac{5,346}{17*540}$$

$$= \frac{5,346}{9,180}$$

$$G_n = 0.58235$$

จะปฏิเสธ H_o : ข้อมูลมีการแจกแจงแบบแกมม่า ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10

กรณีที่ $n<20$ เมื่อ $|G_n| > G_{0.95} = 0.60902$

$|G_n| > G_{0.975} = 0.62952$

$\therefore$ ไม่มีเหตุผลที่จะปฏิเสธสมมติฐาน H_o กล่าวคือ ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแบบแกมม่า

2.2.2 <u>ตัวอย่างการใช้ตัวสถิติทดสอบ Q</u>

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ H_o : ข้อมูลมีการแจกแจงแบบแกมม่า

H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงแบบแกมม่า

ตัวสถิติทดสอบ $Q = nh'\hat{A}h$

n = ขนาดตัวอย่าง = 18

<u>ตารางที่ 2.2.4</u> แสดงข้อมูลสำหรับคำนวณค่า b ในตัวอย่างของตัวสถิติทดสอบ Q

X_i	X_i^2	X_i^3
118	13,924	1,643,032
100	10,000	1,000,000
67	4,489	300,763
42	1,764	74,088
27	729	19,683
26	676	17,576
19	361	6,859
12	144	1,728
7	49	343
18	324	5,832
18	324	5,832
13	169	2,197
13	169	2,197
8	64	512
8	64	512
16	256	4,096
14	196	2,744
14	196	2,744
540	33,898	3,090,738

$$h = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i \\ \\ \frac{\sum^{n} X_i^2}{\sum_{i}^{n} X_i} \\ \\ \frac{\sum^{n} X_i^3}{\sum_{i}^{n} X_i^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$h = \begin{bmatrix} \frac{540}{18} \\ \frac{33,898}{540} \\ \frac{3,090,738}{33,898} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$h = \begin{bmatrix} 30.00 \\ 62.77 \\ 91.18 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$h' = [\ 30.0 \quad 62.77 \quad 91.18\ ]_{1 \times 3}$$

$$\hat{A} = \hat{\Sigma}^{-1} (I - \hat{R})$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\hat{R} = W(W'\hat{\Sigma}^{-1}W)^{-1}W'\hat{\Sigma}^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$W' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\hat{\Sigma} = JGJ'$$

รายละเอียดการคำนวณค่า $\hat{\Sigma}$ (ดูภาคผนวก)

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\beta^2 & \beta^2(\alpha+1) & \beta^2(\alpha+2) \\ \beta^2(\alpha+1) & \dfrac{\beta^2(\alpha+3)(\alpha+1)}{\alpha} & \dfrac{\beta^2(\alpha+5)(\alpha+2)}{\alpha} \\ \beta^2(\alpha+2) & \dfrac{\beta^2(\alpha+5)(\alpha+2)}{\alpha} & \dfrac{\beta^2(\alpha+2)(-2\alpha^2+11\alpha+24)}{\alpha(\alpha+1)} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ในที่นี้ใช้ค่า $\beta = 3$, $\alpha = 10$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 90.0 & 99.0 & 108.0 \\ 99.0 & 128.7 & 162.0 \\ 108.0 & 162.0 & -64.8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0088 & 0.0008 \\ 0.0088 & -0.0064 & -0.0020 \\ 0.0008 & -0.0014 & 0.0007 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$W'\hat{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0088 & 0.0008 \\ 0.0088 & -0.0064 & -0.0014 \\ 0.0008 & -0.0014 & 0.0007 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0088 & 0.0008 \\ 0.0104 & -0.0092 & 0.0000 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$W'\hat{\Sigma}^{-1}W = \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0088 & 0.0008 \\ 0.0104 & -0.0092 & 0.0000 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0104 \\ 0.0104 & -0.0092 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$(W'\hat{\Sigma}^{-1}W)^{-1} = \begin{bmatrix} -1059.9078 & -1198.1567 \\ -1198.1567 & -1463.1336 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$(W'\hat{\Sigma}^{-1}W)^{-1}W'\hat{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} -1059.9078 & -1198.1567 \\ -1198.1567 & -1463.1336 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0088 & 0.0008 \\ 0.0104 & -0.0092 & 0.0000 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9999 & 1.6959 & -0.8479 \\ 0.0000 & 2.9171 & -0.9585 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\hat{R} = W(W'\hat{\Sigma}^{-1}W)^{-1}W'\hat{\Sigma}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} 0.9999 & 1.6959 & -0.8479 \\ 0.0000 & 2.9171 & -0.9585 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 0.9999 & 1.6959 & -0.8479 \\ 0.0000 & 2.9171 & -0.9585 \\ 0.0000 & 5.8342 & -1.9170 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\hat{A} = \hat{\Sigma}^{-1}(I-\hat{R})$$

$$I - \hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} - \begin{bmatrix} 0.9999 & 1.6959 & -0.8479 \\ 0.0000 & 2.9171 & -0.9585 \\ 0.0000 & 5.8342 & -1.9170 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0001 & -1.6959 & 0.8479 \\ -0.0000 & -1.9171 & 0.9585 \\ -0.0000 & -5.8342 & 2.9170 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.0127 & 0.0088 & 0.0008 \\ 0.0088 & -0.0064 & -0.0020 \\ 0.0008 & -0.0014 & 0.0007 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 0.0001 & -1.6959 & 0.8479 \\ -0.0000 & -1.9171 & 0.9858 \\ 0.0000 & -5.8342 & 2.9170 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.009 & -0.005 \\ 0.000 & -0.003 & 0.001 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$h'\hat{A} = \begin{bmatrix} 30.0 & 62.77 & 91.18 \end{bmatrix}_{1\times3} \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.009 & -0.005 \\ 0.000 & -0.003 & 0.001 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.00 & 0.29 & -0.22 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$h'\hat{A}h = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.29 & -0.22 \end{bmatrix}_{1\times3} \begin{bmatrix} 30.00 \\ 62.77 \\ 91.18 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$h'\hat{A}h = -1.8563$$

$$Q = nh'\hat{A}h$$

$$= 18*(-1.8563)$$

$$\therefore Q = -33.4134$$

ดังนั้น $Q = -33.4134 < X^2_{1,1-\alpha} = 3.84$

$\therefore$ ไม่มีเหตุผลที่จะปฏิเสธสมมติฐาน H_o เช่นเดียวกับตัวสถิติทดสอบ Gini

2.2.3 <u>ตัวสถิติทดสอบ Savage</u> (T_n)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ H_o : ข้อมูลมีการแจกแจงแบบแกมม่า

H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงแบบแกมม่า

ตัวสถิติทดสอบ $$T_n = \sum_{i=1}^{N} J\left(\frac{i}{N+1}\right) Z_{Ni}$$

$$N = n+m$$

$$N = 9+9 = 18$$

แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่ม

Y	X
118	18
100	18
67	13
42	13
27	8
26	8
19	16
12	14
7	14
m = 9	n = 9

ตารางที่ 2.2.5 แสดงการจัดเรียงลำดับข้อมูลสำหรับตัวอย่าง ของตัวสถิติทดสอบ T_n

i	Z_{Ni} (1)	δ_i	i/N+1	- ln[1-(i/N+1)] (2)	(2)-1 (3)	(1)*(3)
1	7	0	-	-	-	-
2	8	1	0.10526	0.11123	-0.88877	-7.11019
3	8	1	0.15789	0.17185	-0.82815	-6.62520
4	12	0	-	-	-	-
5	13	1	0.26316	0.30538	-0.69462	-9.03004
6	13	1	0.31579	0.37949	-0.62051	-8.06663
7	14	1	0.36842	0.45953	-0.54047	-7.56655
8	14	1	0.42105	0.54654	-0.45346	-6.34844
9	16	1	0.47368	0.64185	-0.35815	-5.73040
10	18	1	0.52632	0.74721	-0.25279	-4.55014
11	18	1	0.57895	0.86500	-0.13500	-2.43005
12	19	0	-	-	-	-
13	26	0	-	-	-	-
14	27	0	-	-	-	-
15	42	0	-	-	-	-
16	67	0	-	-	-	-
17	100	0	-	-	-	-
18	118	0	-	-	-	-
						-57.46

$$T_n = -57.46 < T_{n,1-\alpha} = 0.9512 \quad (\alpha = 0.05)$$

∴ ไม่มีเหตุผลที่จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เช่นเดียวกับตัวสถิติทดสอบ G_n และ ตัวสถิติทดสอบ Q กล่าวคือข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแบบแกมม่า

2.3 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับการทดสอบการแจกแจงแบบแกมม่านั้น มีผู้สนใจศึกษา ไม่มากนัก ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จึงมีอยู่น้อย แต่ก็ยังพอมีนักวิจัยบางท่านได้ทำการศึกษาไว้บ้างดังนี้ คือ

Joseph and Hosam (ค.ศ. 1986) ได้ศึกษาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ 3 ตัว คือ ตัวสถิติทดสอบ Wilcoxon, Squared - ranks, และ Savage ภายใต้ประชากรศึกษา 14 ประชากร โดยทำการเปลี่ยนรูปร่างของการแจกแจง (α) ไปตามค่าต่างๆ ได้ผลสรุปคือ

1. เมื่อรูปร่างของการแจกแจง (α) เปลี่ยนไป (α เพิ่มขึ้น) ค่าอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบสูงขึ้น

2. ตัวสถิติทดสอบ Savage มีอำนาจการทดสอบสูงกว่าตัวสถิติทดสอบตัวอื่นๆ

3. ตัวสถิติทดสอบ Squared - ranks มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่า ตัวสถิติทดสอบ Wilcoxon และ Savage