บทที่ 2

วรรณคดีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิต ระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6" ผู้วิจัยได้ศึกษาจากหนังสือ เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศ ซึ่งได้นำเสนอตามลำดับดังนี้

การเรียนการสอนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาในประเทศไทย

การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1. วิธีพิสูจน์ทางเรขาคณิต
2. การพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม (Formal proof)
3. เหตุผลที่ใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ทฤษฎีการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ (Van Hiele Theory)

1. ระดับความคิดทางเรขาคณิต
2. คุณสมบัติของระดับความคิด
3. การเปลี่ยนแปลงระดับของความคิดจากระดับหนึ่งขึ้นไปสู่อีกระดับหนึ่ง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยในประเทศ
2. งานวิจัยในต่างประเทศ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเรียนการสอนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาในประเทศไทย

เรขาคณิตเป็นวิชาที่กำหนดให้มีการศึกษาในชั้นมัธยมในประเทศไทยมาเป็นระยะเวลาอันยาวนานพร้อม ๆ กับการจัดให้มีการศึกษาในระดับมัธยมศึกษา ถ้าจะนับเวลาโดยประมาณก็เป็นเวลาเกือบจะหนึ่งร้อยปีมาแล้ว การศึกษาเรขาคณิตในระยะเริ่มแรกมักจะใช้หนังสือ ซึ่งแปลมาจากตำราภาษาอังกฤษของ ฮอล และ สตีเวนส์ (Geometry ของ H.S.Hall and F.H. Stevens) เป็นแบบฉบับ การศึกษาเรขาคณิตในช่วงเวลาเหล่านั้นไม่มีอะไรเปลี่ยนแปลงมากนัก หลักสูตรเรขาคณิตของไทยในระยะเริ่มแรกจนถึงปี พ.ศ. 2521 ได้ยึดถือหนังสือเอลาเมนต์ของยูคลิด และตำราทางเรขาคณิตที่เขียนโดย ฮอล และ สตีเวนส์ เป็นหลัก ดังที่ อรศรี ปุราคำ (2527: 15-16) กล่าวว่า

"...จากการศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ใช้ในประเทศไทยตั้งแต่เริ่มมีประกาศหลักสูตรจนถึงหลักสูตร พุทธศักราช 2503 จะเห็นได้ว่าเนื้อหาที่สอนค่อนข้างจะคงที่ มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะยึดตำราชุดหนึ่งที่ตีพิมพ์ในประเทศอังกฤษเป็นหลักในการสร้างหลักสูตรเป็นระยะเวลานาน (A School Algebra ของ H.S.Hall and Knight, Geometry ของ H.S.Hall and F.H.Stevens, และ Elementary Trigonometry ของ H.S.Hall and S.R.Knight) ตำราภาษาไทยที่ใช้เป็นหลักในโรงเรียนส่วนใหญ่ก็แปลมาจากตำราชุดนี้ ในการประกาศเปลี่ยนแปลงหลักสูตรแต่ละครั้ง คณิตศาสตร์จึงมักจะเป็นวิชาที่เปลี่ยนแปลงน้อยที่สุด และส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปนั้นมักจะเป็นการจัดเนื้อหาบางเรื่องที่เคยอยู่ในชั้นหนึ่งไปไว้อีกชั้นหนึ่งมากกว่าการเปลี่ยนเนื้อหาหรือแนวการสอน"

รายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตในหลักสูตรต่าง ๆ ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันพอสรุปได้ดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2527: 380-381)

1. หลักสูตรสามัญศึกษา ร.ศ. 130 (พ.ศ. 2454) หลักสูตรนี้แบ่งการศึกษาเป็น 4 ระยะ คือ ชั้นมูล (การศึกษาบังคับ) ใช้เวลาเรียน 3 ปี ชั้นประถมใช้เวลาเรียน 3 ปี ชั้นมัธยมศึกษาใช้เวลาเรียน 3 ปี และชั้นมัธยมสูงใช้เวลาเรียน 3 ปี สำหรับวิชาเรขาคณิตจะเรียนในชั้นมัธยมศึกษาและชั้นมัธยมสูง เนื้อหาวิชามีรายละเอียดดังนี้

ระดับมัธยมศึกษา ได้แก่ โจทย์ที่ว่าด้วยเส้นตรง มุม รูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โจทย์แปรกติกลยีออเมตรีที่ว่าด้วยเส้นและมุมกับการสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม (ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีของยุคลิด)

ระดับมัธยมสูง ได้แก่

ก. เส้นและมุม รูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โลไซอย่างง่าย

ข. เนื้อที่และโจทย์เรื่องเนื้อที่

ค. วงกลม เส้นผ่าวง มุมในวงกลม เส้นพาดวง วงกลมซึ่งเกี่ยวด้วยรูปเส้นตรง เส้นรอบวงและเนื้อที่วงกลม

ง. กฎพีชคณิตบางข้อซึ่งต้องด้วยยีออเมตรี วงกลมซึ่งเกี่ยวด้วยรูปเส้นตรง การแก้อิเควชันสควอแดรติกอย่างง่าย ๆ ด้วยรูป

จ. วิธีแบ่งเส้นตรงตามส่วน รูปสามเหลี่ยมมุมเท่า รูปเหมือน วิธีเนื้อที่ (ในแผนกวิชายีออเมตรีนี้ไม่บังคับให้ใช้วิธีของยุคลิด)

2. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2480 ในหลักสูตรนี้วิชาเรขาคณิตมีสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย คือ ชั้นมัธยมปีที่ 4 ชั้นมัธยมปีที่ 5 ชั้นมัธยมปีที่ 6 แต่ละชั้นใช้เวลาเรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง รายละเอียดเนื้อหาวิชาระบุไว้ในประมวลการสอนเรขาคณิตอย่างละเอียดทุกชั้น ประมวลการสอนเรขาคณิตในชั้นมัธยมปีที่ 4 คือ (เรื่องเดียวกัน: 399-400)

ก. ให้รู้ความมุ่งหมายและประโยชน์ของเรขาคณิต ความแตกต่างระหว่างเรขาคณิตกับคณิตศาสตร์กิ่งอื่น ๆ ให้รู้สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Axioms) คำจำกัดความและหลักสำคัญในเบื้องต้น ให้รู้ประโยชน์และความจำเป็นของการจำกัดความ เครื่องมือที่ใช้ในการเรียนวิชานี้ เครื่องหมายและอักษรย่อต่าง ๆ

ข. ให้รู้ทฤษฎีบทที่ 1-12 รวมทั้งบทแทรกและคำจำกัดความ

ค. ให้รู้จักเส้นขนาน มุมต่าง ๆ ที่เกิดจากลากเส้นตรงตัดเส้นขนาน ทฤษฎีบทที่ 13, 14, 15 รวมทั้งคำจำกัดความ

ง. ให้รู้ทฤษฎีบทที่ 16 บทแทรก กับความจริงที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 16 หาด้านและมุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

จ. ให้รู้ทฤษฎีบทที่ 17-19 รวมทั้งบทกลับ ให้รู้ลักษณะของสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันได้สนิทกับที่อาจเท่ากันก็ได้หรือไม่เท่ากันก็ได้

ฉ. ให้รู้จักรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ทฤษฎีบทที่ 20-22 และบทแทรก คำจำกัดความ ให้รู้สเกลเย้ (Diagonal Scale) รู้วิธีสร้างและประโยชน์ของมัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ช. ให้รู้บทสร้างที่ 1-10

หลักสูตรนี้วิชาเรขาคณิตเน้นการทำความเข้าใจเหตุผลแทนที่จะเน้นความเร็วเหมือนเลขคณิต โดยเขียนไว้ในหมายเหตุว่า "การสอนเรขาคณิตไม่ควรให้นักเรียนท่องตัวบทอย่างนกแก้ว ต้องสอนให้นักเรียนเข้าใจจริง ๆ ด้วยเหตุผล จำบทที่เรียนมาแล้วได้แม่นยำ ที่จะสอนให้ได้ผลเช่นนี้จะต้องอาศัยการทบทวนบ่อย ๆ จัดบทที่เรียนแล้วเป็นหมู่เป็นพวก เปรียบเทียบให้เห็นความคล้ายคลึง และความแตกต่างระหว่างบทที่นักเรียนอาจจำไขว้กันได้..."

3. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2493 หลักสูตรนี้ประกาศใช้ตั้งแต่ปีการศึกษา 2493 โดยปรับปรุงแก้ไขจากหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2480 วิชาเรขาคณิตในหลักสูตรนี้เรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมงตลอดทั้ง 3 ปี รายละเอียดเนื้อหาวิชาเขียนไว้รวมกันตลอดทั้ง 3 ปี ดังนี้ (เรื่องเดียวกัน: 426-427)

ก. สิ่งที่เห็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ บทนิยามและหลักเบื้องต้น อุปกรณ์สำหรับใช้ในการสร้างรูป ลักษณะและส่วนประกอบของทฤษฎีบท และบทสร้าง สัญลักษณ์

ข. เส้นตรงและมุม ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ค. รูปสามเหลี่ยม ด้านและมุม การเปรียบเทียบรูปสามเหลี่ยมสองรูป ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เส้นขนาน ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ง. ผลบวกของมุมในรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง สรุปลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นเอกลักษณ์

จ. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง สเกลเย้

ฉ. บทสร้างต่าง ๆ โลไซ เส้นตรงที่จวบกันในรูปสามเหลี่ยม

ช. พื้นที่ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม รูปสามเหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม ทฤษฎีบทและบทสร้างที่เกี่ยวข้อง

ซ. วงกลม หลักเบื้องต้น สมบัติสมมาตรแห่งวงกลม คอร์ดและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง มุมในวงกลมและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เส้นสัมผัสวง หลักเบื้องต้น และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง บทสร้างเกี่ยวกับวงกลม วงกลมบรรจุภายในและภายนอกรูปสามเหลี่ยม

สำหรับแบบเรียนในสมัยนี้แบบเรียนเรขาคณิตฉบับของกระทรวงไม่มี มีแต่ฉบับที่กระทรวงตรวจอนุญาตให้สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิชพิมพ์จำหน่าย ซึ่งเขียนโดย พระสันธิวิทยาพัฒน์ นอกจากแบบเรียนแล้ว กระทรวงศึกษาธิการได้มอบให้อาจารย์ระบิล สีตสุวรรณ เขียนคู่มือครูขึ้นเพื่อช่วยให้ครูผู้สอนทราบขอบข่ายของเนื้อหาที่จะสอนในแต่ละปี แต่ไม่ได้บังคับว่าจะต้องสอนตามคู่มือครู (ประสาท สอ้านวงศ์ 2527: 6)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. หลักสูตรเตรียมอุดมศึกษา พุทธศักราช 2491 และ 2498 หลักสูตรเตรียมอุดมศึกษา พุทธศักราช 2491 แบ่งแผนกวิชาเป็น 2 แผนกคือ แผนกอักษรศาสตร์ และแผนกวิทยาศาสตร์ โดยกำหนดเวลาเรียนไว้ว่า แผนกอักษรศาสตร์ต้องเรียนคณิตศาสตร์ สัปดาห์ละ 5 ชั่วโมง ส่วนแผนกวิทยาศาสตร์ให้เรียนสัปดาห์ละ 6-7 ชั่วโมง สำหรับวิชาเรขาคณิตใช้หนังสือเรียนต่างประเทศของ H.S. Hall และ F.H. Stevens ส่วนรายละเอียดเนื้อหาวิชาเรขาคณิตที่ต้องเรียนมีดังนี้ (เรื่องเดียวกัน: 419-420)

แผนกอักษรศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ก. บทสร้างที่เกี่ยวกับวงกลมและที่เกี่ยวกับรูปเชิงเส้นตรงต่าง ๆ

ข. เส้นรอบวงและพื้นที่ของวงกลม

ค. ทฤษฎีบทและแบบตัวอย่างที่เกี่ยวกับวงกลมและสามเหลี่ยม (ออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยม เส้นของซิมสัน)

ง. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับจตุรัสและสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จ. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างสี่เหลี่ยมมุมฉากกับวงกลม

ฉ. ภาคตัดมัธยะ (Medial section)

ช. การถอดสมการกำลังที่สองด้วยวิธีกราฟ

ซ. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับสัดส่วน

ฌ. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมีมุมเท่ากันและสามเหลี่ยมมีรูปคล้ายคลึงกัน

ญ. บทสร้างที่เกี่ยวกับการแบ่งทั้งภายนอกและภายใน อัตราส่วนสุดท้ายและมัชฌิม

เฉพาะแผนกวิทยาศาสตร์

ก. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับแผนรูปที่คล้ายคลึงกัน

ข. สัดส่วนของพื้นที่และมุม

ค. สัดส่วนที่นำมาใช้กับพื้นที่

ง. ทฤษฎีบทเบ็ดเตล็ดและแบบตัวอย่าง วิธีสร้างวงกลมด้วยวิธีบางอย่าง

จ. บรรดาขั้นสูงและขั้นต่ำ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักสูตรเตรียมอุดมศึกษา พุทธศักราช 2491 ใช้อยู่จนถึงปีการศึกษา 2498 จึงได้มีการปรับปรุงหลักสูตรใหม่อีกครั้งหนึ่ง และให้ใช้หลักสูตรใหม่ตามลำดับปีการศึกษา คือ เตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษา 2498 และปีที่ 2 ในปีการศึกษา 2499 การเปลี่ยนแปลงที่สำคัญคือ เลิกการเรียนเลขคณิตในระดับนี้ และเรียกชื่อวิชาคณิตศาสตร์เป็นคณิตศาสตร์ 1ก 1ข 2ก 2ข โดยเลข 1 และ 2 หมายถึงลำดับรายวิชา ส่วนอักษร ก หมายถึงเป็นวิชาสำหรับแผนกวิทยาศาสตร์ อักษร ข หมายถึงแผนกอักษรศาสตร์ กำหนดเวลาเรียนไว้ดังนี้ แผนกวิทยาศาสตร์นั้นเรียนคณิตศาสตร์ สัปดาห์ละ 6 ชั่วโมง ตลอด 2 ปี ส่วนแผนกอักษรศาสตร์นั้นปีแรกเรียน 5 ชั่วโมง ปีที่ 2 เรียนเพียง 4 ชั่วโมง รายละเอียดเนื้อหาเรขาคณิตที่ต้องเรียนในแต่ละรายวิชามีดังนี้ (เรื่องเดียวกัน: 438-439)

คณิตศาสตร์ 1ก

เรขาคณิต ให้เรียนบทสร้างที่เกี่ยวกับวงกลม และที่เกี่ยวกับรูปเชิงเส้นต่าง ๆ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับวงกลมและสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับจตุรัสและสี่เหลี่ยมมุมฉาก สี่เหลี่ยมมุมฉากกับวงกลม และภาคตัดมัธยะ

คณิตศาสตร์ 1ข

เรขาคณิต ให้เรียนบทสร้างที่เกี่ยวกับวงกลมและรูปเชิงเส้นต่าง ๆ เส้นรอบวงและพื้นที่ของวงกลม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมและสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับจตุรัสและสี่เหลี่ยมมุมฉาก ความสัมพันธ์ระหว่างสี่เหลี่ยมมุมฉากกับวงกลม

คณิตศาสตร์ 2ก

เรขาคณิต ให้เรียนทฤษฎีที่เกี่ยวกับสัดส่วน สามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากัน และสามเหลี่ยมที่มีรูปคล้ายคลึงกัน บทสร้างที่เกี่ยวกับการแบ่งทั้งภายนอกและภายใน อัตราส่วนสุดท้ายและมัชฌิม ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับแผนรูปที่คล้ายคลึงกัน สัดส่วนของพื้นที่และมุม บรรคาขั้นสูงและขั้นต่ำ

คณิตศาสตร์ 2ข

รายวิชานี้มีเฉพาะเนื้อหาพีชคณิต สถิติ และตรีโกณมิติ ส่วนเนื้อหาเรขาคณิตไม่มี

016670

หลักสูตรเตรียมอุดมศึกษา พุทธศักราช 2498 นี้ใช้อยู่จนปีการศึกษา 2505 จึงเริ่มใช้หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2503 โดยเรียกชั้นเตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 ใหม่ว่า มัธยมศึกษาปีที่ 4 (มศ.4) และในปีการศึกษา 2506 เป็นอันเลิกใช้หลักสูตรนี้

5. หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย พุทธศักราช 2503 กระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศใช้หลักสูตรนี้ในเดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2503 โดยหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2503 ใช้แทนหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2493 (ระดับประถมศึกษาเดิมมีเพียง 4 ปี มัธยมศึกษาตอนต้น 3 ปี และมัธยมศึกษาตอนปลาย 3 ปี ดังนั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในขณะนั้นจึงเทียบได้กับมัธยมศึกษาตอนต้นในระบบใหม่ ซึ่งระดับประถมศึกษามี 7 ปี) ส่วนหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2503 ให้ใช้แทนหลักสูตรเตรียมอุดมศึกษา พุทธศักราช 2498

หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2503 คณิตศาสตร์เป็นวิชาบังคับตลอดทั้ง 3 ปี โดยกำหนดอัตราเวลาเรียนไว้สัปดาห์ละ 5 ชั่วโมง สำหรับสายสามัญ และสัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง สำหรับสายอาชีพ เนื้อหาคณิตศาสตร์ในหลักสูตรแต่ละชั้นแบ่งเป็น 2 ส่วน ส่วนที่หนึ่งว่าด้วย เลขคณิต-พีชคณิต เรียนสัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง ทั้งสายสามัญและสายอาชีพ ส่วนที่สองว่าด้วยเรขาคณิตให้เรียนเฉพาะนักเรียนสายสามัญสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง เรียนตลอดทั้ง 3 ปี มีรายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตดังนี้ (เรื่องเดียวกัน: 469-470)

มศ. 1 ประวัติย่อและประโยชน์ของวิชาเรขาคณิต หลักทั่วไปเบื้องต้น นิยามต่าง ๆ สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Axiom) และหลักที่ยอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์ (Postulates) ทฤษฎีบทว่าด้วยเส้นตรงตั้งแต่ 2 เส้นขึ้นไป นิยามรูปสามเหลี่ยมและเส้นมัธยฐาน ทฤษฎีบทว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ บทสร้างเกี่ยวกับเส้นตรง มุม และรูปสามเหลี่ยม การแบ่งครึ่งเส้นตรง แบ่งครึ่งมุม การสร้างสามเหลี่ยมต่าง ๆ นิยามของเส้นขนาน ทฤษฎีบทว่าด้วยมุมที่เกิดจากเส้นตัดเส้นขนาน การสร้างเส้นขนาน การแบ่งเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน ทฤษฎีบทว่าด้วยด้านและมุมในรูปสามเหลี่ยมเดียว ทฤษฎีบทว่าด้วยรูปสามเหลี่ยมสองรูป

มศ. 2 นิยามของรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ทฤษฎีบทว่าด้วยรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รวมทั้งรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านขนานกันทุกชนิด ทฤษฎีบทว่าด้วยเส้นขนานหลายเส้น และส่วนตัดของเส้นตัดเส้นขนาน บทสร้างรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ทฤษฎีบทว่าด้วยพื้นที่รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม ทฤษฎีบทของ Pythagoras บทสร้างรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากัน โลคัสของจุดในลักษณะต่าง ๆ และการหาโลคัสของจุดบทสร้างรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้

มศ. 3 วงกลมนิยามส่วนต่าง ๆ ของวงกลมและลักษณะที่วงกลมสองวงสัมพันธ์กัน ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมวงเดียวว่าด้วยคอร์ด อาร์ค เส้นสัมผัสวงและมุมในวงกลม ทฤษฎีบทว่าด้วยวงกลมสองวงเท่ากัน สัมผัสกัน บทสร้างเกี่ยวกับวงกลม ความสัมพันธ์ระหว่างรูปสามเหลี่ยมและวงกลมล้อมรอบแนบใน แนบนอก ความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมและวงกลม การสร้างวงกลมล้อมรอบสี่เหลี่ยม ความสัมพันธ์ระหว่างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และวงกลมแนบในล้อมรอบ

ในด้านการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตในหลักสูตรนี้ นักเรียนจะเริ่มเรียนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal proof) ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 นั่นคือ การทำโจทย์เกี่ยวกับเรขาคณิต จะต้องประกอบด้วยรูป มีการเขียนสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่จะต้องพิสูจน์ และพิสูจน์ บางข้ออาจมีการสร้างเพื่อพิสูจน์ บางข้ออาจมีการสร้างเพื่อช่วยในการพิสูจน์ ในเรื่องสร้างก็เช่นกัน เมื่อสร้างแล้วจะต้องมีการพิสูจน์แสดงไว้ด้วย ทั้งทฤษฎีบท บทสร้าง และแบบฝึกหัดจะต้องมีการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (อำไพ ยมาภัย 2527: 109, 116)

สำหรับหนังสือเรียน ใช้แบบเรียนของกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ซึ่งมีทั้งหมด 4 เล่ม คือ แบบเรียนคณิตศาสตร์วิชาเรขาคณิตสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2, 3 และชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย การจัดเนื้อหาสำหรับชั้นเรียนต่าง ๆ ในแบบเรียน แต่ละบทมีชื่อบท และรายละเอียดเกือบจะเป็นอย่างเดียวกับรายละเอียดที่ให้ไว้ในหลักสูตร ทฤษฎีต่าง ๆ นั้น ก็เขียนตามลำดับคล้ายหนังสือของฮอล แอนด์ สตีเวน (เรื่องเดียวกัน: 110, 113-114)

หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2503 คณิตศาสตร์เป็นวิชาบังคับและวิชาเลือก กล่าวคือ คณิตศาสตร์ ก. เป็นวิชาบังคับร่วมทั้งสายสามัญทุกแผนก (ศิลปะ วิทยาศาสตร์ และทั่วไป) และสายอาชีพ กำหนดเวลาเรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมงตลอดทั้ง 2 ปี

คณิตศาสตร์ ข เป็นวิชาบังคับเฉพาะสายสามัญแผนกวิทยาศาสตร์ นักเรียนแผนกศิลปะ และแผนกทั่วไป อาจเรียนคณิตศาสตร์ ข เป็นวิชาเลือกได้ กำหนดเวลาเรียนสัปดาห์ละ 4 ชั่วโมง ตลอดทั้ง 2 ปี เนื้อหาวิชาเรขาคณิตจะอยู่ในคณิตศาสตร์ ข เท่านั้น ซึ่งมีรายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตดังนี้

ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม และวงกลม การแบ่งมุม ทฤษฎีว่าด้วยจุดจวบ บทสร้างที่เกี่ยวกับการแบ่งเส้นตรง สามเหลี่ยมคล้ายเซกเตอร์และมุมในวงกลม การแก้สมการกำลังสองด้วยการสร้างรูป บรรดาขั้นสูงและขั้นต่ำ

สรุปได้ว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตในหลักสูตร พุทธศักราช 2503 นี้ เน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนของทฤษฎีบทต่าง ๆ ในเรขาคณิตแบบยุคลิด ซึ่งแต่เดิมการพิสูจน์ไม่ได้อยู่ในรูปตาราง แต่เขียนเรียงลงมา ข้อความใดมีเหตุผลหรือทฤษฎีที่ต้องอ้างอิงก็เขียนไว้ในวงเล็บ ซึ่งเป็นวิธีเดียวกับที่ได้จากหนังสือของฮอล แอนด์ สตีเวนส์ และให้เวลาสอนสำหรับการพิสูจน์มาก ที่เป็นเช่นนี้คงจะเป็นการพยายามที่จะให้บรรลุจุดมุ่งหมายที่ว่า เรขาคณิตเป็นวิชาที่ทำให้รู้จักคิดหาเหตุผล และมีเหตุผลนั่นเอง (เรื่องเดียวกัน: 120-121)

6. หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 วิชาคณิตศาสตร์ในหลักสูตรนี้ได้รับการพัฒนาปรับปรุงขึ้นใหม่ โดยกระทรวงศึกษาธิการมอบหมายให้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นผู้ดำเนินการ สำหรับหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 คณิตศาสตร์เป็นวิชาบังคับในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กำหนดเวลาเรียนไว้สัปดาห์ละ 4 คาบ (คาบละ 50 นาที) และเป็นวิชาเลือกในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งแบ่งเป็น 2 สาย สายที่ 1 กำหนดเวลาเรียนสัปดาห์ละ 6 คาบ สายที่ 2 กำหนดเวลาเรียนสัปดาห์ละ 4 คาบ การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของ สสวท. นี้เป็นแบบบูรณาการ (Integration) ดังนั้นจึงไม่ได้แยกเป็นวิชาเลขคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ หรือเรขาคณิต แต่รวมเรียกว่าคณิตศาสตร์ (อำไพ ยมาภัย 2527: 110) ด้วยเหตุผลดังกล่าว เรขาคณิตจึงเป็นหัวข้อเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ของแต่ละระดับชั้น รายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตในแต่ละระดับชั้นมีดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2527: 517-521)

ม.1 จุดและเส้นตรง รังสี ส่วนของเส้นตรง มุม มุมฉากและมุมตรง ความยาว พื้นที่ ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ม.2 มุมตรงข้าม ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เส้นขนานและมุมภายใน เส้นขนานและมุมแย้ง การนำคุณสมบัติของเส้นขนานไปใช้อธิบายคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน การนำไปใช้คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและจำนวนจริง พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสามเหลี่ยม พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู และรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและปริซึม หน่วยการตวง พื้นที่ผิวของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและปริซึม

ม.3 (สายที่ 1) พื้นที่ของวงกลม พื้นที่ผิวและปริมาตรของปิระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลม การพิสูจน์ สัจพจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทพิธากอรัสและบทกลับ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก วงกลม มุมภายในของวงกลมและเส้นสัมผัสวงกลม การสร้างขั้นพื้นฐาน และการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

(สายที่ 2) การพิสูจน์ สัจพจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทพิธากอรัสและบทกลับ วงกลม มุมภายในของวงกลมและเส้นสัมผัสวงกลม

ก่อนใช้หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 นั้น การเรียนเรขาคณิตแม้จะมุ่งให้ผู้เรียนฝึกการคิดอย่างมีเหตุมีผล โดยหวังว่าจะเป็นผลจากการให้นักเรียนสามารถพิสูจน์และฝึกโดยการพิสูจน์ และพยายามชี้ให้เห็นว่าเรขาคณิตเป็นวิชาที่มีความสำคัญในชีวิตประจำวัน แต่มีนักเรียนเพียงส่วนน้อยที่มีทัศนคติที่ดีต่อวิชานี้ นักเรียนส่วนใหญ่เห็นว่าการเรียนเรขาคณิต คือ การที่ต้องท่องจำ ต้องจำลำดับทฤษฎีบท ต้องจำการพิสูจน์ของแต่ละทฤษฎี และจำการพิสูจน์ของแบบฝึกหัดแต่ละข้อ การเตรียมตัวสอบ ถ้าข้อสอบออกตรงกับทฤษฎีหรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนท่องได้ ก็จะทำข้อสอบได้ มีโอกาสน้อยที่จะคิดพิสูจน์แบบฝึกหัดที่ยังไม่เคยเห็น (อำไพ ยมาภัย 2527: 120) ดังนั้นแนวการเรียนการสอนเรขาคณิตในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 จึงไม่เน้นถึงการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน แต่จะเป็นการเรียนในลักษณะของกิจกรรมหรือการทดลอง เพื่อให้เห็นข้อสรุปที่เป็นคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตหรือทฤษฎี

ดังที่ อรศรี ปุราคำ (2527: 43) ได้กล่าวเปรียบเทียบหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาระหว่างหลักสูตร สสวท. กับหลักสูตรพุทธศักราช 2503 ว่า "สอนเรขาคณิตแบบยูคลิดในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น แต่เน้นการใช้สามัญสำนึก และการสังเกตมากกว่าแบบแผนที่เป็นทางการ คัดเลือกเฉพาะความคิดรวบยอดและทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ และมีประโยชน์มากเท่านั้น" และกำหนดว่าในชั้น ม.1 และ ม.2 ให้เรียนเรื่องต่าง ๆ โดยยังไม่พิสูจน์เพียงแต่ให้อ้างได้ว่ามีเหตุผลเป็นมาอย่างไร และให้สามารถนำเอาผลของคุณสมบัติไปใช้ ส่วนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนกำหนดให้เรียนในชั้น ม.3 (อำไพ ยมาภัย 2527: 109-110, 121)

สำหรับหนังสือเรียนนั้นใช้แบบเรียน ซึ่งจัดทำโดย สสวท. ได้แก่ หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ปีที่สอง และปีที่สาม แต่ละปีแบ่งออกเป็น 2 เล่ม หนังสือเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามสายที่หนึ่งและสายที่สอง เรียนเล่มเดียวกัน แต่แตกต่างกันในบางบท หนังสือเรียนทุกเล่มมีคู่มือครูประกอบ เพื่อแนะนำวิธีสอนและข้อเสนอแนะอื่น ๆ การจัดเนื้อหาเรขาคณิตในหนังสือเรียนพยายามโยงเรื่องที่จะศึกษาให้มาเกี่ยวข้อง กับความรู้แขนงต่าง ๆ พยายามให้เห็นประโยชน์ในการนำไปใช้ควบคู่กันไป เช่น การศึกษาเรื่องวงกลมในหนังสือเรียนจะใช้เรื่องเส้นรอบโลกเป็นการนำเข้าสู่บทเรียน หรือแสดงให้เห็นการใช้คุณสมบัติของเรขาคณิตที่เรียนมาแล้วได้แก่ เรื่องเส้นขนาน

ต่อมากระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศยกเลิกโครงสร้างและคำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ซึ่งเป็นวิชาเลือก และให้ใช้โครงสร้างและคำอธิบายรายวิชาที่ประกาศเปลี่ยนแปลงแทน ตั้งแต่ปีการศึกษา 2530 เป็นต้นไป โดยโครงสร้างวิชาเลือกคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ประกาศใช้ใหม่นี้ จัดแบ่งรายวิชาออกเป็น 2 สาย คือ รายวิชาที่ใช้เวลาเรียนสัปดาห์ละ 4 คาบ และรายวิชาที่ใช้เวลาเรียนสัปดาห์ละ 2 คาบ สำหรับรายวิชาที่ใช้เวลาเรียนสัปดาห์ละ 2 คาบนี้ จะมีรายวิชาที่เป็นวิชาเรขาคณิตหนึ่งรายวิชาคือ ค321 โดยมีรายละเอียดเนื้อหาเรขาคณิตแบบยูคลิด 5 หัวข้อเรื่องได้แก่ สัจพจน์ในวิชาเรขาคณิต ทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม แนวการเรียนการสอนในรายวิชา ค 321 นี้ เน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ทั้งในทฤษฎีบทต่าง ๆ และแบบฝึกหัด

7. หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2518 วิชาคณิตศาสตร์ในหลักสูตรนี้ ได้รับการพัฒนาปรับปรุงโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เพื่อให้สอดคล้องกับวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นแบบแผนใหม่ในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายนี้จัดเป็นวิชาเลือกตามแผนการเรียน ซึ่งมี 12 รายวิชา รายวิชาละ 2 หน่วยกิต นักเรียนจะเลือกเรียนกี่รายวิชาก็ได้ สำหรับวิชาเรขาคณิตได้จัดให้เรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ และเวคเตอร์แทนเรขาคณิตแบบยูคลิด ซึ่งมีเนื้อหาต่าง ๆ ดังนี้ โพรเจคชั่น ระยะระหว่างจุดสองจุด และจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด วงกลม พาราโบล่า วงรี ไฮเพอร์โบลา เวกเตอร์ (การบวก ลบ คูณ และคุณสมบัติ และการใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีในเรขาคณิตยูคลิด) (เรื่องเดียวกัน: 110) และต่อมาในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2524 ซึ่งมัธยมศึกษาตอนปลายใช้เวลาเรียน 3 ปี ก็ไม่มีเรียนเรขาคณิตแบบยูคลิดเช่นเดียวกัน

<u>การพิสูจน์ทางเรขาคณิต</u>

1. วิธีพิสูจน์ทางเรขาคณิต

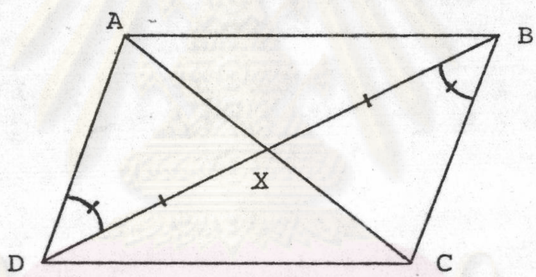
การเรียนวิชาเรขาคณิตนั้น ผู้เรียนต้องเรียนพิสูจน์ตัวทฤษฎีบท และรู้จักนำตัวทฤษฎีบทไปใช้อ้างในการพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่น ๆ หรือโจทย์แบบฝึกหัด ซึ่งการพิสูจน์ดังกล่าวนี้ มีวิธีการพิสูจน์ได้หลายวิธี กรมวิชาการ (2514: 5-13) ได้กล่าวถึงวิธีพิสูจน์ทางเรขาคณิตมี 3 วิธีคือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.1 วิธีพิสูจน์ทางตรง (Direct proof) คือการนำข้อความที่เป็นเหตุเป็นผลมาเรียบเรียงเป็นขั้น ๆ ข้อความเหล่านั้นได้มาจากโจทย์ จากทฤษฎีบท สัจพจน์ นิยามและบทสร้างต่าง ๆ บางบทที่เรียนมาแล้ว วิธีเรียบเรียงข้อความนั้น ๆ อาจเรียบเรียงจากผลไปหาเหตุ ซึ่งได้จากวิธีคิดที่เรียกว่า การวิเคราะห์ (Analytic method) หรือเมื่อคิดได้แล้วเรียบเรียงจากเหตุไปหาผล เรียกว่าการสังเคราะห์ (Synthetic method)

<u>ตัวอย่าง</u> การพิสูจน์แบบวิเคราะห์ (Analytic method of proof) และการพิสูจน์แบบสังเคราะห์ (Synthetic method of proof)

<u>โจทย์</u> ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง AC ตัดกับ BD ที่จุด X ทำให้ BX = DX และ $A\hat{D}B = C\hat{B}D$ จงพิสูจน์ว่า AB = CD



สิ่งที่กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง AC ตัด BD ที่จุด X, DX = BX, $A\hat{D}B = C\hat{B}D$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ AB = CD

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิสูจน์ แบบวิเคราะห์ (Analytic method of proof)

ข้อความที่พิสูจน์ได้	เหตุผล
1. AB = CD ถ้า $\triangle$ ABX $\cong$ $\triangle$ CDX	1. เป็นด้านที่สมนัยกันของสาม เหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
2. $\triangle$ ABX $\cong$ $\triangle$ CDX ถ้า AX = CX $\widehat{AXB} = \widehat{CXD}$ XB = XD	2. มีด้านที่สมนัยกัน เท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ เท่ากันมีขนาดเท่ากัน
3. แต่ $\widehat{AXB} = \widehat{CXD}$	3. มุมตรงกันข้ามที่ AC ตัดกับ BD
4. และ XB = XD	4. โจทย์ให้
5. $\therefore$ AX = CX ถ้า $\triangle$ AXD $\cong$ $\triangle$ CXB	5. ทำนอง เดียวกับข้อ 1
6. $\triangle$ AXD $\cong$ $\triangle$ CXB ถ้า $\widehat{ADX} = \widehat{CBX}$ DX = BX และ $\widehat{AXD} = \widehat{CXB}$	6. มีมุมที่สมนัยกัน เท่ากันสองคู่ และด้านที่สมนัยกัน เท่ากันหนึ่งคู่
7. แต่ $\widehat{ADX} = \widehat{CBX}$	7. โจทย์ให้
8. และ DX = BX	8. โจทย์ให้
9. และ $\widehat{AXD} = \widehat{CXB}$	9. มุมตรงข้ามที่ AC ตัดกับ BD
10. $\therefore$ AB = CD	10. จากข้อ 1 ถึงข้อ 9

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิสูจน์ แบบสังเคราะห์ (Synthetic method of proof)

ข้อความที่พิสูจน์ได้	เหตุผล
1. $\hat{ADX} = \hat{CBX}$	1. โจทย์ให้
2. $DX = BX$	2. โจทย์ให้
3. $\hat{AXD} = \hat{CXB}$	3. มุมตรงข้ามที่ AC ตัดกับ BD
4. $\triangle ADX \cong \triangle CBX$	4. มุมที่สมนัยกันเท่ากันสองคู่ และด้านที่สมนัยกันเท่ากันหนึ่งคู่
5. $\therefore AX = CX$	5. ด้านที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
6. $BX = DX$	6. โจทย์ให้
7. $\hat{AXB} = \hat{CXD}$	7. มุมตรงข้ามที่ AC ตัดกับ BD
8. $\triangle AXB \cong \triangle CXD$	8. ด้านที่สมนัยกันเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันมีขนาดเท่ากัน
9. $\therefore AB = CD$	9. ด้านที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

การเรียบเรียงวิธีพิสูจน์แบบสังเคราะห์สั้นกว่าเรียบเรียงแบบวิเคราะห์ ดังนั้นเมื่อวิเคราะห์ได้แล้ว คือ คิดจากผลไปหาเหตุที่กำหนดให้ได้แล้ว เราจึงนิยมเรียบเรียงวิธีพิสูจน์ย้อนกลับกับวิธีวิเคราะห์ โดยเริ่มต้นจากเหตุไปจนได้ผลที่ต้องการ

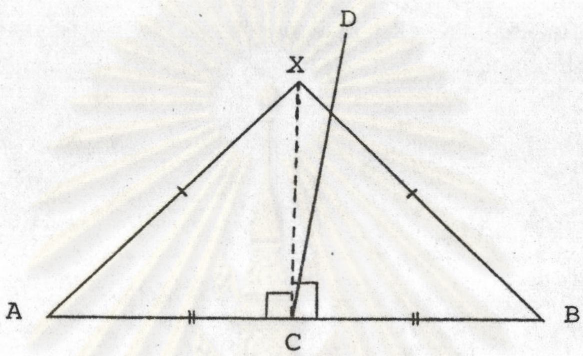
1.2 วิธีพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect proof) มีที่ใช้กันอยู่ 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 Coincidence method คือมีรูปสองรูปที่มีส่วนประกอบบางส่วนซ้อนกันอยู่ รูปหนึ่งมีเงื่อนไขตามโจทย์ อีกรูปหนึ่งเป็นรูปที่สร้างเพิ่มเติมเพื่อช่วยการพิสูจน์และมีเงื่อนไขตามโจทย์บางประการ ในการพิสูจน์เราพยายามพิสูจน์ว่ารูปทั้งสองซ้อนกัน

สนิทเป็นรูปเดียวกัน ดังนั้นรูปนั้นก็จะมีคุณสมบัติครบถ้วนทุกอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> การพิสูจน์แบบ Coincidence method

<u>โจทย์</u> จงพิสูจน์ว่าจุดที่อยู่ห่างจากจุดสองจุดที่กำหนดให้เป็นระยะทางเท่ากัน จะอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ลากต่อจุดสองจุดที่กำหนดให้นั้น



สิ่งที่กำหนดให้	A, B	เป็นจุดที่กำหนดให้สองจุด
	X	เป็นจุด ๆ หนึ่งซึ่งทำให้ XA = XB
	CD	เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด C
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	พิสูจน์ว่า X อยู่บนเส้นตรง CD	

เนื่องจากเราไม่สามารถจะพิสูจน์โจทย์ข้อนี้ด้วยวิธีตรง จึงใช้วิธีพิสูจน์ทางอ้อมโดยการลากเส้น XC แล้วพยายามพิสูจน์ว่า XC มีคุณสมบัติอย่างเดียวกับ DC จึงเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกันที่ลากจากจุด C จุดเดียวกัน จะได้เรียบเรียงวิธีพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิสูจน์ แบบ Coincidence method

ข้อความที่พิสูจน์ได้	เหตุผล
1. AC = BC	1. C เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB
2. XA = XB	2. โจทย์ให้
3. XC = XC	3. ด้านร่วม
4. $\triangle ACX \cong \triangle BCX$	4. มีด้านที่สมนัยกันเท่ากันสามคู่
5. $\therefore A\hat{C}X = B\hat{C}X$	5. มุมที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
6. $A\hat{C}X + B\hat{C}X = 2$⌊ฉ	6. มุมประชิดที่ XC พบกับ AB ที่ C
7. $2\,A\hat{C}X = 2$⌊ฉ	7. แทนค่าข้อ 5 ในข้อ 6
8. $A\hat{C}X = 1$⌊ฉ	8. นำ 2 หารทั้งสองข้าง
9. $\therefore XC \perp AB$	9. นิยามของเส้นตั้งฉาก
10. ดังนั้น XC เป็นเส้นตรงเดียวกับ DC นั่นคือ X อยู่บนเส้นตรง CD	10. เส้นตั้งฉากที่จุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้ มีได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

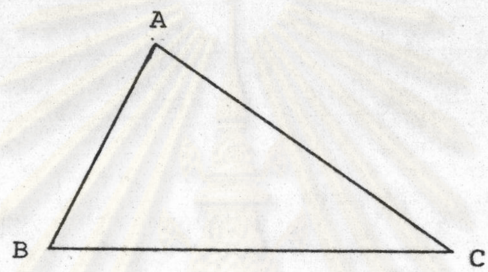
แบบที่ 2 Exclusion method คือ เมื่อพิจารณาสรุปผลที่โจทย์ต้องการแล้ว เราจะตั้งข้อแม้ว่า ถ้าไม่เป็นอย่างที่ต้องการจะพิสูจน์ หรือถ้าสิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์นั้นไม่เป็นจริง จะมีกรณีอื่นใดบ้างที่เป็นไปได้ ก็ให้รวบรวมไว้ทุกกรณีแล้วหาเหตุผลมาพิสูจน์ว่า กรณีที่คิดว่าจะเป็นไปได้นั้น กลับเป็นไปไม่ได้ เพราะเหตุผลที่จะประกอบความจริงของกรณีเหล่านั้นแย้งกับโจทย์ เราก็ตัดทิ้งไป ในที่สุดก็จะสรุปได้ว่า กรณีที่ต้องการพิสูจน์นั้นเป็นจริงกรณีเดียว เช่น ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า XY ขนานกับ PQ เราตั้งข้อแม้ว่า ถ้า XY ไม่ขนานกับ PQ ทางที่จะเป็นไปได้คือ XY ตัดกับ PQ เมื่อพิสูจน์แล้ว ปรากฏว่า ตัดกันเป็นไปไม่ได้ เพราะเหตุผลแย้งกับโจทย์ จึงสรุปว่า XY ต้องขนานกับ PQ เป็นต้น หรือถ้าจะพิสูจน์ว่า $\hat{A} > \hat{B}$ เราตั้งข้อแม้ว่า

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถ้า $\hat{A} \ngtr \hat{B}$ หนทางอื่นที่จะเป็นไปได้คือ $\hat{A} = \hat{B}$ หรือ $\hat{A} < \hat{B}$ เมื่อยกเหตุผลมาพิสูจน์แล้วปรากฏว่า เท่ากันไม่ได้ หรือเล็กกว่ากันก็ไม่ได้ เพราะแย้งกับโจทย์ จึงสรุปค่าที่ว่า $\hat{A} \ngtr \hat{B}$ นั้นเป็นไปไม่ได้ ความจริงแล้ว $\hat{A} > \hat{B}$ จึงจะถูกต้องตามโจทย์

<u>ตัวอย่าง</u> การพิสูจน์แบบ Exclusion method

<u>โจทย์</u> ถ้ามุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดไม่เท่ากัน ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุมใหญ่จะยาวกว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก



สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\hat{B} > \hat{C}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พิสูจน์ว่า $AC > AB$

เราจะนำวิธีพิสูจน์ทางอ้อมแบบที่เรียกว่า Exclusion method มาใช้

วิธีคิด ถ้า $AC \ngtr AB$

กรณีอื่นที่เป็นไปได้คือ

กรณีที่ 1 $AC = AB$

กรณีที่ 2 $AC < AB$

ถ้ากรณีที่ 1 เป็นจริง $\hat{B} = \hat{C}$ แต่โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$ จึงแย้งกับโจทย์ ดังนั้นกรณี $AC = AB$ จึงเป็นไปไม่ได้

ถ้ากรณีที่ 2 เป็นจริง $\hat{C} > \hat{B}$ แต่โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$ ซึ่งแย้งกันอีก ดังนั้นกรณี $AC < AB$ จึงเป็นไปไม่ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดังนั้นที่คิดว่า $AC \ngtr AB$ จึงเป็นไปไม่ได้ นั่นคือ $AC > AB$

พิสูจน์ แบบ Exclusion method

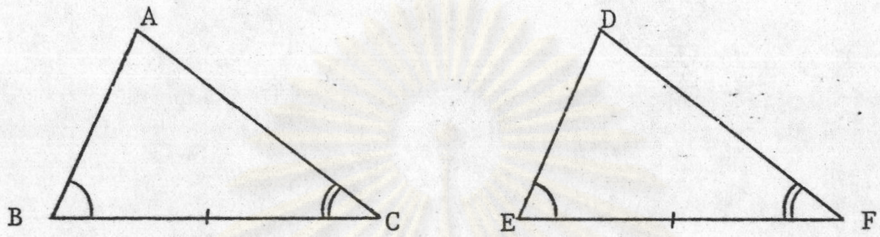
ข้อความที่พิสูจน์ได้	เหตุผล
1. ถ้า $AC \ngtr AB$ กรณีที่จะเป็นไปได้คือ $AC = AB$ หรือ $AC < AB$	1. ขนาดของเส้นตรงสองเส้นที่นำมาเปรียบเทียบ
2. ถ้า $AC = AB \therefore \hat{B} = \hat{C}$	2. มุมตรงข้ามด้านที่ยาวเท่ากัน
3. ข้อ 2 เป็นไปไม่ได้	3. แย้งกับโจทย์ โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$
4. ถ้า $AC < AB \therefore \hat{C} > \hat{B}$	4. มุมใหญ่อยู่ตรงกันข้ามกับด้านยาว
5. ข้อ 4 เป็นไปไม่ได้	5. แย้งกับโจทย์ โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$
6. ดังนั้น $AC \ngtr AB$ เป็นไปไม่ได้ นั่นคือ $AC > AB$	6. จากข้อ 2 ถึงข้อ 5 แย้งกับโจทย์ เมื่อยาวเท่ากันไม่ได้ และสั้นกว่ากันไม่ได้ จึงต้องยาวกว่ากัน

1.3 วิธีพิสูจน์โดยการยกรูปซ้อนกัน (Superposition) เราใช้การพิสูจน์วิธีนี้มากในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>ตัวอย่าง</u> การพิสูจน์โดยการยกรูปซ้อนกัน (Superposition)

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่เท่ากันยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



สิ่งที่กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งมี

$BC = EF \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \hat{C} = \hat{F}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

พิสูจน์ โดยการยกรูปซ้อนกัน (Superposition)

ข้อความที่พิสูจน์ได้	เหตุผล
1. ยก $\triangle$ ABC ซ้อนบน $\triangle$ DEF ให้จุด B ทับจุด E และด้าน BC ทาบไปตามด้าน EF จุด C ก็จะทับจุด F และให้จุด A อยู่ข้างเดียวกันกับจุด D	1. BC = EF โจทย์ให้
2. $\hat{B} = \hat{E}$	2. โจทย์ให้
3. $\therefore$ BA ก็ทาบไปบนด้าน ED	3. มุมเท่ากันวางให้ซ้อนกันสนิทได้
4. $\hat{C} = \hat{F}$	4. โจทย์ให้
5. $\therefore$ CA ก็ทาบไปบนด้าน FD	5. ทำนองเดียวกับข้อ 4
6. $\therefore$ จุด A จะทับจุด D	6. เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด ๆ เดียว
7. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$	7. ทุกส่วนประกอบของสามเหลี่ยมซ้อนกันสนิท

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. การพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม (Formal proof)

กรมวิชาการ (2511: 48, 54-55) ได้กล่าวว่าการเขียนการพิสูจน์นั้น นิยมเขียนตามแบบฟอร์ม (Formal proof) ซึ่งมีวิธีการทำเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. ลอกโจทย์หรือข้อความที่เป็นตัวทฤษฎีบท

2. เขียนรูปตามที่โจทย์กำหนด และใส่ตัวอักษรกำกับจุด

3. แยกโจทย์หรือทฤษฎีบทออกเป็นสองตอน ตอนหนึ่งเป็นเหตุหรือเป็นตอนที่โจทย์ให้อีกตอนหนึ่งเป็นผลหรือเป็นตอนที่ต้องการพิสูจน์

4. กรณีที่พิสูจน์ไม่ได้ จะต้องมีเส้นอื่นมาเพิ่มเติมนอกเหนือไปจากที่โจทย์ให้ เพื่อจะได้พิสูจน์ได้ เส้นที่เพิ่มขึ้นนี้ให้ลากด้วยเส้นไข่ปลา หรือใช้ดินสอสี กรณีเช่นนี้นักเรียนจะได้พบในตอนต่อไป

5. ขั้นของการพิสูจน์ ให้เรียบเรียงข้อความที่พิสูจน์ได้ไว้ทางซีกซ้ายของหน้ากระดาษ และใส่เลขหมายกำกับไว้เป็นข้อ ๆ สำหรับเหตุผลนั้นเขียนไว้ทางซีกขวา ซึ่งมีเลขหมายเดียวกันกับข้อความที่พิสูจน์ได้

6. การสร้างรูป ถ้าโจทย์ไม่กำหนดโดยเฉพาะแล้ว ต้องสร้างเป็นรูปทั่วไป เช่น เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะสร้างให้เส้นตรงตั้งฉากกันไม่ได้ หรือโจทย์กำหนดว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เราต้องสร้าง ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามไม่เท่ากัน จะสร้างเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือสามเหลี่ยมมุมฉากไม่ได้ ทั้งนี้เพราะเส้นตั้งฉากหรือสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือสามเหลี่ยมมุมฉากมีลักษณะพิเศษ ซึ่งเส้นอื่นหรือสามเหลี่ยมอื่นไม่มี

7. ข้อความที่นำมาพิสูจน์ ต้องมีเหตุผลอ้างทุกตอน เหตุผลที่นำมาอ้างในข้อความที่พิสูจน์ ได้แก่

ก. สิ่งที่โจทย์ให้

ข. นิยามต่าง ๆ

ค. สัจพจน์

ง. ข้อความของทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขุนประสงค์จรรยา (2509: 22-23) ได้กล่าวถึงการพิสูจน์เรขาคณิตตามแบบฟอร์ม (Formal proof) ว่ามีขั้นตอนสำคัญ ๆ ดังต่อไปนี้

1. ลอกโจทย์ หรือทฤษฎีบทลงก่อน

2. เขียนรูปตามที่โจทย์กำหนดไว้ ลงตัวอักษรกำกับไว้ด้วย

3. แยกโจทย์หรือทฤษฎีบทออกเป็น 2 ตอน ตอนหนึ่งเป็นข้อที่โจทย์กำหนดไว้ อีกตอนหนึ่งเป็นตอนที่จะต้องพิสูจน์

4. ถ้าต้องการสร้างสิ่งใดเพื่อช่วยในการพิสูจน์ให้ลากเส้นเป็นเส้นไข่ปลาหรือใช้ดินสอสี

5. ขั้นของการพิสูจน์ให้ใส่เลขหมายกำหนด และทางด้านเหตุผลก็มีขั้นเลขหมายเช่นเดียวกัน โดยแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองช่อง ช่องทางซ้ายมือเป็นข้อความที่พิสูจน์ (Statements) และช่องทางขวามือเป็นเหตุผล (Reasons) ใช้ตัวเลขกำกับไว้เป็นรายข้อให้ตรงกัน

6. คำลงท้ายสำหรับทฤษฎีบท เขียนคำลงท้ายอย่างย่อว่า ซ.ต.พ.โดยย่อมาจากคำว่า ซึ่งต้องพิสูจน์มาจากภาษาละตินว่า Q.E.D. ซึ่งย่อมาจากข้อความว่า (Quod Erat Demonstrandum)

3. เหตุผลที่ใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เราใช้เหตุผล 2 ประการ ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต คือ เหตุผลแบบอนุมาน (Deductive reasoning) และเหตุผลแบบอุปมาน (Inductive reasoning)

การคิดหาเหตุผลแบบอนุมาน (Deductive reasoning) เป็นการคิดหาเหตุผลจากประโยคอ้าง (Premise) ไปยังข้อสรุป (Conclusion) ซึ่งข้อสรุปนั้นเป็นข้อสรุปที่จำเป็นจะต้องสมเหตุสมผล ถ้าการสรุปผลไม่สมกับเหตุผลที่กำหนดขึ้น เรียกว่าไม่สมเหตุสมผล

พนัส หันนาคินทร์ (2514: 152) กล่าวว่า การหาเหตุผลแบบอนุมานเป็นการเอาความจริงที่เราทราบมาแล้วมาปรับเข้ากับสิ่งที่เราพบ เพื่อให้เกิดความรู้อันใหม่ขึ้น เช่น เราทราบมาว่า นกทั้งหลายย่อมบินได้ นกกระจอกเป็นนกชนิดหนึ่ง ดังนั้นนกกระจอกต้องบินได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดังนี้เป็นต้น หลักเกณฑ์ในการหาเหตุผลแบบนี้มีอยู่ 3 ประการคือ

1. สิ่งที่กล่าวในเบื้องแรกหรือหลักใหญ่ (Major Premise) เป็นความจริง

2. หลักย่อย (Minor Premise) จะต้องเป็นกรณีเฉพาะที่ขึ้นกับหลักใหญ่

3. ข้อยุติ (Conclusion) จะต้องติดตามกันอย่างมีเหตุผล (Logically) จากหลักทั้งสองข้อนั้น

บรรพต สุวรรณประเสริฐ (2518: 5-7) กล่าวถึงการให้เหตุผลแบบอนุมานว่า ลักษณะเฉพาะของคณิตศาสตร์ก็คือวิธีการให้เหตุผลแบบอนุมาน ซึ่งชาวกรีกเป็นผู้นำวิธีการนี้มาใช้ในทางคณิตศาสตร์เป็นพวกแรก การให้เหตุผลอย่างง่ายของวิธีการอนุมาน (Deduction) คือ วิธีการสรุปเหตุผลในทางตรรกศาสตร์ที่เรียกว่า Syllogism ซึ่งประกอบไปด้วยประโยค 3 ประโยค คือ สองประโยคแรกเป็นสมมูติฐานหรือเหตุ (Hypothesis หรือ Premissles) และประโยคสุดท้ายเป็นสรุปผล (Conclusion) ตัวอย่างเช่น

<u>เหตุ</u> 1. มุมฉากทุกมุมเท่ากัน

2. $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก

<u>ผล</u> 3 ดังนั้น $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เท่ากัน

ถ้าเรายอมรับสองประโยคแรกซึ่งเป็นเหตุหรือสมมูติฐาน เราก็ยอมรับการสรุปผลในข้อ 3 ด้วย เพราะเป็นผลที่เกิดจากเหตุที่กำหนดขึ้น

สำหรับการกำหนดเหตุและการสรุปผลนั้นไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริงตามประสบการณ์ที่ผ่านมา แต่จะต้องดูว่าการสรุปผลนั้นต้องสมกับเหตุที่กำหนดให้ซึ่งเรียกว่าสมเหตุสมผล (Valid) เช่นตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ถ้าการสรุปผลไม่สมกับเหตุที่กำหนดขึ้นเรียกว่า ไม่สมเหตุสมผล (Invalid) ตัวอย่างของการสรุปผลที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid) เช่น

<u>เหตุ</u> 1. มุมฉากทุกมุมเท่ากัน

2. $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เท่ากัน

<u>ผล</u> 3. ดังนั้น $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก

ขบวนการสรุปผลที่สมเหตุสมผล (Valid) คือ เป็นจริงตามเหตุที่กำหนดขึ้น เรียกว่าเป็นการให้เหตุผลแบบอนุมาน วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับการอนุมานนี้มีขบวนการที่สลับซับซ้อนมากกว่า Syllogism แต่ก็มีส่วนเหมือนกันคือประกอบไปด้วยส่วนใหญ่ ๆ 2 ส่วน คือ

1. <u>สมมุติฐาน</u> คือ ข้อความที่กำหนดขึ้น
2. <u>ผล</u> คือ ข้อสรุปที่ได้จากเหตุในข้อ 1

การคิดหาเหตุผลแบบอุปมาน (Inductive reasoning) เป็นการคิดที่เริ่มจากข้อเท็จจริงย่อย ๆ แล้วพยายามหากฎหรือหลักทั่วไปที่รวมส่วนย่อยเหล่านั้นเข้ามาไว้นั่นคือเป็นการคิดหาเหตุผลจากส่วนย่อยไปยังส่วนรวม

พนัส หันนาคินทร์ (2514: 152-153) กล่าวว่า การคิดหาเหตุผลแบบอุปมาน เป็นการหาเหตุผลจากความเป็นจริงที่เกิดรวมกันจากกรณีย่อย ๆ ทั้งหลาย เช่น เหล็กเมื่อถูกความร้อนย่อมขยายตัว ทองแดงเมื่อถูกความร้อนก็ขยายตัว...ดังนั้นเราก็อุปมานเอาได้ว่า โลหะทุกชนิดเมื่อถูกความร้อนแล้วย่อมขยายตัว ซึ่งเป็นการหาลักษณะร่วมของความจริงอันหนึ่งจากกรณีย่อย ๆ ทั้งหลาย (เหล็ก, ทองแดง,...) มาแสดงให้เห็นว่าคืออะไร การที่สามารถดึงเอาลักษณะร่วมบางอย่างออกมาได้เช่นนี้ เรียกว่าทำการกำหนดข้อสรุปทั่วไป (Generalization) วิธีนี้ใช้มากในวิชาวิทยาศาสตร์ การกำหนดข้อสรุปทั่วไปอาจผิดได้ง่าย ถ้าหากรีบลงข้อยุติ (Conclude) ไปง่าย ๆ หรือเมื่อมีข้อมูลจากกรณีย่อย ๆ ไม่เพียงพอที่จะให้พิจารณา เช่น เรายอมรับว่าเลขจำนวน x^2-x+41 จะเป็นจำนวนเฉพาะ (prime number) เสมอ คำกล่าวนี้จะเป็นจริงเสมอถ้า x มีค่าน้อยกว่า 41 แต่ถ้า $x = 41$ แล้ว เราจะเห็นว่า $x^2-x+41 = (41)^2+41-41 = (41)^2$ ซึ่งไม่ใช่เป็นจำนวนเฉพาะ

บรรพต สุวรรณประเสริฐ (2518: 5-6) ให้ความหมายของวิธีการอุปมานว่าคือ การสรุปสูตรจากการสังเกตหรือประสบการณ์วิธีการเช่นนี้บางทีเรียกว่าเป็นการให้เหตุผลโดยการสังเกต (Empirical reasoning) วิธีนี้ไม่มีคำถามว่า ทำไมจึงเป็นเช่นนั้นในเหตุการณ์นั้น นั่นคือไม่มีขบวนการทางตรรกวิทยานั่นเอง ก่อนสมัยกรีกนั้น พวกบาบิโลเนีย

(Babylonia) และอียิปต์ (Egypt) ใช้แต่วิธีการอุปมาน (Induction) เพราะคณิตศาสตร์สมัยนั้นมีความจำเป็นในด้านสถาปัตยกรรม ด้านสำรวจ และดาราศาสตร์เท่านั้น กฎต่าง ๆ ก็มุ่งแต่เพียงผลที่เป็นค่าโดยประมาณ วิธีการศึกษาของคนสมัยนั้นกระทำโดยการลองผิดลองถูก และพยายามแก้ไข แล้วตั้งเป็นกฎขึ้น ตัวอย่างที่พบในเอกสารทางคณิตศาสตร์ (Biblical) เช่นเกี่ยวกับการวัดเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งเขาคิดว่ามีค่าเท่ากับ 3 คูณกับความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง จากนั้นก็มีการกำหนดค่าของ π ซึ่งเป็นค่าอัตราส่วนระหว่างเส้นรอบวงกับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมมีค่าเท่ากับ 3 ต่อมาภายหลังพวกบาบิโลเนียนได้คิดสูตรของพื้นที่ของวงกลมขึ้นมาว่ามีค่าเท่ากับกำลังสองของ $\frac{8}{9}$ ของเส้นผ่าศูนย์กลาง ซึ่งทำให้ค่า π มีค่าเท่ากับ $(\frac{4}{3})^4 = 3.1605$

การสรุปผลโดยวิธีการอุปมาน ซึ่งได้มาจากการสังเกตและประสบการณ์บางอย่างเป็นจริงเสมอ ถึงแม้ว่าการสรุปผลแบบนี้จะเป็นการตัดสินเกินกว่าที่จะเป็นก็ตาม เราก็ยอมรับว่าเป็นจริงแต่อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลแบบนี้ไม่ใช่ว่าจะใช้ได้ทุกกรณีไป สิ่งที่ไม่เป็นธรรมชาติเราจะใช้วิธีนี้ไม่ได้ต้องใช้วิธีการอื่นนั่นคือวิธีการอนุมาน

<u>ตัวอย่าง</u> วิธีการอุปมาน การหากฎทั่วไปของการคูณเลขชี้กำลัง

$$
\begin{aligned}
(a^2)(a^3) &= (a.a)(a.a.a) \\
&= a.a.a.a.a \\
&= a^5 \\
&= a^{2+3}
\end{aligned}
$$

ทำนองเดียวกัน
$$
\begin{aligned}
(a^3)(a^5) &= (a.a.a)(a.a.a.a.a) \\
&= a.a.a.a.a.a.a.a \\
&= a^8 \\
&= a^{3+5}
\end{aligned}
$$

.

.

.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากตัวอย่างจะสรุปเป็นกฎทั่วไปได้ว่า การคูณเลขยกกำลังที่มีฐานเหมือนกัน จะได้เลขยกกำลังที่มีฐานเดิม และมีเลขชี้กำลังเป็นผลบวกของเลขชี้กำลังเหล่านั้น ซึ่งเขียนเป็นสูตรได้ว่า

$$(a^x)(a^y) = a^{x+y}$$

ในทางคณิตศาสตร์นั้นใช้วิธีการอุปมาน ช่วยเป็นแนวทางให้ทราบว่าข้อสรุปในเรื่องนั้น ๆ ควรเป็นอย่างไร เช่น จากการสังเกตดังนี้

$$\begin{aligned} 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 5^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ทำให้คาดคะเนได้ว่า ข้อสรุปในเรื่องนี้ควรเป็น $1+3+5+7+9+....+(2n-1) = n^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับนั่นคือ "ผลบวกของจำนวนคี่ บวกกัน n จำนวนมีค่าเท่ากับ n^2" แต่จะยังไม่ยอมรับว่าข้อสรุปนั้นเป็นจริง จะต้องมีการพิสูจน์โดยอาศัยสิ่งที่ทราบแล้วว่าเป็นจริง และหลักเกณฑ์ต่าง ๆ จึงจะยอมรับเป็นกฎหรือทฤษฎีบทได้ และในการพิสูจน์แต่ละขั้นตอนจะต้องเป็นไปอย่างสมเหตุสมผล สอดคล้องตามหลักขบวนการทางตรรกวิทยา ซึ่งในขั้นตอนนี้เป็นการใช้วิธีการอนุมานนั่นเอง

แนวการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ก็ได้ใช้หลักการดังกล่าว กล่าวคือ จะใช้วิธีการอุปมานก่อนคือ ให้นักเรียนพบข้อสรุปของกฎหรือทฤษฎีจากการเรียนในลักษณะของกิจกรรมหรือการทดลองในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในระดับนี้ยังไม่เน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน เมื่อนักเรียนพบข้อสรุปแล้วจึงใช้วิธีการอนุมานคือ พิสูจน์ให้เห็นจริงโดยใช้หลักขบวนการทางตรรกวิทยา ซึ่งจะเรียนการพิสูจน์อย่างจริงจังในชั้นมัธยมศึกษา

i 10310682

ปีที่ 3 ซึ่งสอดคล้องกับความคิดของ พนัส หันนาคินทร์ (2514: 153) ที่กล่าวว่า ในการสอนเรขาคณิต ในระยะแรกจะเป็นการดีอย่างยิ่งถ้าจะเริ่มต้นด้วยวิธีอุปมานแล้วนำไปใช้โดยวิธีอนุมาน เช่น ทฤษฎีบทที่ว่าด้วยมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันย่อมเท่ากับสองมุมฉาก เพราะในกรณีนี้วิธีอนุมานก็เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของการกำหนดข้อสรุปทั่วไป (Generalization) โดยวิธีอุปมานนั่นเอง

<u>ทฤษฎีการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่</u> (Van Hiele Theory)

ทฤษฎีนี้คิดขึ้นมาโดย Pierre Marie Van Hiele และ Dina Van Hiele-Geldof สองสามี-ภรรยาชาวดัช ซึ่งเป็นนักการศึกษาที่ศึกษาในระดับปริญญาเอกในมหาวิทยาลัยยูเทรช (Utrecht) ประเทศเนเธอร์แลนด์ โดย Pierre Marie Van Hiele เป็นผู้คิดค้นหลักการและแนวทางของทฤษฎี ส่วน Dina Van Hiele-Geldof เป็นผู้ทดลองตามแนวทฤษฎีเพื่อยกระดับการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เข้าร่วมโครงการทดลอง ทฤษฎีนี้พยายามที่จะเสนอคำอธิบายว่า ทำไมนักเรียนจึงประสบความยากลำบากในขบวนการคิดที่สลับซับซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิสูจน์ในวิชาเรขาคณิต นอกจากนี้ยังได้เสนอแนวทางในการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับต้นสู่ระดับสูง ทฤษฎีนี้ประกอบด้วย 3 ส่วนคือ

1. ระดับความคิดทางเรขาคณิต (Level of geometric thinking)
2. คุณสมบัติของระดับความคิด
3. การเปลี่ยนแปลงระดับของความคิดจากระดับหนึ่งขึ้นไปสู่อีกระดับหนึ่ง

1. ระดับความคิดทางเรขาคณิต (Level of geometric thinking)

แวนฮีลี่ได้แบ่งระดับความคิดทางเรขาคณิตที่ประกอบด้วยขบวนการคิดจากง่ายไปยากซับซ้อนไว้เป็น 5 ระดับดังนี้ (David Fuys and others 1988: 58-71)

ระดับที่ 1 การมองเห็นภาพรวม นักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับนี้จะรับรู้รูปเรขาคณิตทั้งรูปไม่มีการมองอย่างแยกส่วน หรือมองความสัมพันธ์ในแต่ละส่วนของรูป นักเรียนไม่สามารถบอกคุณลักษณะส่วนย่อยได้ เช่น ไม่สามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นักเรียนมองเห็นนั้นมีมุมฉาก 4 มุม และด้านทั้ง 4 ด้านเท่ากัน นักเรียนไม่สามารถเปรียบเทียบรูปที่มีคุณสมบัติร่วมกันได้ เช่น ไม่สามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้ง 4 ด้านยาวเท่ากัน

ระดับที่ 2 การมองเห็นความสัมพันธ์ นักเรียนในระดับนี้ เริ่มสังเกตส่วนต่าง ๆ ของรูปมองเห็นความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ภายในรูปเรขาคณิตเดียวกัน หรือต่างรูปกัน เช่น สามารถบอกได้ว่าสี่เหลี่ยมจตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้ง 4 ด้านยาวเท่าคัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก หรือสามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือ สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้ง 4 ด้านยาวเท่ากัน การที่นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ดังกล่าวก็เนื่องมาจากประสบการณ์จากการสังเกต การวัด การลากเส้น และการสร้างรูปคุณสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนรู้จะได้มาจากการทดลอง แต่ก็ยังไม่สามารถให้คำนิยามได้ รูปเรขาคณิตที่นักเรียนเห็นจะช่วยให้นักเรียนบอกคุณสมบัติของรูปได้ และถ้ากำหนดคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตมาให้นักเรียนก็จะบอกได้ว่า เป็นรูปเรขาคณิตชนิดใด แต่อย่างไรก็ตาม นักเรียนในระดับนี้ยังไม่สามารถเชื่อมโยงคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตต่าง ๆ กันได้

ระดับที่ 3 การเชื่อมโยงคุณสมบัติ นักเรียนที่อยู่ในระดับนี้จะสามารถเชื่อมโยงคุณสมบัติของรูปเรขาคณิต ทั้งที่เป็นคุณสมบัติของรูปเดียวกัน และต่างรูปกันได้ นักเรียนสามารถบอกคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ตามลักษณะของรูป สามารถบอกว่าคุณสมบัติอันหนึ่งเป็นผลเนื่องมาจากคุณสมบัติอีกอันหนึ่งได้อย่างมีเหตุผล นักเรียนมีความเข้าใจในนิยามต่าง ๆ สามารถสรุปคุณสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตได้โดยเริ่มจากนิยาม เช่น สามารถบอกลักษณะที่แตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สี่เหลี่ยมจตุรัส สี่เหลี่ยมด้านขนาน และสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยนักเรียนยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ นักเรียนยังไม่สามารถเข้าใจความหมายของการอนุมานได้ดีนัก และยังไม่เข้าใจถึงบทบาทของสัจพจน์

ระดับที่ 4 การสรุปจากเหตุไปสู่ผล นักเรียนในระดับนี้เข้าใจความหมายของการอนุมานได้เป็นอย่างดีว่าเป็นหนทางในการสร้างทฤษฎีต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิต นักเรียนมีความเข้าใจในบทบาทของสัจพจน์ เข้าใจความหมายของนิยาม ทฤษฎี โครงสร้างในการพิสูจน์ และสามารถวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างข้อความต่าง ๆ โดยใช้การอนุมานจากเหตุไปสู่ผล

นักเรียนสามารถมองเห็นความเป็นไปได้ของการสร้างทฤษฎีต่าง ๆ โดยเริ่มจากข้อกำหนดที่เหมาะสม นักเรียนที่อยู่ในระดับนี้ถือว่าพร้อมที่จะเรียนการพิสูจน์

ระดับที่ 5 การคิดในเชิงนามธรรม นักเรียนในระดับนี้จะพัฒนามาถึงขั้นสามารถสร้างทฤษฎีขึ้นมาอย่างเชื่อถือได้ในระบบที่ประกอบด้วยสัจพจน์ต่าง ๆ เช่น เดียวกับวิธีการสร้างระบบสัจพจน์ของ ฮิลเบิร์ต (Hilbert) ที่ศึกษาเรขาคณิตสมัยใหม่ถึงรากฐานของเรขาคณิต นักเรียนสามารถวิเคราะห์เปรียบเทียบระบบที่ประกอบด้วยสัจพจน์ต่าง ๆ ระบบอื่น ๆ ได้เช่น เรขาคณิตระบบยูคลิด เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด นักเรียนสามารถมองลักษณะที่เป็นรูปธรรมของเรขาคณิตออกมาเป็นนามธรรมได้ สามารถพัฒนาทฤษฎีต่าง ๆ ได้โดยไม่ต้องมีการตีความหมายในเชิงของรูปธรรม การคิดในระดับนี้ถือว่าเป็นการคิดขั้นสูงสุดของการเรียนเรขาคณิต ซึ่งมีนักเรียนเพียงเล็กน้อยที่จะพัฒนามาถึงขั้นนี้

2. คุณสมบัติของระดับความคิด

แวนฮีลี่ ได้ชี้ให้เห็นว่าระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 5 ระดับนี้มีคุณสมบัติดังนี้

2.1 ลำดับที่แน่นอน (Fixed sequence) หมายถึง ทุกคนจะต้องผ่านระดับของความคิดไปตามลำดับจากระดับต้นไปสู่ระดับสูงไม่มีการข้ามระดับ

2.2 การประชิดกัน (Adjacency) หมายถึง สิ่งใดที่ไม่ชัดแจ้งในระดับก่อนจะมาชัดแจ้งในระดับถัดไป

2.3 ลักษณะเฉพาะ (Distinction) หมายถึง ในแต่ละระดับจะมีลักษณะเฉพาะของภาษาที่ใช้ และลักษณะเฉพาะของเครือข่ายของความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับภาษาที่ใช้

2.4 การแยกชั้นกัน (Separation) หมายถึง ผู้ที่ให้เหตุผลในระดับหนึ่งจะไม่สามารถเข้าใจภาษาของการให้เหตุผลในระดับที่สูงกว่า

3. การเปลี่ยนแปลงระดับของความคิดจากระดับหนึ่งขึ้นไปสู่อีกระดับหนึ่ง

ในส่วนที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงระดับความคิด แวนฮีลี่ ได้กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงระดับของความคิดจากระดับหนึ่งขึ้นไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถกระทำได้ภายใต้วิธีการสอนของครู เวลาในการเรียนการสอน และการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสมให้กับนักเรียน ก็สามารถที่จะยกระดับความคิดของนักเรียนจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งได้

แวนฮีลี่ได้เสนอแนะแนวทางที่จะช่วยให้การเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตมีประสิทธิภาพมากขึ้น ดังนี้ (สิริพร ทิพย์คง 2532: 97-99)

3.1 การนำเข้าสู่บทเรียนโดยการใช้คำถาม (Inquiry information) ครูกล่าวถึงประโยชน์และเหตุผลในการเรียนเนื้อหาวิชานั้น ๆ ตลอดจนแนะนำคำศัพท์ในวิชาเรขาคณิต เช่นคำว่า "รูปสี่เหลี่ยมจตุรัส" "รูปสามเหลี่ยม" โดยการใช้คำถามให้นักเรียนมีโอกาสได้อภิปราย เช่น ครูถามว่า "สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร" "สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีลักษณะสำคัญอย่างไรบ้าง" "สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัสได้หรือไม่ เพราะเหตุใด" เป็นต้น

3.2 การแนะนำโดยตรงจากครู (Directed orientation) นักเรียนปฏิบัติตามในสิ่งที่ครูบอกแต่ละขั้นตอน ครูแนะนำคำศัพท์ที่ใช้ในวิชาเรขาคณิตในเนื้อหาที่กำลังสอน ครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีโอกาสสังเกต สำรวจและศึกษาจนเข้าใจและเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาโจทย์ ครูแนะนำสัญลักษณ์ที่ใช้ในวิชาเรขาคณิต และรูปทรงต่าง ๆ ทางเรขาคณิต เช่น รูปกรวย รูปทรงกระบอก ตลอดจนคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ เช่น คุณสมบัติของการเท่ากัน เป็นต้น

3.3 การอธิบายให้ชัดเจน (Expliciting) ครูส่งเสริมให้นักเรียนอธิบายและอภิปรายในสิ่งที่นักเรียนพบจากการสังเกต การสำรวจ และการคิด บทบาทของครูจะลดลง ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปกฎเกณฑ์ และสิ่งที่นักเรียนคิดว่าสำคัญ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อไปในการเรียนวิชาเรขาคณิต

3.4 การศึกษาด้วยตนเอง (Free orientation) ครูให้นักเรียนมีอิสระในการเรียนมากขึ้น นักเรียนมีโอกาสสำรวจความสามารถของตน มีประสบการณ์ในการเรียนรู้ด้วยตนเองมากขึ้น สามารถคิดและพิสูจน์เรขาคณิตได้ด้วยตนเอง การคิดหรือการพิสูจน์นั้นอาจจะมีได้หลายวิธี นอกจากนั้นนักเรียนยังมีโอกาสแก้ปัญหาโจทย์ที่สลับซับซ้อน และสามารถตอบคำถามเกี่ยวกับความเป็นเหตุเป็นผลได้ เช่น นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า "ทำไมเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจึงเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมนั้น" หรือการทำนายผลก่อนการปฏิบัติจริง ๆ เช่น จะเกิดภาพอะไรขึ้นเมื่อนักเรียนตัดมุมของกระดาษที่พับซ้อนกัน 2 ครั้ง โดยการตัดเป็นมุม 30° และ 45°

3.5 การบูรณาการ (Integration) ครูช่วยนักเรียนสรุปเนื้อหาสาระสำคัญในเรื่องที่นักเรียนเรียนโดยครูถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ และแสดงความคิดเห็นในสิ่งที่นักเรียนเรียนไปแล้ว เช่น สรุปคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน เป็นต้น

การที่ครูเข้าใจเนื้อหาวิชาที่สอน รู้ว่าควรจะสอนเนื้อหาวิชานั้นอย่างไรจึงจะเหมาะสมกับระดับความคิดของนักเรียน รู้พัฒนาการของระดับขั้นความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนจากขั้นหนึ่งไปสู่อีกขั้นหนึ่งก็จะช่วยให้สามารถจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตลอดจนประสบการณ์ ให้สอดคล้องกับความสามารถ และพัฒนาการทางด้านความรู้ และสติปัญญาของนักเรียน ซึ่งจะมีผลให้นักเรียนสามารถเรียนวิชาเรขาคณิตด้วยความเข้าใจมากกว่าด้วยการท่องจำเพียงอย่างเดียว จะเห็นได้ว่าหลักสูตรของวิชาเรขาคณิตนั้นครอบคลุมความสามารถของนักเรียนตั้งแต่ระดับที่ 1 ถึงระดับที่ 4 แต่นักเรียนส่วนมากไม่สามารถจะพัฒนาความสามารถของตนจนถึงระดับที่ 4 (การสรุปจากเหตุไปสู่ผล) ของทฤษฎีการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ได้ ดังนั้นการสอนให้นักเรียนมีการพัฒนาในแต่ละขั้นอย่างสมบูรณ์ มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชาเรขาคณิตที่กำลังเรียนอยู่อย่างแจ่มแจ้ง ก็จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาการเรียนรู้จากขั้นหนึ่งไปสู่อีกขั้นหนึ่งอย่างชัดเจน ทำให้นักเรียนทุกคนสามารถพัฒนาความรู้ ความสามารถของตนไปจนถึงระดับที่ 4 ซึ่งเป็นขั้นการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ทางเรขาคณิตได้ถูกต้อง หรือพัฒนาต่อไปจนถึงระดับที่ 5 ซึ่งเป็นขั้นสูงสุดของการเรียนเรขาคณิต

<u>งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</u>

1. งานวิจัยในประเทศ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปิยรัตน์ ก้องกิตติไพศาล (2513: 39-42) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง การใช้ตรรกศาสตร์ในการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนเทพลีลา กรุงเทพมหานคร จำนวน 80 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มควบคุม และกลุ่มทดลอง กลุ่มละ 40 คน การแบ่งกลุ่มใช้วิธีทำกลุ่มให้มีความสามารถเฉลี่ยทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มอยู่ในระดับเดียวกัน โดยใช้คะแนนผลการสอบคณิตศาสตร์ประจำภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2512 เป็นเกณฑ์ เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับความรู้ทางตรรกศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง เป็นแบบปรนัยจำนวน 40 ข้อ มีความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.5294 ค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.18-0.85 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.10-0.70 และแบบทดสอบเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์มี 5 ฉบับ จำนวน 150 ข้อ ดังนี้

ฉบับที่ 1	เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับทักษะทาง เลข-พีชคณิต	30 ข้อ
ฉบับที่ 2	เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับปัญหาทาง เลข-พีชคณิต	30 ข้อ
ฉบับที่ 3	เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับ เหตุผลทาง เลข-พีชคณิต	30 ข้อ
ฉบับที่ 4	เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับปัญหาทาง เรขาคณิต	30 ข้อ
ฉบับที่ 5	เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับการพิสูจน์ เรขาคณิต	30 ข้อ

แบบทดสอบทั้ง 5 ฉบับนำมาจากการวิจัยเรื่องการศึกษาแบบการคิด (Cognitive styles) ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของ สุวัฒน์ เงินฉ่ำ สรุปผลการทดลองพบว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 สามารถเรียนตรรกศาสตร์ได้เป็นอย่างดี ผลการเรียนตลอดภาคเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันในด้านทักษะทาง เลข-พีชคณิต ปัญหาทาง เลข-พีชคณิต เหตุผลทาง เลข-พีชคณิต ปัญหาทาง เรขาคณิต แต่แตกต่างกันในด้านความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิต ถ้าพิจารณาในช่วงเวลาระหว่างกลางภาคเรียนถึงปลายภาคเรียนแล้ว นักเรียนกลุ่มที่เรียนตรรกศาสตร์เกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในทุกด้านเพิ่มขึ้นมากกว่ากลุ่มที่ไม่ได้เรียนตรรกศาสตร์

ขวัญชัย ตันติศิริเจริญ (2514: 23-24) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบผลการสอนวิชาเรขาคณิตชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้เครื่องฉายภาพโปร่งแสงกับการสอนตามปกติ กลุ่มตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 60 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 30 คน ให้เป็นกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม สอนโดยใช้เครื่องฉายภาพโปร่งแสง และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม สอนโดยใช้กระดานดำใช้วิธีแบ่งกลุ่มให้มีความสามารถใน

การเรียนวิชาคณิตศาสตร์พอ ๆ กัน โดยใช้คะแนนคณิตศาสตร์ที่ได้จากการสอบคัดเลือกเข้าเรียนเป็นเกณฑ์ แล้วทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการทดลองพบว่านักเรียนกลุ่มที่สอนโดยใช้เครื่องฉายภาพโปร่งแสง เรียนได้ผลดีกว่านักเรียนกลุ่มที่สอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 นักเรียนกลุ่มที่สอนโดยใช้เครื่องฉายภาพโปร่งแสงมีความทรงจำในการเรียนนานพอ ๆ กับนักเรียนกลุ่มที่สอนตามปกติ

ศิริกร ภู่ไพบูลย์ (2516: 36-37) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง การใช้ความถนัดทางมิติสัมพันธ์ และเหตุผลเชิงนามธรรม ทำนายสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2, 3 ของโรงเรียนเซนต์จอห์น จำนวน 600 คน เครื่องมือที่ใช้คือ แบบทดสอบความถนัดทางมิติสัมพันธ์และเหตุผลเชิงนามธรรมที่ดัดแปลงมาจากแบบทดสอบ The Differential Aptitude Tests (DAT) Form L. คะแนนสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิตคือ คะแนนสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2515 จากข้อสอบที่ครูผู้สอนเป็นผู้สร้างขึ้นซึ่งผู้วิจัยถือว่าเป็นข้อสอบที่เชื่อถือได้สำหรับการวิจัยเรื่องนี้ ผลการวิจัยพบว่า ความถนัดทางมิติสัมพันธ์และเหตุผลเชิงนามธรรมมีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 กับสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิตด้วยขนาด .54 และ .49 ตามลำดับ ค่าสหสัมพันธ์พหุคูณเมื่อใช้แบบทดสอบทั้ง 2 ชุดนี้ทำนายสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิต $R_{z(xy)} = .5851$ ที่ระดับความมีนัยสำคัญ .01 ความถนัดทางมิติสัมพันธ์และเหตุผลเชิงนามธรรมสามารถทายสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิตได้ 29.32% และ 23.69% ตามลำดับ ความถนัดทางมิติสัมพันธ์ร่วมกับเหตุผลเชิงนามธรรมสามารถทายสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิตได้ 34.24% และสมการถดถอยพหุคูณที่ใช้ในการทำนายสัมฤทธิผลในวิชาเรขาคณิตคือ $z_3 = .3919z_1 + .2675\,z_2$

จิรพรรณ ปุณเกษม (2521: 56-58) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับเรื่อง การสร้างชุดการสอนตามเอกัตภาพวิชาคณิตศาสตร์เรื่องพื้นที่รูปเรขาคณิตบนระนาบเดียว สำหรับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปีการศึกษา 2521 ของโรงเรียนวัดสุทธิวราราม จำนวน 20 คน เครื่องมือที่ใช้รวบรวมข้อมูลได้แก่ แบบสอบก่อนและหลังการเรียนชุดการสอน จำนวน 30 ข้อ ซึ่งมีความเชื่อมั่น 0.81 มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.20-0.80 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป แบบฝึกหัดรวมหลังเรียนบทเรียนทั้งหมดจำนวน 5 ข้อ และชุดการสอนตามเอกัตภาพเรื่อง "พื้นที่รูปเรขาคณิตบนระนาบเดียว"

ผลการวิจัยปรากฏว่า ชุดการสอนตามเอกัตภาพที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ 93.45/90.17 ซึ่งแสดงว่านักเรียนทำแบบฝึกหัดในชุดการสอนได้ถูกต้องสูงกว่ามาตรฐาน 90 ตัวแรก และทำแบบสอบหลังเรียนชุดการสอนได้ถูกต้องสูงกว่ามาตรฐาน 90 ตัวหลัง ผลการสอบก่อนเรียนและหลังเรียนแสดงความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 แสดงว่าชุดการสอนตามเอกัตภาพที่สร้างขึ้นนี้ทำให้ผู้เรียนมีความรู้เพิ่มขึ้น

นคร เทพวรรณ (2521: 32-34) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง สมรรถภาพสมองบางประการที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในจังหวัดชลบุรี กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2520 ในจังหวัดชลบุรี จำนวน 233 คน เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง เป็นข้อสอบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 40 ข้อ มี 5 ตัวเลือก แบบทดสอบมีค่าความเชื่อมั่น 0.874 และแบบทดสอบความถนัดทางการเรียน 4 ฉบับ คือ แบบทดสอบสรุปความ ศัพท์สัมพันธ์ เรียงอันดับ และซ่อนรูป ซึ่งเป็นแบบทดสอบมาตรฐานจากสำนักทดสอบมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางภารเรียนเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กับความถนัดทางด้านตัวเลขสูง ($r = 0.6167$) และสัมพันธ์กับความถนัดทางการเรียนด้านอื่น ๆ ในระดับปานกลาง ($r = 0.1297$-0.3676) และมีค่าสหสัมพันธ์พหุคูณร่วมกันเป็น 0.6350 นอกจากนี้ยังพบว่าตัวพยากรณ์ที่ดีในการทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตคือ ความถนัดทางด้านตัวเลขและเหตุผล

สายชนม์ สัจจานิตย์ (2521: 68-69) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ภารสร้างชุดการสอนตามเอกัตภาพวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงตัน สำหรับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2520 ของโรงเรียนวัดชิโนรส จำนวน 20 คน เครื่องมือที่ใช้รวบรวมข้อมูลได้แก่ แบบฝึกหัดรวมหลังเรียนบทเรียนทั้งหมด จำนวน 40 ข้อ และแบบสอบก่อนและหลังเรียนชุดการสอนตามเอกัตภาพ จำนวน 35 ข้อ ซึ่งมีความเชื่อมั่น 0.80 มีค่าความยากตั้งแต่ 0.20-0.80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ผลการวิจัยปรากฏว่าชุดการสอนตามเอกัตภาพที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ 90.625/90.285 ซึ่งแสดงว่า นักเรียนทำแบบฝึกหัดในชุดการสอนได้ถูกต้องสูงกว่ามาตรฐาน 90 ตัวแรก และทำแบบสอบหลังเรียนจากชุดการสอนได้ถูกต้องสูงกว่ามาตรฐาน 90 ตัวหลัง การทดสอบ

ความแตกต่างระหว่างคะแนนของการสอบก่อนและหลังการเรียนชุดการสอน ปรากฏว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แสดงว่าชุดการสอนตามเอกัตภาพที่สร้างขึ้นครั้งนี้มีประสิทธิภาพสูง ทำให้ผู้เรียนมีความรู้เรื่อง "พื้นที่ผิวและปริมาตรรูปทรงตัน" อย่างแท้จริง

มนู วัฒนไพบูลย์ (2523: 73-76) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง การศึกษาเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง เส้นขนานและความคล้าย ด้วยวิธีการสอน 2 แบบ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จังหวัดสุโขทัย กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2522 โรงเรียนศรีสำโรงชนูปถัมภ์ จังหวัดสุโขทัย จำนวน 82 คน แบ่งเป็นกลุ่มที่มีความสามารถสูงจำนวน 41 คน กลุ่มที่มีความสามารถต่ำจำนวน 41 คน โดยใช้คะแนนรวมปลายภาคเรียนที่ 1 ของวิชาคณิตศาสตร์เป็นคะแนนพื้นฐานในการแบ่งกลุ่ม ผู้วิจัยได้ดำเนินการสอนและทดสอบเอง โดยทดลองสอนเรื่องเส้นขนานด้วยวิธีสอนแบบค้นพบ และเรื่องความคล้ายด้วยวิธีสอนแบบบรรยายทั้งสองกลุ่มใช้เนื้อเรื่องและวิธีสอนเหมือนกัน ใช้เวลาในการทดลองทั้งหมด 9 คาบ วิธีสอนแบบค้นพบ 5 คาบ วิธีสอนแบบบรรยาย 4 คาบ เมื่อทดลองสอนเสร็จแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดเจตคติที่มีต่อวิธีสอนทั้ง 2 แบบ และทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิทางการเรียน นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์ด้วยสถิติ Linear regression และ three-way ANOVA หลังจากสอนเสร็จแล้ว 6 สัปดาห์ให้นักเรียนทำแบบทดสอบฉบับเดิมใหม่เพื่อหาความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้ t-test ผลการทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิทางการเรียนคณิตศาสตร์ของการสอนด้วยวิธีค้นพบ และแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นักเรียนที่มีความสามารถสูงและต่ำมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เมื่อได้รับการสอนทั้ง 2 แบบ มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างวิธีสอนกับระดับความสามารถอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ความคงทนในการเรียนรู้ระหว่างวิธีสอนแบบค้นพบ และแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนชายและนักเรียนหญิงทุกระดับความสามารถมีเจตคติในทางบวกต่อวิธีสอนแบบค้นพบ

ประกอบ สมร่าง (2524: 61-64) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้วิธีสอนที่แตกต่างกันสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียน

สาธิตวิทยาลัยครูเทพสตรี จังหวัดลพบุรี กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตวิทยาลัยครูเทพสตรี จังหวัดลพบุรี ปีการศึกษา 2523 จำนวน 72 คน แบ่งเป็นกลุ่มที่สอนโดยวิธีสอนแบบค้นพบ 37 คน และกลุ่มที่สอนแบบบรรยาย 35 คน ใช้คะแนนวิชา ค102 เป็นคะแนนพื้นฐานและเป็นเกณฑ์ในการแบ่งระดับความสามารถของกลุ่มตัวอย่างออกเป็นกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองสอนด้วยตนเองกับกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม โดยสอนตามคู่มือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลา 3 สัปดาห์ 12 คาบ เมื่อสิ้นสุดการทดลองให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแบบวัดทัศนคติ หลังจากนั้น 4 สัปดาห์ให้ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอีกครั้งหนึ่ง นำข้อมูลมาวิเคราะห์โดยใช้ Linear regression, three-way ANOVA, one-way ANOVA, Biserial correletion และ t-test ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนแบบค้นพบกับแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ระหว่างทัศนคติกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากวิธีสอนแบบค้นพบ ความคงทนในการเรียนรู้จากวิธีสอนแบบค้นพบกับแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา (2524: 19-20) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนคณิตศาสตร์สายหนึ่ง ปีการศึกษา 2524 ของโรงเรียนรัฐบาล 8 โรงเรียนในจังหวัดมหาสารคาม จำนวน 355 คน เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง จำนวน 40 ข้อ ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.72 มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.20-0.80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

เรียมรอง สวัสดิชัย (2525: 42-43) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง เปรียบเทียบผลทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้วิธีสอนแบบปฏิบัติการและบทเรียนโปรแกรม กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนกระบุรีวิทยา จังหวัดระนอง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2525 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 32 คน รวม 46 คน การจัดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมใช้วิธีสุ่มโดย

จับสลาก กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้วิธีสอนแบบปฏิบัติการ กลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ใช้เวลาทดลองกลุ่มละ 12 คาบ ๆ ละ 50 นาที ใช้เนื้อหาในการทดลองเหมือนกัน เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูลคือ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความเท่ากันทุกประการ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น แบบทดสอบมีค่าความเชื่อมั่น 0.77 นำข้อมูลไปวิเคราะห์ทางสถิติโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA) ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุม

2. งานวิจัยในต่างประเทศ

ชาร์ลส์ จูเนียร์ การาบีเดียน (Charles Jr. Garabedian 1981: 586-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องผลของสัมฤทธิผลของการพิสูจน์และความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนมัธยมปลายในวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 10 และเกรด 11 จำนวน 369 คน ที่เรียนวิชาเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมปลาย 3 โรงเรียน รัฐแมสซาชูเซทส์ โดยทำการสุ่มนักเรียนมา 18 ห้องเรียน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 9 ห้องเรียน กลุ่มควบคุม 9 ห้องเรียน กลุ่มทดลองถูกกำหนดให้เรียนการพิสูจน์ 50% หรือน้อยกว่าของทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดในเรื่องเส้นขนานและพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม กลุ่มควบคุมถูกกำหนดให้เรียนการพิสูจน์ 80% - 90% ของทฤษฎีบทและแบบฝึกหัด ในเรื่องเดียวกันกับกลุ่มทดลอง ก่อนการสอนเรื่องเส้นขนานได้ทำการทดสอบ 3 อย่างคือ ทดสอบภาคสนามโดยนักวิจัย ทดสอบเรื่องการให้เหตุผล และทดสอบเรื่องเส้นขนาน และทดสอบทั้ง 3 อย่างนี้ในระหว่างสอนเรื่องพื้นที่ วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติโดยใช้ ANOVA ผลการวิจัยพบว่า มีความแตกต่างของมัชฌิมเลขคณิตอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ในเรื่องผลสัมฤทธิ์ของการพิสูจน์ และความสามารถในการให้เหตุผลของทั้ง 2 กลุ่ม เพศหญิงมีความสามารถในการให้เหตุผลดีกว่าเพศชาย มีความสัมพันธ์ทางบวกอย่างมีนัยสำคัญระหว่างคะแนนการให้เหตุผลกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานและกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชารอน แอล เซงค์ (Sharon L. Senk 1983: 417-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์ และระดับการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาจำนวน 1,520 คน จาก 74 ห้องเรียนที่เรียนเรขาคณิต เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิต เป็นข้อสอบแบบปรนัย 5 ตัวเลือก และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ซึ่งมีค่าความเที่ยง 0.85 ถึง 0.88 ผลการวิจัยพบว่ามี 30% ของนักเรียนที่เรียนการพิสูจน์ไม่มีความสามารถในการพิสูจน์ในตอนปลายปี จำนวน 40% มีทักษะในการพิสูจน์บ้าง และมีประมาณ 30% ที่มีผลสัมฤทธิ์ที่อยู่ในระดับมีความสามารถในการพิสูจน์ 75% ไม่มีความแตกต่างระหว่างเพศของนักเรียนในผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์

เซด แอบเดลแฟททาห์ แอสแซฟ (Said Abdelfattah Assaf 1986: 2952-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ผลของการใช้ภาพการ์ตูนในการสอนเรขาคณิตที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนเกรด 8 เจตคติต่อวิชาเรขาคณิต และความรู้ในวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 8 สองห้องเรียน จำนวน 48 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองโดยใช้ภาพการ์ตูน กลุ่มควบคุมให้เรียนเรขาคณิตจากหนังสือเรียนตามปกติ ใช้เวลาทดลอง 4 สัปดาห์ ก่อนและหลังทดลอง ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ แบบทดสอบวัดเจตคติต่อวิชาเรขาคณิต แบบทดสอบความรู้ในวิชาเรขาคณิต และสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มทดลอง 7 คน กลุ่มควบคุม 8 คน ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนกลุ่มทดลองมีแนวโน้มในการแสดงปฏิกิริยาตอบสนองมีความสัมพันธ์สูงกับระดับความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ 2) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสัมพันธ์กันน้อยกับลักษณะที่ไม่เกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิต นักเรียนมีความสามารถมากขึ้นในการแยกคุณสมบัติรูปเรขาคณิต วิธีการสร้างภาพการ์ตูนทำให้สะดวกขึ้นในการสร้างรูปเรขาคณิต และมีความสัมพันธ์กับการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างชัดเจนกว่าการนิยามรูปเรขาคณิตด้วยคำพูด 3) การใช้ภาพการ์ตูนมีผลทางบวกกับความเชื่อมั่นและความคิดในการประยุกต์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน 4) วิธีการสอนทั้ง 2 วิธีไม่มีผลต่อความรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียน

ทาย-ชิค ฮาน (Tae-sik Han 1987: 3690-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเจตคติของนักเรียนต่อโปรแกรมการเรียนเรขาคณิต 2 แบบ คือ การสอนแบบเก่าโดยยึดตำราเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐานกับการสอนที่ปรับปรุงใหม่ที่ใช้ตำราที่มีความเชื่อถือได้ กับทฤษฎีการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนที่เรียนเรขาคณิตในมัธยมศึกษาตอนปลายใน 2 โรงเรียน จำนวน 478 คน ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งใช้วิธีสอนที่ปรับปรุงใหม่ อีกกลุ่มหนึ่งใช้วิธีสอนแบบเก่า เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบ 3 ชุด คือ แบบทดสอบการพิสูจน์เรขาคณิต แบบทดสอบเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตที่ถามเกี่ยวกับความสนใจ ประโยชน์และความยากของวิชาเรขาคณิต และแบบทดสอบเจตคติต่อการพิสูจน์ ผลการวิจัยพบว่า ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทั้ง 2 กลุ่มในระดับการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลี่ มีความสัมพันธ์ภายในกลุ่มระหว่างระดับการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลี่กับผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์เรขาคณิตและเจตคติต่อวิชาเรขาคณิต ในการเอาชนะกับความยากของการพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มวิธีสอนแบบเก่าจะดีกว่าในเรื่องผลสัมฤทธิ์ของการเขียนพิสูจน์และมีเจตคติทางบวกต่อการพิสูจน์มากกว่านักเรียนกลุ่มที่สอนแบบปรับปรุงใหม่ ซึ่งจะเห็นได้จากการใช้เวลาเป็นส่วนมากกับเรื่องการพิสูจน์ของการสอนแบบเก่า แต่อย่างไรก็ตาม ความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้การสอนแบบปรับปรุงใหม่ก็อาจจะมีบ้าง

เจเนท คริสทิน โบบังโก (Janet Christine Bobango 1988: 2566-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง ระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนในเนื้อหามาตรฐาน และการเขียนพิสูจน์ที่เป็นผลจากวิธีการสอนแบบเป็นลำดับขั้นตอน กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จำนวน 72 คน จากชั้นเรียนเรขาคณิตปกติ 2 ห้อง และชั้นที่มีชื่อเสียงในการเรียนเรขาคณิต 2 ห้อง เครื่องมือที่ใช้ในวิธีการสอนแบบเป็นลำดับขั้นตอน ได้แก่ คอมพิวเตอร์ โปรแกรมการเรียนทางเรขาคณิต รวมทั้งการจัดทำบทเรียนโดยนักวิจัย ให้สิ่งกระทำเหล่านี้กับนักเรียนเป็นเวลา 20 วัน ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนในเนื้อหามาตรฐาน และระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ ถูกทดสอบก่อนและหลังการสอนแบบเป็นลำดับขั้นตอนและทดสอบโดยแบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี่ แบบทดสอบคณิตศาสตร์ที่มีเรขาคณิตด้วย แบบทดสอบการพิสูจน์จากโครงการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรขาคณิตในระดับมัธยม (CDASSG) และแบบทดสอบการพิสูจน์ที่สร้างโดยครู ผลการวิจัยพบว่า

วิธีการสอนแบบ เป็นลำดับขั้นตอนมีผลอย่างมีนัยสำคัญในการยกระดับการคิดทาง เรขาคณิตของแวนฮีลี่ของนักเรียนในชั้นเรียน เรขาคณิตปกติโดยเป็นการยกระดับจากระดับ 1 ไปยังระดับ 2 มากกว่าการยกระดับในระดับอื่น ๆ อย่างไรก็ตาม การทดลองนี้ไม่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ใน เนื้อหามาตรฐานและผลสำเร็จในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มที่ให้สิ่งกระทำการทดลอง มีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญระหว่างระดับการคิดทาง เรขาคณิตของแวนฮีลี่กับผลสัมฤทธิ์ใน เนื้อหามาตรฐานของนักเรียน และมีความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทาง เรขาคณิตของแวนฮีลี่กับผลสำเร็จในการเขียนพิสูจน์

มาดีลีน การ์ดเนอร์ ทอมป์สัน (Madeleine Gardner Thompson 1988: 453-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง การค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแบบการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ 4 ด้าน ของเครื่องชี้บอกแบบ Myers-Briggs กับคะแนนผลสัมฤทธิ์จากข้อทดสอบการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนที่เรียนวิชาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนเฮรินดอน (Herndon) รัฐเวอร์จิเนีย จำนวน 192 คน นักเรียนเหล่านี้จะถูกให้เครื่องชี้บอกแบบ Myers-Briggs ตรวจสอบความเข้าใจในการพิสูจน์เรขาคณิต โดยเครื่องชี้บอกแบบ Myers-Briggs เป็นแบบตรวจสอบที่ดีกว่าแบบอื่น ๆ ในการตรวจสอบความเข้าใจอย่างลึกซึ้งสำหรับการพิสูจน์เรขาคณิต และแบบทดสอบการพิสูจน์เรขาคณิตถูกสร้างและพัฒนาขึ้นโดยนักวิจัย 2 คน เพื่อหาผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์เรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่ามีความสัมพันธ์กันระหว่างแบบการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ 4 ด้าน ของเครื่องชี้บอกแบบ Myers-Briggs กับคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์เรขาคณิตและเครื่องชี้บอกแบบ Myers-Briggs เป็นตัวทำนายที่ดีที่สุดของความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิต ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในผลสำเร็จของการเรียนเรขาคณิตระหว่างเพศชายกับเพศหญิง

โรนาลด์ แนล เบล (Ronald Nall Bell 1988: 754A-755A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องการใช้วิธีสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์เรขาคณิตอย่างมีแบบแผน ว่าเป็นวิธีการสอนให้แสดงทักษะการคิดหรือไม่ในการศึกษาครั้งนี้ ได้ทดลองแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยใช้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่เรียนเรขาคณิต 2 ห้อง ห้องหนึ่งมี การเรียนเรขาคณิตอยู่ในระดับทั่ว ๆ ไป อีกห้องหนึ่งมีการเรียนเรขาคณิตในระดับสูง ทั้งสองห้องเรียน

เนื้อหาเรขาคณิตอย่างเดียวกัน ส่วนประกอบของวิธีสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนได้ออกแบบ เพื่อที่จะทำให้เพิ่มการแสดงทักษะการคิดของนักเรียน หลังจากทดลองเป็นเวลา 9 สัปดาห์ ผลการทดลองพบว่าไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในการเพิ่มการแสดงทักษะการคิด เมื่อเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม อย่างไรก็ตาม การทดลองนี้ยังค้นพบว่าวิธีสอนการเขียนอธิบายการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนมีผลกับนักเรียนบ้างเป็นจำนวนเล็กน้อย สำหรับนักเรียนที่ชอบใช้การเขียนพิสูจน์เป็นข้อความเป็นตอน ๆ ลงมามากกว่าจะใช้การเขียนพิสูจน์ที่เป็นแบบแผนโดยแบ่งเป็น 2 คอลัมน์

สุพจน์ ไชยสังข์ (Supotch Chaiyasang 1989: 2137-A) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องการสำรวจระดับความคิดทางเรขาคณิต และความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนไทย กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนตั้งแต่ชั้นประถมปีที่ 6 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใน 3 จังหวัดทางภาคตะวันออกของไทย จำนวน 3,047 คน เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบ 2 ฉบับ คือ แบบทดสอบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแนวทฤษฎีการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของแวนฮีลี (Van Hiele geometry test) เป็นข้อสอบแบบปรนัย 5 ตัวเลือก และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ (Proof test) เป็นข้อสอบความเรียงให้แสดงการพิสูจน์หรือเติมข้อความการพิสูจน์ที่เว้นไว้ให้ ผลของการวิจัยพบว่ามีนักเรียนมากกว่า 50% ในแต่ละชั้นจากประถมปีที่ 6 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ยังมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ที่ระดับ 1 ในด้านความสามารถในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาโดยส่วนรวมสรุปได้ว่าความสามารถด้านการพิสูจน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 อยู่ในเกณฑ์ต่ำ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย