สมการฟังก์ชันนัล $g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ บนเซมิกรุปผกผันซึ่งสลับที่ได้

น.ส. ปฤษณา สายวาริน

วิทยานิพนธ์นี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2527

ISBN 974-563-829-3

On the Functional Equation $g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

on Commutative Inverse Semigroups

Miss Prisana Sayvarin

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Chulalongkorn University

1984

Thesis Title On the Functional Equation $g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ on Commutative Inverse Semigroups

By Miss Prisana Sayvarin

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Dr. Virool Boonyasombat

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree

S. Bunnag .... Dean of Graduate School

(Associate Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit .... Chaiman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Virool Boonyasombat .... Member

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	สมการฟังก์ชันนัล $g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ บนเซมิกรุปผกผันซึ่งสลับที่ได้
ชื่อนิสิต	นางสาว ปฤษณา สายวาริน
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติ
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2527

บทคัดย่อ

ให้ A เป็นสับเซ็ตของเซมิกรุปผกผันซึ่งสลับที่ได้ S และ F เป็นฟิลด์ซึ่งมีคาแรคเตอริสติคต่างจาก 2 เรากล่าวว่าคู่ลำดับ (f,g) เป็นคำตอบของ (*) บน A ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปสู่ F ซึ่งทำให้สมการฟังก์ชันนัล

(*) $$g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$$

เป็นจริงทุก x และ y ใน A ซึ่ง xy^{-1} อยู่ใน A จะเห็นว่าถ้า $A = \phi$ แล้ว (ϕ,ϕ) เป็นคำตอบของ (*) บน A สำหรับแต่ละฟิลด์ F เรากำหนดกรุปการคูณ M(F) ขึ้นกรุปหนึ่งดังนี้ ถ้า F มีสมาชิก i ที่ $i^2 = -1$ เราให้ $M(F) = F\setminus\{0\}$ มิฉะนั้นเราให้ $M(F) = \{(a,b) \in F \times F \,/\, a^2 + b^2 = 1\}$ ในที่นี้เราถือว่า M(F) เป็นสับกรุปการคูณของฟิลด์ (C(F), +, o) โดยที่ $C(F) = F \times F$ และ +,o บน C(F) กำหนดดังนี้ $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ และ $(a,b) \circ (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ จะเห็นว่า ถ้า F ไม่มีสมาชิก i ที่ $i^2 = -1$ แล้ว $i = (0,1)$.

เราสรุปผลลัพธ์ที่สำคัญของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไว้ได้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท</u> คำตอบของสมการ (*) บน S คือคู่ลำดับ (f,g) ทั้งหลายที่อยู่ในแบบต่อไปนี้เท่านั้น

(i) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \varepsilon A \\ \dfrac{h(x) - h(x^{-1})}{2i} & , x \notin A \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & , x \varepsilon A \\ \dfrac{h(x) + h(x^{-1})}{2} & , x \notin A \end{cases}$

โดยที่ A เป็นคอมพลีตลีไพรม์ไอเดียลของ S หรือ A เป็นเซ็ตว่าง และ h เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม จาก $S \setminus A$ ไปสู่ M(F) ; หรือ

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \varepsilon A \\ bh(x) & , x \varepsilon B \\ 0 & , x \varepsilon \bar{1} \\ dh(x) & , x \varepsilon x_1 \eta \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & , x \varepsilon A \\ ah(x) & , x \varepsilon B \\ h(x) & , x \varepsilon \bar{1} \\ ch(x) & , x \varepsilon x_1 \eta \end{cases}$

โดยที่ A เป็นคอมพลีตลีไพรม์ไอเดียลของ S หรือ A เป็นเซ็ตว่างและ B เป็นคอมพลีตลีไพรม์ ไอเดียลของ $S \setminus A$ หรือ B เป็นเซ็ตว่าง และ η เป็นกรุปคอนกรูเอนซ์บน $S \setminus (A \cup B)$ ซึ่ง $(S \setminus (A \cup B))/\eta$ เป็น $\{\bar{1}\}$ หรือ $(S \setminus (A \cup B))/\eta = \{\bar{1}, x_1\eta\}$ โดยที่ $x_1\eta \neq \bar{1}$ หรือ $\eta = \emptyset$ และ a,b,c,d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง

(1) $a \neq 1,0$ (2) $c \neq \pm 1$

(3) $a = a^2 + b^2$ (4) $c^2 + d^2 = 1$

(5) $a = ac + bd$

ที่เข้าคู่กับโฮโมมอร์ฟิซึม h จาก $S \setminus A$ ไปสู่ $\{1,-1\}$ หรือ a,b,c,d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง สอดคล้องกับ (1), (2), (3), (4) และ

(5)' $-a = ac + bd$

ที่เข้าคู่กับฟังก์ชัน h จาก $S \setminus A$ ไปสู่ $\{1,-1\}$ ซึ่ง

$$h(xy) = \begin{cases} -h(x)h(y) & \text{ถ้า } (x,y) \varepsilon x_1\eta \times B, \\ h(x)h(y) & \text{กรณีอื่น ;} \end{cases}$$

หรือ

$$\text{(iii)}\ f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \bar{0} \\ bh_2(x), & x \in e\mu \\ -bh_2(x), & x \in e'\mu \\ 0 & , x \in \bar{1} \\ dh_1(x), & x \in x_1\eta \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \bar{0} \\ ah_2(x) & , x \in e\mu \\ (1-a)h_2(x), & x \in e'\mu \\ h_1(x) & , x \in \bar{1} \\ ch_1(x) & , x \in x_1\eta \end{cases}$$

โดยที่ (I) μ เป็นครอนเนกเกอร์เซมิกรุปคอนกรูเอนซ์ บนคอมพลีตลีไพรม์ไอเดียล C ของ S ซึ่ง C/μ เป็น $\{\bar{0}, e\mu, e'\mu\}$ ที่มี $\bar{0}$ เป็นสมาชิกศูนย์ และ $|C/\mu| = 3$ หรือ $\mu = \emptyset$, และ

(II) η เป็นกรุปคอนกรูเอนซ์บน $S \setminus C$ ซึ่ง $(S \setminus C)/\eta$ เป็น $\{1\}$ หรือ $(S \setminus C)/\eta$ เป็น $\{\bar{1}, x_1\eta\}$ โดยที่ $x_1\eta \neq \bar{1}$ หรือ $\eta = \emptyset$, และ

(III) $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu)$ เป็นดังนี้ $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu)$ เป็น $(S \setminus C)/\eta$ ถ้า $\mu = \emptyset$, และ $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu)$ เป็น C/μ ถ้า $\eta = \emptyset$, นอกจากนี้ $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu)$ เป็นเซมิกรุป $(S \setminus C)/\eta$ ที่มี C/μ ร่วมเหมือนเป็นศูนย์, และ

(VI) a, b, c, d เป็นสมาชิกของ F ซึ่ง

(1) $a \neq 1,0$	(2) $c \neq \pm 1$
(3) $a = a^2+b^2$	(4) $c^2+d^2 = 1$
(5) $a = ac+bd$	(6) $c = 2a-1$

ที่เข้าคู่กับฟังก์ชัน h_1 จาก $S \setminus C$ ไปสู่ $\{1,-1\}$ และ h_2 จาก $C \setminus \bar{0}$ ไปสู่ $\{1,-1\}$ ซึ่ง h_1 เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม และ h_2 เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมบน $e\mu$, และ $e'\mu$ ที่

$$h_2(xy) = \begin{cases} -h_1(x)h_2(y) & \text{ถ้า } (x,y) \in x_1\eta \times e'\mu, \\ h_1(x)h_2(y) & \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

หรือ a, b, c, d เป็นสมาชิกของ F ที่สอดคล้องกับ (1), (2), (3), (4) และ

(5)' $-a = ac+bd$	(6)' $c = 1-2a$

ที่เข้าคู่กับฟังก์ชัน h_1 จาก $S\setminus C$ ไปสู่ $\{1,-1\}$ และ h_2 จาก $C\setminus\bar{0}$ ไปสู่ $\{1,-1\}$ ซึ่ง h_1 เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม และ h_2 เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมบน $e\mu$ และ $e'\mu$ ที่

$$h_2(xy) = \begin{cases} -h_1(x)h_2(y) & \text{ถ้า } (x,y) \in x_1\eta \times e\mu, \\ h_1(x)h_2(y) & \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ในทฤษฎีบทนี้ถ้า η เป็นกรุปคอนกรูเอนซ์ที่มีคลาสเดียวแล้ว เงื่อนไขเกี่ยวกับ c และ $x_1\eta$ จะถูกตัดออก

Thesis Title On the Functional Equation $g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ on Commutative Inverse Semigroups

Name Miss Prisana Sayvarin

Thesis Advisor Associate Professor Dr. Virool Boonyasombat

Department Mathematics

Academic Year 1984

ABSTRACT

Let A be any subset of a commutative inverse semigroup S, F a field of characteristic different from 2. We say that (f,g) is a solution of (*) on A if f and g are functions from A into F satisfy

(*) $$g(xy^{-1}) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$$

for all x,y in A such that xy^{-1} is also in A. Notice, if $A = \emptyset$, then we have $(\emptyset,\emptyset)$ is a solution of (*) on A. To each field F we associate a multiplicative group M(F) as follows: If F contains an element i such that $i^2 = -1$, we let $M(F) = F\setminus\{0\}$, otherwise we let $M(F) = \{(a,b) \in F \times F \,/\, a^2 + b^2 = 1\}$. Here M(F) is considered as a multiplicative subgroup of a field (C(F), +, o), where $C(F) = F \times F$ and +, o are given by $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ and $(a,b)\circ(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$. Notice, if F contains no element i such that $i^2 = -1$, then $i = (0,1)$.

The main result obtained in this study can be summerized in the following Theorem:

Theorem. The solutions of (*) on S are those and only those (f,g) of the forms:

$$\text{(i)}\quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in A \\ \dfrac{h(x)-h(x^{-1})}{2i} & , x \notin A \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in A \\ \dfrac{h(x)+h(x^{-1})}{2} & , x \notin A \end{cases}$$

where A is a completely prime ideal of S or A is the empty set and h is a homomorphism from $S \setminus A$ into M(F); or

$$\text{(ii)}\quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in A \\ bh(x) & , x \in B \\ 0 & , x \in \bar{1} \\ dh(x) & , x \in x_1\eta \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in A \\ ah(x) & , x \in B \\ h(x) & , x \in \bar{1} \\ ch(x) & , x \in x_1\eta \end{cases}$$

where A is a completely prime ideal of S or A is the empty set and B is a completely prime ideal of $S \setminus A$ or B is the empty set and η is a group congruence on $S \setminus (A \cup B)$ such that $(S \setminus (A \cup B))/\eta = \{\bar{1}\}$ or $(S \setminus (A \cup B))/\eta = \{\bar{1}, x_1\eta\}$ where $x_1\eta \neq \bar{1}$ or $\eta = \emptyset$ and $a,b,c,d \in F$ are such that

(1) $a \neq 1,0$ (2) $c \neq \pm 1$

(3) $a = a^2 + b^2$ (4) $c^2 + d^2 = 1$

(5) $a = ac + bd$.

with corresponding homomorphism $h : S \setminus A \to \{1,-1\}$ or $a,b,c,d \in F$ satisfy (1), (2), (3), (4) and

(5)' $-a = ac + bd$

with corresponding function $h : S \setminus A \to \{1,-1\}$ such that

$$h(xy) = \begin{cases} -h(x)h(y) & \text{if } (x,y) \in x_1\eta \times B, \\ h(x)h(y) & \text{otherwise;} \end{cases}$$

or

$$\text{(iii)}\quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \bar{0} \\ bh_2(x) & , x \in e\mu \\ -bh_2(x) & , x \in e'\mu \\ 0 & , x \in \bar{1} \\ dh_1(x) & , x \in x_1\eta \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \bar{0} \\ ah_2(x) & , x \in e\mu \\ (1-a)h_2(x) & , x \in e'\mu \\ h_1(x) & , x \in \bar{1} \\ ch_1(x) & , x \in x_1\eta \end{cases}$$

where (I) μ is a Kronecker semigroup congruence on a completely prime ideal C of S such that $C/\mu = \{\bar{0}, e\mu, e'\mu\}$ with $\bar{0}$ as the zero and $|C/\mu| = 3$ or $\mu = \emptyset$, and

(II) η is a group congruence on $S \setminus C$ such that $(S \setminus C)/\eta = \{\bar{1}\}$ or $(S \setminus C)/\eta = \{\bar{1}, x_1\eta\}$ where $x_1\eta \neq \bar{1}$ or $\eta = \emptyset$, and

(III) $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu)$ is of the following: $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu) = (S \setminus C)/\eta$ if $\mu = \emptyset$, $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu) = C/\mu$ if $\eta = \emptyset$ and otherwise, $((S \setminus C)/\eta) \cup (C/\mu)$ is the semigroup $(S \setminus C)/\eta$ with C/μ adjoined as zeroes, and

(VI) $a, b, c, d \in F$ are such that

(1) $a \neq 1,0$	(2) $c \neq \pm 1$
(3) $a = a^2 + b^2$	(4) $c^2 + b^2 = 1$
(5) $a = ac+bd$	(6) $c = 2a-1$

with corresponding functions $h_1 : S \setminus C \to \{1,-1\}$ and $h_2 : C \setminus \bar{0} \to \{1,-1\}$ such that h_1 is a homomorphism and h_2 is a homomorphism on $e\mu$, $e'\mu$ such that

$$h_2(xy) = \begin{cases} -h_1(x)h_2(y) & \text{if } (x,y) \in x_1\eta \times e'\mu, \\ h_1(x)h_2(y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

or $a, b, c, d \in F$ satisfy (1), (2), (3), (4) and

$(5)'\quad -a = ac+bd \qquad\qquad (6)'\quad c = 1-2a$

with corresponding functions $h_1 : S \setminus C \to \{1,-1\}$ and $h_2 : C \setminus \bar{0} \to \{1,-1\}$ such that h_1 is a homomorphism and h_2 is a homomorphism on $e\mu$, $e'\mu$ such that

$$h_2(xy) = \begin{cases} -h_1(x)h_2(y) & \text{if } (x,y) \in x_1\eta \times e\mu, \\ h_1(x)h_2(y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In this theorem, if η is a group congruence with exactly one class, then all conditions of c and $x_1\eta$ are omitted.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for this helpful supervision during the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of lecturers for their previous valuable lectures while studying.

CONTENTS