เซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณและสกิวริงของผลต่างทางขวา [ทางซ้าย] ของเซมิริง

นาย ชิงชัย วัฒนธรรมเมธี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2534

ISBN 974-578-730-2

ALMOST MULTIPLICATIVELY CANCELLATIVE SEMINEAR-RINGS AND SKEW RINGS OF RIGHT [LEFT] DIFFERENCES OF SEMIRINGS

Mr. Chingchai Wathanathammetee

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1991

ISBN 974-578-730-2

Thesis Title	Almost Multiplicatively Cancellative Seminear-rings and Skew Rings of Right [Left] Differences of Semirings
By	Mr. Chingchai Wathanathammetee
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya .... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์ .... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Thesis Advisor

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

.... Member

(Dr. Yati Krisnangkura Ph.D.)

ชิงชัย วัฒนธรรมเมธี : เซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณและสกิวริงของผลต่างทางขวา [ทางซ้าย] ของเซมิริง (ALMOST MULTIPLICATIVELY CANCELLATIVE SEMINEAR-RINGS AND SKEW RINGS OF RIGHT [LEFT] DIFFERENCES OF SEMIRINGS) อ. ที่ปรึกษา : ดร. ซิดนีย์ เอส. มิทเชลล์, 112 หน้า.
ISBN 974-578-730-2

เราจะกล่าวว่าเซมิกรุป $(S,\cdot)$ มีเงื่อนไขออร์ทางขวา [ทางซ้าย] ถ้าสำหรับทุกๆ $a,b \in S\smallsetminus\{0\}$ จะมี $x,y \in S\smallsetminus\{0\}$ ซึ่ง $ax = by[xa = yb]$ เมื่อ 0 เป็นศูนย์ของ S ถ้า S มีศูนย์ เราจะเรียกเซมิเนียร์-ริง $(S,+,\cdot)$ ว่า เซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณ ถ้ามีสมาชิก $a \in S$ ซึ่ง $(S\smallsetminus\{a\},\cdot)$ เป็นเซมิกรุปตัดออกภายใต้การคูณ, เซมิเนียร์-ฟิลด์ ถ้ามีสมาชิก $a' \in S$ ซึ่ง $(S\smallsetminus\{a'\},\cdot)$ เป็นกรุป ให้ S เป็นเซมิริง เราจะเรียกสมาชิก $(a,b) \in S\times S$ ว่าคู่ยูนิทีฟ ถ้าสำหรับแต่ละ $x,y \in S$ จะมี $u,v,u',v' \in S$ ซึ่ง $ax+by+u = x+v$, $ay+bx+u = y+v$, $xa+yb+u' = x+v'$ และ $xb+ya+u' = y+v'$ ถ้าเซมิริง S มีคู่ยูนิทีฟแล้วเราจะเรียก S ว่า ยูนิทีฟเซมิริง เราจะเรียกยูนิทีฟเซมิริงว่า เอกแซค ถ้าสำหรับแต่ละคู่ยูนิทีฟ $(a,b) \in S\times S$ และสำหรับแต่ละ $x,y \in S$ ที่ต่างกัน จะมี $u,v,z,w,z',w' \in S$ ซึ่ง $xu+yv+z = a+w$, $xv+yu+z = b+w$, $ux+vy+z' = a+w'$ และ $uy+vx+z' = b+w'$ เราจะเรียกเซมิริง $(R,+,\cdot)$ ว่าสกิวริง ถ้า $(R,+)$ เป็นกรุป เราจะเรียกสกิวริง R ว่า สกิวริงของผลต่างทางขวา [ทางซ้าย] ของเซมิริง S ถ้ามีโมโนมอร์ฟิซึม $i : S \to R$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุกๆ $x \in R$ จะมี $a,b \in S$ ซึ่ง $x = i(a)-i(b)[x = -i(b)+i(a)]$ เราจะเรียก $i : S \to R$ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติข้างบนว่า การฝังผลต่างทางขวา [ทางซ้าย]

ทฤษฎีบท 1 ให้ $(S,+,\cdot)$ เป็นเซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณ ให้ $a \in S$ ซึ่ง $(S\smallsetminus\{a\},\cdot)$ เป็นเซมิกรุปตัดออกภายใต้การคูณ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อความเดียว (1) $xa = ax = a$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ (2) $a^2 = a$ และมี $b \in S\smallsetminus\{a\}$ ซึ่ง $ab \neq a$ หรือ $ba \neq a$ (3) $a^2 \neq a$ และมี $b \in S\smallsetminus\{a\}$ ซึ่ง $ab = a$ (4) $ax \neq a$, $ax \neq x$ และ $xa \neq x$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ (5) $ax \neq a$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ และ $a^2 = a^n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{Z}^+\smallsetminus\{1\}$

ถ้า S สอดคล้องข้อ (1), (2), (3), (4) หรือ (5) แล้วเราจะเรียก S ว่า เซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใตการคูณเทียบกับ a ประเภท A, B, C, D หรือ E ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2 ให้ $(S,+,\cdot)$ เป็นเซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณประเภท A เทียบกับสมาชิกบางตัวของ S ซึ่ง $|S| > 2$ ถ้า $(S,\cdot)$ มีเงื่อนไขออร์ทางขวา [ทางซ้าย] แล้วมีเซมิเนียร์ฟิลด์ K ชนิดที่ I ที่ทำให้เราฝัง S ใน K ได้ แต่เราไม่สามารถฝัง S ในเซมิเนียร์-ฟิลด์ชนิดอื่นๆ

ทฤษฎีบท 3 ถ้า S เป็นเซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณเทียบกับ a ประเภท D ซึ่ง a ไม่ตัดออกทางซ้ายภายใต้การคูณ หรือ S เป็นเซมิเนียร์-ริงที่เกือบตัดออกภายใต้การคูณประเภท E เทียบกับสมาชิกบางตัวของ S ซึ่ง $|S| > 2$ แล้วเราไม่สามารถฝัง S ในเซมิเนียร์-ฟิลด์ชนิดที่ I, II, III, IV หรือ V

ทฤษฎีบท 4 ให้ S เป็นเซมิริงซึ่งมี $D(S)$ เป็นสกิวริงของผลต่างทางขวา [ทางซ้าย] ของ S และ $i : S \to D(S)$ เป็นการฝังผลต่างทางขวา [ทางซ้าย] จะได้ว่า (1) $D(S)$ มีเอกลักษณ์การคูณเมื่อและต่อเมื่อ S เป็นยูนิทีฟเซมิริง, (2) สำหรับแต่ละ $(a,b) \in S\times S$ จะได้ว่า $i(a)-i(b)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณของ $D(S)$ เมื่อและต่อเมื่อ (a,b) เป็นคู่ยูนิทีฟ และ (3) $D(S)$ เป็นสกิวฟิลด์เมื่อและต่อเมื่อ S เป็นเอกแซค

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2533 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

CHINGCHAI WATHANATHAMMETEE : ALMOST MULTIPLICATIVELY CANCELLATIVE SEMINEAR-RINGS AND SKEW RINGS OF RIGHT [LEFT] DIFFERENCES OF SEMIRINGS. THESIS ADVISOR : DR. SIDNEY S. MITCHELL, PH.D. 112 pp.
ISBN 974-578-730-2

A semigroup $(S,\cdot)$ is said to satisfy the right [left] Ore condition if for all $a,b \in S\smallsetminus\{0\}$ there exist $x,y \in S\smallsetminus\{0\}$ such that $ax = by$ [$xa = yb$] where 0 denotes the zero of S if it exists. A seminear-ring $(S,+,\cdot)$ is said to be an almost multiplicatively cancellative seminear-ring if there exists an $a \in S$ such that $(S\smallsetminus\{a\},\cdot)$ is a cancellative semigroup, a seminear-field if there exists an $a' \in S$ such that $(S\smallsetminus\{a'\},\cdot)$ is a group. Let S be a semiring. Then an element $(a,b) \in S\times S$ is said to be a unitive pair if for all $x,y \in S$ there exist $u,v,u',v' \in S$ such that $ax+by+u = x+v$, $ay+bx+u = y+v$, $xa+yb+u' = x+v'$ and $xb+ya+u' = y+v'$. If a semiring S contains a unitive pair, then S is said to be a unitive semiring. A unitive semiring S is said to be exact if for any unitive pair $(a,b) \in S\times S$ and for all distinct $x,y \in S$ there exist $u,v,z,w,z',w' \in S$ such that $xu+yv+z = a+w$, $xv+yu+z = b+w$, $ux+vy+z' = a+w'$ and $uy+vx+z' = b+w'$. A semiring $(R,+,\cdot)$ is said to be a skew ring if $(R,+)$ is a group. A skew ring R is said to be a skew ring of right [left] differences of a semiring S if there exists a monomorphism $i : S \to R$ such that for all $x \in R$ there exist $a,b \in S$ such that $x = i(a)-i(b)$ [$x = -i(b)+i(a)$]. A monomorphism $i : S \to R$ satisfying the above property is said to be a right [left] difference embedding.

Theorem 1. Let $(S,+,\cdot)$ be an almost multiplicatively cancellative seminear-ring. Let $a \in S$ be such that $(S\smallsetminus\{a\},\cdot)$ is a cancellative semigroup. Then exactly one of the following statements hold: (1) $xa = ax = a$ for all $x \in S$. (2) $a^2 = a$ and there exists a $b \in S\smallsetminus\{a\}$ such that $ab \neq a$ or $ba \neq a$. (3) $a^2 \neq a$ and there exists a $b \in S\smallsetminus\{a\}$ such that $ab = a$. (4) $ax \neq a$, $ax \neq x$ and $xa \neq x$ for all $x \in S$. (5) $ax \neq a$ for all $x \in S$ and $a^2 = a^n$ for all $n \in \mathbb{Z}^+\smallsetminus\{1\}$.

If S satisfies (1), (2), (3), (4) or (5), then S is called a Classification A, B, C, D or E seminear-ring w.r.t. a, respectively.

Theorem 2. Let $(S,+,\cdot)$ be a Classification A seminear-ring w.r.t. some element of S such that $|S| > 2$. If $(S,\cdot)$ satisfies the right [left] Ore condition, then S can be embedded into a seminear-field with a category I special element and not into any other category of seminear-fields.

Theorem 3. If S is either a Classification D seminear-ring w.r.t. a such that a is not left multiplicatively cancellative in S or a Classification E seminear-ring w.r.t. some element of S such that $|S| > 2$, then S cannot be embedded into a seminear-field with a category I, II, III, IV or V special element.

Theorem 4. Let S be a semiring having D(S) as its skew ring of right [left] differences and $i : S \to D(S)$ the right [left] difference embedding. Then (1) D(S) has a multiplicative identity if and only if S is a unitive semiring, (2) for any $(a,b) \in S\times S$, $i(a)-i(b)$ is a multiplicative identity of D(S) if and only if (a,b) is a unitive pair and (3) D(S) is a skew field if and only if S is exact.

ภาควิชา คณิตศาสตร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2533

ลายมือชื่อนิสิต ....
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved father, mother, brother and sister for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

page

INTRODUCTION

In this thesis we consider two main problems. In [1] the concept of a semifield was generalized. In [2] the concept of an almost multiplicatively cancellative semiring was given and the structure of almost multiplicatively cancellative semirings was studied so that the problem of when an almost multiplicatively cancellative semiring can be embedded into a semifield could be answered. In [3] the concept of a seminear-field was generalized. The first problem we study is the concept of an almost multiplicatively cancellative seminear-ring and the problem of whether or not it can be embedded into a seminear-field.

In [4] some theorems were proven for skew rings of right [left] differences of semirings. The second problem we study is to prove additional theorems for skew rings of right [left] differences of semirings.

In Chapter I, we introduce some notations, give definitions and recall some theorems that will be used.

In Chapter II, we study the structure of almost multiplicatively cancellative seminear-rings and given interesting examples.

In Chapter III, we study the problem of whether or not an almost multiplicatively cancellative seminear-ring can be embedded into a seminear-field and if so we would like to know whether or not an almost multiplicatively cancellative seminear-ring has a quotient seminear-field with respect to a given category of seminear-fields.

In Chapter IV, we shall prove some theorems for skew rings of right [left] differences of semirings.