บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

การศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้ให้ความสนใจ เกี่ยวกับวิธีการประมาณการทางเศรษฐมิติที่เกี่ยวกับเศรษฐศาสตร์การผลิต ซึ่งเป็นการประมาณการแบบจำลองฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog ที่ใช้กับข้อมูลแบบ Panel โดยเฉพาะ ดังนั้นการศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้จึงนำข้อมูลแบบ Panel ที่ใช้กับฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog จากงานวิจัยของ ปรางทิพย์ จันทร์สมศักดิ์ (2537) มาทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณการทางเศรษฐมิติที่ใช้ข้อมูลแบบ Panel ในแบบจำลอง

2.1 ข้อมูลแบบ Panel

ในการศึกษาวิจัยทางเศรษฐศาสตร์มักพบว่า บางครั้งข้อมูลที่ใช้อาจจะเป็นข้อมูลแบบภาคตัดขวาง เช่น ครัวเรือน บริษัท จังหวัด ประเทศ และบางครั้งข้อมูลที่นำมาศึกษาจะอยู่ในลักษณะข้อมูลแบบอนุกรมเวลา เช่น สถิติรายได้ประชาชาติรายปี ดุลการค้ารายเดือน หรือราคาหุ้นรายวัน แต่บางครั้งอาจพบข้อมูลทั้งที่เป็นข้อมูลแบบภาคตัดขวาง และข้อมูลแบบอนุกรมเวลารวมอยู่ด้วยกัน เช่น รายได้ประชาชาติรายจังหวัดตั้งแต่ปี พ.ศ.2520 - 2525 หรือมูลค่าสินค้านำเข้าของประเทศต่างๆระหว่างปี พ.ศ.2500 - 2526 เป็นต้น การศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้ให้ความสนใจกับข้อมูลร่วมระหว่างข้อมูลแบบภาคตัดขวาง กับข้อมูลแบบอนุกรมเวลา ซึ่งมักเรียกว่าข้อมูลแบบ Panel

ข้อมูลแบบ Panel เป็นข้อมูลของกลุ่มตัวอย่างหน่วยรายบุคคล (individuals) ในช่วงเวลาต่างๆ และเป็นการจำแนกกลุ่มตัวอย่างออกเป็นกลุ่มๆ การศึกษาวิจัยทางเศรษฐศาสตร์ในต่างประเทศมักนิยมศึกษาข้อมูลแบบ Panel นี้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งปัจจุบันในประเทศไทยเริ่มมีงานวิจัยที่ใช้ข้อมูลแบบ Panel มากขึ้น เนื่องจากการใช้ข้อมูลแบบ Panel มีข้อได้เปรียบกว่าการใช้ข้อมูลแบบอนุกรมเวลา หรือข้อมูลแบบภาคตัดขวางเพียงอย่างเดียว อยู่หลายประการตามที่กล่าวไว้แล้วในส่วนที่ 1.1 ดังนั้น การศึกษาโดยใช้ข้อมูลแบบ Panel นี้ เป็นการศึกษาแนวใหม่ที่น่าสนใจในการศึกษาวิจัยเชิงประจักษ์ทางเศรษฐมิติในปัจจุบันอย่างมาก

ลักษณะของข้อมูลแบบ Panel ในแบบจำลองสมการถดถอย ในกรณีสมการเดี่ยว (single equation) แบบจำลองสมการถดถอยที่ใช้ข้อมูลแบบ Panel มีดังสมการที่ (1.1) แต่เขียนให้อยู่ในลักษณะทั่วไปดังนี้

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 X_{it,1} + \beta_2 X_{it,2} + \dots + \beta_K X_{it,K} + u_{it} \qquad \text{....(2.1)}$$

โดยที่ $i = 1, 2, \dots, N$ และ $t = 1, 2, \dots, T$

ในกรณีที่มีข้อมูลแบบภาคตัดขวางทั้งหมด N หน่วย ภายในช่วงเวลา T ดังนั้นจะมีจำนวนค่าสังเกตทั้งสิ้น $N \times T$ หน่วย จากแบบจำลองที่แสดงในสมการที่ (2.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้เป็น

$$y = X\beta + u \qquad \text{....(2.2)}$$

เมื่อ

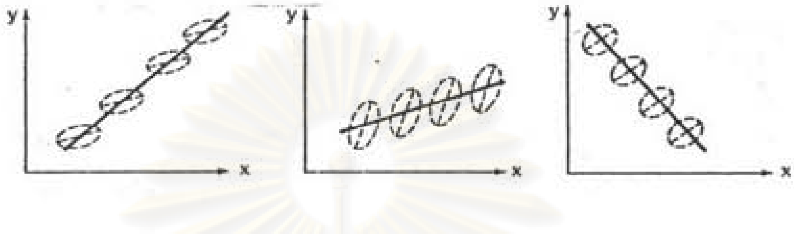
$$y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11,1} & X_{11,2} & \cdots & X_{11,K} \\ 1 & X_{12,1} & X_{12,2} & \cdots & X_{12,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1T,1} & X_{1T,2} & \cdots & X_{1T,K} \\ 1 & X_{21,1} & X_{21,2} & \cdots & X_{21,K} \\ 1 & X_{22,1} & X_{22,2} & \cdots & X_{22,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{NT,1} & X_{NT,2} & \cdots & X_{NT,K} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1T} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{NT} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.3)}$$

ดังนั้น เมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม (Ω) ของ u จึงเท่ากับ

$$\Omega = E(uu')$$

$$= \begin{bmatrix} E(u_{11}^2) & E(u_{11}u_{12}) & \cdots & E(u_{11}u_{1T}) & E(u_{11}u_{21}) & E(u_{11}u_{22}) & \cdots & E(u_{11}u_{NT}) \\ E(u_{12}u_{11}) & E(u_{12}^2) & \cdots & E(u_{12}u_{1T}) & E(u_{12}u_{21}) & E(u_{12}u_{22}) & \cdots & E(u_{12}u_{NT}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(u_{1T}u_{11}) & E(u_{1T}u_{12}) & \cdots & E(u_{1T}^2) & E(u_{1T}u_{21}) & E(u_{1T}u_{22}) & \cdots & E(u_{1T}u_{NT}) \\ E(u_{21}u_{11}) & E(u_{21}u_{12}) & \cdots & E(u_{21}u_{1T}) & E(u_{21}^2) & E(u_{21}u_{22}) & \cdots & E(u_{21}u_{NT}) \\ E(u_{22}u_{11}) & E(u_{22}u_{12}) & \cdots & E(u_{22}u_{1T}) & E(u_{22}u_{21}) & E(u_{22}^2) & \cdots & E(u_{22}u_{NT}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(u_{NT}u_{11}) & E(u_{NT}u_{12}) & \cdots & E(u_{NT}u_{1T}) & E(u_{NT}u_{21}) & E(u_{NT}u_{22}) & \cdots & E(u_{NT}^2) \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.4)}$$

เมื่อใช้ข้อมูลที่รวมระหว่างข้อมูลแบบภาคตัดขวางและข้อมูลแบบอนุกรมเวลาจะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อน จากเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม (Ω) ในแบบจำลองสมการถดถอยตามข้อสมมติฐานทั่วไป จะมีลักษณะดังนี้ $\Omega = \sigma^2_u I_{NT}$ ทำให้สามารถประมาณการได้ด้วย วิธีการประมาณการสมการถดถอยธรรมดาได้ ในระยะหลังเริ่มมีการใช้วิธีประมาณการแบบจำลองที่ใช้ข้อมูลแบบ Panel แนวใหม่เกิดขึ้น ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงการกระจายของค่าสังเกตในแบบจำลองสมการถดถอยอย่างง่าย สามารถพิจารณาได้ดังรูปที่ 2.1 ดังนี้



รูปที่ 2.1 แสดงลักษณะข้อมูลแบบ Panel ในสมการถดถอย

จากรูปที่ 2.1 เส้นตรงแสดงถึงเส้นของการประมาณการ ส่วนเส้นประแสดงถึงกลุ่มของค่าสังเกต เมื่อพิจารณาในส่วนของจุดตัดแกน (intercept) จะเห็นได้ว่า ค่าของจุดตัดแกนอาจจะมีได้หลายค่าทำให้เกิดแนวคิดว่า ค่าของจุดตัดแกนที่มีอยู่หลายค่านี้รวมอยู่ในส่วนของตัวคลาดเคลื่อน (u_{it}) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในลักษณะทั่วไปได้ดังนี้

$$u_{it} = \lambda_t + \varepsilon_{it} \qquad ...(2.5)$$

โดยที่ λ_t เป็นกลุ่มของส่วนประกอบที่ทำให้เกิดตัวคลาดเคลื่อนที่มีอิทธิพลมาจากช่วงเวลา t ปี

ε_{it} เป็นตัวคลาดเคลื่อนร่วมในแบบจำลอง

จากสมการที่ (2.5) การศึกษาวิจัยโดยใช้ข้อมูลแบบ Panel กับแบบจำลองต่างๆ ทางเศรษฐศาสตร์ ในระยะหลังนักเศรษฐศาสตร์ได้พัฒนาเทคนิคการประมาณค่า โดยสมมติให้ค่าของ λ_t เกิดขึ้น เพื่ออธิบายจุดตัดแกนที่อาจมีหลายค่าดังรูปที่ 2.1 และสามารถแบ่งข้อสมมติฐานของค่าของ λ_t ออกได้เป็น 2 แบบจำลองคือ แบบจำลอง Fixed Effect และแบบจำลอง Random Effect

แบบจำลอง Fixed Effect เป็นแบบจำลองที่อาศัยหลักการของตัวแปรหุ่น (Dummy Variable) มาใส่ในแบบจำลองมีผลทำให้ค่าของ λ_t คงที่ แล้วทำการประมาณการด้วยวิธีแบบธรรมดา ค่าของตัวคลาดเคลื่อนในสมการที่ (2.1) หรือค่า u_{it} กับค่าของตัวคลาดเคลื่อนร่วมในสมการที่ (2.5) หรือค่าของ ε_{it} มีลักษณะที่เหมือนกัน โดยที่ค่าของเมตริกความแปรปรวน และความแปรปรวนร่วมมีลักษณะเหมือนเดิมคือ $\Omega = \sigma^2_u I_{NT}$ ทำให้สามารถประมาณการได้ด้วยวิธีการประมาณการสมการถดถอยธรรมดาได้

แบบจำลอง Random Effect เป็นแบบจำลองที่สมมติให้ค่าของ λ_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม โดยที่มีการกระจายแบบปกติ $\lambda_i \sim N(0, \sigma_\lambda^2)$ เมื่อค่าของ λ_i เป็นตัวแปรตัวหนึ่งแล้ว ทำให้ค่าตัวคลาดเคลื่อนร่วมในแบบจำลองมีลักษณะต่างไปจากเดิม มีผลทำให้ค่าเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม จะต่างไปจากเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมในแบบจำลองเดิม หรือค่าของ $\Omega \neq \sigma^2_u I_{NT}$ การประมาณค่าแบบจำลอง Random Effect นี้จึงมีลักษณะต่างออกไป โดยใช้หลักการวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป (GLS) มาประมาณค่าแบบจำลอง

การศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้เป็นการใช้ข้อมูลแบบ Panel ร่วมกับฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog เนื่องจากฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog ปรากฏอยู่ในรูปแบบของระบบสมการ (system equations) ที่มีลักษณะพิเศษมีชื่อเรียกว่า ระบบสมการแบบ Seemingly Unrelated Regression ดังนั้นจากสมการที่ (2.2) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกแบบทั่วไปของระบบสมการได้ดังนี้

$$y_j = X_j \beta_j + u_j \qquad ...(2.6)$$

เมื่อ j เป็นจำนวนสมการ โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, M$

การศึกษาเกี่ยวกับระบบสมการ โดยใช้ข้อมูลแบบ Panel ก็มีแบบจำลองแบบ Fixed Effect และ แบบจำลองแบบ Random Effect เหมือนกับกรณีสมการเดี่ยว ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับข้อมูลแบบ Panel ในงานวิจัยนี้แบ่งแบบจำลองออกเป็น 3 แบบ คือ แบบจำลอง Seemingly Unrelated Regression แบบธรรมดา , แบบจำลองแบบ Fixed Effect และ แบบจำลองแบบ Random Effect ดังจะกล่าวถึงรายละเอียดในส่วนต่อไป

2.2 แบบจำลองระบบสมการแบบ Seemingly Unrelated Regression Model (SUR)

จากรูปแบบทั่วไปของแบบจำลองฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog ในการศึกษาเกี่ยวกับธุรกิจโรงแรมของไทย มีลักษณะดังนี้

$$\begin{aligned} lnC = {} & ln a_0 + a_R ln R + a_L ln L + a_K ln K + a_Y ln Y \\ & + \tfrac{1}{2} b_{RR}(ln R)^2 + b_{RL} ln R\, ln L + b_{RK} ln R\, ln K + b_{RY} ln R\, ln Y \\ & + \tfrac{1}{2} b_{LL}(ln L)^2 + b_{LK} ln L\, ln K + b_{LY} ln L\, ln Y \\ & + \tfrac{1}{2} b_{KK}(ln K)^2 + b_{KY} ln K\, ln Y + \tfrac{1}{2} b_{YY}(ln Y)^2 \qquad ...(2.7) \end{aligned}$$

$$S_L = a_L + b_{LL} ln L + b_{RL} ln R + b_{LK} ln K + b_{LY} ln Y \qquad ...(2.8)$$

$$S_R = a_R + b_{RR} ln R + b_{RL} ln L + b_{RK} ln K + b_{RY} ln Y \qquad ...(2.9)$$

$$S_K = a_K + b_{KK} ln K + b_{RK} ln R + b_{LK} ln L + b_{KY} ln Y \qquad ...(2.10)$$

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_R + a_L + a_K &= 1 \\
b_{RR} + b_{RL} + b_{RK} &= 0 \\
b_{RL} + b_{LL} + b_{LK} &= 0 \\
b_{RK} + b_{LK} + b_{KK} &= 0 \\
b_{RY} + b_{LY} + b_{KY} &= 0
\end{aligned}
$$

เมื่อ C คือ ต้นทุนทั้งหมดในหนึ่งปี

Y คือ ผลผลิตต่อปี

R คือ ราคาปัจจัยทางด้านห้องพักต่อปี

L คือ ค่าแรงพนักงานโรงแรมต่อปี

K คือ ราคาทุนต่อปี

ซึ่งจากรูปแบบฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog นี้ สามารถเทียบกับรูปแบบฟังก์ชั่นมาตราฐานของแบบจำลองฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog ในสมการที่ (1.3) โดยที่ราคาปัจจัยการผลิต (w_i, w_j) ในแบบจำลองนี้คือค่าของ R , L และ K

เมื่อนำเงื่อนไขของแบบจำลองเข้าไปแทนค่าในสมการที่ (2.7) , (2.8) , (2.9) และ (2.10) เพื่อลดจำนวนพารามิเตอร์ที่จะประมาณค่าในแบบจำลองให้น้อยลง โดยแทนค่าของ

$$
\begin{aligned}
a_K &= 1 - a_R - a_L \\
b_{KK} &= -b_{LK} - b_{RK} \quad = b_{LL} + 2b_{RL} + b_{RR} \\
b_{LK} &= -b_{LL} - b_{RL} \\
b_{RK} &= -b_{RL} - b_{RR}
\end{aligned}
$$

และ
$$b_{KY} = -b_{LY} - b_{RY}$$

จะได้ฟังก์ชั่น Translog ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(\ln C - \ln K) = {} & \ln a_0 + a_R(\ln R - \ln K) + a_L(\ln L - \ln K) + a_Y \ln Y \\
& + \tfrac{1}{2} b_{RR}(\ln R - \ln K)^2 + b_{RL}(\ln R - \ln K)(\ln L - \ln K) \\
& + b_{RY}(\ln R \ln Y - \ln K \ln Y) + \tfrac{1}{2} b_{LL}(\ln L - \ln K)^2 \\
& + b_{LY}(\ln L \ln Y - \ln K \ln Y) + \tfrac{1}{2} b_{YY}(\ln Y)^2 \qquad \text{...(2.11)}
\end{aligned}
$$

$$S_L = a_L + b_{LL}(\ln L - \ln K) + b_{RL}(\ln R - \ln K) + b_{LY} \ln Y \qquad \text{...(2.12)}$$

$$S_R = a_R + b_{RR}(\ln R - \ln K) + b_{RL}(\ln L - \ln K) + b_{RY} \ln Y \qquad \text{...(2.13)}$$

$$
\begin{aligned}
S_K = {} & (1 - a_R - a_L) + b_{LL}(\ln K - \ln L) + b_{RL}(2\ln K - \ln L - \ln R) \\
& + b_{RR}(\ln K - \ln R) - (b_{LY} + b_{RY}) \ln Y \qquad \text{...(2.14)}
\end{aligned}
$$

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการแบบ Seemingly Unrelated Regression อย่างง่ายได้ดังนี้

$$y_1 = a_0 + a_R X_1 + a_L X_2 + a_Y X_3 + b_{RR} X_4 + b_{RL} X_5 + b_{RY} X_6 + b_{LL} X_7 + b_{LY} X_8 + b_{YY} X_9 \quad ...(2.15)$$

$$y_2 = a_L + b_{LL} X_2 + b_{RL} X_1 + b_{LY} X_3 \quad ...(2.16)$$

$$y_3 = a_R + b_{RR} X_1 + b_{RL} X_2 + b_{RY} X_3 \quad ...(2.17)$$

$$y_4 = (1 - a_R - a_L) + b_{LL} X_{10} + b_{RL} X_{11} + b_{RR} X_{12} - (b_{LY} + b_{RY}) X_3 \quad ...(2.18)$$

เนื่องจากฟังก์ชั่นต้นทุนแบบ Translog อยู่ในรูปของระบบสมการแบบ Seemingly Unrelated Regression ดังนั้นในส่วนนี้จะอธิบายทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับระบบสมการแบบ Seemingly Unrelated Regression จากภายในสมมติฐานแบบจำลองสมการถดถอยเชิงเส้นแบบปกติ (classical normal linear regression model) จะเห็นได้ว่าตัวแปรตามถูกกำหนดจากตัวแปรอิสระ และตัวคลาดเคลื่อนที่แตกต่างกัน ถ้าศึกษาในรูปของระบบสมการตัวคลาดเคลื่อนในแต่ละสมการไม่มีความสัมพันธ์กัน การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการถดถอยทีละสมการ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบธรรมดา (OLS) ย่อมได้ตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียง (unbiased) มีความแนบนัย (consistent) และมีประสิทธิภาพ (efficiency) อย่างไรก็ตามมีกรณีบางกรณี ที่เป็นกรณีพิเศษซึ่งทำให้ตัวประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด ไม่สามารถอธิบายแบบจำลองได้ เนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนในสมการหนึ่งมีความสัมพันธ์กับสมการอื่นๆในระบบสมการ แบบจำลองระบบสมการนี้จึงเรียกว่า แบบจำลองระบบสมการแบบ Seemiugly Unrelated Regression Model หรือ ระบบสมการแบบ SUR การที่ตัวคลาดเคลื่อนในแต่ละสมการมีความสัมพันธ์กัน แสดงว่าตัวคลาดเคลื่อนในสมการหนึ่งมีความสัมพันธ์กับตัวคลาดเคลื่อนในสมการอื่นๆของระบบสมการซึ่งมีผลทำให้การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ด้วย วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบธรรมดานี้ จึงไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณค่าที่ดี (Best Linear Unbiased Estimator หรือBLUE) เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าวนี้ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง จึงต้องทำการประมาณค่าทุกสมการทั้งระบบในแบบจำลองไปพร้อมๆกัน โดยใช้ข้อมูลทั้งหมดที่มีอยู่แบบจำลองระบบสมการ แบบ Seemingly Unrelated Regression มีรูปแบบทั่วไปซึ่ง Kmenta (1986) ได้เขียนไว้ดังนี้

$$y_{1it} = \alpha_1 + \beta_{11}X_{1it,1} + \beta_{12}X_{1it,2} + ... + \beta_{1K_1}X_{1it,K_1} + u_{1it}$$

$$y_{2it} = \alpha_2 + \beta_{21}X_{2it,1} + \beta_{22}X_{2it,2} + ... + \beta_{2K_2}X_{2it,K_2} + u_{2it}$$

$$\vdots$$

$$y_{Mit} = \alpha_M + \beta_{M1}X_{Mit,1} + \beta_{M2}X_{Mit,2} + ... + \beta_{MK_M}X_{Mit,K_M} + u_{Mit} \quad ...(2.19)$$

เมื่อ M เป็นจำนวนสมการ และ $i = 1, 2, ..., N$ $t = 1, 2, ..., T$ เป็นจำนวนค่าสังเกตในแบบจำลองจากสมการที่ (2.19)

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_1 &= X_1\beta_1 + u_1 \\
y_2 &= X_2\beta_2 + u_2 \\
&\vdots \\
y_M &= X_M\beta_M + u_M
\end{aligned}
\qquad \text{...(2.20)}
$$

โดยที่

$$y_1 = [y_{1it}], X_1 = [1 \;\; X_{1it,1} \; X_{1it,2} \; \ldots \; X_{1it,K_1}], \beta_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1K_1} \end{bmatrix}, u_1 = [u_{1it}]$$

$$y_2 = [y_{2it}], X_2 = [1 \;\; X_{2it,1} \; X_{2it,2} \; \ldots \; X_{2it,K_1}], \beta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2K_2} \end{bmatrix}, u_2 = [u_{2it}]$$

$$\vdots$$

$$y_M = [y_{Mit}], X_M = [1 \;\; X_{Mit,1} \; X_{Mit,2} \; \ldots \; X_{Mit,K_M}], \beta_M = \begin{bmatrix} \alpha_M \\ \beta_{M1} \\ \beta_{M2} \\ \vdots \\ \beta_{MK_M} \end{bmatrix}, u_M = [u_{Mit}]$$

หรือในรูปย่อคือ

$$y_j = X_j\beta_j + u_j \qquad \text{...(2.21)}$$

โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, M$

เมื่อ y_j คือ เวคเตอร์ของกลุ่มตัวอย่างของตัวแปรตาม ขนาด $NT \times 1$

X_j คือ เมตริกของกลุ่มตัวอย่างของตัวแปรอิสระ ขนาด $NT \times K_j$

β_j คือ เวคเตอร์ของสัมประสิทธิ์ของระบบสมการ ขนาด $K_j \times 1$

และ u_j คือ เวคเตอร์ของกลุ่มตัวอย่างตัวคลาดเคลื่อน ขนาด $NT \times 1$

สามารถเขียนเมตริกของระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \qquad ...(2.22)$$

ดังนั้นเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ของระบบสมการแบบ SUR มีลักษณะดังนี้

$$\begin{aligned} \Omega &= E(u_i u_j') \\ &= \begin{bmatrix} E(u_1u_1') & E(u_1u_2') & \cdots & E(u_1u_M') \\ E(u_2u_1') & E(u_2u_2') & \cdots & E(u_2u_M') \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(u_Mu_1') & E(u_Mu_2') & \cdots & E(u_Mu_M') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11}I_{NT} & \sigma_{12}I_{NT} & \cdots & \sigma_{1M}I_{NT} \\ \sigma_{21}I_{NT} & \sigma_{22}I_{NT} & \cdots & \sigma_{2M}I_{NT} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{M1}I_{NT} & \sigma_{M2}I_{NT} & \cdots & \sigma_{MM}I_{NT} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad ...(2.23)$$

เมื่อ I_{NT} เป็นเมตริกเอกลักษณ์ ขนาด $NT \times NT$ รายละเอียดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของตัวคลาดเคลื่อนระหว่างสมการ ประกอบอยู่ในส่วนประกอบของเมตริก Ω การใช้ตัวประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป (GLS) จะมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณค่าที่ดี (BLUE) การหาค่าสัมประสิทธิ์ในแบบจำลองนี้สามารถหาได้จาก

$$\tilde{\beta}_{SUR} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}y)$$

หรือสามารถเขียนอธิบายให้ชัดเจนขึ้นได้ดังนี้

$$\tilde{\beta}_{SUR} = \begin{bmatrix} \sigma^{11}(X_1'X_1) & \sigma^{12}(X_1'X_2) & \cdots & \sigma^{1M}(X_1'X_M) \\ \sigma^{21}(X_2'X_1) & \sigma^{22}(X_2'X_2) & \cdots & \sigma^{2M}(X_2'X_M) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma^{M1}(X_M'X_1) & \sigma^{M2}(X_M'X_2) & \cdots & \sigma^{MM}(X_M'X_M) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{M} \sigma^{1j}(X_1'y_j) \\ \sum_{j=1}^{M} \sigma^{2j}(X_2'y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{M} \sigma^{Mj}(X_j'y_j) \end{bmatrix}$$

เมื่อ σ^{jl} แสดงถึงส่วนประกอบซึ่งปรากฏอยู่ในส่วนกลับของเมตริกแถวที่ j และคอลัมท์ที่ l ของเมตริก σ ซึ่งคือ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix}$$

โดยทั่วไปแล้วค่าเมตริก Ω ไม่สามารถที่จะทราบค่าได้ ดังนั้นการประมาณค่าระบบสมการแบบ SUR นี้ เหมือนกับกรณีทั่วไปอื่นๆ สามารถใช้ตัวประมาณค่าที่เชื่อถือได้มาแทนค่าของเมตริก Ω วิธีการที่ใช้กันอยู่อย่างแพร่หลาย ในการประมาณค่าระบบสมการแบบ SUR นี้ ได้แก่

วิธีของ Zellner (1962) ซึ่งเขียนในบทความทางเศรษฐมิติ แสดงการประมาณค่าเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมจากค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) ซึ่งเรียกว่าค่า $e_{it,j}$ สามารถแสดงได้ ดังนี้

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} s_{11}I_{NT} & s_{12}I_{NT} & \cdots & s_{1M}I_{NT} \\ s_{21}I_{NT} & s_{22}I_{NT} & \cdots & s_{2M}I_{NT} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{M1}I_{NT} & s_{M2}I_{NT} & \cdots & s_{MM}I_{NT} \end{bmatrix} ,$$

เมื่อ

$$s_{jl} = \frac{1}{NT-K}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} e_{it,j}e_{it,l} \quad ,$$

$$j,l = 1,2,\ldots,M.$$

โดยที่ s_{jj} เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียง และมีความแนบนัย ของค่า σ_{jj} และ ค่าของ s_{jl} เป็นตัวประมาณค่าที่เชื่อถือได้ของ σ_{jl} ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ของตัวประมาณค่าของ β ดังนี้

$$\tilde{\tilde{\beta}}_{SUR} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}^{-1}y)$$

2.3 แบบจำลองแบบ Fixed Effect

การศึกษาในแบบจำลองนี้อาศัยหลักการของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดโดยใช้ตัวแปรหุ่น (Least-squares dummy-variable approach หรือ แบบจำลอง LSDV) สำหรับข้อมูลแบบ Panel แล้วนำตัวแปรหุ่นมาใส่ในแบบจำลองเพื่ออธิบายแบบจำลอง ดังที่ได้อธิบายในส่วนที่ 2.1 ดังนั้น แบบจำลองที่กล่าวถึงในส่วนนี้ จุดตัดแกนจะประกอบด้วยส่วนประกอบ 2 ส่วนด้วยกัน คือ $\alpha + \lambda_t$ เมื่อให้ค่าของ λ_t เป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดให้คงที่ (fixed parameters) และมีเงื่อนไขว่าค่าของ $\sum_{t=1}^{T} \lambda_t = 0$ โดยที่แบบจำลองมีลักษณะทั่วไป เมื่อพิจารณาในระบบสมการ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \begin{bmatrix} e_{NT} & e_N \otimes \begin{bmatrix} I_{T-1} \\ 0' \end{bmatrix} & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \lambda_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \begin{bmatrix} e_{NT} & e_N \otimes \begin{bmatrix} I_{T-1} \\ 0' \end{bmatrix} & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \lambda_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
y_M &= \begin{bmatrix} e_{NT} & e_N \otimes \begin{bmatrix} I_{T-1} \\ 0' \end{bmatrix} & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_M \\ \lambda_M \\ \beta_M \end{bmatrix} + \varepsilon_M
\end{aligned}
\qquad \text{...(2.24)}
$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, N$, $t = 1, 2, \ldots, T$ และ $j = 1, 2, \ldots, M$

e_{NT} , e_N เป็นเวคเตอร์ที่มีค่าเป็นหนึ่งทั้งหมดขนาด $NT \times 1$ และ $N \times 1$

I_{T-1} เป็นเมตริกเอกลักษณ์ขนาด $(T-1) \times 1$ [1]

เมื่อพิจารณาในเฉพาะส่วนของจุดตัดแกน ค่าของเมตริกในส่วนของจุดตัดแกนมีลักษณะเป็นดังนี้

[1] การใส่ตัวแปรหุ่น T-1 ตัว โดยให้ค่าที่ได้จากตัวแปรหุ่นตัวที่ไม่ได้ใส่ในแบบจำลอง ไปรวมอยู่กับค่าคงที่ที่เป็นจุดตัดแกน (intercept) เพราะ ถ้าหากว่าใส่ตัวแปรหุ่นลงในแบบจำลองครบ T ตัว จะทำให้เกิดปัญหาตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์ (Perfect Multicollinearity) ทำให้การคำนวณหาตัวประมาณค่าโดยใช้ตัวแปรหุ่นไม่สามารถทำได้โดยตรง

$$\begin{bmatrix} e_{NT} & e_N \otimes \begin{bmatrix} I_{T-1} \\ 0' \end{bmatrix} \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกรวมได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1 \beta_1 + u^*_1 \\ y_2 &= X_2 \beta_2 + u^*_2 \\ &\vdots \\ y_M &= X_M \beta_M + u^*_M \end{aligned} \qquad \text{...(2.25)}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} u^*_1 &= [\lambda_{1t}] + [\varepsilon_{1t}] \\ u^*_2 &= [\lambda_{2t}] + [\varepsilon_{2t}] \\ &\vdots \\ u^*_M &= [\lambda_{Mt}] + [\varepsilon_{Mt}] \end{aligned}$$

โดยที่ค่าของ y , X และ β เป็นเวคเตอร์ หรือเมตริกที่ลักษณะเดียวกับสมการที่ (2.20) จะมีรูปแบบของแบบจำลองเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปย่อได้ดังนี้

$$y_j = X_j \beta_j + u^*_j \qquad \text{...(2.26)}$$

เมื่อ y_j , X_j และ β_j มี ลักษณะเดียวกับสมการที่ (2.21)

u^*_j เป็นเวคเตอร์ของตัวคลาดเคลื่อนที่ประกอบด้วย $\lambda_j + \varepsilon_j$ ขนาด $NT \times 1$ $E(\varepsilon_j) = 0$ และ $E(\varepsilon_j \varepsilon_j')$ มีลักษณะที่เหมือนกับสมการที่ (2.23) ดังนี้

$$\begin{aligned} \Omega = E(\varepsilon_j \varepsilon_j') &= E(u_j u_j') \\ &= \begin{bmatrix} E(u_1u_1') & E(u_1u_2') & \cdots & E(u_1u_M') \\ E(u_2u_1') & E(u_2u_2') & \cdots & E(u_2u_M') \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(u_Mu_1') & E(u_Mu_2') & \cdots & E(u_Mu_M') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11}I_{NT} & \sigma_{12}I_{NT} & \cdots & \sigma_{1M}I_{NT} \\ \sigma_{21}I_{NT} & \sigma_{22}I_{NT} & \cdots & \sigma_{2M}I_{NT} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{M1}I_{NT} & \sigma_{M2}I_{NT} & \cdots & \sigma_{MM}I_{NT} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{...(2.27)}$$

จากข้อสมมติฐานในคุณสมบัติของค่า ε ทำให้ทราบว่าตัวประมาณค่าระบบสมการ SUR แบบธรรมดา ของสมการที่ (2.24) เป็นตัวประมาณค่าที่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณค่าที่ดี (BLUE) จะสังเกตได้ว่าในบางครั้งการประมาณค่าแบบจำลองที่ (2.24) ไม่สามารถทำได้โดยตรง เนื่องจากพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าที่มีจำนวนมากเกินไป ทำให้ไม่สามารถประมาณค่าแบบจำลองได้โดยตรง จึงได้มีวิธีการคำนวณสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองนี้อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งสามารถประมาณค่าแบบจำลองโดยไม่ต้องการใช้ตัวแปรหุ่นของเวลา อาศัยหลักที่ว่าตัวแปรหุ่นนั้นประกอบอยู่ในเมตริกของตัวแปรอิสระอยู่แล้ว การคำนวณของวิธีนี้จึงต้องใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลแต่ละภาคตัดขวางแยกจากกันในแต่ละอนุกรมเวลา มาแปลงรูปข้อมูล ซึ่งการแปลงรูปของข้อมูลทำได้โดยนำค่าสังเกตหักออกจากค่าเฉลี่ยในหน่วยที่เหมาะสมกัน แล้วใช้วิธีประมาณค่าระบบสมการ SUR แบบธรรมดากับข้อมูลที่แปลงรูปแล้ว

วิธีการประมาณค่าแบบนี้มักเรียกว่า การประมาณค่าแบบ Within หรือสามารถแสดงให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นดังนี้

$$X_{it,j} - \overline{X}_{t,j} \qquad \text{...(2.28)}$$

$$y_{it,j} - \overline{y}_{t,j} \qquad \text{...(2.29)}$$

เมื่อ $\overline{X}_{t,j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{it,j}\ ;\quad \overline{y}_{t,j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{it,j}$

พิจารณาจากแบบจำลอง SUR ในสมการที่ (2.22) แทนค่าสมการที่ (2.28) และสมการที่ (2.29) ลงไปจะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 - \overline{y}_{t,1} \\ y_2 - \overline{y}_{t,2} \\ \vdots \\ y_M - \overline{y}_{t,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - \overline{X}_{t,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 - \overline{X}_{t,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_M - \overline{X}_{t,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.30)}$$

โดยที่

$$y_1 = [y_{1it}], X_1 = [\ X_{1it,1}\ X_{1it,2} \ldots X_{1it,K_1}\ ], \beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1K_1} \end{bmatrix}, u_1 = [u_{1it}]$$

$$y_2 = [y_{2it}], X_2 = [\ X_{2it,1}\ X_{2it,2} \ldots X_{2it,K_1}\ ], \beta_2 = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2K_2} \end{bmatrix}, u_2 = [u_{2it}]$$

$$\vdots$$

$$y_M = [y_{Mit}], X_M = [\ X_{Mit,1}\ X_{Mit,2} \ldots X_{Mit,K_M}\ ], \beta_M = \begin{bmatrix} \beta_{M1} \\ \beta_{M2} \\ \vdots \\ \beta_{MK_M} \end{bmatrix}, u_M = [u_{Mit}]$$

ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีการประมาณค่าระบบสมการแบบ SUR ในสมการที่ (2.24) จะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีการประมาณค่าระบบสมการแบบSUR ในสมการที่ (2.30) จากสมการที่ (2.30) จะสังเกตได้ว่าค่าจุดตัดแกนของแบบจำลองหายไปเนื่องจากเป็นผลของ deviations from สามารถศึกษาได้จาก Hsiao (1986) ซึ่งวิธีการที่ได้ที่อธิบายมาทั้งหมดข้างต้นนั้น เป็นวิธีการศึกษาแบบจำลองระบบสมการ SUR โดยใช้ข้อมูลแบบ Panel ในแบบจำลอง Fixed Effect สำหรับการศึกษานี้จะใช้แบบจำลอง Within แทนการใส่ Dummy Variable

2.4 แบบจำลองแบบ Random Effect

ในส่วนนี้จะอธิบายถึงทฤษฎีเกี่ยวกับ แบบจำลองแบบ Random Effect ส่วนที่เกี่ยวข้องกับค่าของ (λ_t) แบบจำลองแบบ Random Effect นี้ เป็นแบบจำลองที่แตกต่างออกไปจากแบบจำลองแบบ Fixed Effect ตรงที่แบบจำลองแบบ Fixed Effect มีข้อสมมติฐานว่า กำหนดให้ค่าของ λ_t เป็นพารามิเตอร์แบบคงที่ ในขณะที่แบบจำลองนี้กำหนดให้ค่าของ λ_t เป็นตัวแปรเชิงสุ่มการศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลอง Random Effect กับระบบสมการแบบ Seemingly Unrelated Regression นี้เป็นการศึกษาจากงานวิจัยของ Baltagi (1980) ที่ได้พัฒนามาจากงานศึกษาของ Maddala (1971) และงานศึกษาของ Avery (1977) ซึ่งในส่วนนี้จะอธิบายเกี่ยวกับแบบจำลอง Error Components จากศึกษาของ Baltagi (1980)

พิจารณาจากแบบจำลองทั่วไปของกลุ่มสมการ M สมการจากสมการที่ (2.21) ดังนี้

$$y_j = X_j\beta_j + u_j$$

โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, M$

เมื่อ y_j เป็นเวคเตอร์ ขนาด $NT \times 1$, X_j เป็นเมตริก ขนาด $NT \times k_j$ และ β_j เป็นเวคเตอร์ ขนาด $k_j \times 1$ ซึ่งมีส่วนประกอบตัวคลาดเคลื่อนเป็น ดังนี้

$$u_j = (e_N \otimes I_T)\lambda_t + \varepsilon_j$$

เมื่อ I_T เป็นเมตริกเอกลักษณ์ขนาด $T \times T$

e_N เป็นเวคเตอร์ของหนึ่ง ขนาด $N \times 1$

ค่าของ $\lambda'_1 = (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \ldots, \lambda_{Tj})$ และ $\varepsilon'_j = (\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}, \ldots, \varepsilon_{NTj})$ เป็นเวคเตอร์เชิงสุ่ม ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และเมตริกความแปรปรวนร่วม คือ

$$\begin{aligned}
E(\lambda_{t,j}\,\lambda_{t',l}) &= \sigma_{\lambda j\lambda l}\,, & \forall\, t = t' \\
&= 0\,, & \forall\, t \neq t' \\
E(\varepsilon_{it,j}\,\varepsilon_{i't',l}) &= \sigma_{\varepsilon j\varepsilon l}\,, & \forall\, i = i' \quad \text{และ}\quad t = t' \\
&= 0\,, & \forall\, i \neq i' \quad \text{และ}\quad t \neq t'
\end{aligned}$$

หรือเขียนในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$E\begin{bmatrix}\lambda_j \\ \varepsilon_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda'_l & \varepsilon'_l\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{\lambda j\lambda l} I_T & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon j\varepsilon l} I_{NT}\end{bmatrix}$$

โดยที่ $j, l = 1, 2, \ldots, M$ แทนค่าสมการที่ j และสมการที่ l ในกลุ่มสมการ M

I_{NT} เป็นเมตริกเอกลักษณ์ขนาด $NT \times NT$ ถ้าหากว่า

$$\Omega = E(uu') = [\Omega_{jl}]$$

Ω_{jl} แทนเมตริกย่อยของเมตริก Ω โดยที่

$$\Omega_{jl} = E(u_j u'_l) = \sigma_{\lambda j\lambda l}(e_N e'_N \otimes I_T) + \sigma_{\varepsilon j\varepsilon l} I_{NT}$$

กำหนดให้ $J_N = e_N e'_N$

สามารถเขียน $E(uu')$ ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
E(uu') &= \sigma_{\lambda j\lambda l}(J_N \otimes I_T) + \sigma_{\varepsilon j\varepsilon l} I_{NT} \\
&= (\sigma_{\lambda j\lambda l} J_N + \sigma_{\varepsilon j\varepsilon l} I_N) \otimes I_T \qquad \ldots(2.31)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (2.21)สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกของระบบสมการได้ดังนี้

$$y = X\beta + u \qquad ...(2.32)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}$$

ให้ y' ประกอบด้วยเวคเตอร์ของตัวแปรตาม $y' = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M)$

X ประกอบด้วยเมตริกของตัวแปรอิสระ $X = Diag(X_1, X_2, \dots, X_M)$

และ $\beta' = (\beta'_1 \ \beta'_2 \ \dots \ \beta'_M)$

เมื่อ $u = \lambda + \varepsilon$

λ' ประกอบด้วยเวคเตอร์ส่วนประกอบตัวคลาดเคลื่อนจากอิทธิพลของข้อมูลเวลา

$$\lambda' = (\lambda'_{t,1} \ \lambda'_{t,2} \dots \lambda'_{t,M})$$

ε' ประกอบด้วยเวคเตอร์ส่วนประกอบตัวคลาดเคลื่อนร่วมของสมการ

$$\varepsilon' = (\varepsilon'_{it,1} \ \varepsilon'_{it,2} \dots \varepsilon'_{it,M})$$

เมื่อพิจารณาในส่วนของตัวคลาดเคลื่อน จากสมการที่ (2.31) สามารถเขียนใหม่ได้โดยที่ค่าของ

$$E(uu') = \Sigma \otimes I_T$$

เมื่อค่าของ Σ ประกอบด้วย

$$\Sigma = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \cdots & C_{MM} \end{bmatrix}$$

จากสมการที่ (2.31) ค่าของ Σ ประกอบจะด้วย

$$C_{jl} = \sigma_{\lambda_j \lambda_l} J_N + \sigma_{\varepsilon_j \varepsilon_l} I_N = P'_{jl} P_{jl}$$

หรือสามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_{jl} = \sqrt{\sigma_{\varepsilon_j \varepsilon_l}} I_N - \frac{1}{N}\left(\sqrt{\sigma_{\varepsilon_j \varepsilon_l}} - \sqrt{N\sigma_{\lambda_j \lambda_l} + \sigma_{\varepsilon_j \varepsilon_l}}\right) J_N = P_{lj}$$

การคำนวณค่าของP_{jl} พิจารณาได้จากค่าของ Σ ในรูปเมตริกดังนี้

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_1}I_N+\sigma_{\lambda_1\lambda_1}J_N & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}I_N+\sigma_{\lambda_1\lambda_2}J_N & \cdots & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_M}I_N+\sigma_{\lambda_1\lambda_M}J_N \\ \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1}I_N+\sigma_{\lambda_2\lambda_1}J_N & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_2}I_N+\sigma_{\lambda_2\lambda_2}J_N & \cdots & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_M}I_N+\sigma_{\lambda_2\lambda_M}J_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_1}I_N+\sigma_{\lambda_M\lambda_1}J_N & \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_2}I_N+\sigma_{\lambda_M\lambda_2}J_N & \cdots & \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_M}I_N+\sigma_{\lambda_M\lambda_M}J_N \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_1}I_N & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}I_N & \cdots & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_M}I_N \\ \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1}I_N & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_2}I_N & \cdots & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_M}I_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_1}I_N & \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_2}I_N & \cdots & \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_M}I_N \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \sigma_{\lambda_1\lambda_1}J_N & \sigma_{\lambda_1\lambda_2}J_N & \cdots & \sigma_{\lambda_1\lambda_M}J_N \\ \sigma_{\lambda_2\lambda_1}J_N & \sigma_{\lambda_2\lambda_2}J_N & \cdots & \sigma_{\lambda_2\lambda_M}J_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\lambda_M\lambda_1}J_N & \sigma_{\lambda_M\lambda_2}J_N & \cdots & \sigma_{\lambda_M\lambda_M}J_N \end{bmatrix}$$

หรือสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_\varepsilon \otimes I_N + \Sigma_\lambda \otimes J_N \\ &= \Sigma_\varepsilon \otimes I_N - \frac{1}{N}[\Sigma_\varepsilon - (N\Sigma_\lambda + \Sigma_\varepsilon)] \otimes J_N \end{aligned}$$

โดยที่

$$\Sigma_\varepsilon=\begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_M} \\ \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_2} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_2} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_M\varepsilon_M} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_\lambda=\begin{bmatrix} \sigma_{\lambda_1\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1\lambda_2} & \cdots & \sigma_{\lambda_1\lambda_M} \\ \sigma_{\lambda_2\lambda_1} & \sigma_{\lambda_2\lambda_2} & \cdots & \sigma_{\lambda_2\lambda_M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\lambda_M\lambda_1} & \sigma_{\lambda_M\lambda_2} & \cdots & \sigma_{\lambda_M\lambda_M} \end{bmatrix}$$

เนื่องจากว่า

$$\begin{aligned} E(uu') &= \Sigma \otimes I_T \\ &= \Sigma_\varepsilon \otimes I_{NT} - [\Sigma_\varepsilon - (N\Sigma_\lambda + \Sigma_\varepsilon)] \otimes \frac{B}{N} \end{aligned} \qquad ...(2.33)$$

เมื่อ $B = J_N \otimes I_T$

ค่าของ Σ_λ แสดงถึงเมตริกที่ประกอบด้วยส่วนประกอบเมตริกคือค่าของ $\sigma_{\lambda j\, \lambda l}$

ค่าของ Σ_ε แสดงถึงเมตริกที่ประกอบด้วยส่วนประกอบเมตริกคือค่าของ $\sigma_{\varepsilon j\, \varepsilon l}$

ในอีกวิธีหนึ่งสามารถแสดงได้ว่า

$$E(uu') = \Delta\Delta'$$

โดยที่

$$\Delta = S_1 \otimes I_{NT} - (S_1 - S_2) \otimes \frac{B}{N} \qquad ...(2.34)$$

เมื่อ $\quad S_1S'_1 = \Sigma_\varepsilon$ และ $S_2S'_2 = N\Sigma_\lambda + \Sigma_\varepsilon$

เนื่องจากว่า

$$E(uu') = \Delta\Delta'$$

ดังนั้นสามารถแปลงรูปแบบจำลองได้เป็น

$$y^* = (S_1 \Delta^{-1})\, y$$
$$X^* = (S_1 \Delta^{-1})\, X$$
$$u^* = (S_1 \Delta^{-1})\, u$$

โดยที่

$$E(u^*u^{*\prime}) = \Sigma_\varepsilon \otimes I_{NT}$$

จะเห็นได้ว่าเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมใหม่ อยู่ในรูปของเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมระบบสมการ Seemingly Unrelated Regression ดังนั้นสามารถประมาณค่าแบบจำลองโดยวิธี Seemingly Unrelated Regression ได้

เมตริกที่ใช้คูณข้างหน้าแบบจำลอง (premultiply) เป็นดังนี้

$$S_1\Delta^{-1} = S_1[S_1^{-1} \otimes I_{NT} - (S_1 - S_2)^{-1} \otimes \frac{B}{N}]$$
$$= S_1S_1^{-1} \otimes I_{NT} - S_1(S_1 - S_2)^{-1} \otimes \frac{B}{N}$$
$$= I_M \otimes I_{NT} - S_1(S_1 - S_2)^{-1} \otimes \frac{B}{N}$$

การประมาณค่าระบบสมการที่(2.32)ใช้วิธีการแปลงรูปข้อมูลจากการศึกษาของ Fuller และ Battese (1973) การแปลงรูประบบสมการถดถอยแบบพหุคูณ ถูกกำหนดให้เป็นดังนี้

$$y^* = X^*\beta + u^*$$
$$(S_1 \Delta^{-1})\, y = (S_1 \Delta^{-1})\, X\beta + (S_1 \Delta^{-1})\, u \qquad ...(2.35)$$

ในการประมวลผลแบบจำลอง $y^* = (S_1 \Delta^{-1})\, y = y - S\,\bar{y}$ ...(2.36)

ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$y^*_{it,1} = y_{it,1} - S_{11}\bar{y}_{t,1} - S_{21}\bar{y}_{t,2} - \ldots - S_{M1}\bar{y}_{t,M}$$
$$y^*_{it,2} = y_{it,2} - S_{12}\bar{y}_{t,1} - S_{22}\bar{y}_{t,2} - \ldots - S_{M2}\bar{y}_{t,M}$$
$$\vdots$$
$$y^*_{it,M} = y_{it,M} - S_{1M}\bar{y}_{t,1} - S_{2M}\bar{y}_{t,2} - \ldots - S_{MM}\bar{y}_{t,M}$$

ในทำนองเดียวกัน $X^* = (S_1 \Delta^{-1}) X = X - S\bar{X}$ ...(2.37)

ดังนี้

$$\begin{aligned} X^*_{it,1} &= X_{it,1} - S_{11}\bar{X}_{.t,1} \\ X^*_{it,2} &= X_{it,2} - S_{22}\bar{X}_{.t,2} \\ &\vdots \\ X^*_{it,M} &= X_{it,M} - S_{MM}\bar{X}_{.t,M} \end{aligned}$$

โดยที่ $\bar{y}_{.t,j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{it,j}$; $\bar{X}_{.t,j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{it,j}$

และ

$$\begin{aligned} S &= I_M - S_1 S_2^{-1} \\ &= I_M - \Sigma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(N\Sigma_\lambda + \Sigma_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{M1} & S_{M2} & \cdots & S_{MM} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad ...(2.38)$$

ถ้าค่าของเมตริก S สามารถทราบค่าได้ การประมาณค่าระบบสมการที่ (2.11) , (2.12) , (2.13) และ (2.14) สามารถทำได้โดยวิธีการประมาณค่าแบบ SUR ได้หลังการแปลงรูปข้อมูลโดยเมตริก S และวิธีการข้างต้นเสร็จสิ้น แต่โดยปกติแล้วค่าของ Σ_ε และค่าของ Σ_λ ไม่สามารถทราบค่าได้ ดังนั้นค่าของเมตริก S ไม่สามารถทราบค่าได้เช่นกัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาตัวประมาณค่าของ Σ_ε และค่าของ Σ_λ จากวิธีการที่เสนอโดย Baltagi (1980) สามารถหาค่าตัวประมาณค่าของ Σ_ε และค่าของ Σ_λ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่มีนัยสำคัญได้จาก

$$\hat{\Sigma}_\varepsilon = \frac{1}{(N-1)(T-1)}\hat{\hat{u}}'Q\hat{\hat{u}} \qquad ...(2.39)$$

$$\hat{\Sigma}_\lambda = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{(T-1)}\hat{\hat{u}}'\frac{B}{N}\hat{\hat{u}} - \hat{\Sigma}_\varepsilon\right] \qquad ...(2.40)$$

เมื่อ $Q = I_{NT} - \frac{A}{T}$; $A = I_N \otimes e_T e_T'$

โดยที่ค่าของ e_T เป็นเวคเตอร์ของหนึ่ง ขนาด $T \times 1$

และ $\hat{\hat{u}}' = (\hat{\hat{u}}'_{it,1}\ \hat{\hat{u}}'_{it,2} \ldots \hat{\hat{u}}'_{it,M})$ โดยที่ค่าของ $\hat{\hat{u}}'_{it,j}$ เป็นตัวคลาดเคลื่อนสมการที่ j ที่ได้จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบธรรมดา (OLS) กับสมการที่ (2.30) หรือ ในแบบจำลองที่ใช้วิธีการประมาณค่าแบบ Within ทำให้สามารถหาตัวประมาณค่าของ Σ_ε และค่าของ Σ_λ ได้จาก

สมการที่ (2.39) และสมการที่ (2.40) การคำนวณค่าของ $\hat{\Sigma}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ และค่าของ $\hat{\Sigma}_{\lambda}^{\frac{1}{2}}$ ใช้สูตรคำนวณค่า Choleski decomposition ของตัวประมาณค่าของ Σ_{ε} และค่าของ Σ_{λ} แล้วนำเอาเมตริกส่วนที่เป็น lower triangular มาคำนวณ ซึ่งวิธีการคำนวณสามารถศึกษาได้จากงานของ Kinal และ Lahiri (1989) ดังนั้นค่าประมาณของเมตริก S สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\hat{S} = I_M - \hat{\Sigma}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(N\hat{\Sigma}_{\lambda} + \hat{\Sigma}_{\varepsilon})^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{S}_{M1} & \hat{S}_{M2} & \cdots & \hat{S}_{MM} \end{bmatrix} \quad ...(2.41)$$

เมื่อได้ค่าประมาณของเมตริก S ในสมการที่ (2.41) แล้ว นำไปแทนค่าสมการที่ (2.38) เพื่อใช้ในการแปลงรูปข้อมูลในสมการที่ (2.35) แล้วประมาณค่าโดยวิธีการแบบ Seemingly Unrelated Regression แบบธรรมดา จะได้แบบจำลองส่วนประกอบตัวคลาดเคลื่อนจากอิทธิพลของข้อมูลช่วงเวลาที่มีการกระจายเชิงสุ่ม

2.5 การทดสอบสมมติฐานเพื่อเลือกแบบจำลอง

การทดสอบสมมติฐานอีกอย่างหนึ่งที่น่าสนใจที่จะกล่าวถึงในส่วนนี้ เป็นการทดสอบสมมติฐานที่ประยุกต์ขึ้นใช้ในการเลือกใช้แบบจำลองว่าจะใช้แบบจำลองแบบ Fixed Effect หรือแบบจำลองแบบ Random Effect ในการประมาณค่าระบบสมการ SUR ซึ่งมีลักษณะทั่วไปดังนี้

$$y_{it,j} = X_{it,j}\beta_j + \lambda_{t,j} + \varepsilon_{it,j}$$

เมื่อค่าของ $\lambda_{t,j}$ ในสมมติฐานแรกถูกกำหนดให้คงที่ และสมมติฐานที่สองมีค่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ถ้าต้องการเลือกสมมติฐานทั้งสองอย่างแน่ชัด เพื่อใช้แบบจำลองในสมมติฐานใดสมมติฐานหนึ่งในการประมาณค่าได้อย่างมีนัยสำคัญ การเลือกจำเป็นต้องพิจารณาโดยไม่คำนึงถึงปัญหา ค่าของ $\lambda_{t,j}$ กับค่าของ $X_{it,j}$ มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ เนื่องจากการเลือกแบบจำลองต้องอาศัยความสัมพันธ์ของค่า $\lambda_{t,j}$ กับค่าของ $X_{it,j}$ เป็นเครื่องวัดในการเลือกแบบจำลอง จากการศึกษาของ Hausman (1978)

ซึ่งการทดสอบสมมติฐานนี้ต้องการทดสอบว่าค่าของ $\lambda_{t,j}$ กับค่าของ $X_{it,j}$ มีความสัมพันธ์กันหรือไม่เพื่อใช้ในการเลือกแบบจำลอง ภายใต้สมมติฐานหลักว่าค่าของ $\lambda_{t,j}$ ไม่มีความ

สัมพันธ์กับตัวแปรอิสระ $X_{it,j}$ สมมติฐานรองว่าค่าของ $\lambda_{t,j}$ มีความสัมพันธ์กับตัวแปรอิสระ $X_{it,j}$ สามารถเขียนให้ง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$H_0 : E(\lambda_{t,j} \mid X_{it,j}) = 0$$
$$H_1 : E(\lambda_{t,j} \mid X_{it,j}) \neq 0$$

ซึ่งค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสามารถคำนวณได้จาก

$$m = (\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE})'\left[V(\hat{\beta}_{FE}) - V(\hat{\beta}_{RE})\right]^{-1}(\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE}) \qquad \text{...(2.42)}$$

เมื่อ $\hat{\beta}_{FE}$ เป็นตัวประมาณค่าในแบบจำลองแบบ Fixed Effect $\hat{\beta}_{RE}$ เป็นตัวประมาณค่าในแบบจำลองแบบ Random Effect $V(\hat{\beta}_{FE})$ เป็นค่าประมาณของเมตริกความแปรปรวนร่วมของค่าประมาณสัมประสิทธิ์ (Coefficient Covariance Matrix) ในแบบจำลองแบบ Fixed Effect ส่วนค่าของ $V(\hat{\beta}_{RE})$ เป็นค่าประมาณของเมตริกความแปรปรวนร่วมของค่าประมาณสัมประสิทธิ์ในแบบจำลองแบบ Random Effect ถ้าหากว่าค่าของ $\lambda_{t,j}$ มีความสัมพันธ์กับตัวแปรอิสระ $X_{it,j}$ หมายความว่า ตัวประมาณค่าแบบจำลองแบบ Random Effect มีความเอนเอียง และไม่มีนัยสำคัญกับแบบจำลอง ดังนั้นตัวประมาณค่าแบบจำลองแบบ Fixed Effect จะให้ค่าที่ไม่เอนเอียง และมีนัยสำคัญกับแบบจำลองมากกว่า ถ้าหากว่าค่าของ $\lambda_{t,j}$ ไม่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรอิสระ $X_{it,j}$ หมายความว่า ตัวประมาณค่าแบบจำลองแบบ Random Effect ไม่มีความเอนเอียง และมีนัยสำคัญกับแบบจำลอง ดังนั้น ตัวประมาณค่าแบบจำลองแบบ Fixed Effect จะให้ค่าที่เอนเอียง และไม่มีนัยสำคัญกับแบบจำลองเลย ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบนี้มีการกระจายแบบ Chi-square โดยมีระดับความอิสระเท่ากับ k โดยที่ k เป็นจำนวนพารามิเตอร์