ผลของสนามโน้มถ่วงต่อการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทร

นายเอกลักษณ์ จันเทร์มะ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ทางทะเล ภาควิชาวิทยาศาสตร์ทางทะเล
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2553
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

EFFECTS OF GRAVITATIONAL FIELD ON THE FLOW OF OCEAN CURRENT

Mr. Eakluck Chandrema

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Marine Science

Department of Marine Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2010

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของสนามโน้มถ่วงต่อการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทร
โดย	นาย เอกลักษณ์ จันเทร์มะ
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์ทางทะเล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ โศจิศุภร

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. เจริญ นิติธรรมยง)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ โศจิศุภร)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ปัทมา สิงหรักษ์)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกลักษณ์ จันเทร์มะ : ผลของสนามโน้มถ่วงต่อการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทร. (EFFECTS OF GRAVITATIONAL FIELD ON THE FLOW OF OCEAN CURRENT) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.ปราโมทย์ โศจิศุภร, 93 หน้า.

งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการศึกษาอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกในเชิงทฤษฎีที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงปริภูมิเวลา 4 มิติ ซึ่งมีผลต่อการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทรจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปแทนกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันที่เป็นพื้นฐานสมการเนเวียร์–สโตกส์บนปริภูมิเวลา 4 มิติแบบระบบยูคลิด โดยเริ่มต้นนั้นพิจารณาจากเคอร์เมทริกและพบว่าค่ากำลังสองของโมเมนตัมเชิงมุมต่อมวลของโลกมีค่าประมาณ 10^{-13} หรือเรียกว่าการหมุนของเคอร์แบบช้า ดังนั้นจึงลดรูปเมทริกเทนเซอร์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปชวอสชายด์เมทริกเพื่อนำไปคำนวณสมการจีโอเดสิก และผลการคำนวณค่ารัศมีชวอสชายด์ของโลกมีค่าประมาณ $9\times10^{-3}\,m$ หรือสามารถจัดสนามแรงโน้มถ่วงของโลกเป็นสนามแบบอ่อน พร้อมทั้งความเร็วของกระแสน้ำมีค่าน้อยกว่าความเร็วแสง จึงได้สมการจีโอเดสิกที่อยู่ในรูปแบบสมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน รวมทั้งจากสมการเนเวียร์–สโตกส์บนปริภูมิเวลา 4 มิติแบบนอกระบบยูคลิด เมื่อคำนวณค่าริชชี่เทนเซอร์แรงค์ 2 พบว่ามีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จึงทำให้สมการเนเวียร์-สโตกส์บนปริภูมิเวลา 4 มิติแบบนอกระบบยูคลิดจึงถูกลดรูปได้สมการเนเวียร์–สโตกส์บนปริภูมิเวลา 4 มิติแบบระบบยูคลิด

ดังนั้นอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงปริภูมิเวลา 4 มิติน้อยมาก เนื่องจากการหมุนของโลกจัดอยู่ในแบบการหมุนของเคอร์แบบช้าและอิทธิพลสนามโน้มถ่วงของโลกจัดเป็นสนามแบบอ่อน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิทยาศาสตร์ทางทะเล ลายมือชื่อนิสิต เอกลักษณ์ จันเทร์มะ
สาขาวิชา วิทยาศาสตร์ทางทะเล ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2553

#5072584423 : MAJOR MARINE SCIENCE

KEYWORDS : General Relativity/ Gravitational/ Ocean current

EAKLUCK CHANDREMA : EFFECTS OF GRAVITATIONAL FIELD ON THE FLOW OF OCEAN CURRENT. ADVISOR : ASST.PROF.PRAMOT SOJISUPORN, Ph.D., 93 pp.

This research studies the theoretical influence of the earth's gravitational and rotation to the change in space and time. The flow of the ocean current will be described using the general relativity theory instead of the Newton's laws of motion which is based on the Navier-Stokes equation in the Euclidean space. First, Kerr matrix is determined. The square of the angular momentum of the earth's mass was found to be about 10^{-13} which identified the Kerr matrix as slow Kerr. With slow Kerr, matrix tensor in the geodesic equation can be reduced to the Schwarzschild matrix. The radius of the earth's Schwarzschild was found to be about $9\times10^{-3}\,m$ which identified the gravitation field as weak field. Because the ocean current speed is many orders less than the speed of light, therefore, the geodesic equation can be reduced to the Newton's equation of motion. (or the Navier-Stokes equation) in non-Euclidean space. And when the Ricci tensor values were found to be approximately zero, then the Navier-Stokes equation in non-Euclidian space can be reduced to the Navier-Stokes equation in the Euclidean space.

Therefore, the presence of the earth's gravitational and rotation do not have the effect on the four-dimensional space and time because the Earth's rotation is rather slow and the earth's of gravitational field is rather weak.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department : Marine Science	Student's Signature Eakluck Chandrema
Field of Study : Marine Science	Advisor's Signature Pramot Sojisy
Academic Year : 2010	

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาที่อบรมเลี้ยงดูห่วงใยสุขภาพ เอาใจใส่ทุกด้านของชีวิต รวมทั้งให้ความรู้ จนสำเร็จการศึกษา

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ โศจิศุภร ที่เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาและให้คำแนะนำต่างๆในการวิจัย รวมถึงช่วยตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. เจริญ นิติธรรมยง อาจารย์ ดร. ปัทมา สิงหรักษ์ สำหรับคำแนะนำองค์ความรู้ในด้านต่างๆในการวิจัย และร่วมเป็นประธานและกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน รองศาสตราจารย์ อรุณี อินทศร อาจารย์ ดร. สุพจน์ มุศิริ และคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่ปลูกฝังแนวความคิดปรัชญาที่สำคัญทางวิทยาศาสตร์จนได้เห็นความงดงามของวิชาฟิสิกส์ รวมถึงคอยตักเตือนและให้คำปรึกษาในหลายๆด้าน จึงทำให้เกิดแรงบันดาลใจให้กลับมาทำงานวิจัยจนสำเร็จลุล่วง

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รัฐชาติ มงคลนาวิน ที่ช่วยเหลือด้านทุนและให้โอกาสในการทำงานวิจัย รวมถึงสร้างแรงบันดาลใจให้เกิดความรักในงานวิจัยทางวิทยาศาสตร์

ขอขอบคุณ พี่น้องและบุคลากรทุกท่านในภาควิชาวิทยาศาสตร์ทางทะเล คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่คอยสอบถามให้ความช่วยเหลือทุกๆด้าน ตลอดจนให้กำลังใจในการทำงานซึ่งกันและกัน

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณบรรพบุรุษชาวไทยทุกท่านที่ร่วมกันปกป้องประเทศไทย จนสามารถสืบสานมรดกทางวัฒนธรรมและตัวอักษรภาษาไทยที่สวยงามมาจนถึงทุกวันนี้ ซึ่งทำให้ข้าพเจ้าสามารถเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นภาษาไทยได้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

หน้า

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

แรงโน้มถ่วง (gravity) หรือ ความโน้มถ่วง (Gravitation) ในทางฟิสิกส์จัดเป็นหนึ่งในสี่แรงอันตรกิริยาหลักในธรรมชาติ (แรงแม่เหล็กไฟฟ้า, แรงนิวเคลียร์แบบเข้ม แรงนิวเคลียร์แบบอ่อน และแรงโน้มถ่วง) และแรงโน้มถ่วงมีค่าน้อยสุดในบรรดาแรงทั้ง 4 ชนิด อย่างไรก็ตามแรงโน้มถ่วงมีอิทธิพลต่อปรากฏการณ์ต่างๆบนโลกและชีวิตประจำวันมากมาย เช่น การไหลของมวลน้ำในมหาสมุทร การเกิดปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลงในแต่ละพื้นที่ การไหลเวียนของมวลอากาศ การเกิดพลาสม่าบริเวณขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้ เป็นต้น การศึกษาอิทธิพลแรงโน้มถ่วงเชิงทฤษฎีนั้นได้ดำเนินการอย่างต่อเนื่องตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน โดยอาศัยองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ที่ถูกพัฒนาในแต่ละยุคสมัยเพื่อหาคำตอบจากสมมติฐานที่ตั้งไว้ จนกระทั่งในปัจจุบันนี้การศึกษาอิทธิพลของความโน้มถ่วงแบ่งออกเป็น 2 ศาสตร์ คือ กลศาสตร์นิวตัน (Newton,1687) และทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (General relativity, 1916) โดยทั้ง 2 ศาสตร์มีแนวคิดและสมมติฐานการอธิบายความโน้มถ่วงที่แตกต่างกัน ด้วยสาเหตุจากการพัฒนาองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างรวดเร็วตั้งแต่ศตวรรษที่ 19 นั้นมีอิทธิพลต่อการพัฒนาองค์ความรู้สาขาฟิสิกส์ยุคใหม่ด้วยเช่นกัน

เดิมการศึกษาการไหลของมวลน้ำในมหาสมุทรภายใต้อิทธิพลของสนามโน้มถ่วงของโลกในทางสมุทรศาสตร์นั้นอธิบายได้จากสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ที่ประยุกต์จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton) สำหรับของไหล (Newtonian fluid) ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของของไหลภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลกบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบสัมบูรณ์ (absolute space and time) บนพื้นฐานเรขาคณิตแบบยูคลิดเดียน (Euclidean geometry) เพื่อระบุตำแหน่งต่างๆของของไหล โดยไม่แสดงความสัมพันธ์ของสนามโน้มถ่วงที่มีผลต่อปริภูมิ 3 มิติ-เวลาของของไหล

โดยพื้นฐานสมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นและจัดเป็นสมการที่สำคัญที่สุดในทางคณิตศาสตร์เพราะได้ถูกประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในหลากหลายสาขา แต่ในปัจจุบันการคำนวณคำตอบของสมการดังกล่าวไม่สามารถใช้ระบุฟังก์ชั่นตำแหน่งที่แม่นยำได้แต่สามารถอธิบายความเร็วของของไหลต่างๆได้ในรูปแบบ“ สนามความเร็ว ”หรือ“ สนามการไหล ” เป็นตัวอธิบายถึงความเร็วของของไหล ณ ตำแหน่งและเวลาที่กำหนด ดังนั้นคำตอบของสมการจึงถูกอธิบายในรูปของเส้นแนวโน้มของตำแหน่งของอนุภาค จึงแตกต่างออกไปจากปรากฏการณ์ที่พบ

ได้ในกลศาสตร์ดั้งเดิมซึ่งที่มีคำตอบที่แน่นอน จึงจำเป็นต้องอาศัยการสร้างแบบจำลองจากคอมพิวเตอร์ในการสร้างเส้นแนวโน้มแทนเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของของไหลในมหาสมุทรภายใต้สนามโน้มถ่วงบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบสัมบูรณ์

ต่อมาในปี ค.ศ. 1916 อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ (Albert Einstein) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้สนามต่างๆที่วัตถุได้รับจากสมการสนาม (Einstein field equations,1916) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเทนเซอร์ ความเค้น-พลังงาน-โมเมนตัม (stress-energy-momentum tensor) หรืออิทธิพลสนามโน้มถ่วงใดๆที่มีผลต่อปริภูมิ 3 มิติ-เวลา (space-time) รอบแหล่งกำเนิดสนามนั้นและเป็นการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุบนเรขาคณิตแบบไรมานเนี่ยน (Riemannian geometry) ซึ่งเป็นเรขาคณิตผิวโค้ง ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปยังแสดงความไม่สัมบูรณ์ของปริภูมิ 4 มิติที่เกิดขึ้นกับวัตถุใดๆที่อยู่ภายใต้อิทธิพลสนามนั้น ดังนั้นจึงเป็นการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุที่แตกต่างจากแนวคิดของนิวตัน

จากความแตกต่างของกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันและทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป จึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจและท้าทายสำหรับผู้วิจัย รวมถึงองค์ความรู้และข้อมูลเกี่ยวกับการศึกษาอิทธิพลของสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกต่อการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทรโดยใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปในปัจจุบันมีน้อยมาก ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าหัวข้อดังกล่าวเพื่อเป็นฐานความรู้ของงานวิจัยในอนาคต

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาและเข้าใจถึงอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกในเชิงทฤษฎีที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงปริภูมิ 3 มิติ-เวลาต่อการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทรจากสมการสนาม

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกเชิงทฤษฎีจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเพื่อการคำนวณหากำลังสองของตัวดำเนินการ ∇ เพื่อวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงของสมการนาเวียร์-สโตกส์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้องค์ความรู้และข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกที่มีผลต่อความไม่สัมบูรณ์ของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาของมวลน้ำในมหาสมุทรจากสมการนาเวียร์-สโตกส์

1.5 องค์ประกอบของวิทยานิพนธ์

การนำเสนองานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ประกอบด้วยเนื้อหาจำนวน 5 บท โดยเริ่มต้นบทที่ 1 บทนำ กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตการศึกษาวิจัย ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย สำหรับบทที่ 2 นอกจากกล่าวถึงเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องแล้ว ยังแสดงให้เห็นถึงการวิวัฒนาการทฤษฎีทางด้านคณิตศาสตร์และฟิสิกส์เบื้องต้นเพื่อให้เกิดความเข้าใจได้ง่ายขึ้น ในส่วนบทที่ 3 กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ และวิธีดำเนินงานวิจัย สำหรับบทที่ 4 ผลการคำนวณ และบทสุดท้ายคือบทที่ 5 เป็นบทที่สรุปผลการคำนวณทั้งหมดเพื่อเป็นแนวทางต่องานวิจัยในอนาคต

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทบทวนวรรณกรรม

ในบทนี้จะนำสนอผลการศึกษาเชิงทฤษฎีทั้งด้านคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาอิทธิพลของสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลก ซึ่งแบ่งออกได้ 2 แบบ คือ 2.1) ฟิสิกส์ยุคเก่า (Classical Physics) และ 2.2) ฟิสิกส์ยุคใหม่ (Modern Physics) เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจภาพรวมของการวิวัฒนาการและความแตกต่างของทฤษฎีทั้ง 2 ก่อนถูกนำไปประยุกต์ใช้กับการอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหล โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.1 ฟิสิกส์ยุคเก่า

เซอร์ ไอแซค นิวตัน [1] แสดงให้เห็นความสอดคล้องระหว่างกฎความโน้มถ่วงของนิวตันกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ของเคปเลอร์ (Kepler's laws, คศ.1609 ถึง 1619) โดยความโน้มถ่วงของนิวตันแปรผันตรงกับมวลและแปรผกผันกับระยะห่างกำลังสองจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆได้เป็นอย่างดีหรือกล่าวได้ว่าวัตถุต่างๆล้วนอยู่ภายใต้กฎการเคลื่อนที่เดียวกัน รวมทั้งสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ต่างๆรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงกลม วงรี พาราโบลาและไฮเปอร์โบลาได้จากกฎการเคลื่อนที่ทั้ง 3 ข้อ

ซึ่งการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุใดๆจากกฎการเคลื่อนที่ 3 ข้อของนิวตันภายใต้สนามโน้มถ่วงนั้น หาได้จากการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ตำแหน่งของวัตถุบนระบบโคออดิเนชั่น (x, y, z) แบบเรขาคณิตของยูคลิด เพื่อคำนวณระยะทางระหว่างจุดสองจุดในแนวเส้นตรงโดยใช้พื้นฐานจากทฤษฎีบทปีทากอรัส (Pythagoras) ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ตำแหน่งจึงถูกสังเกตจากกรอบอ้างอิงของผู้สังเกตเฉื่อยบนปริภูมิ 3 มิติ-มิติเวลาแบบสัมบูรณ์ อย่างไรก็ตามการค้นพบกฎการเคลื่อนที่ 3 ข้อของนิวตันจึงเป็นรากฐานสำคัญต่อวิชากลศาสตร์ดั้งเดิม (Classical Mechanics)

คลาว ลูอิส เนเวียร์ และ จอร์ท การ์เบีย สโตกต์ [2] (Claude-Louis Navier and George Gabriel Stokes,1822) ศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลและอธิบายได้จากสมการนาเวียร์-สโตกส์โดยนำพื้นฐานเรขาคณิตแบบยูคลิดและกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเพื่ออธิบายกลศาสตร์ของของไหลหรือเรียกว่านิวโทเนียลฟลูอิด (Newtonian fluid) โดยกำหนดค่าความหนืดคงที่และค่าความหนาแน่นคงที่รวมกับสมมติฐานเมื่อให้ ความเค้นของของไหลคือผลรวมการกระจายตัวของความ

หนืดและความดัน แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากสมการเนเวียร์–สโตกต์เป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ดังนั้นคำตอบของสมการดังกล่าวจึงอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหลภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกแบบ " สนามความเร็ว " และได้ถูกนำมาประยุกต์เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของกระแสน้ำในมหาสมุทรด้านสมุทรศาสตร์ฟิสิกส์และสาขาอื่นๆ อีกมากมาย

วิลเลียม โรวาน แฮมิลตัน [3] (William Rowan Hamilton, 1835) ศึกษาเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุเชิงทฤษฎีจากตัวแปรปริมาณสเกลล่าร์ (scalar) คือ พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ในเพื่อหาคำตอบจากสมมติฐานการเคลื่อนที่น้อยๆของวัตถุ โดยถ้าวัตถุจะเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B นั้น "วัตถุจะเลือกเส้นทางที่มีค่าน้อยที่สุด" หรือ principle of least action

หลักการแอคชั่นของแฮมิลตัน เป็นอีกหลักการที่ถูกนำมาใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุได้เช่นเดียวกับกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน โดยเฉพาะการพิสูจน์สมการจีโอเดสิก (Geodesic Equation) อย่างไรก็ตามหลักการแอคชั่นของแฮมิลตันนอกจากถูกนำมาอธิบายด้านกลศาสตร์แล้ว ยังสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาสาขาอื่นๆของฟิสิกส์ เช่น ทัศนศาสตร์,สนามแม่เหล็กไฟฟ้า, ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป, ควอนตัม อิเล็กโทไดนามิก (quantum electrodynamics) อื่นๆ

จาโนส์ โบลไย, นิโคไล อิวาโนวิช โลบาเชฟสกี้ และ คาร์ล ฟรีดริด เกาส์ [4] (Janos Bolyai, Nikolai Iwanowich Lobachecsky and Carl Friedrich Gauss) ได้ศึกษาผลรวมของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมมีค่าน้อยกว่า 2 มุมฉากเมื่ออยู่บนปริภูมิแบบไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic) การศึกษาดังกล่าวจัดเป็นเรขาคณิตแบบนอกระบบยูคลิด (non-Euclidian Geometry)

จอร์ด แบร์นฮาร์ด รีมันน์ (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1868) ได้เสนอเรขาคณิตแบบใหม่เรียกว่าเรขาคณิตแบบรีมันน์ (Riemannian Geometry) หรือเรขาคณิตอิลิปติก (Elliptic Geometry) จัดเป็นเรขาคณิตแบบนอกระบบยูคลิด ซึ่งเป็นเรขาคณิตที่ไม่มีเส้นขนานโดยนิยามว่า " ถ้าลากเส้นผ่านจุดที่ไม่อยู่บนเส้นที่กำหนดให้แล้ว จะไม่มีเส้นใดเลยที่ไม่ตัดกับเส้นที่กำหนดให้ " ดังนั้นเมื่อศึกษาผลรวมของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมบนเรขาคณิตแบบรีมันน์พบว่ามีค่ามากกว่า 2 มุมฉาก

เฟลิกซ์ ไคลน์ (Felix Klien, 1871) แบ่งเรขาคณิตได้ 3 แบบ คือ

1) เรขาคณิตแบบ จาโนส์ โบลไย และนิโคไล อิวาโนวิช โลบาเชฟสกี้ หรือ เรียกว่า เรขาคณิตแบบไฮเพอร์โบลิก
2) เรขาคณิตแบบรีมันน์ หรือ เรียกว่า เรขาคณิตแบบอิลิปติก
3) เรขาคณิตแบบยูคลิด หรือ เรียกว่า เรขาคณิตแบบพาราโบลิก

ริชชี่ เคอร์บาสโท และ ลิววี่ ซิวิต้าร์ [5] (Ricci-Curbastro and Levi-Civita,1900) ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงระบบกรอบอ้างอิงโดยพิจารณาองค์ประกอบเมทริกเทนเซอร์ (metric tensor) จากรูปแบบพื้นฐานดั้งเดิม (first fundamental form) เมื่อถูกเปลี่ยนจากระบบโคออดิเนชั่น ($x_1, x_2, x_3, \ldots ,x_n$) หนึ่งไปสู่ระบบโคออดิเนชั่นอื่น ($x'_1, x'_2, x'_3, \ldots ,x'_n$) และได้ผลการศึกษาคือรูปแบบพื้นฐานมีความอินแวเรียนต์ (invariant) ภายใต้การแปลงระบบโคออดิเนชั่น และสามารถอธิบายเรขาคณิตบนผิวโค้งจากเทนเซอร์ความโค้งของริชชี่ (Ricci curvature tensor)

2.2 ฟิสิกส์ยุคใหม่

อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ [6] ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเพื่ออธิบายอิทธิพลของสนามโน้มถ่วงต่อการเปลี่ยนแปลงของปริภูมิ 3 มิติ-เวลา โดยใช้สมมติฐานจากหลักการสมมูล (Principle of Equivalent) และคณิตศาสตร์เทนเซอร์ ในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างเทนเซอร์ ความเค้น-พลังงาน-โมเมนตัม (stress-energy-momentum tensor) ของสนามแรงใดๆที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงปริภูมิ 3 มิติ-เวลา รอบแหล่งกำเนิดสนามนั้นจากสมการสนาม

นอกจากนั้นทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปยังแสดงความไม่สัมบูรณ์ของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาที่เกิดขึ้นเมื่อวัตถุที่อยู่ภายใต้สนามนั้น ดังนั้นจึงเป็นการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุที่แตกต่างจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

คาวล์ ชวอสชาย์ (Karl Schwarzschild, 1916) ศึกษาการเปลี่ยนแปลงเรขาคณิตเชิงทฤษฎีของปริภูมิ 3 มิติ-เวลารอบมวลทรงกลมสถิตจากสมการสนาม ผลการคำนวณพบว่าปริภูมิ 3 มิติ-เวลาบริเวณรอบมวลทรงกลมสถิตเกิดการเปลี่ยนแปลงเมื่อพิจารณาจากชวอสชาย์เมทริก (Schwarzschild metric)

รอย แพททริก เคอร์ (Roy Patrick Kerr,1963) ศึกษาคำตอบแบบที่ 1(first exact solution) ของการเปลี่ยนแปลงเรขาคณิตเชิงทฤษฎีของปริภูมิ 3 มิติ-เวลารอบมวลที่เกิดการหมุนจากสมการสนาม ผลการคำนวณพบว่าปริภูมิ 3 มิติ-เวลาบริเวณรอบมวลทรงกลมที่เกิดการหมุนเกิดการเปลี่ยนแปลงเมื่อพิจารณาจากเคอร์เมทริก (Kerr metric)

เอช ไอ เอ็ม ลิชเทนเนกเจอร์, เอฟ ครอนวาล์ว และ บี มาร์ชฮูน (H. I. M. Lichtenegger, F. Gronwald and B. Mashhoon, 2000) ได้ศึกษาความไม่เท่ากันของเวลาภายใต้อิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกเชิงทฤษฎีจากเคอร์เมทริกและวิเคราะห์ข้อมูลจากดาวเทียม LAGEOS ผลการศึกษาพบว่าการเวลาเดินไม่เท่ากันประมาณ $10^{-7}s$ ต่อการหมุนของโลก 1 รอบ

ดาวเทียมภายใต้โครงการแกรวิตี้พรอบ บี (Gravity Probe B,GP-B) ขององค์การนาซ่า (NASA) ปี ค.ศ. 2005 ได้เก็บข้อมูลเพื่อหาคำตอบการบิดโค้งของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาเนื่องจากสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกเป็นเวลา 50 สัปดาห์ เริ่มตั้งแต่เดือนกันยายน ค.ศ. 2005 โดยวัดการเปลี่ยนแปลงของแกนหมุนของไจโรสโคป (Gyroscope) ที่มีความแม่นยำจำนวน 4 ชิ้นของดาวเทียม ผลการทดลองดังกล่าวทำให้นักฟิสิกส์สามารถตรวจสอบผลกระทบของจีโอเดติก (Geodetic effect) ได้ด้วยความถูกต้องถึง 1% และจากผลการทดลองดังกล่าวได้ยืนยันปรากฏการณ์ Lense-Thirring effect และการบิดโค้งของปริภูมิ 3 มิติ-เวลารอบโลกเนื่องจากสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกตามทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและวิธีดำเนินงานวิจัย

การศึกษาวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาในเชิงทฤษฎีโดยนำทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปมาใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของกระแสน้ำในมหาสมุทรภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลก ดังนั้นในหัวข้อ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 และ 3.6 จึงจำเป็นต้องกล่าวถึงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์และหลักการทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป รวมทั้งสมการที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์เนื่องจากเป็นส่วนสำคัญสำหรับการคำนวณฟังก์ชั่นหรือพารามิเตอร์ต่างๆเพื่อการวิเคราะห์และแปลผลของความหมาย ส่วนหัวข้อ 3.7 จะกล่าวถึงวิธีดำเนินงานวิจัย

ดังนี้ในบทนี้เนื้อหาจึงถูกแบ่งออกเป็น 7 ส่วน โดยเนื้อหาแต่ละส่วนมีความสอดคล้องกันเพื่อให้เกิดความเข้าใจง่ายต่อการนำไปใช้ในบทที่ 4

3.1 การแปลงระบบโคออดิเนต (Transformation of coordinate)

เมื่อกำหนดให้ระบบของผู้สังเกตจากโคออดิเนต $x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3$ และระบบของผู้สังเกตจากโคออดิเนต $x^{0'},\ x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'}$ มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ดังนั้นเราสามารถอธิบายระบบของผู้สังเกตโคออดิเนต $x^{\mu'}$ ในเทอมของระบบของผู้สังเกตโคออดิเนต x^{μ} ได้จากฟังก์ชั่นการแปลง โคออดิเนชั่น (coordinate transformation) ดังนี้

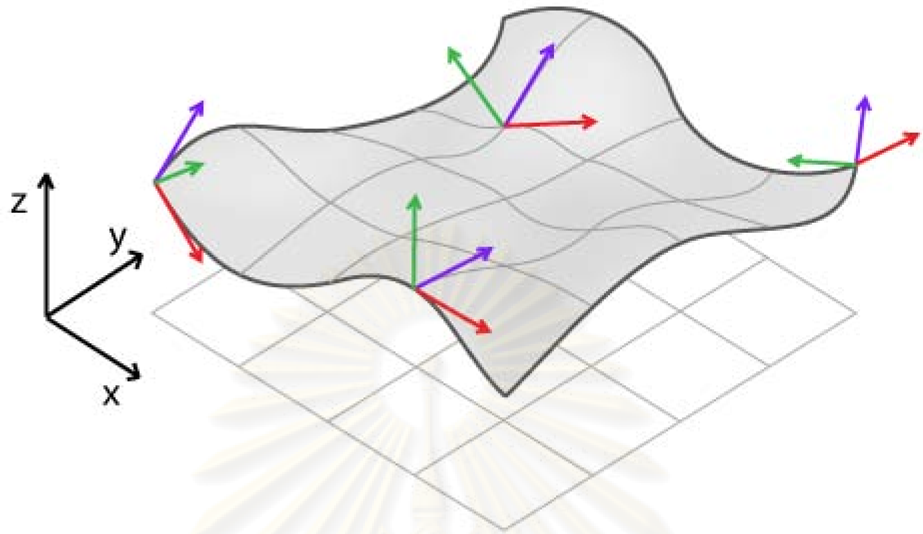
$$X^{\mu'} = f^{\mu}\,(\,x^0, x^1, x^2, x^3\,) \tag{3.1.1}$$

กำหนดให้

$f^{\mu}\,(x^0, x^1, x^2, x^3)$ คือ ฟังก์ชันจำนวนจริงประกอบด้วยตัวแปรอิสระของระบบโคออดิเนต x^{μ}

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และแสดงการคำนวณจาโคเบียน (Jacobian) ของระบบได้ดังนี้



รูป 3.1 รูปตัวอย่างการแปลงระบบโคออดิเนตระบบโคออดิเนต 3 มิติแบบโค้ง และโคออดิเนต 2 มิติแบบราบเรียบ

(http://acko.net/blog/making-worlds-3-thats-no-moon)

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^0}{\partial x^0} & \frac{\partial f^1}{\partial x^0} & \frac{\partial f^2}{\partial x^0} & \frac{\partial f^3}{\partial x^0} \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^3} & \frac{\partial f^1}{\partial x^3} & \frac{\partial f^2}{\partial x^3} & \frac{\partial f^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \tag{3.1.2}$$

หรืออธิบายระบบของผู้สังเกตจากโคออดิเนชั่น x^{μ} ในเทอมของระบบของผู้สังเกตจากโคออดิเนด $x^{\mu'}$ ได้จากฟังก์ชั่นการแปลงระบบแบบผันกลับ ดังนี้

$$X^{\mu} = g^{\mu}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \tag{3.1.3}$$

กำหนดให้

$g^{\mu}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ คือ ฟังก์ชันจำนวนจริงประกอบด้วยตัวแปรอิสระของระบบของผู้สังเกตจากโคออดิเนชั่น $x^{\mu'}$

ทุกๆจุดของปริภูมิแบบรีมันน์นั้นสามารถกำหนดได้จากการพิจารณาอนุพันธ์ dx^{μ} ของโคออดิเนด 4 มิติจากระบบของผู้สังเกตจาก x^{μ} และในระบบโคออดิเนด $x^{\mu'}$ พิจารณาจากอนุพันธ์ $dx^{\mu'}$ ของโคออดิเนด 4 มิติจากระบบของผู้สังเกตจาก $x^{\mu'}$ ดังนั้นถ้าการแปลงระบบโคออดิเนดของ 2 ระบบ x^{μ} และ $x^{\mu'}$ เป็นไปตามสมการ (3.1.1) และสมการ (3.1.3) แล้วระบบทั้ง 2 จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$dx^{\mu}{}' = \frac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^{\vartheta}} dx^{\vartheta} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\vartheta}} dx^{\vartheta} \tag{3.1.4}$$

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\vartheta}{}'} dx^{\vartheta}{}' = \frac{\partial g^{\mu}}{\partial x^{\vartheta}{}'} dx^{\vartheta}{}' \tag{3.1.5}$$

μ, ϑ คือสัญลักษณ์ของตัวแปรในระบบโคออดิเนดแทนด้วย 0, 1, 2, 3 หรือเรียกว่า Einstein summation และแสดงความสัมพันธ์การแปลงระบบโคออดิเนดหนึ่งไปยังระบบโคออดิเนดอื่น จึงได้

$$\left|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}{}'}\right|\left|\frac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^{\beta}}\right| = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{3.1.6}$$

$$\left|\frac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^{\alpha}}\right|\left|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\vartheta}{}'}\right| = \delta^{\mu}_{\vartheta} \tag{3.1.7}$$

กำหนดให้

δ^{α}_{β} คือ ฟังก์ชั่นโครน็อกเกอร์ (Kronecker delta)

และเมื่อพิจารณา $\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}$ ในรูปเมทริกซ์ ดังนั้น $\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}$ จึงเป็นอินเวิดเมทริกซ์และได้ความสัมพันธ์ของระบบทั้ง 2 แบบจาโคเบียน ดังนี้

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x^{\alpha}}\right|\left|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'}\right| = 1 \tag{3.1.8}$$

3.2 เมทริกเทนเซอร์ (Metric Tensor)

เมทริกเทนเซอร์ ($g_{\mu\upsilon}(x)$) เป็นฟังก์ชั่นที่อธิบายลักษณะปริภูมิ 3 มิติ-เวลาของระบบโคออดิเนตและการหาระยะทางกำลังสองระหว่างจุด 2 จุดบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบรีมันน์ (Riemannian spacetime) นั้นสามารถอธิบายในเทอมของเมทริกเทนเซอร์ได้จากสมการผลต่างกำลังสอง ได้ดังนี้

$$ds^2 = g_{\mu\upsilon}(x)dx^{\mu}dx^{\upsilon} \tag{3.2.1}$$

และเมื่อพิจารณาระยะทางกำลังสองระหว่างจุด 2 จุดในปริภูมิ 3 มิติแบบยูคลิดบนพิกัดคาร์ทีเซี่ยน ได้สมการดังนี้ ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.2.2}$$

หรือพิจารณาระยะทางกำลังสองระหว่างจุด 2 จุดบนปริภูมิ 4 มิติของมิลคลาวสกี้แบบราบเรียบบนพิกัดคาร์ทีเซียน ($x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$) ได้สมการดังนี้

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.2.3}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กำหนดให้

c คือ ความเร็วแสง $3.0\times10^{8}\ {}^{m}\!/_{s}$

จากสมการ (3.2.2) และ (3.2.3) อธิบายระยะทางกำลังสองระหว่างจุด 2 จุดบนปริภูมิของยูคลิดเดี่ยนและปริภูมิของมิลคลาวสกี้แบบราบเรียบ แตกต่างกับสมการ (3.2.1) ที่อธิบายระยะทางกำลังสองระหว่างจุด 2 จุด โดยพิจารณาเมทริกเทนเซอร์ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของปริภูมิของระบบโคออดิเนดหรือเรียกว่าปริภูมิของรีมันน์

ความสัมพันธ์ระหว่างโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ (Covariant metric Tensor) ($g_{\mu\upsilon}$) และคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ (contravariant metric tensor) ($g^{\mu\nu}$) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$g^{\mu\nu}=\frac{\Delta^{\mu\nu}}{g} \tag{3.2.4}$$

กำหนดให้

g คือ ดีเทอมิแนนท์ (determinant) ของ $g_{\mu\nu}$

$\Delta^{\mu\nu}$ คือ โคแฟคเตอร์ (cofactor) ของ $g_{\mu\nu}$

จากสมการ (3.2.4) ได้ความสัมพันธ์ระหว่างโคแวเรียนและคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์

$$g_{\alpha\rho}g^{\rho\beta}=\delta_{\alpha}^{\beta} \tag{3.2.5}$$

3.3 จีโอเดสิก (Geodesic)

เส้นที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนปริภูมิในทางเรขาคณิตเรียกว่า เส้นจีโอเดสิก โดยเส้นจีโอเดสิกนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะเรขาคณิตของปริภูมิบนพื้นผิวระหว่างจุด 2 จุดและอธิบายได้จากสมการเชิงอนุพันธ์หรือ เรียกว่า สมการจีโอเดสิก (geodesic equation) จากการพิจารณาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดในกรณีของผิวทรงกลมนั้นไม่สามารถบอกระยะโดยใช้เส้นตรงได้ ดังนั้นการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วัดระยะจะต้องพิจารณาตามแนวเส้นจีโอเดสิกที่อยู่ระหว่างจุด 2 จุด หรือพิสูจน์โดยใช้แคลคูลัสของการแปรผัน (variational calculus) และหลักการแอคชั่น ดังนี้

$$\delta I = \delta \int L ds = 0 \tag{3.3.1}$$

$$\delta \int L ds = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial (dx^{\mu}/ds)} \delta \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \right) \right] ds \tag{3.3.2}$$

กำหนดให้

L คือ ลากรานจ์เจี่ยน , $L = (g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds})^{\frac{1}{2}}$

จากสมการ (3.3.2) ในเทอมที่ 2 เขียนใหม่ในรูปผลต่างอนุพันธ์

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^{\mu}/ds)} \delta x^{\mu} \right] - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^{\mu}/ds)} \right] \delta x^{\mu} \tag{3.3.3}$$

กำหนดให้

$$\frac{d(\delta x^{\mu})}{ds} = \frac{\delta (dx^{\mu})}{ds}$$

แทนลงในสมการข้างต้นและใช้หลักแคลคูลัสของการแปรผันได้รูปแบบดังนี้

$$\delta \int L ds = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial (dx^{\mu}/ds)} \right] \delta x^{\mu} ds = 0 \tag{3.3.4}$$

จากสมการ (3.3.4) จึงได้สมการลากรานจ์ (Lagrange equation)

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^{\mu}/ds)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{3.3.5}$$

การอธิบายสมการจีโอเดสิก ทำได้โดยใช้ลากรานจ์เจี่ยน (L) แทนลงในสมการลากา-
-รานจ์ ดังนั้นในเทอมแรกของสมการ (3.3.5) จึงได้

$$\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^{\mu}/ds)}\right)=\left(g_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\right)^{-1/2}g_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{ds}=g_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{ds} \tag{3.3.6}$$

เมื่อพิจารณาจาการคำนวณแอฟฟายพารามิเตอร์ (affine parameter) ดังนั้นจึงกำหนดให้

$$ds^{2}=g_{\rho\sigma}dx^{\rho}dx^{\sigma}$$

$$g_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}=1$$

ดังนั้นเทอมแรกของสมการ (3.3.6) จึงเขียนใหม่ได้ ดังนี้

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^{\mu}/ds)}\right)=g_{\mu\alpha}\frac{d^{2}x^{\alpha}}{ds^{2}}+\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} \tag{3.3.7}$$

เทอม 2 ของสมการ (3.3.6) คือ

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}\right)=\frac{1}{2}\left(g_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\right)^{-1/2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}$$

(3.3.8)

รวมเทอมทั้งสองแทนลงในสมการลาการานจ์ (3.3.5)

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^{2}x^{\alpha}}{ds^{2}}+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0 \tag{3.3.9}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จาก
$$2\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\alpha}}{ds}\frac{\partial x^{\beta}}{ds}=\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} \tag{3.3.10}$$

แทนลงในสมการ (3.3.9) จึงได้สมการลาการานจ์ สำหรับอธิบายสมการจีโอเดสิก ดังนี้

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}+\Gamma_{\mu\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0 \tag{3.3.11}$$

กำหนดให้

$\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ คือ สัญลักษณ์คริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 1 (the Christoffel symbol of the first kind)

เมื่อคูณ $g^{\rho\mu}$ ในสมการ (3.3.11) จึงได้สมการจีโอเดสิกรูปแบบปกติ (standard form) ดังนี้

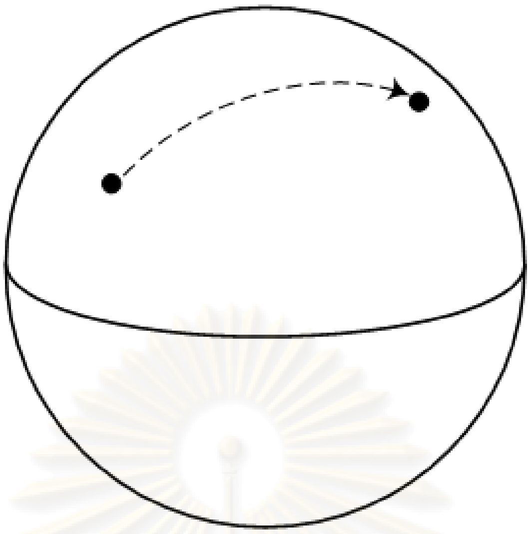
$$\frac{d^2x^{\rho}}{ds^2}+\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0 \tag{3.3.12}$$

กำหนดให้

$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ คือ สัญลักษณ์คริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 (the Christoffel symbol of the second kind)

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{3.3.13}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.2 รูปตัวอย่างแสดงเส้นจีโอเดสิกบนพื้นผิวทรงกลม
(http://blogs.msdn.com/b/isaac/archive/2008/05/03/edges-on-the-globe.aspx)

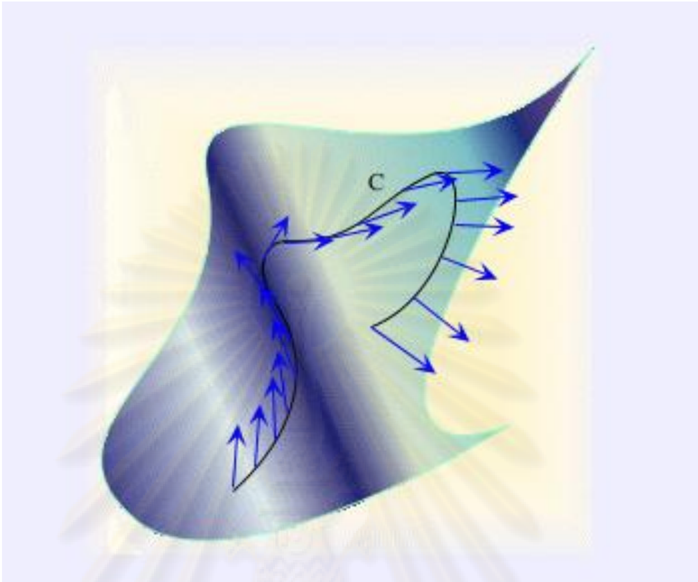
สมการจีโอเดสิก (รูปที่ 3.2) ถูกนำมาอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลกนั้นขึ้นอยู่กับเมทริกเทนเซอร์ ซึ่งแสดงให้เห็นความแตกต่างกันของผู้สังเกตใดๆเนื่องจากอิทธิพลสนามโน้มถ่วงของโลก ดังนั้นแนวคิดจึงแตกต่างจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันที่ไม่ได้พิจารณาเมทริกเทนเซอร์แต่พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุใดๆภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลกนั้นเกิดจากเวกเตอร์ของแรงโน้มถ่วงที่กระทำกับวัตถุทั้ง 2 โดยขนาดของแรงโน้มถ่วงนั้นแปรผกผันกับระยะทางกำลังสองและวัตถุดังกล่าวได้เคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วงบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาที่สัมบูรณ์โดยใช้ยูคลิดเดี่ยนเมทริกเทนเซอร์ ในการพิจารณาคำนวณหาระยะทางของวัตถุระหว่างจุดสองจุดในแนวเส้นตรงซึ่งมีพื้นฐานจากทฤษฎีบทปีทากอรัส ดังนั้นกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจึงเป็นการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุใดๆบนปริภูมิ 3 มิติแบบเรขาคณิตของยูคลิดเดี่ยน

แต่อย่างไรก็ตามสมการจีโอเดสิกนั้นสามารถลดรูปโดยอาศัยการประมาณทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของวัตุเหมือนกับกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ได้เช่นกัน

3.4 เทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์ (The Riemann Curvature Tensor)

หัวข้อนี้เป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในการอธิบายความโค้งของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาจากคณิตศาสตร์เทนเซอร์ หรือเรียกว่า เทนเซอร์ความโค้ง (curvature tensor) ซึ่งเทนเซอร์ความโค้ง

ไม่ได้มีความสำคัญแค่ในทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายเรขาคณิตแบบโค้งของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาเท่านั้น แต่ในฟังก์ชั่นองค์ประกอบของเทนเซอร์ความโค้งยังสามารถอธิบายลักษณะทางกายภาพของความโน้มถ่วงที่สำคัญได้อย่างดี (รูปที่ 3.3)



รูปที่ 3.3 รูปตัวอย่างเวกเตอร์สนามเคลื่อนที่ขนานคู่กับผิวโค้งตามเส้นทาง **c**
(http://people.hofstra.edu/stefan_waner/diff_geom/Sec10.html)

ซึ่งสมการเทนเซอร์ความโค้งขึ้นอยู่กับตัวแปรคริสตอฟเฟิลรูปแบบที่ 2 $(\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta})$ จึงอธิบายสมการดังนี้

$$R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\beta\delta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\gamma\delta} \qquad (3.4.1)$$

$R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma}$ คือ เทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์ และ $R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma}$ สามารถเปลี่ยนรูปจากเทนเซอร์แรงค์ 4 เป็นริชชี่เทนเซอร์แรงค์ 2 ได้จากข้อกำหนด ดังนี้

$$R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\upsilon\beta} = R_{\alpha\beta} \qquad (3.4.2)$$

ดังนั้นจึงได้ริชชี่เทนเซอร์ ดังนี้

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} \qquad (3.4.2)$$

และคำนวณปริมาณสเกลล่าความโค้งของริชชี่ (Ricci scalar curvature) ได้จาก

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^{\alpha}_{\alpha} = R \qquad (3.4.3)$$

สมการ (3.4.4) เรียกว่า เทนเซอร์ความโค้งของไอน์สไตน์ (Einstein curvature tensor)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \qquad (3.4.4)$$

จากสมการ (3.4.1) , (3.4.2) และ (3.4.4) ไม่ได้จำกัดเฉพาะอธิบายความโค้งของปริภูมิ 4 มิติเพราะเทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์ ($R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma}$) สามารถอธิบายความโค้งของปริภูมิ n มิติได้

3.5 สมการสนาม (Einstein field equation)

จากความเข้าใจสนามโน้มถ่วงของนิวตันได้อธิบายสนามโน้มถ่วงในรูปของแรงโน้มถ่วงที่ถูกสังเกตจากผู้สังเกตบนระบบอ้างอิงใดๆแบบยูคลิเดี่ยน ซึ่งขนาดของแรงโน้มถ่วงมีค่าแปรผกผันกับระยะทางกำลังสอง จากแนวคิดดังกล่าวเมื่อมีผู้สังเกตใดๆอยู่ภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลกแต่มีตำแหน่งต่างกันจะได้รับขนาดของแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อผู้สังเกตต่างกัน หรือกล่าวได้ว่าปริภูมิ 3 มิติ – เวลาของผู้สังเกตใดๆไม่มีการเปลี่ยนแปลงจึงถูกเรียกว่า ปริภูมิ 3 มิติ-เวลาสัมบูรณ์

เนื่องจากกฎสนามโน้มถ่วงของนิวตันไม่ได้พิจารณาอิทธิพลสนามโน้มถ่วงที่มีผลต่อปริภูมิ 3 มิติ-เวลาของผู้สังเกตใดๆ และต่อมาไอน์สไตน์เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพกรณีพิเศษ (special relativity, 1905) เพื่อแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาระหว่างกรอบอ้างอิง x^0, x^1, x^2, x^3 และกรอบอ้างอิง $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธกันและกัน อธิบายจากหลักการแปลงระบบโคออดิเนต (หัวข้อ 3.1) ที่มีสมบัติอินแวเรียน์ คือ การแปลงไม่ขึ้นกับระบบโคออดิเนตใดๆ

จากแนวคิดทฤษฎีสัมพัทธภาพกรณีพิเศษ จึงเป็นจุดเริ่มต้นของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป โดยไอน์สไตน์อธิบายความสัมพันธ์ของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาของผู้สังเกตใดๆที่อยู่ภายใต้อิทธิพลสนามโน้มถ่วงของโลก โดยใช้สมมติฐานหลักความสมมูล (equivalence principle) ดังนี้ “เมื่อทำการทดลองในกรอบอ้างอิงที่ไม่ใช่กรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง ซึ่งมีความเร่งคงตัว (a) และทำการทดลองในอีกกรอบหนึ่ง ซึ่งเป็น กรอบอ้างอิงเฉื่อยที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามโน้มถ่วงคงตัว (g) การทดลองดังกล่าวนี้ไม่อาจบอกความแตกต่างของผลการทดลองของกรอบอ้างอิง ทั้งสองกรอบดังกล่าวนี้ได้เลย” ดังนั้นเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว (a) ของกรอบอ้างอิง 1 นั้นให้สอดคล้องกับสมมติฐานดังกล่าวดังนั้นปริภูมิ 4 มิติของกรอบอ้างอิง 1 จึงจำเป็นต้องสัมพันธ์กับสนามโน้มถ่วงโลก โดยพิจารณาจากหลักแอคชั่นอินทีกรัล (Action integral) ดังนี้

$$\delta I = \delta\int \sqrt{-g}\,(R - 2\kappa L_F)\,d^4x = 0 \tag{3.5.1}$$

กำหนดให้

L_F คือ ฟังก์ชั่นลากรานเจี่ยนสำหรับสนามอื่นๆ

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

G คือ ค่าคงที่โน้มถ่วง $G \approx 6.674\times10^{-11}N(m/kg)^2$

เมื่ออินทิเกรทเทอมแรกของสมการ (3.5.1) ได้ ดังนี้

$$\delta\int \sqrt{-g}\,R\,d^4x = \int \sqrt{-g}\,(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\,\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{3.5.2}$$

และอินทิเกรทเทอมสองของสมการ (3.5.1) ได้ ดังนี้

$$\delta\int \sqrt{-g}\,L_F\,d^4x = \int\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right]\right\}\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{3.5.3}$$

จากสมการ (3.5.3) กำหนดให้ พลังงาน-โมเมนตัมเทนเซอร์ คือ

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right]\right\} \tag{3.5.4}$$

นำสมการ (3.5.4) แทนในสมการ (3.5.3) และเขียนใหม่ได้

$$\delta\int\sqrt{-g}L_F d^4x = \frac{1}{2}\int\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{3.5.5}$$

นำสมการ (3.5.2) และ (3.5.5) แทนลงในสมการ (3.5.1) ได้ดังนี้

$$\delta I = \int\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \kappa T_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}d^4x = 0 \tag{3.5.6}$$

จากสมการ (3.5.6) จึงได้สมการสนามโน้มถ่วง (Einstein gravitational field equations) ดังนี้

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.5.7}$$

3.6 รูปแบบเมทริกเทนเซอร์ที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงเมทริกเทนเซอร์ที่เป็นคำตอบจากสมการสนาม (สมการ (3.5.7)) ในแบบต่างๆ และเกี่ยวข้องกับการศึกษา โดยแบ่งได้ 3 หัวข้อย่อยดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.6.1 ชวอสชาย์ เมทริก

คาวล์ ชวอสชาย์ ศึกษาเชิงทฤษฎีของสนามสถิตที่ถูกสร้างจากมวลทรงกลมสมมาตรสถิต เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆภายใต้สนามดังกล่าว ผลการศึกษาได้พบคำตอบและเขียนในรูปเส้นองค์ประกอบ (line element) บนพิกัดทรงกลม (t, r, θ, φ) ได้ดังนี้

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (1-\frac{r_s}{r})c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.6.1.1)$$

กำหนดให้

τ คือ พร๊อบเพอร์ทาม (proper time) เวลาของวัตถุที่มีการเคลื่อนที่

c คือ ความเร็วแสง

t คือ ระยะตามแนวพิกัดทิศทางของเวลา

r คือ ระยะตามแนวพิกัดทิศทางของรัศมี

θ คือ ระยะตามแนวพิกัดทิศทางของแลตติจูด

φ คือ ระยะตามแนวพิกัดทิศทางของ ลองติจูล

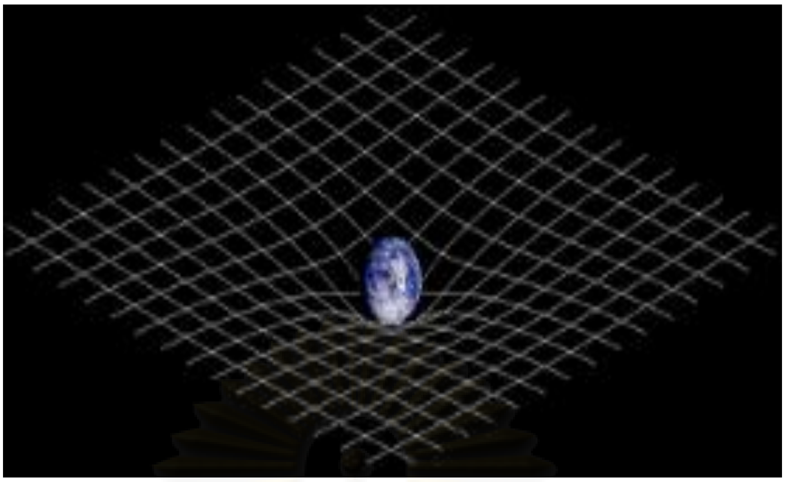
r_s คือ รัศมีชวอสชาย์ มีค่าสัมพันธ์กับมวลของวัตถุ , $r_s = \frac{2GM}{c^2}$

โคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ ($g_{\mu\upsilon}$) และคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ ($g^{\mu\nu}$) สำหรับสนามโน้มถ่วงของทรงกลมสมมาตรสถิต เป็นดังนี้

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.6.1.2)$$

และคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ ($g^{\mu\nu}$) คำนวณได้จากสมการ (3.2.4)

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2\sin^2\theta)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.6.1.3)$$



รูปที่ 3.4 ภาพแบบจำลองสนามสถิตที่ถูกสร้างจากมวลทรงกลมสมมาตรสถิต (http://e-ducation.net/astronomy.htm)

เส้นองค์ประกอบจากสมการ (3.6.1.1) แสดงให้เห็นปริภูมิ 3 มิติ-เวลาถูกบิดโค้ง (รูป 3.4) เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ตามแนวทิศทางรัศมีและถ้าวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะรัศมีเท่ากับรัศมีชวอสชาย์ ($r = r_s$) ปริภูมิ 3 มิติ-เวลาของวัตถุจะหาค่าไม่ได้หรือเกิดจุดภาวะเอกฐาน (singularity) ที่ถูกสร้างจากมวลทรงกลมสมมาตรสถิต

3.6.2 เคอร์ เมทริก

รอย แพททริก เคอร์ ศึกษาเชิงทฤษฎีของสนามโน้มถ่วงที่ถูกสร้างจากมวลทรงกลมสมมาตรหมุนเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆภายใต้สนามดังกล่าว โดยศึกษาและหาคำตอบแม่นตรงแบบที่ 1 (first exact solution) จากสมการเอิร์ล ผลการศึกษาได้พบคำตอบและเขียนในรูปเส้นองค์ประกอบบนพิกัดทรงกลม (t, r, θ, φ) ได้ดังนี้

$$ds^2 = -(1-\frac{r_s r}{\rho^2})dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$+(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2 \sin^2\theta}{\rho^2})\sin^2\theta d\phi^2 - \frac{2r_s r a \sin^2\theta}{\rho^2}cdtd\phi$$

(3.6.2.1)

กำหนดให้

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \tag{3.6.2.2}$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + a^2 \tag{3.6.2.3}$$

$$a = \frac{J}{Mc} \tag{3.6.2.4}$$

a คือ โมเมนตัมเชิงมุมต่อมวล

M คือ มวลของวัตถุหมุน

3.7 สมการเนเวียร์–สโตกต์

สมการเนเวียร์–สโตกต์ เป็นสมการที่อธิบายของไหลที่เคลื่อนที่บนปริภูมิแบบยูคลิดซึ่งถูกประยุกต์มาจากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นที่สัมพันธ์กับปริมาตรของไหล (differential control volume) ผลลัพธ์ของสมการนี้สามารถเขียนได้ในแบบทั่วไปคือสมการการเคลื่อนที่แบบโมเมนตัมโคชี (Cauchy momentum equation of motion) โดยประยุกต์จากกฎข้อที่ 2 นิวตัน และสมการเนเวียร์–สโตกต์เขียนได้ดังนี้

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}\right) = -\vec{\nabla} p + \nabla \cdot \Pi + \vec{f} \tag{3.7.1}$$

กำหนดให้

V คือ ความเร็วของของไหลบนพิกัดใดๆ

ρ คือ ความหนาแน่นของไหล

p คือ สนามความดัน

π คือ เทนเซอร์ความเฉือน (stress tensor rank 2)

f คือ แรงภายนอกที่มากระทำของไหล (body forces per unit volume)

∇ คือ ตัวดำเนินการ (del operator)

3.7 วิธีดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษารูปแบบและขอบเขตของเส้นองค์ประกอบและเมทริกเทนเซอร์จากเคอร์เมทริก (หัวข้อ 3.6.2) เพื่อนำมาศึกษาการเปลี่ยนแปลงของปริภูมิ 4 มิติของโลก

$$ds^2 = -(1-\frac{r_s r}{\rho^2})dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$+(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2 \sin^2\theta}{\rho^2})\sin^2\theta d\phi^2 - \frac{2r_s r a \sin^2\theta}{\rho^2} c\,dt\,d\phi$$

2) นำโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์จากเคอร์เมทริกคำนวณคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ โดยคำนวณได้จากสมการ (3.2.1) และ (3.2.4) เพื่ออธิบายลักษณะปริภูมิ 4 มิติรอบๆ โลก

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}$$

3) นำโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์และคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์จาก 2) มาคำนวณคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 จากสมการ (3.3.13)

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right)$$

4) นำผลคำนวณโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ คอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ และคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 แทนในสมการจีโอเดสิก (3.3.12) เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{ds^2} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

5) จากผลการคำนวณจากข้อ 1) ถึง 3) นำมาศึกษาสมการเนเวียร์–สโตกต์บนปริภูมิ 4 มิติแบบนอกระบบยูคลิด

บทที่ 4

ผลการศึกษาการคำนวณ

4.1) นำเคอร์เมทริกจากสมการ (3.6.2.1) (3.6.2.2) และ(3.6.2.3) เพื่อศึกษาความเปลี่ยนแปลงฟังก์ชั่นเมทิกเทนเซอร์ จากอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกบนพิกัดทรงกลม $(x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi)$ โดยกำหนดให้ (t', r', θ', ϕ') เป็นกรอบอ้างอิงหมุนและ (t, r, θ, ϕ) เป็นกรอบอ้างอิงที่ถูกตรึงในระบบ ซึ่งทั้ง 2 ระบบมีความสัมพัทธ์กันดังนี้

$$dr' = dr, \quad d\theta' = d\theta - \omega dt, \quad d\phi' = d\phi, \quad dt' = dt$$

แปลงระบบพิกัด (t, r, θ, ϕ) เป็น (t', r', θ', ϕ') จึงได้สมการ (4.1.1)

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{r_s r}{\rho^2} + \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}\right] c^2 dt'^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr'^2 + \rho^2 d\theta'^2$$

$$+ \sin^2\theta (r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}) d\phi'^2 + \frac{2\omega\rho^2}{c} c d\theta' dt'^2 - \frac{r r_s a c \sin^2\theta}{\rho^2} d\phi' dt'$$

(4.1.1)

คำนวณโมเมนตัมเชิงมุมต่อมวลของโลกจากสมการ (3.6.2.4)

$$a = \frac{J}{Mc} = \frac{2R^2\omega}{5c}$$

เมื่อพิจารณารัศมีและความเร็วเชิงมุมของโลก

R คือ รัศมีของโลก $6.3 \times 10^6 \, m$

ω คือ ความเร็วเชิงมุมของโลก $7.3 \times 10^{-5} \, rad \cdot s^{-1}$

C คือ ความเร็วแสง $3.0 \times 10^8 \, m/s$

$$a = \frac{2 \times (6.3 \times 10^6)^2 \times (7.3 \times 10^{-5})}{5 \times (3 \times 10^8)}$$

$$a \approx 3.86\ m$$

จากสมการ (3.6.2.2) (3.6.2.3) และ (3.6.2.1) เมื่อดึงตัวร่วม r^2 จัดรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$\rho^2 = r^2(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta) \tag{4.1.2}$$

$$\Delta = r^2(1-\frac{r_s}{r}+\frac{a^2}{r^2}) \tag{4.1.3}$$

$$ds^2 = -\left[1-\frac{r_s r}{\rho^2}+\frac{\rho^2\omega^2}{c^2}\right]c^2dt'^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr'^2 + \rho^2 d\theta'^2$$

$$+r^2\sin^2\theta(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{r_s a^2\sin^2\theta}{r\rho^2})d\phi'^2 + \frac{2\omega\rho^2}{c}cd\theta' dt'^2 - \frac{rr_s ac\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi' dt' \tag{4.1.4}$$

เมื่อพิจารณาที่ผิวของโลก $R = r = 6.3\times10^6 m$ ดังนั้น

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{(3.86)^2}{(6.3\times10^6)^2} \approx 3.75\times10^{-13} \tag{4.1.5}$$

ผลจากสมการ (4.1.5) มีค่าน้อยมากหรือมีค่าประมาณเข้าใกล้ศูนย์ ($\frac{a^2}{r^2} \to 0$) เมื่อแทนลงในสมการ (4.1.2) (4.1.3) และ (4.1.4) จึงได้ค่าดังนี้

$$\rho^2 \approx r^2 \tag{4.1.6}$$

$$\Delta \approx r^2(1-\frac{r_s}{r}) \tag{4.1.7}$$

$$ds^2 = -\left[\alpha+\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right]c^2dt'^2 + (1-\frac{r_s}{r})^{-1}dr'^2 + r^2 d\theta'^2$$

$$+r^2 \sin^2 \theta d\phi'^2 + \frac{2\omega r^2}{c^2} cd\theta' dt' - \frac{2r_s ca \sin\theta}{r} d\phi' dt' \qquad (4.1.8)$$

จากสมการ (4.1.8) ได้สมาชิกโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ ดังนี้

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -(\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2}) & 0 & \frac{\omega r^2}{c} & \frac{-car_s \sin\theta}{r} \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{\omega r^2}{c} & 0 & r^2 & 0 \\ \frac{-car_s \sin\theta}{r} & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

(4.1.9)

เมื่อกำหนดให้ $\alpha = (1 - \frac{r_s}{r})$

สมาชิกโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์

$g_{00} = -(\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2})$ $\qquad g_{03} = g_{30} = \frac{-car_s \sin\theta}{r}$

$g_{11} = \alpha^{-1}$ $\qquad g_{22} = r^2$

$g_{33} = r^2 \sin^2\theta$ $\qquad g_{20} = g_{02} = \frac{\omega r^2}{c}$

4.2) คำนวณคอนทราแวเรียนเมทริกเทนได้จากสมการ (4.1.9) และ (3.2.4) เพื่ออธิบายลักษณะปริภูมิ 4 มิติรอบๆ โลก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ได้คอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ ดังนี้

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g^{00} & 0 & g^{02} & g^{03} \\ 0 & g^{11} & 0 & 0 \\ g^{20} & 0 & g^{22} & 0 \\ g^{30} & 0 & 0 & g^{33} \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\beta = (\alpha r^2 + \frac{2\omega^2 r^4}{c^2} + c^2 a^2 r_s^2 \sin^2\theta)$$

สมาชิกคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์

$$g^{00} = \frac{-r^2}{\beta} \qquad g^{02} = g^{20} = \frac{\omega r^2}{c\beta}$$

$$g^{22} = \frac{[\alpha r^2 + \frac{\omega^2 r^4}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^2}]}{r^2\beta}$$

$$g^{03} = g^{30} = \frac{-car_s}{r\sin\theta\beta}$$

$$g^{11} = \frac{\left[\alpha r^4 + \frac{2\omega^2 r^6}{c^2} + c^2 a^2 r_s^2\right]}{\alpha^{-1} r^2 \beta}$$

$$g^{33} = \frac{\left[\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right]}{\sin^2\theta\beta}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.3) นำโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ และคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ จาก 2) มาคำนวณคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 จากสมการ (3.3.13) (ภาคผนวก ก.)

สรุปผลการคำนวณ

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{r_s}{2} + \frac{4\omega^2 r^3}{c^2} - \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^3}\right) \quad (4.3.1)$$

$$\Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{02} = \left(\frac{a^2 c^2 r_s^2 \cos\theta}{2\beta r^2 \sin\theta}\right) \quad (4.3.2)$$

$$\Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} = -(\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2}) \quad (4.3.4)$$

$$\Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{12} = -\left(\frac{\omega r^3}{c\beta}\right) \quad (4.3.4)$$

$$\Gamma^0_{31} = \Gamma^0_{13} = -\left((\frac{car_s}{\beta})(\frac{\sin\theta}{2} + 1)\right) \quad (4.3.5)$$

$$\Gamma^0_{32} = \Gamma^0_{23} = -\left(\frac{3acr_s r\cos\theta}{2\beta}\right) \quad (4.3.6)$$

$$\Gamma^0_{33} = -\left(\frac{\omega r^4 \sin\theta\cos\theta}{c\beta}\right) \quad (4.3.7)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta r^2 c^2}\right)\left(\frac{r_s}{r^2} + \frac{2r\omega^2}{c^2}\right)\left(\alpha c^2 r^2 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4\right)\right] \quad (4.3.8)$$

$$\Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{02} = -\left[\left(\frac{\alpha\omega}{\beta r c^3}\right)\left(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4\right)\right] \quad (4.3.9)$$

$$\Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{30} = -\left((\frac{\alpha a r_s \sin\theta}{2\beta c r^4})(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 r^4) \right) \tag{4.3.10}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_s}{\alpha\beta c^2 r^4} \right)(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4) \right] \tag{4.3.11}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\left[\left(\frac{\alpha \sin\theta}{\beta r c^2} \right)(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4) \right] \tag{4.3.12}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\left[\left(\frac{\alpha}{\beta r c^2} \right)(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4) \right] \tag{4.3.13}$$

$$\Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{01} = -\left(\frac{\omega r}{c\beta} \right)\left[\left(\frac{r_s}{2r} + \frac{2r^2\omega^2}{c^2} \right) - (\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4}) \right] \tag{4.3.14}$$

$$\Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} = \left[\left(\frac{c a r_s \cos\theta}{2r\beta} \right)(\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4}) \right] \tag{4.3.15}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \left[\left(\frac{1}{\beta} \right)(\alpha r + \frac{2\omega^3 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^3}) \right] \tag{4.3.16}$$

$$\Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{13} = \left[\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2\beta} \right] \tag{4.3.17}$$

$$\Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{23} = -\left[\frac{a\omega r_s \cos\theta}{2\beta} \right] \tag{4.3.18}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\left[\left(\frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{\beta} \right)(\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4}) \right] \tag{4.3.19}$$

$$\Gamma^3{}_{10} = \Gamma^3_{01} = \left[\left(\frac{c a r_s}{2r\beta \sin\theta} \right)\left(\left(\frac{r_s}{r^2} + \frac{2r\omega^2}{c^2} \right) + \left(\frac{1}{r} \right)\left(\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right) \right] \tag{4.3.20}$$

$$\Gamma^3{}_{20} = \Gamma^3_{02} = \left[\left(\frac{car_s \cos\theta}{2r\beta\sin^2\theta}\right)\left(\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\right] \quad (4.3.21)$$

$$\Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{12} = -\left[\frac{2a\omega r_s}{\beta\sin\theta}\right] \quad (4.3.22)$$

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = -\left(\frac{1}{\beta}\right)\left[\left(\frac{c^2a^2r_s{}^2}{2r^3}\right) - \left(\alpha r + \frac{r^3\omega^2}{c^2} - \frac{r\omega^2}{c^2}\right)\right] \quad (4.3.23)$$

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \left(\frac{\cos\theta}{\beta\sin\theta}\right)\left[\left(\frac{c^2a^2r_s{}^2}{2r}\right) - \left(\alpha r^2 + \frac{r^4\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)\right] \quad (4.3.24)$$

4.4) นำผลคำนวณโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ คอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ และคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 แทนในสมการจีโอเดสิก (3.3.12) เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

จากสมการจีโอเดสิกใช้กฎลูกโซ่ (chain law) เทียบกับตัวแปร σ ได้ดังนี้

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = -\frac{d^2\sigma/ds^2}{(d\sigma/ds)^2}\left(\frac{dx^\rho}{d\sigma}\right) \quad (4.4.1)$$

เมื่อกำหนดให้ σ ขึ้นกับตัวแปรทิศทางของเวลา $\sigma = \dot{x}^0 = ct$ และ $\rho = 0$ จึงได้

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{d^2x^0/ds^2}{(dx^0/ds)^2}\dot{x}^\rho \quad (4.4.2)$$

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{d^2x^0/ds^2}{(dx^0/ds)^2}\dot{x}^0 \quad (4.4.3)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความเร็วของแสงมีความเร็วคงที่ดังนั้น $\ddot{x}^0 = 0$ และ $\dot{x}^0 = c$ จากสมการ (4.4.2) แทนลงในสมการ (4.4.3) จึงได้สมการจีโอเดสิกเทียบกับเวลา ดังนี้

$$\ddot{x}^k + (\Gamma^k_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^k)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \qquad (4.4.4)$$

เมื่อ $\alpha = \beta = 0, 1, 2, 3$ และ $k = 1, 2, 3$ โดยที่ $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$

$$\ddot{x}^1 + \Gamma^1_{00}(\dot{x}^0)^2 + \Gamma^1_{11}(\dot{x}^1)^2 + \Gamma^1_{22}(\dot{x}^2)^2 + \Gamma^1_{33}(\dot{x}^3)^2 + 2\left(\Gamma^1_{03}\dot{x}^0\dot{x}^3 + \Gamma^1_{02}\dot{x}^0\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{2\dot{x}^1}{c})\left(\Gamma^0_{20}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \Gamma^0_{30}\dot{x}^0\dot{x}^3 + \Gamma^0_{10}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^0_{21}\dot{x}^2\dot{x}^1 + \Gamma^0_{31}\dot{x}^3\dot{x}^1 + \Gamma^0_{32}\dot{x}^3\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{\dot{x}^1}{c})\left(\Gamma^0_{33}(\dot{x}^3)^2\right) = 0$$

(4.4.5)

$$\ddot{x}^2 + \Gamma^2_{33}(\dot{x}^3)^2 + 2\left(\Gamma^2_{01}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^2_{21}\dot{x}^1\dot{x}^2 + \Gamma^2_{03}\dot{x}^0\dot{x}^3 + \Gamma^2_{13}\dot{x}^1\dot{x}^3 + \Gamma^2_{23}\dot{x}^2\dot{x}^3\right)$$

$$-(\frac{2\dot{x}^2}{c})\left(\Gamma^0_{20}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \Gamma^0_{30}\dot{x}^0\dot{x}^3 + \Gamma^0_{10}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^0_{21}\dot{x}^2\dot{x}^1 + \Gamma^0_{31}\dot{x}^3\dot{x}^1 + \Gamma^0_{32}\dot{x}^3\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{\dot{x}^2}{c})\left(\Gamma^0_{33}(\dot{x}^3)^2\right) = 0$$

(4.4.6)

$$\ddot{x}^3 + 2\left(\Gamma^3_{02}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \Gamma^3_{01}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^3_{13}\dot{x}^1\dot{x}^3 + \Gamma^3_{23}\dot{x}^2\dot{x}^3 + \Gamma^3_{12}\dot{x}^1\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{2\dot{x}^3}{c})\left(\Gamma^0_{20}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \Gamma^0_{30}\dot{x}^0\dot{x}^3 + \Gamma^0_{10}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^0_{21}\dot{x}^2\dot{x}^1 + \Gamma^0_{31}\dot{x}^3\dot{x}^1 + \Gamma^0_{32}\dot{x}^3\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{\dot{x}^3}{c})\left(\Gamma^0_{33}(\dot{x}^3)^2\right) = 0$$

(4.4.7)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากหัวข้อที่ 4.1 ผลการคำนวณค่าโมเมนตัมเชิงมุมต่อมวลของโลกมีค่าประมาณ $3.86m$ และค่ากำลังสองของโมเมนตัมเชิงมุมต่อมวลของโลกต่อรัศมีของโลก (บริเวณผิวโลก) มีค่าประมาณ 3.75×10^{-13} เมื่อใช้หลักการประมาณทางคณิตศาสตร์จึงสามารถลดรูปเคอร์เมทริก (4.1.1) อยู่ในรูป (4.1.8) และพิจารณาจากเทอมต่างๆ ได้ดังนี้

- ฟังก์ชั่นเมทริกเทนเซอร์ g_{00} เป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นกับตัวแปรรัศมีและความเร็วเชิงมุมสัมพัทธ์ของผู้สังเกตุหมุน (t',r',θ',ϕ') และผู้สังเกตุที่หยุดนิ่ง (t,r,θ,ϕ) จากฟังก์ชั่นดังกล่าวจึงใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงปริภูมิภายใต้อิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ตามแนวทิศทางเวลา ผลการคำนวณ g_{00} ที่บริเวณพื้นผิวโลกในเทอมที่ 2 ($r=6.3\times10^{6}m$ และมวลของโลก คือ $5.98\times10^{24}kg$) พบว่ามีค่าประมาณ 1.42×10^{-9} หรือมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนเทอมที่ 3 ถูกนำไปใช้คำนวณแรงหนีศูนย์กลางในขั้นตอนต่อไป ดังนั้นจากผลการลดรูปทั้งหมดจึงได้ฟังก์ชั่น g_{00} ดังนี้

$$g_{00} \approx -(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r^2\omega^2}{c^2})$$

- ฟังก์ชั่นเมทริกเทนเซอร์ g_{11} เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มที่ขึ้นกับตัวแปรรัศมีและเป็นฟังก์ชั่นที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงปริภูมิภายใต้อิทธิพลสนามโน้มถ่วงตามแนวทิศทางของรัศมี ผลการคำนวณ g_{11} ที่บริเวณพื้นผิวโลก ($r=6.3\times10^{6}m$ และมวลของโลก คือ $5.98\times10^{24}kg$) พบว่ามีค่าประมาณ 1.00000000072 หรือมีค่าเข้าใกล้ 1 และเกิดจุดเอกฐานเมื่อค่ารัศมีมีค่าเท่ากับรัศมีชวอสชาย์ ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชั่น g_{11} บริเวณผิวโลก ดังนี้

$$g_{11} \approx (1-\frac{r_s}{r})^{-1}$$

- ฟังก์ชั่นเมทริกเทนเซอร์ g_{22} และ g_{33} เป็นฟังก์ชั่นที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงปริภูมิเมื่ออยู่ภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกตามแนวทิศทางของแลตติจูดและลองติจูดพบว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อถูกสังเกตุจากระบบ (t',r',θ',ϕ') และ (t,r,θ,ϕ) และไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลก จึงได้ฟังก์ชั่น metric tensor g_{22} และ g_{33} ดังนี้

$$g_{22} = r^2$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

- ฟังก์ชั่นเมทริกเทนเซอร์ g_{02} และ g_{20} เป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นกับตัวแปรรัศมีและความเร็วเชิงมุมของโลก ซึ่งฟังก์ชั่นดังกล่าวใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของระบบอ้างอิงที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบเฉื่อยที่ถูกสังเกตุจากระบบผู้สังเกตุหมุน (t', r', θ', ϕ') และผู้สังเกตุที่อยู่นิ่ง (t, r, θ, ϕ)

$$g_{02} = g_{20} = \frac{\omega r^2}{c}$$

- ฟังก์ชั่นเมทริกเทนเซอร์ g_{03} และ g_{30} เป็นฟังก์ชั่นที่แสดงความสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลงของปริภูมิภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกระหว่างทิศทางของลองติจูดและเวลา หรือเรียกว่า frame dragging ซึ่งฟังก์ชั่นดังกล่าวขึ้นกับตัวแปรโมเมนตัมเชิงมุมต่อมวลของโลกและผกผันกับรัศมี ผลการคำนวณ g_{03} และ g_{30} ที่บริเวณผิวโลกพบว่ามีค่าประมาณ 10^{-9} เมื่อใช้หลักการประมาณทางคณิตศาสตร์จึงได้ฟังก์ชั่น g_{03} และ g_{30} ดังนี้

$$g_{03} \approx g_{30} \approx 0$$

จึงได้โคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ ดังนี้

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r^2\omega^2}{c^2}) & 0 & \frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{\omega r^2}{c} & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

(4.4.8)

และคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g^{00} & 0 & g^{02} & 0 \\ 0 & g^{11} & 0 & 0 \\ g^{20} & 0 & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{33} \end{bmatrix}$$

(4.4.9)

เมื่อกำหนดให้

$$\beta = r^2\eta \quad , \quad \eta = (1 - \frac{r_s}{r} + \frac{2\omega^2 r^2}{c^2})$$

สมาชิกคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์

$$g^{00} = \frac{-1}{\eta} \qquad\qquad g^{02} = g^{20} = \frac{\omega r^2}{c\beta}$$

$$g^{22} = \frac{[\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}]}{r^2\eta} \qquad\qquad g^{11} = \alpha$$

$$g^{33} = \frac{\left[\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right]}{\eta r^2 \sin^2\theta}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อนำคอนทราแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ (4.4.8) และโคแวเรียนเมทริกเทนเซอร์ (4.4.9) มาคำนวณคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 และแทนในสมการจีโอเดสิกเทียบกับเวลา จึงได้สมการการเคลื่อนที่บนพิกัดทรงกลม ดังนี้

เมื่อกำหนดให้

$\alpha = \beta = 0, 1, 2, 3$ และ $k = 1, 2, 3$ โดยที่ $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$

$$\ddot{x}^1 + (\frac{1}{2})(\frac{r_s}{r^2} - \frac{2r\omega^2}{c^2} - \frac{r_s^2}{r^3} + \frac{2r_s\omega^2}{c^2})(\dot{x}^0)^2 - (\frac{1}{2})(\frac{r_s}{r^2})(1-\frac{r_s}{r})^{-1}(\dot{x}^1)^2$$

$$-r(1-\frac{r_s}{r})(\dot{x}^2)^2 - (r\sin\theta)(1-\frac{r_s}{r})(\dot{x}^3)^2 - 2\left((\frac{\omega r}{c})(1-\frac{r_s}{r})\dot{x}^0\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{2\dot{x}^1}{c})\left((\frac{1}{2\eta})(\frac{r_s}{r^2} + \frac{4r\omega^2}{c^2})\dot{x}^0\dot{x}^1 - (\frac{\omega r}{c\eta})\dot{x}^2\dot{x}^1\right)$$

$$-(\frac{\dot{x}^1}{c})\left(\frac{-\omega r^2\sin\theta\cos\theta}{c\eta}(\dot{x}^3)^2\right) = 0$$

(4.4.10)

จัดรูปสมการการเคลื่อนที่ตามแนวรัศมี (4.4.10) ใหม่ได้ดังนี้

$$\ddot{r} + (\frac{r_s c^2}{2r^2})[1 - \frac{r_s}{r} - (1-\frac{r_s}{r})^{-1}(\frac{\dot{r}^2}{c^2}) - \frac{\dot{r}^2}{\eta c^2}] + 2r\omega^2(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{5\dot{r}^2}{\eta c^2})$$

$$-r(1-\frac{r_s}{r})(\dot{\theta})^2 - (r\sin\theta)(\dot{\phi})^2(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\omega r\dot{r}\cos\theta}{\eta c^2})$$

$$-2r\omega\dot{\theta}(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2}) = 0$$

(4.4.11)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\ddot{x}^2 - \left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\eta}\right)(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r^2\omega^2}{c^2})(\dot{x}^3)^2 + 2\left((\frac{\omega}{cr\eta})(1-\frac{3r_s}{2r})\dot{x}^0\dot{x}^1 + (\frac{1}{r})\dot{x}^1\dot{x}^2\right)$$

$$-(\frac{2\dot{x}^2}{c})\left((\frac{1}{2\eta})(\frac{r_s}{r^2}+\frac{4r\omega^2}{c^2})\dot{x}^0\dot{x}^1 - (\frac{\omega r}{c\eta})\dot{x}^2\dot{x}^1\right)$$

$$-(\frac{\dot{x}^2}{c})\left(\frac{-\omega r^2\sin\theta\cos\theta}{c\eta}(\dot{x}^3)^2\right) = 0$$

(4.4.12)

จัดรูปสมการการเคลื่อนที่ตามแนว θ (4.4.12) ใหม่ได้ดังนี้

$$\ddot{\theta}^2 + \left(\frac{2\omega r\dot{r}\dot{\theta}^2}{\eta c^2}\right) - \left(\frac{\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2}{\eta}\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r^2\omega^2}{c^2}+\frac{\omega r^2\dot{\theta}}{c^2}\right)$$

$$+\left(\frac{2\omega}{r\eta}(1-\frac{3r_s}{2r})\dot{r} + \left(\frac{2}{r}-\frac{r_s}{\eta r^2}-\frac{10r\omega^2}{\eta c^2}\right)\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0$$

(4.4.13)

$$\ddot{x}^3 + 2\left((\frac{1}{r\eta})(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r^2\omega^2}{c^2}-\frac{4\omega^2}{c^2})\dot{x}^1\dot{x}^3\right)$$

$$+2\left((\frac{\cos\theta}{\eta\sin\theta})(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r^2\omega^2}{c^2}-\frac{4\omega^2}{c^2})\dot{x}^2\dot{x}^3\right)$$

$$-(\frac{2\dot{x}^3}{c})\left((\frac{1}{2\eta})(\frac{r_s}{r^2}+\frac{4r\omega^2}{c^2})\dot{x}^0\dot{x}^1 - (\frac{\omega r}{c\eta})\dot{x}^2\dot{x}^1\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$-(\frac{\dot{x}^3}{c})\left(\frac{-\omega r^2\sin\theta\cos\theta}{c\eta}(\dot{x}^3)^2\right)=0$$

(4.4.14)

จัดรูปสมการการเคลื่อนที่ตามแนว ϕ (4.4.14) ใหม่ได้ดังนี้

$$\ddot{\phi}+2\left(\left(\frac{1}{r\eta}\right)(1-\frac{3r_s}{r}-\frac{8r^2\omega^2}{c^2}-\frac{4\omega^2}{c^2})\dot{r}\dot{\phi}\right)$$

$$+2\left(\left(\frac{\cos\theta}{\eta\sin\theta}\right)(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r^2\omega^2}{c^2}-\frac{4\omega^2}{c^2})\dot{\theta}\dot{\phi}\right)$$

$$+\left(\frac{4\omega r}{c^2\eta}\dot{r}\dot{\theta}\dot{\phi}\right)+\left(\frac{2\omega r^2\sin\theta\cos\theta}{c^2\eta}(\dot{\phi})^3\right)=0$$

(4.4.15)

4.5) สมการเนเวียร์–สโตกต์บนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบนอกระบบยูคลิด [7] เริ่มต้นได้จาก 1) องค์ประกอบคอนทราแวเรียนของเทนเซอร์ความเครียด (stress tensor) (4.5.1) 2) องค์ประกอบของสมการการเคลื่อนที่ของของไหล (4.5.2) และ 3) องค์ประกอบของสมการความเร่งและการนำพาของของไหลของระบบ (4.5.3) ได้ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$F^{\alpha\beta}=-\left(p+\frac{2\mu\nabla_\gamma v^\gamma}{3}\right)g^{\alpha\beta}+\mu\left(\nabla^\beta v^\alpha+\nabla^\alpha v^\beta\right) \qquad (4.5.1)$$

เมื่อกำหนดให้

p คือ ฟังก์ชั่นสเกลล่าร์ของความดัน

ν^γ คือ องค์ประกอบเวกเตอร์ความเร็ว

μ คือ ค่าสัมประสิทธ์ความหนืดของของไหล

$$a^{\alpha} = f^{\alpha} + \frac{1}{\rho}\nabla_{\beta}F^{\alpha\beta} \tag{4.5.2}$$

$$a^{\alpha} = \frac{dv^{\alpha}}{dt} = \frac{\partial v^{\alpha}}{dt} + v_{\beta}\nabla^{\beta}v^{\alpha} \tag{4.5.3}$$

เมื่อกำหนดให้

a^{α} คือ องค์ประกอบเวกเตอร์ความเร่ง
f^{α} คือ องค์ประกอบเวกเตอร์แรงของวัตถุ

แทน (4.5.1) ใน (4.5.2) และจัดรูปสมการ (4.5.2) และ (4.5.3) ใหม่ได้

$$\frac{\partial v^{\alpha}}{dt} + v_{\beta}\nabla^{\beta}v^{\alpha} = f^{\alpha} - (\frac{1}{\rho}\nabla^{\alpha}p) - (\frac{2\mu}{3\rho}\nabla^{\alpha}\nabla_{\beta}v^{\beta}) + \frac{\mu}{\rho}(\nabla_{\beta}\nabla^{\beta}v^{\alpha} + \nabla_{\beta}\nabla^{\alpha}v^{\beta})$$

(4.5.4)

$$\nabla_{\beta}\nabla^{\alpha}v^{\beta} = \nabla^{\alpha}\nabla_{\beta}\nabla^{\beta} - g^{\alpha b}v^{m}R^{\beta}_{\beta bm}$$

เมื่อ $$R^{\beta}_{\beta bm} = R_{bm}$$

แทนค่าสมการข้างต้นในสมการ (4.5.4) ได้

$$\frac{\partial v^{\alpha}}{dt} = f^{\alpha} - v_{\beta}\nabla^{\beta}v^{\alpha} - (\frac{1}{\rho}\nabla^{\alpha}p) - (\frac{\mu}{3\rho}\nabla^{\alpha}\nabla_{\beta}v^{\beta}) + \frac{\mu}{\rho}\nabla_{\beta}\nabla^{\beta}v^{\alpha} - \frac{\mu}{\rho}g^{\alpha b}v^{m}R_{bm}$$

(4.5.5)

สมการ (4.5.5) คือสมการสมการเนเวียร์–สโตกต์แบบบีบอัด (compressible) บนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบนอกระบบยูคลิด และอธิบายเทอมต่างๆได้ดังนี้ ด้านขวาของสมการในเทอมที่ 2 อธิบายการนำพา (convection) เทอมที่ 3 คือเกรเดียนของฟังก์ชั่นความดัน เทอมที่ 5 คือเทอมของแรงที่

สัมพันธ์กับความหนืด เทอมที่ 4 และเทอมที่ 6 คือเทอมการบีบอัดอธิบายบนปริภูมิแบบนอกระบบยูคลิด ซึ่ง จากผลการคำนวณริชชี่เทนเซอร์แรงค์ 2 (ภาคผนวก ข.)ได้ผลดังนี้

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{00}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{02} - \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{03}$$
$$+ \Gamma^1_{00}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{01} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{03} + \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{01} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{02} \qquad (4.5.6)$$

$$R_{01} = R_{10} = \Gamma^2_{01}\Gamma^0_{02} + \Gamma^3_{01}\Gamma^0_{03} + \frac{\partial \Gamma^2_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{10} + \Gamma^3_{01}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{13}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^3_{01}}{\partial x^3} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{01}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{12} \qquad (4.5.7)$$

$$R_{02} = R_{20} = \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{21} + \Gamma^3_{02}\Gamma^0_{03} + \frac{\partial \Gamma^1_{02}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{20} + \Gamma^1_{02}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{22}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^3_{02}}{\partial x^3} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{20} + \Gamma^1_{02}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{21} \qquad (4.5.8)$$

$$R_{03} = R_{30} = \Gamma^1_{03}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{31} + \Gamma^2_{03}\Gamma^0_{02} + \frac{\partial \Gamma^1_{03}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^3} + \Gamma^0_{03}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{30}$$
$$+ \Gamma^1_{03}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{31} + \frac{\partial \Gamma^2_{03}}{\partial x^2} - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{30} + \Gamma^1_{03}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{31} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{33}$$

(4.5.9)

ศูนย์วิทยทรัพยากร

$$R_{11} = R_{11} = -\frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{01} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{12} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{13} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{10}$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$+ \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{13} - \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}$$

(4.5.10)

$$R_{12}=R_{21}=-\frac{\partial\Gamma^{0}_{10}}{\partial x^{2}}-\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{20}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{0}_{02}+\Gamma^{3}_{12}\Gamma^{0}_{03}-\Gamma^{3}_{10}\Gamma^{0}_{23}-\frac{\partial\Gamma^{1}_{11}}{\partial x^{2}}$$
$$+\frac{\partial\Gamma^{3}_{12}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma^{3}_{13}}{\partial x^{2}}-\Gamma^{0}_{13}\Gamma^{3}_{20}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{3}_{32}-\Gamma^{2}_{13}\Gamma^{3}_{22}-\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{23} \tag{4.5.11}$$

$$R_{13}=R_{31}=-\frac{\partial\Gamma^{0}_{10}}{\partial x^{3}}-\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{30}+\Gamma^{2}_{13}\Gamma^{0}_{02}-\Gamma^{2}_{10}\Gamma^{0}_{32}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{0}_{03}-\Gamma^{3}_{10}\Gamma^{0}_{33}$$
$$+\frac{\partial\Gamma^{1}_{13}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial\Gamma^{1}_{11}}{\partial x^{3}}+\Gamma^{0}_{13}\Gamma^{1}_{10}-\Gamma^{0}_{11}\Gamma^{1}_{30}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{13}+\frac{\partial\Gamma^{2}_{13}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{3}}-\Gamma^{0}_{12}\Gamma^{2}_{30}$$
$$-\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{32}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{2}_{23}-\Gamma^{3}_{12}\Gamma^{2}_{33} \tag{4.5.12}$$

$$R_{22}=-\frac{\partial\Gamma^{0}_{20}}{\partial x^{2}}-\Gamma^{0}_{20}\Gamma^{0}_{20}+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{0}_{01}-\Gamma^{1}_{20}\Gamma^{0}_{21}-\Gamma^{3}_{20}\Gamma^{0}_{23}+\frac{\partial\Gamma^{1}_{22}}{\partial x^{1}}-\Gamma^{0}_{21}\Gamma^{1}_{20}$$
$$+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}-\frac{\partial\Gamma^{3}_{23}}{\partial x^{2}}-\Gamma^{0}_{23}\Gamma^{3}_{20}+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{31}-\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23} \tag{4.5.13}$$

$$R_{23}=R_{32}=-\frac{\partial\Gamma^{0}_{20}}{\partial x^{3}}-\Gamma^{0}_{20}\Gamma^{0}_{30}-\Gamma^{1}_{20}\Gamma^{0}_{31}+\Gamma^{2}_{23}\Gamma^{0}_{02}+\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{0}_{03}-\Gamma^{3}_{20}\Gamma^{0}_{33}-\Gamma^{0}_{21}\Gamma^{1}_{30}$$
$$-\Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{33}+\frac{\partial\Gamma^{2}_{23}}{\partial x^{2}}-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{31}+\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{2}_{23} \tag{4.5.14}$$

$$R_{33}=-\frac{\partial\Gamma^{0}_{30}}{\partial x^{3}}-\Gamma^{0}_{30}\Gamma^{0}_{30}+\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{0}_{01}-\Gamma^{1}_{30}\Gamma^{0}_{31}+\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{0}_{02}-\Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{32}+\frac{\partial\Gamma^{1}_{33}}{\partial x^{1}}-\Gamma^{0}_{31}\Gamma^{1}_{30}$$
$$+\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33}+\frac{\partial\Gamma^{2}_{33}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma^{2}_{32}}{\partial x^{3}}-\Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{30}+\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{21}-\Gamma^{2}_{32}\Gamma^{2}_{32} \tag{4.5.15}$$

ผลการคำนวณริชชี่แรงค์ 2 จากสมการ (4.5.6) ถึง (4.5.15) พบว่า $R_{bm}\to 0$ ดังนั้นสามารถลดรูปสมการเนเวียร์–สโตกต์แบบบีบอัดบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบนอกระบบยูคลิด (4.5.5) บนพิกัดคาร์ทีเซียนได้ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{\partial \vec{v}}{dt} = \vec{f} - v_{\beta} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\beta}} - (\frac{1}{\rho} grad\ \ p) + (\frac{1}{3} grad\ div\ \vec{v}) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^{2} \vec{v} \tag{4.5.16}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{dt} + v_{\beta} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\beta}} = \vec{f} - (\frac{1}{\rho} grad\ \ p) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^{2} \vec{v} \tag{4.5.17}$$

สมการ (4.5.16) คือสมการเนเวียร์–สโตกต์แบบบีบอัดบนพิกัดคาร์ทีเซียนของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบระบบยูคลิด เมื่อให้เงื่อนไข $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ สมการดังกล่าวจึงลดรูปได้ (4.5.17) หรือสมการเนเวียร์–สโตกต์แบบไม่บีบอัด (incompressible) บนพิกัดคาร์ทีเซียนของปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบระบบยูคลิด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษา วิจารณ์ผลการศึกษา และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการศึกษาและวิจารณ์ผลการศึกษา

จากผลจากสมการจีโอเดสิกเทียบกับเวลา (4.4.11), (4.4.13) และ (4.4.15) ใช้อธิบายระบบที่มีความเร่งเนื่องจากสนามโน้มถ่วงและการหมุนสัมพัทธ์ของผู้สังเกตุทั้ง 2 ระบบบนพิกัดทรงกลม พบว่าการเปลี่ยนแปลงของปริภูมิ 4 มิติ ก่อให้เกิด แรงหนีศูนย์กลาง, แรงโน้มถ่วง และแรงโคริโอริสขึ้น โดยแรงที่เกิดขึ้นเหล่านี้ถูกอธิบายด้วยแนวคิดที่แตกต่างกันระหว่างกลศาสตร์ยุคเก่า และทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

จากกลศาสตร์ยุคเก่า นิวตันใช้แนวความคิดระบบสัมบูรณ์ของผู้สังเกตุขึ้นเพื่อใช้อธิบายระบบอ้างอิงต่างๆ และเมื่อพิจารณาระบบสัมบูรณ์ที่มีความเร่งบนปริภูมิแบบราบเรียบจึงต้องพบกับสิ่งที่เรียกว่า "แรงเทียม" เช่น แรงหนีศูนย์กลางและแรงโคริโอริส เป็นต้น ซึ่งแรงเทียมเหล่านี้ไม่ได้ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของระบบกลศาสตร์ แต่เกิดขึ้นเมื่อระบบอ้างอิงสัมบูรณ์เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบเฉื่อย จึงเป็นแนวคิดที่อธิบายกฎการเคลื่อนที่ในรูปแบบอย่างง่ายและเป็นธรรมชาติอย่างมาก โดยไม่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของปริภูมิ 4 มิติเนื่องจากสนามโน้มถ่วงและการหมุนสัมพัทธ์ของผู้สังเกตุทั้ง 2 ระบบ ดังนั้นเมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนสัมพัทธ์ของผู้สังเกตุทั้ง 2 ระบบบนพิกัดทรงกลมของกระแสน้ำในมหาสมุทรที่บริเวณผิวโลกจากแนวคิดกลศาสตร์ยุคเก่า จึงเป็นการอธิบายการเคลื่อนที่ของกระแสน้ำในมหาสมุทรบนปริภูมิแบบราบเรียบที่ถูกสังเกตุจากระบบอ้างอิงสัมบูรณ์

แต่อย่างไรก็ตามระบบสัมบูรณ์นี้ไม่มีความหมายในเชิงฟิสิกส์ยุคใหม่ เพราะจากแนวความคิดใหม่ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปอธิบายแรงเทียมว่าเกิดจากมวลของวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งสัมพัทธ์กับผู้สังเกตุในระบบอ้างอิงไม่สัมบูรณ์หรือกล่าวได้ว่าแรงเทียมเป็นแรงโน้มถ่วงแบบหนึ่งและความเร่งของวัตถุทำให้เกิด "สนามโน้มถ่วง" ขึ้นในระบบอ้างอิงไม่สัมบูรณ์หรือกล่าวได้ว่าอิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนสัมพัทธ์ของผู้สังเกตุทั้ง 2 ระบบมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงปริภูมิ 4 มิติจึงทำให้ผู้สังเกตุของทั้ง 2 ระบบอยู่ในระบบอ้างอิงไม่สัมบูรณ์ โดยสามารถอธิบายความเร่งของวัตถุต่างๆได้จากสมการจีโอเดสิก (4.4.4)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วงและการหมุนสัมพัทธ์ของผู้สังเกตุทั้ง 2 ระบบบนพิกัดทรงกลมของกระแสน้ำในมหาสมุทรที่บริเวณผิวโลกจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป จากผลสมการจีโอเดสิกเทียบกับเวลา (4.4.11), (4.4.13) และ (4.4.15) เมื่อพิจารณาเทอมของความเร็วของกระแสน้ำและความเร็วเชิงมุมบนผิวโลกมีความเร็วน้อยๆมากเมื่อเทียบกับความเร็วแสง $(v <<< c, \omega <<< c)$ เมื่อใช้การประมาณแบบโพส์-นิวโทเนี่ยน (post-Newtonian) จึงได้สมการจีโอเดสิกเทียบกับเวลา ดังนี้

$$\ddot{r} + \left(\frac{r_s c^2}{2r^2}\right) - r\omega^2 - r(\dot{\theta})^2 - (r\sin\theta)(\dot{\phi})^2 - 2r\omega\dot{\theta} = 0 \tag{5.1}$$

$$\ddot{\theta}^2 - \left(\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right) + \left(\frac{2\omega}{r}\dot{r} + \left(\frac{2}{r}\right)\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \tag{5.2}$$

$$\ddot{\phi} + 2\left(\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r}\right) + 2\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\phi}\right) = 0 \tag{5.3}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\frac{r_s c^2}{2r^2} = \frac{GM}{r^2}$$

สมการจีโอเดสิกเทียบกับเวลา (5.1), (5.2) และ (5.3) พบว่าสามารถลดรูปสมการความเร่งของพิกัดทรงกลมได้เหมือนกับแนวคิดของกลศาสตร์ยุคเก่า เพราะสนามโน้มถ่วงของโลกเป็นสนามแบบอ่อน (weak field, $(g_{00}, g_{11} \to 1)$) เนื่องจากมวลของโลกมีค่าน้อยและเมื่อพิจารณาผลการคำนวณกำลังสองของโมเมนตัมเชิงมุมต่อมวลต่อรัศมีของโลกที่มีค่าประมาณ 10^{-13} หรือมีค่าเข้าใกล้ศูนย์จึงจัดเป็นการหมุนของเคอร์แบบช้า (slow Kerr) รวมทั้งความเร็วของกระแสน้ำและความเร็วเชิงมุมบนผิวโลกมีความเร็วน้อยๆมากเมื่อเทียบกับความเร็วแสง $(v <<< c, \omega <<< c)$ จึงทำให้อิทธิพลของสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของปริภูมิ 4 มิติน้อยมาก ดังนั้นจึงให้ผลลัพธ์ไม่ต่างกับแนวคิดของกลศาสตร์ยุคเก่าและสามารถถูกนำไปประยุกต์เพื่อใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของกระแสน้ำในมหาสมุทรที่บริเวณผิวโลกได้

เมื่อพิจารณาหัวข้อที่ 4.5 จากสมการเนเวียร์–สโตกต์แบบบีบอัดบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบนอกระบบยูคลิด ผลการคำนวณพบว่าค่าริชชี่เทนเซอร์แรงค์ 2 มีค่าเข้าสู่ศูนย์หรือกล่าวได้ว่า

อิทธิพลสนามโน้มถ่วงและการหมุนของโลกมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงปริภูมิ 3 มิติ-เวลาน้อยมากจึงทำให้สมการดังกล่าวลดรูปเข้าสู่สมการเนเวียร์–สโตกต์แบบบีบอัดบนปริภูมิ 3 มิติ-เวลาแบบยูคลิดได้

ข้อเสนอแนะ

1) เนื่องจากสมการสนามเป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงอาศัยหลักการประมาณโดยกำหนดให้มวลน้ำในมหาสมุทรมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับโลกเพื่อช่วยลดตัวแปรการเปลี่ยนแปลงของเมทริกเทนเซอร์เนื่องจากมวลน้ำในมหาสมุทรเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ

2) ความโค้งของปริภูมิ 4 มิติเวลาของโลกนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยอธิบายได้จากสมการจีโอเดสิก เพื่อง่ายต่อการคำนวณจึงอาศัยหลักการประมาณค่าแบบโพส์-นิวโทเนี่ยนเพื่อลดเทอมต่างๆเพื่อให้สอดคล้องกับสเกลของโลกจึงพบว่ามีค่าไม่แตกต่างกับกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน แต่อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาวัตถุที่มีมวลและความเร็วเชิงมุมมากกว่าโลก เช่น ดวงอาทิตย์ ดาวนิวตรอน หลุมดำ และอื่นๆ จะพบว่าเกิดการเปลี่ยนแปลงความโค้งของปริภูมิ 4 มิติเวลา

3) ปริภูมิ 4 มิติเวลาแบบเคอร์ ที่ได้ถูกนำมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของโลกนั้น ได้พิจารณาตัวแปรดังนี้ มวล ประจุ ความเร็วเชิงมุม ของโลก แต่จากการคำนวณพบว่าตัวแปรหลักที่ทำความโค้งของปริภูมิ 4 มิติเวลาได้แก่ มวลของโลก จึงทำให้ปริภูมิ 4 มิติเวลาแบบเคอร์ ลดรูปได้ปริภูมิ 4 มิติเวลาแบบชวอสชาย์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] Jewett, W. and Serway, A. PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS WITH MODERN PHYSICS. Seventh Edition. Singapore : Thomson Learning, 2008.

[2] Landau, L. and Lifshitz, E.M. Fluid mechanics. Reading M.A. : Addison Wesley, 1975.

[3] Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J. Classical Mechannics. Reading M.A. : Addison Wesley, 1992.

[4] รองศาสตราจารย์ สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนะกุล. รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2538.

[5] Carmeli, M. CLASSICAL FIELD : GENERAL RELATIVITY AND GAUGE THEORY. New York : Wiley & Sons Inc, 1982.

[6] Carmeli, M. Relativity. New York – London : Plenum Press, 1970.

[7] J. LITWINISZYN (Krakow). Generalization of some equations of hydrodynamics. Moscow : ICM, 1958.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิธีการคำนวณคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$

หรือเขียนใหม่ได้ $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial g_{\alpha\sigma,\beta} + \partial g_{\beta\sigma,\alpha} - \partial g_{\alpha\beta,\sigma} \right)$

ผลการคำนวณคริสตอฟเฟลรูปแบบที่ 2 ได้ดังนี้

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial g_{00,0} + \partial g_{00,0} - \partial g_{00,0} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01} \left(\partial g_{01,0} + \partial g_{01,0} - \partial g_{00,1} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02} \left(\partial g_{02,0} + \partial g_{02,0} - \partial g_{00,2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03} \left(\partial g_{03,0} + \partial g_{03,0} - \partial g_{00,3} \right)$$

$$\Gamma^{0}_{00} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{0}_{10} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{10,0} + \partial g_{00,1} - \partial g_{10,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{11,0} + \partial g_{11,1} - \partial g_{10,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{12,0} + \partial g_{02,1} - \partial g_{10,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{13,0} + \partial g_{03,1} - \partial g_{10,3}\right)$$

$$\Gamma^{0}_{10} = \left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{r_s}{2} + \frac{2\omega^2 r^3}{c^2} - \frac{c^2 a^2 r_s^2}{2r^3}\right)$$

$$\Gamma^{0}_{20} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{20,0} + \partial g_{00,2} - \partial g_{20,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{21,0} + \partial g_{11,2} - \partial g_{20,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{22,0} + \partial g_{02,2} - \partial g_{20,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{23,0} + \partial g_{03,2} - \partial g_{20,3}\right)$$

$$\Gamma^{0}{}_{20} = \left(\frac{a^2 c^2 r_s^2 \cos\theta}{2\beta r^2 \sin\theta}\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{0}_{01} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{00,1} + \partial g_{10,0} - \partial g_{01,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{01,1} + \partial g_{11,0} - \partial g_{01,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{02,0} + \partial g_{12,0} - \partial g_{01,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{03,1} + \partial g_{13,0} - \partial g_{01,3}\right)$$

$$\Gamma^{0}_{01} = \left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{r_s}{2} + \frac{2\omega^2 r^3}{c^2} - \frac{c^2 a^2 r_s^2}{2r^3}\right)$$

$$\Gamma^{0}_{02} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{00,2} + \partial g_{20,0} - \partial g_{02,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{01,2} + \partial g_{21,0} - \partial g_{02,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{02,2} + \partial g_{22,0} - \partial g_{02,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{03,2} + \partial g_{23,0} - \partial g_{02,3}\right)$$

$$\Gamma^{0}{}_{02} = \left(\frac{a^2 c^2 r_s^2 \cos\theta}{2\beta r^2 \sin\theta}\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^0_{03} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{00,3} + \partial g_{30,0} - \partial g_{03,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{01,3} + \partial g_{31,0} - \partial g_{03,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{02,3} + \partial g_{32,0} - \partial g_{03,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{03,3} + \partial g_{33,0} - \partial g_{03,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{03} = -(\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2})$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{10,1} + \partial g_{10,1} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{11,1} + \partial g_{11,1} - \partial g_{11,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{12,1} + \partial g_{12,1} - \partial g_{11,2}\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{13,1} + \partial g_{13,1} - \partial g_{11,3}\right)$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^0_{11} = 0$$

$$\Gamma^0_{21} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{20,1} + \partial g_{10,2} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{21,1} + \partial g_{11,2} - \partial g_{21,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{22,0} + \partial g_{12,2} - \partial g_{21,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{23,1} + \partial g_{13,2} - \partial g_{21,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{21} = -\left(\frac{\omega r^3}{c\beta}\right)$$

$$\Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{30,0} + \partial g_{00,3} - \partial g_{30,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{31,0} + \partial g_{11,3} - \partial g_{30,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{02,3} - \partial g_{30,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{33,0} + \partial g_{03,3} - \partial g_{30,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{30} = -\left(\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2}\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^0_{31} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{30,1} + \partial g_{10,3} - \partial g_{31,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{31,1} + \partial g_{11,3} - \partial g_{31,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{12,3} - \partial g_{31,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{33,1} + \partial g_{13,3} - \partial g_{31,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{31} = -\left((\frac{car_s}{\beta})(\frac{\sin\theta}{2} + 1) \right)$$

$$\Gamma^0_{32} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{30,2} + \partial g_{20,3} - \partial g_{32,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{31,2} + \partial g_{21,3} - \partial g_{32,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{32,2} + \partial g_{22,3} - \partial g_{32,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{33,2} + \partial g_{23,3} - \partial g_{32,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{32} = -\left(\frac{3acr_s r\cos\theta}{2\beta} \right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{30,3} + \partial g_{30,3} - \partial g_{33,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{31,3} + \partial g_{31,3} - \partial g_{33,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{32,3} + \partial g_{32,3} - \partial g_{33,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{33,3} + \partial g_{33,3} - \partial g_{33,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{33} = -\left(\frac{\omega r^4 \sin\theta\cos\theta}{c\beta}\right)$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{20,2} + \partial g_{20,2} - \partial g_{22,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{21,2} + \partial g_{21,2} - \partial g_{22,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{22,2} + \partial g_{22,2} - \partial g_{22,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{23,2} + \partial g_{23,2} - \partial g_{22,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{22} = 0$$

$$\Gamma^0_{12} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{10,2} + \partial g_{20,1} - \partial g_{12,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{11,2} + \partial g_{21,1} - \partial g_{12,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{12,2} + \partial g_{22,1} - \partial g_{12,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{13,2} + \partial g_{23,1} - \partial g_{12,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{12} = -\left(\frac{\omega r^3}{c\beta}\right)$$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{10,3} + \partial g_{30,1} - \partial g_{13,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{11,3} + \partial g_{31,1} - \partial g_{13,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{12,3} + \partial g_{32,1} - \partial g_{13,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{13,3} + \partial g_{33,1} - \partial g_{13,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{31} = -\left((\frac{car_s}{\beta})(\frac{\sin\theta}{2} + 1)\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial g_{20,3} + \partial g_{30,2} - \partial g_{23,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{01}\left(\partial g_{21,3} + \partial g_{31,2} - \partial g_{23,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{02}\left(\partial g_{22,3} + \partial g_{32,2} - \partial g_{23,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{03}\left(\partial g_{23,3} + \partial g_{33,2} - \partial g_{23,3}\right)$$

$$\Gamma^0_{23} = -\left(\frac{3acr_s r\cos\theta}{2\beta}\right)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{00,0} + \partial g_{00,0} - \partial g_{00,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{01,0} + \partial g_{01,0} - \partial g_{00,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{02,0} + \partial g_{02,0} - \partial g_{00,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{03,0} + \partial g_{03,0} - \partial g_{00,3}\right)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta r^2 c^2}\right)\left(\frac{r_s}{r^2} + \frac{2r\omega^2}{c^2}\right)\left(\alpha c^2 r^2 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4\right)\right]$$

$$\Gamma^{1}_{10} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{10,0} + \partial g_{00,1} - \partial g_{10,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{11,0} + \partial g_{01,1} - \partial g_{10,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{12,0} + \partial g_{02,1} - \partial g_{10,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{13,0} + \partial g_{03,1} - \partial g_{10,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{10} = 0$$

$$\Gamma^{1}_{20} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{20,0} + \partial g_{00,2} - \partial g_{20,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{21,0} + \partial g_{11,2} - \partial g_{20,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{22,0} + \partial g_{02,2} - \partial g_{20,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{23,0} + \partial g_{03,2} - \partial g_{20,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{20} = -\left\lfloor \left(\frac{\alpha\omega}{\beta r c^{3}}\right)\left(\alpha c^{2} r^{4} + 2\omega^{2} r^{6} + a^{2} r_{s}^{2} c^{4}\right) \right\rfloor$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{1}_{01} = \frac{1}{2} g^{10} \left(\partial g_{00,1} + \partial g_{10,0} - \partial g_{01,0} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial g_{01,1} + \partial g_{11,0} - \partial g_{01,1} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12} \left(\partial g_{02,0} + \partial g_{12,0} - \partial g_{01,2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13} \left(\partial g_{03,1} + \partial g_{13,0} - \partial g_{01,3} \right)$$

$$\Gamma^{1}_{01} = 0$$

$$\Gamma^{1}_{02} = \frac{1}{2} g^{10} \left(\partial g_{00,2} + \partial g_{20,0} - \partial g_{02,0} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial g_{01,2} + \partial g_{21,0} - \partial g_{02,1} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12} \left(\partial g_{02,2} + \partial g_{22,0} - \partial g_{02,2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13} \left(\partial g_{03,2} + \partial g_{23,0} - \partial g_{02,3} \right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{1}_{02} = -\left[\left(\frac{\alpha \omega}{\beta r c^{3}} \right) \left(\alpha c^{2} r^{4} + 2\omega^{2} r^{6} + a^{2} r_{s}^{2} c^{4} \right) \right]$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{00,3} + \partial g_{30,0} - \partial g_{03,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{01,3} + \partial g_{31,0} - \partial g_{03,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{02,3} + \partial g_{32,0} - \partial g_{03,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{03,3} + \partial g_{33,0} - \partial g_{03,3}\right)$$

$$\Gamma^1_{03} = -\left((\frac{\alpha a r_s \sin\theta}{2\beta c r^4})(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 r^4) \right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{10,1} + \partial g_{10,1} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{11,1} + \partial g_{11,1} - \partial g_{11,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{12,0} + \partial g_{12,1} - \partial g_{11,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{13,1} + \partial g_{13,1} - \partial g_{11,3}\right)$$

$$\Gamma^1{}_{11} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_s}{\alpha\beta c^2 r^4}\right)(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 c^4)\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{20,1} + \partial g_{10,2} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{21,1} + \partial g_{11,2} - \partial g_{21,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{22,0} + \partial g_{12,2} - \partial g_{21,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{23,1} + \partial g_{13,2} - \partial g_{21,3}\right)$$

$$\Gamma^1_{21} = 0$$

$$\Gamma^1_{30} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{30,0} + \partial g_{00,3} - \partial g_{30,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{31,0} + \partial g_{11,3} - \partial g_{30,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{02,3} - \partial g_{30,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{33,0} + \partial g_{03,3} - \partial g_{30,3}\right)$$

$$\Gamma^1_{30} = -\left(\left(\frac{\alpha a r_s \sin\theta}{2\beta c r^4}\right)\left(\alpha c^2 r^4 + 2\omega^2 r^6 + a^2 r_s^2 r^4\right) \right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{1}_{31} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{30,1} + \partial g_{10,3} - \partial g_{31,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{31,1} + \partial g_{11,3} - \partial g_{31,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{12,3} - \partial g_{31,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{33,1} + \partial g_{13,3} - \partial g_{31,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{31} = 0$$

$$\Gamma^{1}_{32} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{30,2} + \partial g_{20,3} - \partial g_{32,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{31,2} + \partial g_{21,3} - \partial g_{32,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{32,2} + \partial g_{22,3} - \partial g_{32,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{33,2} + \partial g_{23,3} - \partial g_{32,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{32} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{1}_{33} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{30,3} + \partial g_{30,3} - \partial g_{33,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{31,3} + \partial g_{31,3} - \partial g_{33,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{32,3} + \partial g_{32,3} - \partial g_{33,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{33,3} + \partial g_{33,3} - \partial g_{33,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}{}_{33} = -\left[\left(\frac{\alpha \sin\theta}{\beta r c^{2}}\right)(\alpha c^{2} r^{4} + 2\omega^{2} r^{6} + a^{2} r_{s}^{2} c^{4})\right]$$

$$\Gamma^{1}_{22} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{20,2} + \partial g_{20,2} - \partial g_{22,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{21,2} + \partial g_{21,2} - \partial g_{22,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{22,2} + \partial g_{22,2} - \partial g_{22,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{23,2} + \partial g_{23,2} - \partial g_{22,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{22} = -\left[\left(\frac{\alpha}{\beta r c^{2}}\right)(\alpha c^{2} r^{4} + 2\omega^{2} r^{6} + a^{2} r_{s}^{2} c^{4})\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{1}_{12} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{10,2} + \partial g_{20,1} - \partial g_{12,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{11,2} + \partial g_{21,1} - \partial g_{12,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{12,2} + \partial g_{22,1} - \partial g_{12,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{13,2} + \partial g_{23,1} - \partial g_{12,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{12} = 0$$

$$\Gamma^{1}_{13} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{10,3} + \partial g_{30,1} - \partial g_{13,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{11,3} + \partial g_{31,1} - \partial g_{13,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{12,3} + \partial g_{32,1} - \partial g_{13,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{13,3} + \partial g_{33,1} - \partial g_{13,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{13} = 0$$

$$\Gamma^{1}_{23} = \frac{1}{2} g^{10}\left(\partial g_{20,3} + \partial g_{30,2} - \partial g_{23,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{11}\left(\partial g_{21,3} + \partial g_{31,2} - \partial g_{23,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{12}\left(\partial g_{22,3} + \partial g_{32,2} - \partial g_{23,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{13}\left(\partial g_{23,3} + \partial g_{33,2} - \partial g_{23,3}\right)$$

$$\Gamma^{1}_{23} = 0$$

$$\Gamma^{2}_{00} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{00,0} + \partial g_{00,0} - \partial g_{00,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{01,0} + \partial g_{01,0} - \partial g_{00,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{02,0} + \partial g_{02,0} - \partial g_{00,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{03,0} + \partial g_{03,0} - \partial g_{00,3}\right)$$

$$\Gamma^{2}_{00} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^2_{10} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{10,0} + \partial g_{00,1} - \partial g_{10,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{11,0} + \partial g_{11,1} - \partial g_{10,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{12,0} + \partial g_{02,1} - \partial g_{10,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{13,0} + \partial g_{03,1} - \partial g_{10,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{10} = -\left(\frac{\omega r}{c\beta}\right)\left[\left(\frac{r_s}{2r} + \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) - (\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4})\right]$$

$$\Gamma^2_{20} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{20,0} + \partial g_{00,2} - \partial g_{20,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{21,0} + \partial g_{11,2} - \partial g_{20,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{22,0} + \partial g_{02,2} - \partial g_{20,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{23,0} + \partial g_{03,2} - \partial g_{20,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{20} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{00,1} + \partial g_{10,0} - \partial g_{01,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{01,1} + \partial g_{11,0} - \partial g_{01,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{02,0} + \partial g_{12,0} - \partial g_{01,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{03,1} + \partial g_{13,0} - \partial g_{01,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{01} = -\left(\frac{\omega r}{c\beta}\right)\left[\left(\frac{r_s}{2r} + \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) - (\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4})\right]$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{00,2} + \partial g_{20,0} - \partial g_{02,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{01,2} + \partial g_{21,0} - \partial g_{02,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{02,2} + \partial g_{22,0} - \partial g_{02,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{03,2} + \partial g_{23,0} - \partial g_{02,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{02} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{00,3} + \partial g_{30,0} - \partial g_{03,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{01,3} + \partial g_{31,0} - \partial g_{03,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{02,3} + \partial g_{32,0} - \partial g_{03,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{03,3} + \partial g_{33,0} - \partial g_{03,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{03} = \left[\left(\frac{car_s \cos\theta}{2r\beta}\right)(\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4})\right]$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{10,1} + \partial g_{10,1} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{11,1} + \partial g_{11,1} - \partial g_{11,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{12,0} + \partial g_{12,1} - \partial g_{11,2}\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{13,1} + \partial g_{13,1} - \partial g_{11,3}\right)$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{20,1} + \partial g_{10,2} - \partial g_{21,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{21,1} + \partial g_{11,2} - \partial g_{21,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{22,1} + \partial g_{12,2} - \partial g_{21,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{23,1} + \partial g_{13,2} - \partial g_{21,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{21} = \left[\left(\frac{1}{\beta}\right)(\alpha r + \frac{2r^3\omega^2}{c^2} + \frac{c^2a^2r_s^2}{r^3})\right]$$

$$\Gamma^2_{30} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{30,0} + \partial g_{00,3} - \partial g_{30,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{31,0} + \partial g_{11,3} - \partial g_{30,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{02,3} - \partial g_{30,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{33,0} + \partial g_{03,3} - \partial g_{30,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{03} = \left[\left(\frac{car_s\cos\theta}{2r\beta}\right)(\alpha + \frac{\omega^2r^2}{c^2} + \frac{c^2a^2r_s^2}{r^4})\right]$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{30,1} + \partial g_{10,3} - \partial g_{31,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{31,1} + \partial g_{11,3} - \partial g_{31,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{32,1} + \partial g_{12,3} - \partial g_{31,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{33,1} + \partial g_{13,3} - \partial g_{31,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{31} = \left[\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2\beta}\right]$$

$$\Gamma^2_{32} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{30,2} + \partial g_{20,3} - \partial g_{32,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{31,2} + \partial g_{21,3} - \partial g_{32,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{32,2} + \partial g_{22,3} - \partial g_{32,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{33,2} + \partial g_{23,3} - \partial g_{32,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{32} = -\left[\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2\beta}\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{30,3} + \partial g_{30,3} - \partial g_{33,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{31,3} + \partial g_{31,3} - \partial g_{33,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{32,3} + \partial g_{32,3} - \partial g_{33,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{33,3} + \partial g_{33,3} - \partial g_{33,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{33} = -\left[\left(\frac{r^2 \sin\theta \cos\theta}{\beta}\right)(\alpha + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^4})\right]$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{20,2} + \partial g_{20,2} - \partial g_{22,0}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{21,2} + \partial g_{21,2} - \partial g_{22,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{22,2} + \partial g_{22,2} - \partial g_{22,2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{23,2} + \partial g_{23,2} - \partial g_{22,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{22} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{10,2} + \partial g_{20,1} - \partial g_{12,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{11,2} + \partial g_{21,1} - \partial g_{12,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{12,2} + \partial g_{22,1} - \partial g_{12,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{13,2} + \partial g_{23,1} - \partial g_{12,3}\right)$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \left[\left(\frac{1}{\beta}\right)(\alpha r + \frac{2\omega^3 r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2 r_s^2}{r^3})\right]$$

$$\Gamma_{13}^{2} = \frac{1}{2} g^{20}\left(\partial g_{10,3} + \partial g_{30,1} - \partial g_{13,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{21}\left(\partial g_{11,3} + \partial g_{31,1} - \partial g_{13,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{22}\left(\partial g_{12,3} + \partial g_{32,1} - \partial g_{13,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{23}\left(\partial g_{13,3} + \partial g_{33,1} - \partial g_{13,3}\right)$$

$$\Gamma_{13}^{2} = \left[\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2\beta}\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{20}\left(\partial g_{20,3} + \partial g_{30,2} - \partial g_{23,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{21}\left(\partial g_{21,3} + \partial g_{31,2} - \partial g_{23,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{22}\left(\partial g_{22,3} + \partial g_{32,2} - \partial g_{23,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{23}\left(\partial g_{23,3} + \partial g_{33,2} - \partial g_{23,3}\right)$$

$$\Gamma^2_{23} = -\left[\frac{a\omega r_s \sin\theta}{2\beta}\right]$$

$$\Gamma^3_{00} = \frac{1}{2}g^{30}\left(\partial g_{00,0} + \partial g_{00,0} - \partial g_{00,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{31}\left(\partial g_{01,0} + \partial g_{01,0} - \partial g_{00,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{32}\left(\partial g_{02,0} + \partial g_{02,0} - \partial g_{00,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{33}\left(\partial g_{03,0} + \partial g_{03,0} - \partial g_{00,3}\right)$$

$$\Gamma^3_{00} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma_{10}^{3}=\frac{1}{2}g^{30}\left(\partial g_{10,0}+\partial g_{00,1}-\partial g_{10,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{31}\left(\partial g_{11,0}+\partial g_{11,1}-\partial g_{10,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{32}\left(\partial g_{12,0}+\partial g_{02,1}-\partial g_{10,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{33}\left(\partial g_{13,0}+\partial g_{03,1}-\partial g_{10,3}\right)$$

$$\Gamma^{3}{}_{10}=\left[\left(\frac{car_{s}}{2r\beta\sin\theta}\right)\left(\left(\frac{r_{s}}{r^{2}}+\frac{2r\omega^{2}}{c^{2}}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)\left(\alpha+\frac{r^{2}\omega^{2}}{c^{2}}-\frac{4\omega^{2}}{c^{2}}\right)\right)\right]$$

$$\Gamma_{20}^{3}=\frac{1}{2}g^{30}\left(\partial g_{20,0}+\partial g_{00,2}-\partial g_{20,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{31}\left(\partial g_{21,0}+\partial g_{11,2}-\partial g_{20,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{32}\left(\partial g_{22,0}+\partial g_{02,2}-\partial g_{20,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{33}\left(\partial g_{23,0}+\partial g_{03,2}-\partial g_{20,3}\right)$$

$$\Gamma^{3}{}_{20}=\left[\left(\frac{car_{s}\cos\theta}{2r\beta\sin^{2}\theta}\right)\left(\alpha+\frac{r^{2}\omega^{2}}{c^{2}}-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right)\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^3_{01} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{00,1} + \partial g_{10,0} - \partial g_{01,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{01,1} + \partial g_{11,0} - \partial g_{01,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{02,0} + \partial g_{12,0} - \partial g_{01,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{03,1} + \partial g_{13,0} - \partial g_{01,3}\right)$$

$$\Gamma^3{}_{10} = \left\lfloor \left(\frac{car_s}{2r\beta\sin\theta}\right)\left(\left(\frac{r_s}{r^2} + \frac{2r\omega^2}{c^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)\left(\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\right)\right\rfloor$$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{00,2} + \partial g_{20,0} - \partial g_{02,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{01,2} + \partial g_{21,0} - \partial g_{02,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{02,2} + \partial g_{22,0} - \partial g_{02,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{03,2} + \partial g_{23,0} - \partial g_{02,3}\right)$$

$$\Gamma^3_{02} = \left[\left(\frac{car_s\cos\theta}{2r\beta\sin^2\theta}\right)\left(\alpha + \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma_{03}^{3} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{00,3} + \partial g_{30,0} - \partial g_{03,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{01,3} + \partial g_{31,0} - \partial g_{03,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{02,3} + \partial g_{32,0} - \partial g_{03,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{03,3} + \partial g_{33,0} - \partial g_{03,3}\right)$$

$$\Gamma_{03}^{3} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{10,1} + \partial g_{10,1} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{11,1} + \partial g_{11,1} - \partial g_{11,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{12,0} + \partial g_{12,1} - \partial g_{11,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{13,1} + \partial g_{13,1} - \partial g_{11,3}\right)$$

$$\Gamma_{11}^{3} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^3_{21} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{20,1} + \partial g_{10,2} - \partial g_{11,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{21,1} + \partial g_{11,2} - \partial g_{21,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{22,0} + \partial g_{12,2} - \partial g_{21,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{23,1} + \partial g_{13,2} - \partial g_{21,3}\right)$$

$$\Gamma^3_{21} = -\left[\frac{2a\omega r_s}{\beta \sin\theta}\right]$$

$$\Gamma^3_{30} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{30,0} + \partial g_{00,3} - \partial g_{30,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{31,0} + \partial g_{11,3} - \partial g_{30,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{02,3} - \partial g_{30,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{33,0} + \partial g_{03,3} - \partial g_{30,3}\right)$$

$$\Gamma^3_{30} = 0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{30,1} + \partial g_{10,3} - \partial g_{31,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{31,1} + \partial g_{11,3} - \partial g_{31,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{32,0} + \partial g_{12,3} - \partial g_{31,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{33,1} + \partial g_{13,3} - \partial g_{31,3}\right)$$

$$\Gamma^{3}_{31} = -\left(\frac{1}{\beta}\right)\left[\left(\frac{c^2 a^2 r_s^{\;2}}{2r^3}\right) - \left(\alpha r + \frac{r^3\omega^2}{c^2} - \frac{r\omega^2}{c^2}\right)\right]$$

$$\Gamma^{3}_{32} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{30,2} + \partial g_{20,3} - \partial g_{32,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{31,2} + \partial g_{21,3} - \partial g_{32,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{32,2} + \partial g_{22,3} - \partial g_{32,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{33,2} + \partial g_{23,3} - \partial g_{32,3}\right)$$

$$\Gamma^{3}_{32} = \left(\frac{\cos\theta}{\beta\sin\theta}\right)\left[\left(\frac{c^2 a^2 r_s^{\;2}}{2r}\right) - \left(\alpha r^2 + \frac{r^4\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)\right]$$

$$\Gamma^{3}_{33} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{30,3} + \partial g_{30,3} - \partial g_{33,0}\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$+\frac{1}{2}g^{31}\left(\partial g_{31,3}+\partial g_{31,3}-\partial g_{33,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{32}\left(\partial g_{32,3}+\partial g_{32,3}-\partial g_{33,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{33}\left(\partial g_{33,3}+\partial g_{33,3}-\partial g_{33,3}\right)$$

$$\Gamma^{3}_{33}=0$$

$$\Gamma^{3}_{22}=\frac{1}{2}g^{30}\left(\partial g_{20,2}+\partial g_{20,2}-\partial g_{22,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{31}\left(\partial g_{21,2}+\partial g_{21,2}-\partial g_{22,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{32}\left(\partial g_{22,2}+\partial g_{22,2}-\partial g_{22,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}g^{33}\left(\partial g_{23,2}+\partial g_{23,2}-\partial g_{22,3}\right)$$

$$\Gamma^{3}_{22}=0$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{10,2} + \partial g_{20,1} - \partial g_{12,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{11,2} + \partial g_{21,1} - \partial g_{12,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{12,2} + \partial g_{22,1} - \partial g_{12,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{13,2} + \partial g_{23,1} - \partial g_{12,3}\right)$$

$$\Gamma^3_{12} = -\left[\frac{2a\omega r_s}{\beta \sin\theta}\right]$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{10,3} + \partial g_{30,1} - \partial g_{13,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{11,3} + \partial g_{31,1} - \partial g_{13,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{12,3} + \partial g_{32,1} - \partial g_{13,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{13,3} + \partial g_{33,1} - \partial g_{13,3}\right)$$

$$\Gamma^3{}_{31} = -\left(\frac{1}{\beta}\right)\left[\left(\frac{c^2 a^2 r_s{}^2}{2r^3}\right) - \left(\alpha r + \frac{r^3\omega^2}{c^2} - \frac{r\omega^2}{c^2}\right)\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{30}\left(\partial g_{20,3} + \partial g_{30,2} - \partial g_{23,0}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{31}\left(\partial g_{21,3} + \partial g_{31,2} - \partial g_{23,1}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{32}\left(\partial g_{22,3} + \partial g_{32,2} - \partial g_{23,2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g^{33}\left(\partial g_{23,3} + \partial g_{33,2} - \partial g_{23,3}\right)$$

$$\Gamma^3{}_{32} = \left(\frac{\cos\theta}{\beta\sin\theta}\right)\left[\left(\frac{c^2 a^2 r_s{}^2}{2r}\right) - \left(\alpha r^2 + \frac{r^4\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)\right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิธีการคำนวณริชชี่เทนเซอร์แรงค์ 2

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\delta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\delta}$$

$$\alpha = \beta = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{00} = & \frac{\partial \Gamma^{0}_{00}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial \Gamma^{0}_{00}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00} \\
& + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{01} + \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{0}_{02} - \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{0}_{02} + \Gamma^{3}_{00}\Gamma^{0}_{03} - \Gamma^{3}_{00}\Gamma^{0}_{03} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{1}_{00}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{01}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00} \\
& + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{01}\Gamma^{1}_{02} + \Gamma^{3}_{00}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{3}_{01}\Gamma^{1}_{03} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{2}_{00}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{02}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{2}_{20} - \Gamma^{0}_{02}\Gamma^{2}_{00} \\
& + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{1}_{02}\Gamma^{2}_{01} + \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{2}_{02}\Gamma^{2}_{02} + \Gamma^{3}_{00}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{3}_{02}\Gamma^{2}_{03} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{3}_{00}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{03}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{3}_{30} - \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{3}_{00} \\
& + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{3}_{01} + \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{3}_{02} + \Gamma^{3}_{00}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{3}_{03}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} = & \frac{\partial \Gamma^{1}_{00}}{\partial x^{1}} - \Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{01}\Gamma^{1}_{02} - \Gamma^{3}_{01}\Gamma^{1}_{03} \\
& + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{1}_{02}\Gamma^{2}_{01} - \Gamma^{3}_{02}\Gamma^{2}_{03} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{3}_{01} - \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{3}_{02}
\end{aligned}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$R_{01} = \frac{\partial \Gamma^0_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{10}$$
$$+ \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} + \Gamma^2_{01}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{12} + \Gamma^3_{01}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{13}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{10}$$
$$+ \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{13}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^2_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{01}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{10}$$
$$+ \Gamma^1_{01}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{01}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{01}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{13}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^3_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{03}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{01}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{10}$$
$$+ \Gamma^1_{01}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{01}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{01}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{13}$$

$$R_{01} = R_{10} = \Gamma^2_{01}\Gamma^0_{02} + \Gamma^3_{01}\Gamma^0_{03} + \frac{\partial \Gamma^2_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{10} + \Gamma^3_{01}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{13}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^3_{01}}{\partial x^3} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{01}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{12}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 0, \beta = 2$

$$R_{02} = \frac{\partial \Gamma^0_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{02}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{20}$$
$$+ \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{21} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{22} + \Gamma^3_{02}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{23}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^1_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{02}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{20}$$
$$+ \Gamma^1_{02}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{02}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{02}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{23}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{20}$$
$$+ \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{23}$$
$$+ \frac{\partial \Gamma^3_{02}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{03}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{02}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{20}$$
$$+ \Gamma^1_{02}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{21} + \Gamma^2_{02}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{02}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{23}$$

$$R_{02} = R_{20} = \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{21} + \Gamma^3_{02}\Gamma^0_{03} + \frac{\partial \Gamma^1_{02}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{20}$$
$$+ \Gamma^1_{02}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial \Gamma^3_{02}}{\partial x^3} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{20} + \Gamma^1_{02}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{21}$$

$\alpha = 0, \beta = 3$

$$
\begin{aligned}
R_{03} = {} & \frac{\partial \Gamma^{0}_{03}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial \Gamma^{0}_{00}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{31} + \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{0}_{02} - \Gamma^{2}_{00}\Gamma^{0}_{32} + \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{0}_{03} - \Gamma^{3}_{00}\Gamma^{0}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{1}_{03}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{01}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{31} + \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{01}\Gamma^{1}_{32} + \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{3}_{01}\Gamma^{1}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{2}_{03}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{02}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{2}_{20} - \Gamma^{0}_{02}\Gamma^{2}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{1}_{02}\Gamma^{2}_{31} + \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{2}_{02}\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{3}_{02}\Gamma^{2}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{3}_{03}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{03}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{3}_{30} - \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{3}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{3}_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{03} = R_{30} = {} & \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{31} + \Gamma^{2}_{03}\Gamma^{0}_{02} + \frac{\partial \Gamma^{1}_{03}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{01}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{03}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{31} + \frac{\partial \Gamma^{2}_{03}}{\partial x^{2}} - \Gamma^{0}_{02}\Gamma^{2}_{30} + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{1}_{02}\Gamma^{2}_{31} - \Gamma^{3}_{02}\Gamma^{2}_{33}
\end{aligned}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 1, \beta = 1$

$$
\begin{aligned}
R_{11} = {} & \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{11}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} \\
& + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{12} + \Gamma^3_{11}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{13} \\
& + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} \\
& + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{13} \\
& + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{10} \\
& + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{13} \\
& + \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} + \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{10} \\
& + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{11}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} = R_{11} = {} & -\frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{01} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{12} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{13} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{10} \\
& + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{13} - \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{10} \\
& + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}
\end{aligned}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 1, \beta = 2$

$$
\begin{aligned}
R_{12} = {} & \frac{\partial \Gamma^0_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{12}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{20} \\
& + \Gamma^1_{12}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{22} + \Gamma^3_{12}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{23} \\
& + \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{12}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{20} \\
& + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{23} \\
& + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{20} \\
& + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{23} \\
& + \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{12}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{20} \\
& + \Gamma^1_{12}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{12}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{12} = R_{21} = {} & -\frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^2} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{20} + \Gamma^2_{12}\Gamma^0_{02} + \Gamma^3_{12}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{23} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^2} \\
& + \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^2} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{20} + \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}
\end{aligned}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 1, \beta = 3$

$$
\begin{aligned}
R_{13} = {} & \frac{\partial \Gamma^{0}_{13}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial \Gamma^{0}_{10}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{13}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{10}\Gamma^{0}_{31} + \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{0}_{02} - \Gamma^{2}_{10}\Gamma^{0}_{32} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{0}_{03} - \Gamma^{3}_{10}\Gamma^{0}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{1}_{13}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{11}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{13}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{0}_{11}\Gamma^{1}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{31} + \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{32} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{3}_{11}\Gamma^{1}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{2}_{13}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{13}\Gamma^{2}_{20} - \Gamma^{0}_{12}\Gamma^{2}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{1}_{12}\Gamma^{2}_{31} + \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{3}_{12}\Gamma^{2}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{3}_{13}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{13}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{13}\Gamma^{3}_{30} - \Gamma^{0}_{13}\Gamma^{3}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& R_{13} = R_{31} = -\frac{\partial \Gamma^{0}_{10}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{30} + \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{0}_{02} - \Gamma^{2}_{10}\Gamma^{0}_{32} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{0}_{03} - \Gamma^{3}_{10}\Gamma^{0}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{1}_{13}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{11}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{13}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{0}_{11}\Gamma^{1}_{30} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{13} + \frac{\partial \Gamma^{2}_{13}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{0}_{12}\Gamma^{2}_{30} \\
& - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{3}_{12}\Gamma^{2}_{33}
\end{aligned}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 2, \beta = 2$

$$
\begin{aligned}
R_{22} = {} & \frac{\partial \Gamma^0_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{20}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{22}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{20} \\
& + \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{21} + \Gamma^2_{22}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} + \Gamma^3_{22}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{23} \\
& + \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{22}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{20} \\
& + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{22}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{23} \\
& + \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{20} \\
& + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{23} \\
& + \frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \Gamma^0_{22}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{20} \\
& + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{21} + \Gamma^2_{22}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{22}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23}
\end{aligned}
$$

$$
R_{22} = -\frac{\partial \Gamma^0_{20}}{\partial x^2} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{21} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{23} + \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{20}
$$

$$
+ \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{20} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 2, \beta = 3$

$$
\begin{aligned}
R_{23} = {} & \frac{\partial \Gamma^0_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{20}}{\partial x^3} + \Gamma^0_{23}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{30} \\
& + \Gamma^1_{23}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{31} + \Gamma^2_{23}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{32} + \Gamma^3_{23}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^3} + \Gamma^0_{23}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{30} \\
& + \Gamma^1_{23}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{23}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{32} + \Gamma^3_{23}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^3} + \Gamma^0_{23}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{30} \\
& + \Gamma^1_{23}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{31} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^3} + \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{30} \\
& + \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{31} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& R_{23} = R_{32} = -\frac{\partial \Gamma^0_{20}}{\partial x^3} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{30} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{31} + \Gamma^2_{23}\Gamma^0_{02} + \Gamma^3_{23}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{33} \\
& -\Gamma^0_{21}\Gamma^1_{30} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{33} + \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^2} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{31} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23}
\end{aligned}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\alpha = 3, \beta = 3$

$$
\begin{aligned}
R_{33} = {} & \frac{\partial \Gamma^{0}_{33}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial \Gamma^{0}_{30}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{0}_{30}\Gamma^{0}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{30}\Gamma^{0}_{31} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{0}_{02} - \Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{32} + \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{0}_{03} - \Gamma^{3}_{30}\Gamma^{0}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{1}_{33}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{31}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{0}_{31}\Gamma^{1}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{31}\Gamma^{1}_{31} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{32} + \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{2}_{33}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{32}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{2}_{20} - \Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{1}_{32}\Gamma^{2}_{31} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{2}_{33} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{3}_{33}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{33}}{\partial x^{3}} + \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{30} - \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{3}_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33} = {} & -\frac{\partial \Gamma^{0}_{30}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{0}_{30}\Gamma^{0}_{30} + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{30}\Gamma^{0}_{31} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{0}_{02} - \Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{32} \\
& + \frac{\partial \Gamma^{1}_{33}}{\partial x^{1}} - \Gamma^{0}_{31}\Gamma^{1}_{30} + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33} + \frac{\partial \Gamma^{2}_{33}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{32}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{30} \\
& + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{2}_{32}
\end{aligned}
$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ เอกลักษณ์ นามสกุล จันเทร์มะ เกิดวันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2524 จบการศึกษาระดับมัธยมปลายจากโรงเรียนวัดเทพศิรินทร์ทราวาส ระดับวิทยาศาสตร์บัณฑิตจากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ (ประสานมิตร) ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ และเข้าศึกษาต่อระดับวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต ภาควิทยาศาสตร์ทางทะเล คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2550

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย