อะตอมไฮโดรเจนในสองมิติเชิงสัมพัทธภาพ

นาย ทศพร บุญยฤทธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาฟิสิกส์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2529

ISBN 974-567-211-4

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

012277

I10299658

RELATIVISTIC TWO-DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM

Mr. Tosporn Boonyarith, 1962-

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Physics

Graduate School

Chulalongkorn University

1986

ISBN 974-567-211-4

Thesis Title	Relativistic Two-Dimensional Hydrogen Atom
By	Mr. Tosporn Boonyarith
Department	Physics
Thesis Advisor	Assistant Professor Pisistha Ratanavararaksa, Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

T. Vajrabhaya ..... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya, Ph.D.)

Thesis Committee

Kitt Visoottiviseth ..... Chairman

(Associate Professor Kitt Visoottiviseth, Ph.D.)

Pisistha Ratanavararaksa ..... Thesis Advisor

(Assistant Professor Pisistha Ratanavararaksa, Ph.D.)

V. Sa-yakanit ..... Member

(Professor Virulh Sa-yakanit, F.D.)

I-Ming Tang ..... Member

(Professor I-Ming Tang, Ph.D.)

W. Sritrakool ..... Member

(Assistant Professor Wichit Sritrakool, Ph.D.)

Copyright of the Graduate School, Chulalongkorn University

Thesis Title Relativistic Two-Dimensional Hydrogen Atom

Name Mr. Tosporn Boonyarith

Thesis Advisor Assistant Professer Pisistha Ratanavararaksa, Ph.D.

Department Physics

Academic Year 1986

ABSTRACT

The problem of the two-dimensional hydrogen atom, which is defined to be a system in which the motion of the electron around the nucleus under the influence of an attractive Coulomb potential is constrainted to be planar, was studied, first, by means of the Schroedinger nonrelativistic wave mechanics with the extension to include the effects of the electron spin and the relativistic variation of mass with velocity, and then, by means of the Dirac relativistic wave mechanics. As in the case of the three-dimensional hydrogen atom, the results obtained from these methods are consistent, i.e., in the nonrelativistic limit the results obtained from the Dirac wave mechanics reduce to those obtained from the Schroedinger wave mechanics. Using the three dimensional hydrogen atom as a reference, the energy levels are lower in the planar case, and the electron distribution is displaced towards the nucleus.

หัวข้อวิทยานิพนธ์ อะตอมไฮโดรเจนในสองมิติเชิงสัมพัทธภาพ

ชื่อนิสิต นายทศพร บุญยฤทธิ์

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิศิษฐ์ รัตนวรารักษ์

ภาควิชา ฟิสิกส์

ปีการศึกษา 2529

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อ

ได้ทำการศึกษาปัญหาของอะตอมไฮโดรเจนในสองมิติ ซึ่งหมายถึงระบบที่ประกอบด้วยอิเล็กตรอนกับนิวเคลียส โดยที่การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนรอบนิวเคลียส ภายใต้ศักย์ดึงดูดแบบคูลอมบ์ ถูกบังคับให้เป็นการเคลื่อนที่บนระนาบ ในขั้นแรกได้ทำการศึกษาโดยใช้กลศาสตร์คลื่นของชเรอร์ดิงเงอร์ โดยได้ทำการขยายเพื่อให้รวมผลของสปินของอิเล็กตรอน และผลเนื่องจากการเปลี่ยนของมวลของอิเล็กตรอนตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ เข้าไว้ด้วย หลังจากนั้นได้ทำการศึกษาปัญหาดังกล่าวโดยใช้กลศาสตร์คลื่นเชิงสัมพัทธของดิแรก พบว่า ในทำนองเดียวกันกับกรณีของอะตอมไฮโดรเจนในสามมิติ ผลที่ได้จากทฤษฎีทั้งสองสอดคล้องกัน กล่าวคือ ในขอบเขตที่ไม่คำนึงถึงผลของทฤษฎีสัมพัทธภาพ ผลที่ได้จากทฤษฎีของดิแรกจะเหมือนกับผลที่ได้จากทฤษฎีของชเรอร์ดิงเงอร์ เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้กับอะตอมไฮโดรเจนในสามมิติ ปรากฏว่า ระดับพลังงานในกรณีสองมิติจะต่ำกว่า และอิเล็กตรอนจะกระจายอยู่ใกล้นิวเคลียสมากกว่า

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ACKNOWLEDGEMENTS

The author wishes to express his sincere thanks to Dr. Pisistha Ratanavararaksa, his thesis advisor, for suggestions, guidance, and encouragement.

Thanks are also extended to Dr. Kitt Visoottiviseth, Dr. Virulh Sa-yakanit, Dr. I-Ming Tang, and Dr. Wichit Sritrakool for acting as members of the thesis committee.

The award of the scholarship by his parents and The Professor Dr. Tab Nilanidhi Foundation (The Tab Foundation) are gratefully acknowledged.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CONTENTS

Page

ABSTRACT iv

ACKNOWLEDGEMENTS vi

LIST OF TABLES x

LIST OF ILLUSTRATIONS xi

CHAPTER I INTRODUCTION 1

CHAPTER II THREE DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM 6

2.1 Inadequacy of Classical Physics for Describing Atom 6

2.2 The Old Quantum Theory 8

2.2.1 Bohr's Theory of Hydrogen Atom 8

2.2.2 Sommerfeld's Relativistic Theory of Hydrogen Atom 10

2.3 Nonrelativistic Quantum Mechanics 13

2.3.1 Heisenberg's Matrix Mechanics 14

2.3.2 Schroedinger's Wave Mechanics 15

2.3.3 Feynman's Path Integral 17

2.3.4 Pauli's Theory of Electron Spin 20

2.4 Relativistic Quantum Mechanics 25

2.4.1 Klein- Gordon Equation 25

2.4.2 Dirac Equation 27

CHAPTER III NONRELATIVISTIC TWO DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM.. 34

3.1 The Schroedinger Wave Mechanical Treatment of Two Dimensional Hydrogen Atom 34

ชวลง ๕๗ 118

Page

3.1.1 Asymptotic Behaviors 36

3.1.2 General Solution of the Radial Equation 37

3.1.3 Quantum Condition and Energy Levels . 38

3.1.4 Normalized Wave Functions 41

3.1.5 Radial Probability Distribution ... 45

3.1.6 Constant of the Motion and Interpretation of the Quantum numbers 47

3.2 Nonrelativistic Treatment of the Electron Spin for the Two dimensional Hydrogen Atom 50

3.2.1 Constants of the Motion 51

3.2.2 The Simultaneous Eigenfunctions of L_z, S_z, and J_z 51

3.2.3 The Spin Correction 53

3.3 Relativistic Corrections 56

CHAPTER IV RELATIVISTIC TWO DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM.... 60

4.1 Derivation of the Dirac Equation for the Two Dimensional Hydrogen Atom 60

4.2 Spin and Constants of the Motion 63

4.3 The Simultaneous Eigenfunctions of the constants of motion 68

4.4 The Radial Equations 71

4.5 Solution of Radial equations for Bound states ($0 < E < mc^2$) 72

Page

4.5.1 Asymptotic Behaviors 73

4.5.2 Solutions for all Values of ρ ... 75

4.5.3 The Large Component 76

4.5.4 Quantum Conditions 80

4.5.5 Energy Eigenvalues 81

4.5.6 The Small Component 84

4.5.7 Relation Between c^1_{nk} and c^2_{nk} 87

4.6 Normalization of the Wave Functions ... 88

4.7 Nonrelativistic Limit and Graphic Representation of the Relativistic Normalized Radial Functions 91

4.8 Energy Spectrum and Fine Structure 104

CHAPTER V CONCLUSION AND DISCUSSION 111

REFERENCES 119

APPENDIX A Evaluation of Integrals Containing Confluent Hypergeometric Functions 124

APPENDIX B Nonrelativistic Reduction of Dirac Hamiltonian: Foldy-Wouthuysen Transformation 128

APPENDIX C Program to Calculate the Constant Coefficients of the Relativistic Normalized Radial Functions 137

VITA 145

LIST OF TABLES

Page

TABLE 3.1 The nonrelativistic normalized radial functions for the states with n = 1, 2, 3, 4. 43

TABLE 3.2 Comparision of some quantities for the non-relativistic two-and three-dimensional hydrogen atoms. 49

TABLE 4.1 The possible values of $\bar{n}$, k, l, and the spectroscopic notations for the relativistic states with n = 1, 2, 3, 4. 92

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

LIST OF ILLUSTRATIONS

		Page
FIGURE 3.1	Low-lying energy levels of the nonrelativistic two-dimensional hydrogen atom.	40
FIGURE 3.2	The normalized radial functions, $R_{n1}(\rho)$, multiplied by Bohr radius, a_o, for non-relativistic two-dimensional hydrogen atom. ..	44
FIGURE 3.3	Radial probability distribution, $w_{n1}(\rho)$, multiplied by Bohr radius, a_o, for several states of nonrelativistic two-dimensional hydrogen atom.	46
FIGURE 3.4	Energy levels of the nonrelativistic two-dimensional hydrogen atom after taken into account the spin-and-relativistic effects. ...	59
FIGURE 4.1	Normalized radial wave functions multiplied by ρ for the 1S state and Z = 45.	98
FIGURE 4.2	Same as Fig. 4.1 but for the 2S state.	99
FIGURE 4.3	" " 2P "	101
FIGURE 4.4	" " 3S "	101
FIGURE 4.5	" " 3P "	102
FIGURE 4.6	" " 3D "	103
FIGURE 4.7	Energy level diagram of the relativistic two-dimensional hydrogen atom for n = 1, 2, and 3.	106

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย