การแปลงสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

นางสาวกนกวรรณ ไทยรัตน์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2553

TRANSFORMATION FOR PERFECT FLUID SPHERES IN ISOTROPIC COORDINATES

Miss Kanokwan Thairatana

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2010

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การแปลงสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

โดย นางสาวกนกวรรณ ไทยรัตน์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก อาจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ)

.......เพชรอาภา บุญเสริม.............. อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(อาจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. รตินันท์ บุญเคลือบ)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. จักษ์ อัศวานันท์)

กนกวรรณ ไทยรัตน์ : การแปลงสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี. (TRANSFORMATION FOR PERFECT FLUID SPHERES IN ISOTROPIC COORDINATES) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: อ.ดร.เพชรอาภา บุญเสริม 70 หน้า.

วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความเกี่ยวข้องกับทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่ชื่อว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพโดยใช้สมการสนามของไอน์สไตน์ที่เกิดขึ้นในทฤษฎีนี้เป็นสมการสำคัญในการพัฒนาทฤษฎีบทสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี โดยแบ่งออกเป็นห้าบท ดังนี้ บทแรกกล่าวถึงสัมพัทธภาพพิเศษซึ่งเป็นการใช้หลักสัมพัทธภาพกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย โดยมีความเร็วแสงเป็นค่าคงที่และมีการแปลงเป็นแบบลอเรนซ์ ในบทที่สอง กล่าวถึงสัมพัทธภาพทั่วไปซึ่งสามารถใช้ได้กับกรอบอ้างอิงทั่วไปโดยมีแรงโน้มถ่วงเข้ามาเกี่ยวข้อง ในบทที่สามกล่าวถึงลักษณะและคุณสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ในบทที่สี่ กล่าวถึงทฤษฎีการแปลงสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ของ BVW (Boonserm, Visser, and Weinfurtner) เราพิจารณาในพิกัดไอโซทรอปี โดยเราได้นำเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์มาประยุกต์ใช้จริงกับทฤษฎีบทของ BVW เพื่อพิจารณาเมตริกใหม่ที่เกิดขึ้น ทำให้เราสามารถจัดกลุ่มของทรงกลมของไหลสมบูรณ์จากผลการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 7 ของ BVW ออกได้เป็นสองกลุ่มคือเมตริกสร้างได้และเมตริกสร้างไม่ได้ จากนั้นเราได้เสนอทฤษฎีบทสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี สำหรับบทสุดท้ายเป็นบทสรุป นอกจากนี้ในส่วนของภาคผนวกมีตัวอย่างของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทโดยเราได้ใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่ชื่อว่า เมเปิล ช่วยในการคำนวณทำให้เราได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

ภาควิชา........คณิตศาสตร์......................ลายมือชื่อนิสิต.....กนกวรรณ ไทยรัตน์.....................

สาขาวิชา........คณิตศาสตร์....................ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก..เพชรอาภา บุญเสริม

ปีการศึกษา.......2553......................

5272205823 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : GENERAL RELATIVITY / PERFECT FLUID SPHERES / ISOTROPIC COORDINATES / TRANSFORMATION THEOREMS

KANOKWAN THAIRATANA : TRANSFORMATION FOR PERFECT FLUID SPHERES IN ISOTROPIC COORDINATES. ADVISOR : PETARPA BOONSERM, Ph.D., 70 pp.

This thesis is about the theory of physics called theory of relativity. The Einstein field equations in this theory are important to develop theorems for perfect fluid spheres in isotropic coordinates. This thesis is divided into five chapters as follows: The first chapter discusses special relativity which use the principle of relativity and inertial reference frames where the speed of light is constant and the transformation of this relativity is Lorentzian transformation. In chapter 2, we discuss general relativity with both inertial and non-inertial reference frames used in the gravitational field. In chapter 3, we discuss the nature and some properties of perfect fluid spheres. In chapter 4, we present BVW's (Boonserm, Visser, and Weinfurtner) transformation for perfect fluid spheres in isotropic coordinates. We have the metrics of perfect fluid spheres applied with BVW's theorem consider if the new metrics happen. We can classify the perfect fluid spheres by using 7^{th} BVW theorem into two groups that are seed and non-seed metrics. Then we proposed a modified theorem for perfect fluid spheres in isotropic coordinates. The last chapter contains conclusion and discussion. Moreover, the appendix consists of the examples of the results applied by 7^{th} and 8^{th} BVW transformation theorems. Finally, we have used the mathematical program, called Maple, for calculating and checking what we obtain to get the results accurately.

Department : Mathematics	Student's Signature Kanokwan Thairatana
Field of Study : Mathematics	Advisor's Signature B. Petarpa
Academic Year : 2010	

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ อ.ดร. เพชรอาภา บุญเสริม สำหรับคำแนะนำ คำปรึกษา ทั้งในเรื่องการเรียนและการทำงานวิจัย และเป็นผู้สนับสนุนให้ข้าพเจ้าจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบคุณ ศ.ดร. Matt Visser และ ดร. ณฤทธิ์ ปิฎกรัชต์ สำหรับคำแนะนำในส่วนของความถูกต้องและความเรียบร้อยของวิทยานิพนธ์ที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ อ.ดร. รตินันท์ บุญเคลือบ และ รศ.ดร.จักษ์ อัศวานันท์ สำหรับคำแนะนำและความคิดเห็นในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

นอกจากนี้ ขอขอบคุณผู้ร่วมงานของข้าพเจ้า นายพนิต เสือวรรณศรี สำหรับความช่วยเหลือในการจัดทำวิทยานิพนธ์นี้ อีกทั้งเป็นผู้ติดตามข่าวสารในการจัดทำวิทยานิพนธ์อีกด้วย

ขอขอบคุณสถานศึกษา ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่เป็นสถานที่ให้ทั้งความรู้และประสบการณ์ที่มีค่าในการศึกษาปริญญาโทในครั้งนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณครอบครัวของข้าพเจ้าและเพื่อน ๆ ทุกคน สำหรับการสนับสนุนและกำลังใจซึ่งเป็นแรงผลักดันให้ข้าพเจ้าจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จ

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

บทที่ 1

สัมพัทธภาพพิเศษ (Special relativity)

ในปี ค.ศ. 1905 อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ได้นำเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ในบทความเกี่ยวกับพลศาสตร์ไฟฟ้าของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ (On the Electrodynamics of Moving Bodies) [29] โดยก่อนหน้านี้ หลักสัมพัทธภาพของกาลิเลโอได้กล่าวไว้ว่าการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ทั้งหมดเป็นการสัมพัทธ์และไม่มีสถานะของการหยุดนิ่งสัมบูรณ์และไม่สามารถนิยามได้ ต่อมาไอน์สไตน์ได้สร้างทฤษฎีโดยรวมหลักสัมพัทธภาพของกาลิเลโอเข้ากับสมมติฐานที่ว่า ไม่ว่าผู้สังเกตจะอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่เชิงเส้นด้วยความเร็วคงที่ ผู้สังเกตทุกคนวัดอัตราเร็วของแสงได้เท่ากันเสมอ ทำให้ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษได้หักล้างแนวคิดของนิวตันในเรื่องของปริภูมิสัมบูรณ์และเวลาสัมบูรณ์ โดยกล่าวว่า ระยะทางและเวลาจะขึ้นอยู่กับผู้สังเกตและเวลากับปริภูมิจะมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับผู้สังเกต แต่สำหรับในสามัญสำนึกทั่วไปและในการทดลองเมื่อความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่น้อยมากเมื่อเทียบกับอัตราเร็วแสง ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษจะมีความสอดคล้องกับกลศาสตร์นิวตัน [7-11, 17]

สำหรับคำว่า “พิเศษ” ในทฤษฎีนี้มีที่มาจากการที่ประยุกต์หลักสัมพัทธภาพเข้ากับกรอบอ้างอิงที่เป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยเท่านั้น โดยต่อมาในปี ค.ศ. 1915 ไอน์สไตน์ได้พัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปโดยประยุกต์หลักสัมพัทธภาพให้ใช้ได้กับทุกกรอบอ้างอิง [7-11, 17]

ก่อนที่เราจะศึกษาและทำความเข้าใจความหมายหรือหลักการของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เราจำเป็นต้องทำความรู้จักและเข้าใจความหมายของคำศัพท์ต่าง ๆ ซึ่งมีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่จะได้กล่าวต่อไป ดังนี้

1.1 เหตุการณ์ (Event)

เรานิยามว่า เหตุการณ์ คือ สิ่งที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งหนึ่ง ที่เวลาหนึ่ง โดยมักสนใจเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น ว่าเกิดขึ้นที่ไหนและที่เวลาใด นั่นคือ เราต้องมีการเลือกระบบอ้างอิง โดยระบบอ้างอิงที่ต่างกันจะให้ค่าพิกัดและเวลาของเหตุการณ์เดียวกันต่างกัน สำหรับในทฤษฎีสัมพัทธภาพ เราจะเรียกระบบอ้างอิงนี้ว่า กรอบอ้างอิง [7-11, 17]

1.2 กรอบอ้างอิง (Frames of reference)

คำว่า กรอบอ้างอิง มีความเกี่ยวข้องกับการสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยในการกล่าวว่าวัตถุหนึ่งมีการเคลื่อนที่นั่นหมายความว่าตำแหน่งของวัตถุนั้นเทียบกับวัตถุอื่นกำลังเปลี่ยนไป ดังนั้น เราจะไม่สามารถระบุตำแหน่งของวัตถุหนึ่ง ๆ ได้หากเราไม่อ้างอิงถึงวัตถุอื่น นั่นคือ

จุดอ้างอิง นอกจากนี้เราต้องเลือกแกนอ้างอิงที่มีทิศและสเกลความยาวบนแกนนั้น ๆ เพื่อใช้ในการระบุพิกัดตำแหน่งของวัตถุ โดยเราจะเรียกระบบที่มีจุดอ้างอิงและระบบพิกัดแกนนี้ว่า ระบบพิกัด นอกจากการระบุตำแหน่งแล้ว เรายังต้องระบุว่าวัตถุอยู่ที่ตำแหน่งนั้น ๆ ณ เวลาใดด้วย ดังนั้นเราต้องมีชุดนาฬิกาที่มีคุณสมบัติเหมือนกันและตั้งเวลาตรงกันประจำอยู่ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ เพื่อใช้จับเวลา สำหรับในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เราจะใช้กรอบอ้างอิงที่เรียกว่า “กรอบอ้างอิงเฉื่อย” [7, 10, 11, 17]

1.3 กรอบอ้างอิงเฉื่อย (Inertial frame)

กรอบอ้างอิงเฉื่อยคือกรอบอ้างอิงที่กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเป็นจริง นั่นหมายความว่า การสังเกตการเคลื่อนที่วัตถุในกรอบอ้างอิงเฉื่อยนี้ หากวัตถุถูกกระทำด้วยแรงสุทธิที่มีค่าเป็นศูนย์จะยังคงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว นั่นหมายความว่า วัตถุอยู่ภายในกรอบอ้างอิงเฉื่อยจะมีลักษณะดังนี้

- ถ้าวัตถุอยู่นิ่ง มันก็จะยังคงอยู่นิ่ง

- ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ มันจะยังคงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

นอกจากนี้กรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยจะถูกเรียกว่าเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยด้วย แต่สำหรับกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่ใช่กรอบอ้างอิงเฉื่อย ซึ่งเราเรียกว่า กรอบอ้างอิงไม่เฉื่อย (Non-inertial frame) [7, 9-11, 17]

1.4 สมมติฐานของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

ไอน์สไตน์ได้เสนอแนวคิดว่า กฎฟิสิกส์ในกรอบอ้างอิงเฉื่อยทั้งหมดจะต้องมีลักษณะเหมือนกันหรือมีผลเท่ากันและแสงเดินทางในอวกาศด้วยความเร็วที่มีขนาดเท่ากันเสมอไม่ว่าจะวัดจากกรอบอ้างอิงใด เราจึงสรุปสมมติฐานของไอน์สไตน์ออกเป็น 2 ข้อด้วยกันคือ

1. <u>สมมติฐานข้อแรก</u> (หลักสัมพัทธภาพอย่างพิเศษ) กฎทางฟิสิกส์ย่อมเหมือนกันในทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย นั่นคือ ไม่มีกรอบอ้างอิงพิเศษใด ๆ

2. <u>สมมติฐานข้อที่สอง</u> (ความไม่แปรเปลี่ยนของความเร็วแสง) อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศเป็นค่าคงที่สากล ($c = 3\times10^8 m/s$) ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดแสงนั้น [7-11, 17]

หลังจากที่พิจารณาว่าความเร็วแสงเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงในกรอบอ้างอิงทุกกรอบ ทำให้ไอน์สไตน์ได้นำปริภูมิ 3 มิติรวมเข้ากับเวลารวมกันเป็น “ปริภูมิเวลาอวกาศ (spacetime)” ซึ่ง

เป็นปริภูมิ 4 มิติ ดังนั้น เราสามารถสร้างปริมาณทางคณิตศาสตร์นิยามเป็น เวกเตอร์-4 สำหรับการอธิบายการที่เวลารวมเข้ากับปริภูมิ 3 มิติ [8]

1.5 **การหาระยะทางในปริภูมิเวลาอวกาศ** (spacetime distance)

เนื่องจากปริภูมิเวลาอวกาศเป็นปริภูมิ 4 มิติ โดยรวมเอาปริภูมิ 3 มิติ เข้ากับเวลา (1 มิติ) เมื่อเราต้องการบ่งบอกถึงเหตุการณ์หนึ่ง ๆ ที่เกิดขึ้น เราสามารถเขียนได้ดังนี้

สำหรับเหตุการณ์ที่ 1 จะแทนด้วยสัญลักษณ์ E_1

$$E_1 = \left(ct_1, x_1, y_1, z_1\right) \tag{1.1}$$

โดยที่ ct_1 แสดงถึง ระยะทางที่แสงเดินทางถึงจุดเกิดเหตุการณ์ที่ 1 คือ ระยะห่างจากผู้สังเกตถึงเหตุการณ์ที่ 1

และสำหรับเหตุการณ์ที่ 2 จะแทนด้วยสัญลักษณ์ E_2

$$E_2 = \left(ct_2, x_2, y_2, z_2\right) \tag{1.2}$$

เมื่อไอน์สไตน์ได้ยึดหลักที่ว่าแสงเดินทางด้วยความเร็วคงที่สูงสุดในเอกภพและเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการวัด นั่นคือ เขาสามารถมองว่าถ้าจะหาปริมาณคงสภาพ (invariant) ที่วัดระยะห่างในปริภูมิเวลาอวกาศ ซึ่งเราเรียกว่า ช่วงปริภูมิเวลาอวกาศ (spacetime interval) ซึ่งก็คือระยะทางในปริภูมิเวลาอวกาศ (spacetime distance) ระหว่าง 2 เหตุการณ์ จะเขียนด้วย

$$\left(\Delta S\right)^2 = -\left(ct_2 - ct_1\right)^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 \tag{1.3}$$

ในที่นี้จะใช้ $c = 1$ ซึ่งเป็นหน่วยธรรมชาติ และมองในรูปของอนุพันธ์ทำให้สามารถเขียนสมการข้างบนได้ ดังนี้

$$\left(\Delta S\right)^2 \to ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.4}$$

เนื่องจากค่า ds^2 เป็นปริมาณคงสภาพ ซึ่งโดยแท้จริงแล้วชื่อเรียกของ ds^2 คือ spacetime interval squared แต่ตามหลักสากล เรามักเรียกว่า เมตริก (metric)และปริมาณนี้สามารถเขียนในรูปของ เมตริกเทนเซอร์ (metric tensor)ได้ ดังนี้

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^{\nu} dx^{\nu} \tag{1.5}$$

และถ้าใช้ข้อตกลงในการรวมของไอน์สไตน์ (Einstein summation convention) จะได้ว่า

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\nu} dx^{\nu} \tag{1.6}$$

โดยที่

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

สำหรับสมการที่ (1.4) นั่นคือ

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

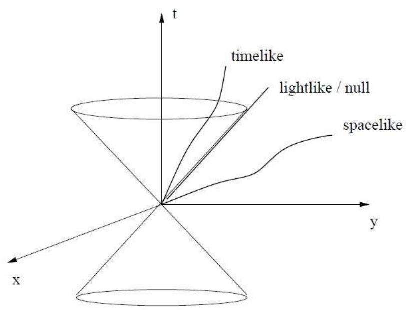
จะพบว่าเมื่อเราเขียน $ds^2 = 0$ จะได้ว่าเราเดินทางด้วยความเร็วแสง เนื่องจากความแตกต่างระหว่างช่วงห่างเป็นศูนย์ และถ้าเราเดินทางด้วยความเร็วน้อยกว่าแสง เราจะได้ $ds^2 < 0$ และถ้าความเร็วมากกว่าแสง เราจะได้ $ds^2 > 0$

1.6 **กรวยแสง** (Light cone)

เมื่อเรามีเมตริกแล้ว เราสามารถทราบเรขาคณิตของปริภูมิเวลาอวกาศได้ นั่นคือสามารถหาได้ว่าปริภูมิเวลาอวกาศมีความโค้งงอหรือแบนราบ โดยเรามีนิยามสำหรับ ds^2 ดังต่อไปนี้

$ds^2 > 0$	spacelike interval
$ds^2 = 0$	lightlike (null) interval
$ds^2 < 0$	timelike interval

มีความหมายต่อไปนี้



ภาพที่ 1: ภาพกรวยแสงซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 ส่วน คือ Time-like, Light-like และ Space-like [8]

- Space-like curve $\left(ds^2 > 0\right)$ เป็นบริเวณที่มีความเร็วมากกว่าแสง
- Light-like curve $\left(ds^2 = 0\right)$ ประกอบด้วยจุดหรือตำแหน่งที่มีความเร็วเท่ากับแสง ประกอบกันเป็นรูปทรงกรวยซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ อนาคตและอดีต
- Time-like curve $\left(ds^2 < 0\right)$ เป็นบริเวณที่มีความเร็วน้อยกว่าแสง

เรามี 3 อาณาเขตตามนิยามของ ds^2 กล่าวไว้ว่าแสงจะเดินทางบนกรวยแสงที่ทำมุม 45 องศากับแกนของมิติปริภูมิ ไม่มีวัตถุใดที่สามารถเดินทางออกนอกกรวยแสงได้นอกจากวัตถุนั้นจะเดินทางได้เร็วกว่าแสง [8]

1.7 การแปลงพิกัดในปริภูมิเวลาอวกาศ

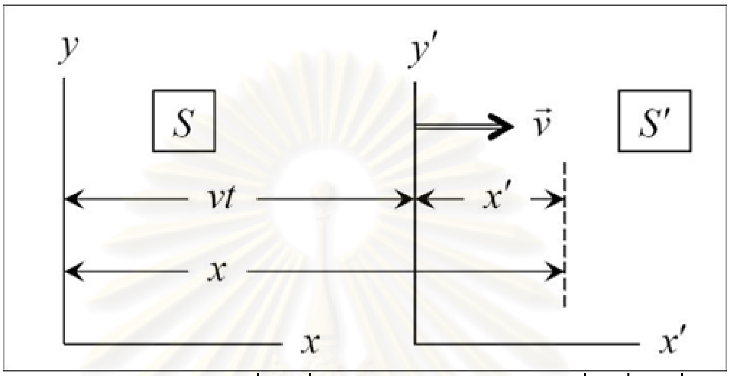
1.7.1 **สัมพัทธภาพแบบกาลิเลโอ** (Galilean relativity)

สัมพัทธภาพแบบกาลิเลโอ กล่าวว่า “กฎทางฟิสิกส์จะเหมือนกันสำหรับผู้สังเกต 2 คนที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กันด้วยความเร็วคงที่” ซึ่งรวมถึงในกลศาสตร์ของนิวตันด้วย เราจะถือว่าเวลาจะมีค่าเท่ากันและเดินด้วยอัตราที่เท่ากันสำหรับทุกๆผู้สังเกต ซึ่งเราอาจบอกว่า เวลาเป็นสิ่งสมบูรณ์ ไม่ใช่เป็นสิ่งสัมพัทธ์ แต่เมื่อเราพิจารณาทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ความสมบูรณ์ของเวลาจะเปลี่ยนไป

หลักสัมพัทธภาพของกาลิเลโอ กล่าวถึงผู้สังเกต 2 คน ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันด้วยความเร็วคงที่ ผู้สังเกตแต่ละคนจะอธิบายกฎทางฟิสิกส์ในกรอบอ้างอิงของตัวเอง โดยเราอาจจะให้ผู้สังเกตคนแรกอยู่ในกรอบอ้างอิง S และใช้ พิกัด (t, x, y, z) ผู้สังเกตคนที่สอง อยู่ในกรอบอ้างอิง S' และใช้ พิกัด (t', x', y', z') โดยหลักสัมพัทธภาพของกาลิเลโอกล่าวว่ากฎทางฟิสิกส์จะเหมือนกันไม่ว่าจะใช้กรอบอ้างอิงแบบใดก็ตาม [7-11, 17]

1.7.2 **การแปลงแบบกาลิเลโอ** (Galilean transformation)

เราจะศึกษาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงเฉื่อยแต่ละกรอบ พิจารณาผู้สังเกตสองคนในกรอบอ้างอิง S และ S' ตามลำดับ กำหนดให้กรอบอ้างอิง S' เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v เทียบกับกรอบอ้างอิง S ตามแนวแกน x (อาจมองว่ากรอบ S อยู่นิ่ง)



ภาพที่ 2: ภาพกรอบอ้างอิง S ที่อยู่นิ่งและกรอบอ้างอิง S' ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v

[4, 7-9, 11, 17]

จากภาพข้างบนความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด (t, x, y, z) และ (t', x', y', z') สามารถหาได้จาก

$$\left.\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

ซึ่งเราเรียกความสัมพันธ์ดังกล่าวว่า "การแปลงแบบกาลิเลโอ"

จากความสัมพันธ์ดังกล่าว เราจะได้ระยะทางที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \Delta t' &= \Delta t \\ \Delta x' &= \Delta x - v\Delta t \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

สำหรับสัมพัทธภาพแบบกาลิเลโอ "เวลาเป็นสิ่งสมบูรณ์" นั่นคือ

$$t = t' \tag{1.10}$$

ดังนั้นความเร็วแต่ละพิกัด คือ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

หรือ

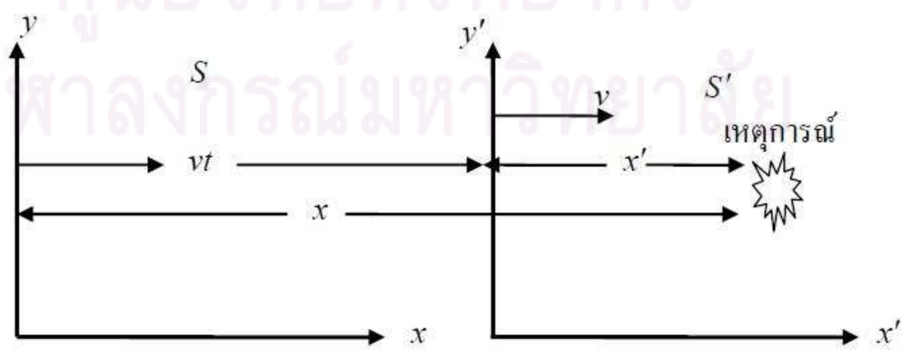
$$\left.\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

ทั้งหมดนี้คือความเร็วสัมพัทธ์ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ [7-11, 17]

1.7.3 **การแปลงแบบลอเรนซ์** (Lorentz transformation)

เนื่องจากผลของการที่อัตราเร็วของแสงคงที่สำหรับทุกผู้สังเกตทำให้เวลาเป็นสิ่งสัมพัทธ์และขึ้นกับผู้สังเกต โดยที่ พิกัดของผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อยต่างๆ ไม่ได้สัมพันธ์กันผ่านการแปลงแบบกาลิเลโออีกต่อไป

เฮนดริก อันโตน ลอเรนท์ซ (Hendrik Antoon Lorentz) นักฟิสิกส์ชาวดัตซ์ ได้ค้นพบความสัมพันธ์นี้ เราจึงเรียกความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด (t, x, y, z) กับ (t', x', y', z') นี้ว่า “การแปลงแบบลอเรนซ์”



ภาพที่ 3: ภาพกรอบอ้างอิง S' เคลื่อนที่ไปทาง $+x$ ด้วยความเร็ว v เทียบกับกรอบอ้างอิงกรอบอ้างอิง S [4, 7-9, 11, 17]

สำหรับผู้สังเกตในกรอบอ้างอิง S ซึ่งใช้พิกัด (t,x,y,z) และผู้สังเกตในกรอบอ้างอิง S' ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ไปในทิศทาง $+x$ เทียบกับผู้สังเกตในกรอบอ้างอิง S การแปลงลอเรนซ์ ซึ่งเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด (t,x,y,z) กับ (t',x',y',z') สามารถเขียนได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} t &= \gamma\left(t'+\frac{\beta x'}{c}\right) \\ x &= \gamma\left(x'+vt'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

หรือเราสามารถที่จะเขียนพิกัด (t',x',y',z') ในรูปของ (t,x,y,z) ได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta x}{c}\right) \\ x' &= \gamma\left(x-vt'\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

โดยที่สัญลักษณ์แกมมา (γ) ใช้เขียนแทน ตัวประกอบลอเรนซ์ (Lorentz factor) ซึ่งนิยามโดย

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.15}$$

และสัญลักษณ์ เบต้า (β) ใช้แทนค่า Rapidity ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างอัตราเร็วของกรอบอ้างอิง S' กับอัตราเร็วแสง

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{1.16}$$

การรวมความเร็วในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

จากการแปลงแบบลอเรนซ์

$$\left.\begin{aligned} t &= \gamma\left(t'+\frac{\beta x'}{c}\right) \\ x &= \gamma\left(x'+vt'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}
dt &= \gamma\left(dt'+\frac{\beta dx'}{c}\right)=\gamma\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)dt' \\
dx &= \gamma\left(dx'+vdt'\right)=\gamma\left(\frac{dx'}{dt'}dt'+vdt'\right)=\gamma\left(u'_x+v\right)dt' \\
dy &= dy' \\
dz &= dz'
\end{aligned}\right\} \quad (1.18)$$

โดยพิจารณา

$$u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma\left(u'_x+v\right)dt'}{\gamma\left(1+\frac{vu_x}{c^2}\right)dt'}=\frac{u'_x+v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \quad (1.19)$$

ซึ่งสมการ (1.21) เป็นความเร็วในแนวแกน x

ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}
u_y &= \frac{dy}{dt}=\frac{u'_y/\gamma}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \\
u_z &= \frac{dz}{dt}=\frac{u'_z/\gamma}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (1.20)$$

การแปลงที่เขียน u'_x,u'_y,u'_z ให้อยู่ในรูป u_x,u_y,u_z

$$\left.\begin{aligned}
u'_x &= \frac{dx'}{dt'}=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu'_x}{c^2}} \\
u'_y &= \frac{dy'}{dt'}=\frac{u_y/\gamma}{1-\frac{vu'_x}{c^2}} \\
u'_z &= \frac{dz'}{dt'}=\frac{u_z/\gamma}{1-\frac{vu'_x}{c^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (1.21)$$

ทำให้เราสามารถรวมความเร็วสำหรับแกนต่าง ๆ ในทฤษฏีสัมพัทธภาพได้ [7-11, 17]

ผลจากการแปลงลอเรนซ์ทำให้เรามีปรากฏการณ์สำคัญเกิดขึ้น ซึ่งจะกล่าวต่อไป ดังนี้

1.8 **สัมพัทธภาพแห่งความพร้อมเพรียง** (Relativity of simultaneity)

ตามทฤษฎีสัมพัทธภาพแบบนิวตันหรือแบบกาลิเลโอ เวลาเป็นเวลาสัมบูรณ์ หมายความว่า เวลามีค่าเป็นอย่างเดียวหรือเท่ากันหมดไม่ว่าจะวัดในกรอบอ้างอิงเฉื่อยใด ดังนั้นการที่เหตุการณ์สองเหตุการณ์เกิดขึ้น ณ เวลาเดียวกัน จึงมีความหมายเหมือนกันสำหรับผู้สังเกตในทุกๆ กรอบอ้างอิงเฉื่อย

แต่สำหรับสัมพัทธภาพพิเศษซึ่งสัมพันธ์กับการแปลงลอเรนซ์ ทำให้เรากล่าวได้ว่าเหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ ที่เกิดขึ้น ณ เวลาเดียวกัน แต่ในที่ ๆ ต่างกันในปริภูมิเวลาอวกาศโดยผู้สังเกตคนหนึ่งจะไม่ได้เกิด ณ เวลาเดียวกันซึ่งวัดโดยผู้สังเกตอีกคนหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอสัมพัทธ์กับผู้สังเกตคนแรก ดังนั้น การกล่าวว่าเหตุการณ์สองเหตุการณ์เกิดขึ้นที่จุดเวลาเดียวกันนั้นมีความหมายสัมพัทธ์กับผู้สังเกตเท่านั้น ผู้สังเกตในกรอบอีกกรอบหนึ่งจะเห็นว่าเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้นที่เวลาต่างกัน ส่วนจะต่างกันมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับระยะทางของเหตุการณ์ทั้งสอง [7-9, 17]

1.9 **การยืดออกของเวลา** (Time dilation)

ถ้าเรามีนาฬิกาสองเรือนที่เหมือนกันทุกประการ โดยให้เรือนหนึ่งอยู่กับที่ซึ่งถือเป็นตัวแทนผู้สังเกตที่อยู่กับที่ ส่วนผู้สังเกตที่เคลื่อนที่กำหนดให้เป็นนาฬิกาอีกเรือนหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไปตามแกน x ด้วยอัตราเร็ว v

จากการแปลงแบบลอเรนซ์

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \tag{1.22}$$

เนื่องจากนาฬิกาที่ใช้วัดเรือนหนึ่งอยู่กับที่ $\Delta x' = 0$ และ $\Delta t = \gamma \Delta t'$ มีความหมายว่า ผู้สังเกตที่อยู่กับนาฬิกาที่อยู่กับที่จะสังเกตว่านาฬิกาที่เคลื่อนที่เดินช้าลงมีค่าเท่ากับคูณด้วย γ

หรือ

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t \tag{1.23}$$

นั่นคือลักษณะของการยืดออกของเวลา แต่หากวัตถุมีความเร็วน้อยกว่าความเร็วแสงมากๆ เวลาที่วัดได้มีค่าเท่ากัน [4, 7-11]

1.10 **การหดของระยะทาง** (Length contraction)

ถ้าเรามีวัตถุเกร็ง เช่น ไม้เมตร โดยที่อันหนึ่งวางไว้อยู่กับที่และอีกอันหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ในทิศทางของแกน x

ความยาวของไม้เมตรที่วัดได้โดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่คือ

$$\Delta L' = \gamma \Delta L \tag{1.24}$$

หรือ สำหรับผู้สังเกตที่อยู่กับที่

$$\Delta L = \frac{\Delta L'}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta L' \tag{1.25}$$

จะพบว่าผู้สังเกตที่เคลื่อนที่จะสามารถวัดความยาวได้น้อยกว่าผู้สังเกตที่อยู่กับที่ แต่หากอัตราเร็วของการเคลื่อนที่นั้นมีค่าน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ๆ ความยาวที่วัดได้จะมีค่าเท่ากัน [7, 9-11, 17]

หลังจากที่ไอน์สไตน์ได้นำเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษซึ่งเป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุภายในกรอบอ้างอิงที่เรียกว่า กรอบอ้างอิงเฉื่อย ซึ่งเป็นกรอบอ้างอิงที่ไม่มีความเร่งเข้ามาเกี่ยวข้องภายใต้สมมติฐานที่สำคัญ 2 ประการ คือ ความเหมือนกันของกฎฟิสิกส์ในกรอบอ้างอิงเฉื่อยและการไม่แปรเปลี่ยนของความเร็วแสง โดยผู้สังเกตไม่ว่าจะอยู่ในสถานะใดก็ตามจะวัดความเร็วของแสงได้เท่ากัน ทำให้ไอน์สไตน์ได้รวมเอาปริภูมิ 3 มิติเข้ากับเวลาเป็นปริภูมิเวลาอวกาศ 4 มิติ อีกทั้งยังเกี่ยวข้องกับการแปลงพิกัดนั่นคือการแปลงแบบลอเรนซ์ซึ่งพบว่าเวลาสามารถแปรผันตามสถานะของผู้สังเกต ทำให้มีปรากฏการณ์ที่น่าสนใจเกิดขึ้น เช่น สัมพัทธภาพแห่งความพร้อมเพรียง การยืดออกของเวลา การหดสั้นของระยะทาง เป็นต้น นอกจากนี้ในปี ค.ศ. 1915 ไอน์สไตน์ได้นำเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปที่มีความเร่งหรือก็คือแรงโน้มถ่วงเข้ามาเกี่ยวข้อง นั่นคือเป็นการพิจารณากรอบอ้างอิงทั่วไปที่ไม่จำเพาะต้องเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย ดังจะกล่าวในบทต่อไป

บทที่ 2

สัมพัทธภาพทั่วไป (General relativity)

สัมพัทธภาพทั่วไป คือ ทฤษฎีเชิงเรขาคณิตของความโน้มถ่วงและเอกภพวิทยา โดย อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ได้นำเสนอทฤษฎีนี้ในปี ค.ศ. 1915 โดยก่อนหน้านี้ เขาได้นำเสนอสัมพัทธภาพพิเศษในปี ค.ศ. 1905 ซึ่งเป็นการพิจารณาเฉพาะกรอบอ้างอิงเฉื่อยซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีความเร่งหรือแรงโน้มถ่วงเข้ามาเกี่ยวข้อง แต่สัมพัทธภาพทั่วไปเป็นการพิจารณาในกรอบอ้างอิงทั่วไป ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า สัมพัทธภาพพิเศษเป็นส่วนหนึ่งของสัมพัทธภาพทั่วไป [4, 5, 15]

ทฤษฎีทั้งสองนี้ได้ถูกสร้างขึ้นเพื่อใช้อธิบายข้อเท็จจริงที่ว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้นไม่ได้เคลื่อนที่ตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน เนื่องจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่โดยไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต แนวคิดหลักของทั้งสองทฤษฎีนี้ คือ แม้ผู้สังเกตสองคนที่กำลังเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันนั้นอาจจะตรวจวัดการเปลี่ยนแปลงของเวลาและตำแหน่งได้ต่างกันสำหรับเหตุการณ์หนึ่งๆ แต่ผู้สังเกตทั้งสองจะยังคงสังเกตเห็นเนื้อหาของกฎทางฟิสิกส์ที่เหมือนกัน [4, 5, 7-11, 15, 17]

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปนี้กล่าวถึงสมการหนึ่งที่มาแทนที่กฎแรงโน้มถ่วงของนิวตัน โดยใช้เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และเทนเซอร์ในการอธิบายแรงโน้มถ่วง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผู้สังเกตทุกคนเหมือนกันไม่ว่าจะอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่หรือไม่ กฎของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปจะเหมือนกันสำหรับผู้สังเกตทุกคน แม้ว่าผู้สังเกตแต่ละคนเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเมื่อเทียบกับผู้สังเกตคนอื่น ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปนี้ แรงโน้มถ่วงไม่ได้เป็นแรงอย่างในกฎแรงโน้มถ่วงของนิวตันอีกต่อไป แต่เป็นผลจากการโค้งของปริภูมิเวลาอวกาศ [4, 5, 15]

เนื่องจากที่ได้กล่าวไว้ว่าในการอธิบายทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปจะต้องใช้เรขาคณิตและเทนเซอร์ในการอธิบายแรงโน้มถ่วงที่ต่อมาพบว่าเป็นผลมาจากการโค้งงอของปริภูมิเวลาอวกาศ ดังนั้นเราจึงต้องทำความเข้าใจที่มาและความหมายของเทนเซอร์ แมนิโฟลด์และปริภูมิเวลาอวกาศ ดังต่อไปนี้

2.1 เทนเซอร์ (Tensor)

การที่วัตถุในระบบพิกัดฉากหนึ่งเปลี่ยนไปเป็นอีกระบบพิกัดฉากหนึ่ง ส่วนประกอบของวัตถุที่อยู่ในพิกัดฉากนั้นจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรจะศึกษาได้จากส่วนประกอบของเทนเซอร์ โดยพิจารณาว่าส่วนประกอบ ในระบบพิกัดฉากหนึ่งจะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับส่วนประกอบนั้นใน

อีกระบบพิกัดหนึ่ง โดย เทนเซอร์อันดับศูนย์ เราจะเรียกว่า สเกลาร์ เช่น φ เทนเซอร์อันดับหนึ่ง เราจะเรียกว่า เวกเตอร์ เช่น v^{α} และเทนเซอร์ที่เราให้ความสนใจคือ เทนเซอร์อันดับสอง ที่เรียกว่า เทนเซอร์ความเค้น [13]

2.2 **แมนิโฟลด์** (Manifold)

แมนิโฟลด์ คือ ปริภูมิทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บ่งบอกตำแหน่งของวัตถุ โดยที่แมนิโฟลด์สามารถมีความโค้งได้และมี ทอพอโลยี (topology) ได้ในหลาย ๆ แบบ สิ่งที่สำคัญคือ ณ บริเวณหนึ่ง แมนิโฟลด์จะต้องมีลักษณะเหมือนกับ $\mathbb{R}^n$ ในทางฟิสิกส์ เราจะพูดถึงแมนิโฟลด์ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiable manifold หรือบางครั้งเรียกว่า smooth manifold) โดยที่แมนิโฟลด์สามารถมองได้ว่าเป็นอวกาศหรือปริภูมิที่โค้ง แต่จะแบนราบ ณ บริเวณหนึ่ง (locally flat) สำหรับตัวอย่างง่าย ๆ ของแมนิโฟลด์ คือ พื้นผิวโลก และสิ่งที่สำคัญสำหรับความเป็นแมนิโฟลด์ก็คือ จะต้องมีความเป็นมิติหนึ่ง ๆ ตลอดการเปลี่ยนแปลงของพื้นผิว [8]

2.3 **ปริภูมิเวลาอวกาศ** (Spacetime)

แนวคิดเรื่องปริภูมิเวลาอวกาศมีที่มาจากนักคณิตศาสตร์ชื่อ แฮร์มันน์ มิงคอฟสกี (Hermann Minkowski) ซึ่งเป็นแนวคิดการเชื่อมโยงระหว่างส่วนของปริภูมิเข้ากับเวลาจนเกิดเป็นปริภูมิเวลาอวกาศ 4 มิติ โดยจุดแต่ละจุดที่เกิดขึ้นในปริภูมิเวลาอวกาศ เราจะเรียกว่า เหตุการณ์ ซึ่งประกอบด้วย ตัวเลข 1 ตัวแทนส่วนของเวลา และอีก 3 ตัวแทนส่วนของปริภูมิ นอกจากนี้ มิงคอฟสกีได้เขียนไว้ในบทความของเขาว่า “มุมมองเกี่ยวกับที่ว่างและเวลา ซึ่งข้าพเจ้าจะแสดงให้ท่านเห็นนี้ เป็นผลสรุปที่ได้จากการทดลองทางฟิสิกส์ และนั่นเองที่ทำให้มันมีความน่าเชื่อถือ ภาพเหล่านี้แตกต่างจากที่เราคุ้นเคยอย่างสิ้นเชิง และนับจากนี้ไป ที่ว่างโดยตัวมันเองและเวลาโดยตัวมันเอง จะค่อย ๆ สลายไปกลายเป็นเพียงแต่เงา และมีเพียงแต่การผสมผสานของที่ว่างและเวลาเท่านั้นที่จะยังคงไว้ซึ่งความเป็นจริงที่ไม่ขึ้นกับเงื่อนไขอื่น” [16]

ต่อมาเมื่อไอน์สไตน์ต้องการพัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ซึ่งมีแนวคิดที่ว่า ความโค้งของปริภูมิเวลาอวกาศก็คือ ความโน้มถ่วง เขาจึงนำแนวคิดเรื่องปริภูมิเวลาอวกาศ 4 มิติของมิงคอฟสกีมาใช้

สำหรับเมตริกของปริภูมิเวลาอวกาศมิงคอฟสกีมีรูปแบบ ดังนี้

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

เราสามารถเขียนสมการนี้ในรูปของเทนเซอร์ ดังนี้

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b, \quad (2.2)$$

เราจะให้ η_{ab} แทน เมตริกมิงคอฟสกี

$$\eta_{ab} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} = diag\left(-1, +1, +1, +1\right) \quad (2.3)$$

สำหรับเมตริกมินคอว์สกีเป็นเมตริกเทนเซอร์ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษซึ่งเป็นปริภูมิเวลาอวกาศแบนราบ (flat spacetime) แต่สำหรับในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป จะใช้สัญลักษณ์คือ g_{ab} [8, 17]

จากหลักสำคัญที่ว่าความโน้มถ่วงเป็นผลมาจากการโค้งงอของปริภูมิเวลาอวกาศ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปนี้เป็นทฤษฎีเชิงเรขาคณิตที่ถือหลักว่ามวลและพลังงานทำให้เกิดการโค้งงอของปริภูมิเวลาอวกาศและการโค้งนี้ส่งผลต่อเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระรวมทั้งแสงและในทฤษฎีนี้จะพบว่า

- ปริภูมิเวลาอวกาศ (spacetime) เป็นแมนิโฟลด์แบบลอเรนต์ที่มีความโค้งงอใน 4 มิติ (curved 4-dimensional Lorentzian manifold)
- ปริภูมิเวลาอวกาศจะโค้งงอตามอิทธิพลของมวล พลังงาน และ โมเมนตัม หรือ เทนเซอร์ความเค้นพลังงานที่อยู่ข้างใน
- ความสัมพันธ์ระหว่างเทนเซอร์ความเค้นพลังงาน และความโค้งงอของปริภูมิเวลาอวกาศอธิบายได้ด้วยสมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein's field equations)
- การเคลื่อนที่แบบเฉื่อย (inertial motion) จะเกิดขึ้นในช่วง timelike คือ บริเวณที่การเคลื่อนที่มีความเร็วน้อยกว่าความเร็วแสงและอยู่ในสภาพนัลจีโอเดสิค (null geodesics) ของปริภูมิเวลาอวกาศ [4, 5, 15]

สมมติฐานของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปมี 1 ข้อ เรียกว่า “หลักการของการสมมูล (Principal of Equivalence)” ซึ่งกล่าวได้หลายรูปแบบ โดยหลักการของการสมมูลตามแบบเดิมหรือตามแบบที่ไอน์สไตน์กล่าวไว้ มีใจความว่า “กฎฟิสิกส์มีรูปแบบ (เชิงคณิตศาสตร์) เป็นอย่างเดียวกันที่แต่ละ

จุดในสนามแรงโน้มถ่วงที่สม่ำเสมอ และเป็นเช่นเดียวกันกับในกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร่งสม่ำเสมอ" [4, 5, 7, 15]

สำหรับในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หากเราต้องการหาสมการที่ใช้สำหรับการบรรยายการโค้งงอของปริภูมิเวลาอวกาศ โดยที่ความโค้งงอของปริภูมิเวลาอวกาศก็คือแรงโน้มถ่วงนั่นเอง เราจะใช้หลักการแปลงจากสัมพัทธภาพพิเศษที่เกิดขึ้นเฉพาะในกรอบเฉื่อยดังนี้

- $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ คือ การแทนค่าเมตริกมินคอว์สกีด้วยเมตริกทั่วไป
- $\partial_{\mu} \to \nabla_{\mu}$ คือ การเขียนอนุพันธ์ปกติให้เป็นอนุพันธ์โควาเรียนซ์ [8]

2.4 **สมการสนามของไอน์สไตน์** (Einstein's field equations)

สมการไอน์สไตน์ หรือ สมการสนามของไอน์สไตน์ คือ สมการสนามที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของปริภูมิเวลาอวกาศและมวลหรือสสาร สมการไอน์สไตน์เป็นสมการเทนเซอร์ซึ่งอยู่ในรูป

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

โดยที่ $G_{\mu\nu}$ คือ ไอน์สไตน์เทนเซอร์ เป็นปริมาณที่บ่งบอกถึงความโน้มถ่วง และ $T_{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์พลังงานโมเมนตัม ซึ่งเป็นปริมาณของพลังงานหรือสสารที่ก่อให้เกิดแรงโน้มถ่วง [7, 15]

จากที่กล่าวว่า $G_{\mu\nu}$ คือ ไอน์สไตน์เทนเซอร์ เป็นปริมาณที่บ่งบอกถึงความโน้มถ่วงนั้นมีที่มาจากสมการ

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.5}$$

โดยที่ $R_{\mu\nu}$ คือ ริกซีเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}$ คือ เมตริกเทนเซอร์ และ R คือ ริกซีสเกลาร์

สำหรับสมการ (2.5) ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ของไอน์สไตน์เทนเซอร์ในรูปแบบของ ริกซีเทนเซอร์ เมตริกเทนเซอร์ และ ริกซีสเกลาร์ โดยที่มาของสมการมีดังต่อไปนี้

หลักการของการสมมูล ความสัมพันธ์ควรจะอยู่ในรูปที่เชื่อมโยงเทนเซอร์โมเมนตัมพลังงาน $T_{\alpha\beta}$ เข้ากับเทนเซอร์ในเรขาคณิตรีมันน์

เริ่มต้นจากความสัมพันธ์ที่โยงเมตริกเทนเซอร์ $g_{\alpha\beta}$ เข้ากับเทนเซอร์โมเมนตัมพลังงาน $T_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} \propto T_{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

หากความสัมพันธ์ตามสมการ (2.6) ถูกต้อง เนื่องจาก $T_{\alpha\beta}$ มีค่าเป็นศูนย์ในสุญญากาศ ทำให้เราได้ว่า $g_{\alpha\beta}$ จะมีค่าเป็นศูนย์ในสุญญากาศซึ่งเงื่อนไขของสมการ (2.6) เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น เราจึงสมมติความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูป

$$R_{\alpha\beta} \propto T_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

โดยที่ $R_{\alpha\beta}$ คือ ริกซีโควาเรียนซ์เทนเซอร์

เงื่อนไขความสัมพันธ์ตามสมการ (2.7) มีความเป็นไปได้ที่สุญญากาศ เนื่องจาก $R_{\alpha\beta} = 0$ ที่ตำแหน่งที่อยู่ห่างไกลจากวัตถุในเอกภพหรือปริภูมิเป็นปริภูมิแบนราบ และมีค่าไม่เป็นศูนย์ ถ้าเราพิจารณาที่ตำแหน่งที่ใกล้กับมวลในเอกภพ

จากหลักการที่กล่าวว่าพลังงานและโมเมนตัมจะต้องเป็นไปตามกฎอนุรักษ์ในปริภูมิ 4 มิติ แล้วเราจะพบว่า $\dfrac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0$ ตามพิกัดเฉื่อยของกรอบอ้างอิงท้องถิ่นที่ทุก ๆ จุดตามนัยของหลักการของการสมมูล

ดังนั้น $\dfrac{\partial R_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0$ และเราพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\partial R_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{2}\frac{\partial R_{\alpha}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{\beta}} \tag{2.8}$$

โดยที่ $R = R_{\alpha}^{\alpha}$ คือ ความโค้งสเกลาร์หรือริกซีสเกลาร์ ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลง และ R มีค่าเป็นสองเท่าของอนุพันธ์โควาเรียนซ์อันดับหนึ่งของเทนเซอร์ริกซีแบบผสม

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(R_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha}} \right) = 0 \tag{2.9}$$

ปริมาณที่อยู่ภายในวงเล็บ จะเรียกว่า ไอน์สไตน์เทนเซอร์ แทนด้วย G_{α}^{β}

เราให้ $G_{\alpha}^{\beta} = kT_{\alpha}^{\beta}$ หรือ $R_{\alpha}^{\beta} - \dfrac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta}R = kT_{\alpha}^{\beta}$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ คือ $k = \dfrac{8\pi \mathrm{G}}{c^{4}}$

โดยสมการนี้ เรียกว่า สมการสนามของไอน์สไตน์

เราสามารถเขียนสมการสนามของไอน์สไตน์ให้อยู่ในรูปแบบของโควาเรียนซ์ คือ $G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}$ หรือ รูปแบบของคอนทราวาเรียนซ์ คือ $G^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}$ หรือ รูปแบบผสม คือ $G_{\alpha}^{\beta} = kT_{\alpha}^{\beta}$ [7]

จากการที่ไอน์สไตน์ต้องการพัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษที่เป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่พิจารณาเฉพาะกรอบอ้างอิงเฉื่อยที่ไม่มีความเร่งเข้ามาเกี่ยวข้องมาเป็นกรอบอ้างอิงทั่วไป โดยพิจารณาในปริภูมิเวลาอวกาศ 4 มิติ ทำให้เกิดเป็นทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ซึ่งเป็นทฤษฎีเชิงเรขาคณิตที่ใช้เทนเซอร์ในการอธิบายความเร่งซึ่งก็คือแรงโน้มถ่วงนั่นเอง ทำให้พบว่าแนวคิดหลักของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปคือ การที่มวลสารทำให้ปริภูมิเวลาอวกาศโค้งงอได้ อีกทั้งแนวคิดนี้ทำให้เกิดสมการที่มีความน่าสนใจ ที่เรียกว่า สมการสนามของไอน์สไตน์ ซึ่งเป็นสมการที่มีความสำคัญในการศึกษาการจำลองของดวงดาวในจักรวาล ดังที่จะได้กล่าวในบทถัดไป

บทที่ 3

ทรงกลมของไหลสมบูรณ์ (Perfect fluid spheres)

ในการสำรวจและศึกษาทฤษฎีของดวงดาวในจักรวาลได้มีการสร้างแบบจำลองของดวงดาวเพื่อศึกษาลักษณะของสมการที่สามารถอธิบายลักษณะของดวงดาวได้ โดยทรงกลมของไหลสมบูรณ์ถือเป็นการประมาณขั้นพื้นฐานของแบบจำลองของดวงดาว โดยสมบัติของความเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์จะทำให้เทนเซอร์ความเค้นพลังงานอยู่ในรูปของเมตริกทแยงมุมโดยที่ความดันมีค่าเท่ากัน และความสัมพันธ์ของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานกับสมการสนามของไอน์สไตน์ทำให้มีสมการทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้น ซึ่งสมการที่เกิดขึ้นนี้เองเป็นประโยชน์สำหรับการศึกษาและพัฒนาทฤษฎีต่อไป [20-24, 28, 30, 32-34, 36, 37]

โดยก่อนอื่นเราต้องศึกษาความหมายและลักษณะของแบบจำลองที่เราจะใช้ในการสร้างทฤษฎี ซึ่งแบบจำลองที่เราสนใจ คือ ทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ซึ่งมีลักษณะดังที่จะได้กล่าวต่อไปนี้

3.1 ทรงกลม (Sphere)

ในการศึกษาลักษณะของดวงดาว เราระบุให้แบบจำลองมีลักษณะจำเพาะเป็นทรงกลม โดยทรงกลมมีความหมายเป็น วัตถุทางเรขาคณิต เช่น รูปทรงของลูกบอลกลมในพื้นที่ 3 มิติ สำหรับใน 2 มิติ คือ วงกลม นอกจากนี้ ทรงกลมสมบูรณ์มีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงทุก ๆ จุดบนพื้นผิวมีค่าเท่ากันเสมอ [12, 26, 39]

ภาพที่ 4: ลักษณะของทรงกลมสมบูรณ์ใน 3 มิติ [12, 39]

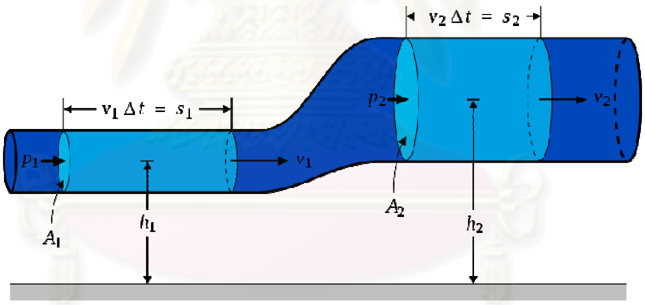
ในการพิจารณาลักษณะของแบบจำลอง ด้วยการศึกษาลักษณะทางกายภาพโดยเราจะพิจารณาในส่วนของการเป็นของไหลเนื่องจากของไหลคือสสารที่โมเลกุลยึดกันแบบหลวม ๆ มีลักษณะของความต่อเนื่องที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างตามภาชนะที่บรรจุซึ่งถือเป็นส่วนหนึ่งของกลศาสตร์ภาวะความต่อเนื่อง ดังนี้

3.2 กลศาสตร์ภาวะต่อเนื่อง

ศึกษากายภาพของสสารที่มีความต่อเนื่อง ประกอบด้วย

- กลศาสตร์ของแข็ง : ศึกษากายภาพของสสารที่มีรูปร่างคงตัวแน่นอน
- กลศาสตร์ของไหล : ศึกษาถึงกายภาพของสสารที่มีความต่อเนื่องและเปลี่ยนรูปไปตามลักษณะของภาชนะ

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า กลศาสตร์ของไหลเป็นสาขาย่อยของกลศาสตร์ภาวะต่อเนื่อง โดยมุมมองทางกลศาสตร์แล้ว ของไหลไม่รับความเค้นตั้งฉากกับผิววงกลม ดังนั้นมันจึงแปรรูปร่างไปตามภาชนะที่บรรจุตัวมันอยู่และสามารถอยู่นิ่ง ๆ ได้โดยไม่มีความเค้นเฉือน [1, 6]



ภาพที่ 5: แบบจำลองของไหลซึ่งแสดงถึงความต่อเนื่องและเปลี่ยนรูปไปตามภาชนะ [35]

3.3 กลศาสตร์ของไหล

คือ วิชาที่ศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของของไหลและแรงที่เกิดขึ้น กลศาสตร์ของไหลอาจแบ่งได้เป็นสองส่วนคือสถิตยศาสตร์ของไหลซึ่งศึกษาของไหลในขณะที่หยุดนิ่ง และพลศาสตร์ของไหลที่ศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหล ศาสตร์นี้นับเป็นส่วนหนึ่งของกลศาสตร์ภาวะต่อเนื่องซึ่งศึกษาแบบจำลองของวัตถุโดยไม่สนใจข้อมูลในระดับอะตอม และเป็นส่วนหนึ่งของวิชาฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของของไหลและแรงที่เกิดขึ้นในตัวของมัน [1, 6]

3.4 **ของไหล** (Fluid)

คือ สสารที่มีโมเลกุลยึดกันแบบหลวม ๆ สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เคลื่อนไหลไปตามสภาพที่ไม่ถูกจำกัดโดยภาชนะหรือบริเวณ นั่นคือ สสารซึ่งสามารถไหลได้มีรูปร่างไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับภาชนะที่บรรจุ

ของไหลใช้นิยามสสารที่เปลี่ยนรูปร่างหรือไหลด้วยความเค้นเฉือนและของไหลเป็นสถานะหนึ่งของสสารโดยเป็นได้ทั้ง ของเหลว ก๊าซ หรือ ของแข็ง [1, 6]

สำหรับคุณสมบัติของของไหลที่เรานำมาพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ เราจะกล่าวถึงสมบัติบางประการที่มีความเกี่ยวข้องที่เรานำมาใช้ในการพิจารณาความเป็นของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ ในส่วนของ ความหนืด การนำความร้อน และสมบัติไอโซทรอปี

3.4.1 **ความหนืด** (Viscosity)

ของไหลทุกชนิดย่อมมีสมบัติอย่างหนึ่งคือ เมื่อมีวัตถุเคลื่อนที่ผ่านหรือเมื่อมันไหลผ่านวัตถุใดๆ จะมีแรงเสียดทานกระทำต่อวัตถุโดยของไหลนั้นๆ เสมอ สมบัติของของไหลที่ต้านทานการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้เรียกว่า ความหนืด และแรงต้านทานการเคลื่อนที่ที่เกิดจากของไหลนี้เรียกว่า แรงหนืด หรือแรงเสียดทานภายใน ดังนั้น ความหนืดของของไหล คือ ค่าความต้านทานต่อการเฉือนแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในของเหลวเป็นผลมาจากแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล และการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมระหว่างโมเลกุลของของเหลว [1, 6, 14]

3.4.2 **การนำความร้อน** (Heat conduction)

คือ ปรากฏการณ์ที่พลังงานความร้อนถ่ายเทภายในวัตถุหนึ่งๆ หรือระหว่างวัตถุสองชิ้นที่สัมผัสกัน โดยมีทิศทางของการเคลื่อนที่ของพลังงานความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า โดยที่ตัวกลางไม่มีการเคลื่อนที่ [2, 3]

3.4.3 **สมบัติไอโซทรอปี** (Isotropy)

คือ ความสม่ำเสมอในทุกทิศทาง มีที่มาจากคำว่า ไอโซ (iso) ให้ความหมายถึง เท่ากัน หรือ เหมือนกัน ดังนั้นการมีสมบัติไอโซทรอปีสำหรับเทนเซอร์ความเค้นพลังงานคือ คือค่าขององค์ประกอบในส่วนทแยงมุมคือค่าของความดันมีค่าที่เท่ากัน [31]

สำหรับในงานวิทยานิพนธ์นี้เป็นการพิจารณาแบบจำลองที่เรียกว่าทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ ในส่วนของของไหลจะต้องมีคุณสมบัติของความสมบูรณ์ นั่นคือ มีคุณสมบัติ 3 ข้อ ดังนี้

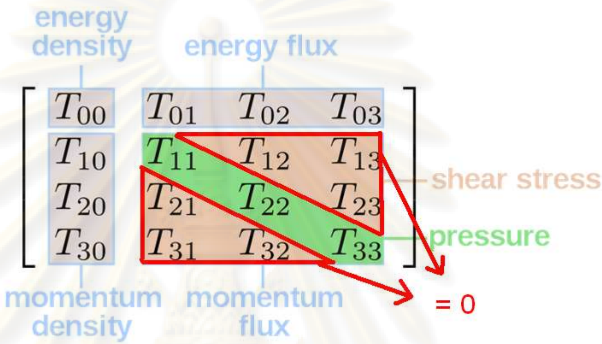
1. ไม่มีความหนืด

2. ไม่นำความร้อน

3. มีสมบัติไอโซทรอปี

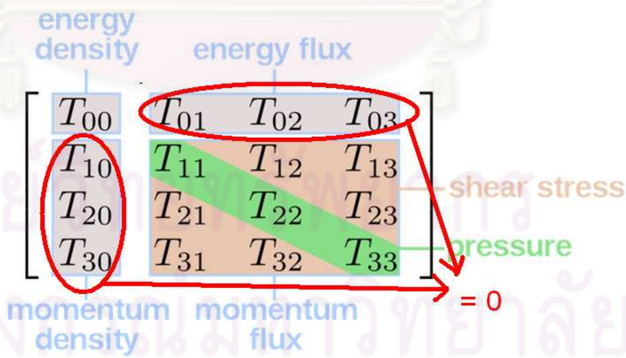
คุณสมบัติทั้ง 3 ข้อนี้ เมื่อเรานำไปพิจารณาในรูปแบบของเทนเซอร์ความเค้นพลังงาน [38] จะทำให้เทนเซอร์ความเค้นพลังงานอยู่ในรูปแบบของเมตริกทแยงมุม ดังต่อไปนี้

เมื่อพิจารณาในรูปแบบเทนเซอร์ความเค้นพลังงาน การไม่มีความหนืด หมายถึง $\mathrm{T}_{ij} = 0, \forall i, j = 1,2,3, i \neq j$ นั่นคือ



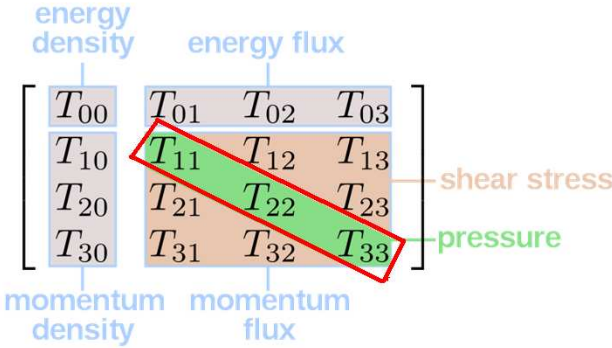
ภาพที่ 6: องค์ประกอบของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานที่มีค่าเป็นศูนย์สำหรับการไม่มีความหนืด [18]

เมื่อพิจารณาในรูปแบบ เทนเซอร์ความเค้นพลังงาน การไม่นำความร้อน หมายถึง $\mathrm{T}_{0j} = 0, \forall j = 1,2,3$ นั่นคือ



ภาพที่ 7: องค์ประกอบของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานที่มีค่าเป็นศูนย์สำหรับการไม่นำความร้อน [18]

เมื่อพิจารณาในรูปแบบ เทนเซอร์ความเค้นพลังงาน การมีสมบัติไอโซทรอปี หมายถึง $\mathrm{T}_{11} = \mathrm{T}_{22} = \mathrm{T}_{33}$ นั่นคือ



ภาพที่ 8: องค์ประกอบของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานที่มีสมบัติไอโซทรอปี คือ องค์ประกอบปริภูมิในส่วนทแยงมุมจะมีค่าเท่ากัน [18]

ดังนั้น เทนเซอร์ความเค้นพลังงาน ในรูปแบบของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ คือ

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

โดยที่ ρ คือ ความหนาแน่น และ p คือ ความดัน

นอกจากนี้ ในการอธิบายความเป็นของไหลเชิงสัมพัทธภาพ เรากำหนดให้ U_μ แทนความเร็ว-4 และนิยามให้ ฝุ่นละออง (dust) ซึ่งเป็นกลุ่มของอนุภาคที่อยู่นิ่งหรือของไหลสมบูรณ์ที่ไม่มีแรงกดซึ่งกันและกันระหว่างอนุภาคที่เป็นส่วนประกอบ และเราสามารถเขียนเทนเซอร์ความเค้นพลังงานสำหรับฝุ่นละอองได้ ดังนี้ [8]

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu \tag{3.2}$$

หรือรูปแบบของเมตริก 4×4 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

หากเราพิจารณารูปแบบของ $(\rho + p)U_\mu U_\nu$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \rho+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

และพิจารณา $p\eta_{\mu\nu}$ คือ

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

ดังนั้น เราจึงได้ รูปแบบทั่วไปของ $T_{\mu\nu}$ (หรือ general det) [8] คือ

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + p\eta_{\mu\nu} \tag{3.6}$$

การศึกษาสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์เป็นสิ่งสำคัญเพื่อใช้ในทฤษฎีการแปลง ดังนั้น ก่อนที่เราจะพิจารณาทฤษฎีการแปลงของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ เราจะศึกษาที่มาของเงื่อนไขของการเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ โดยเงื่อนไขดังกล่าวมีที่มาจากความสัมพันธ์ของคุณสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์และสมการสนามของไอน์สไตน์ ดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

สมการไอน์สไตน์มีรูปแบบ คือ

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

โดยที่ $G_{\mu\nu}$ คือ ไอน์สไตน์เทนเซอร์ และ $T_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์พลังงานโมเมนตัม (เทนเซอร์ความเค้นพลังงาน)

ในการคำนวณหาค่า $G_{\mu\nu}$ เรามีสมการของไอน์สไตน์เทนเซอร์ ดังนี้

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3.8}$$

โดยที่ $R_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ริกซี, $g_{\mu\nu}$ คือ เมตริกเทนเซอร์ และ R คือ สเกลาร์ริกซี

โดยเราจะมีวิธีการคำนวณ ดังนี้

พิจารณา หาค่า $g_{\mu\nu}$ จาก

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{3.9}$$

จากนั้นจะเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล คือ

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} \right) \tag{3.10}$$

หาค่าเทนเซอร์ริกซีจาก

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\beta\alpha}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\delta\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\delta}_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\delta}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\delta\alpha} \tag{3.11}$$

และหาค่าสเกลาร์ริกซีจาก

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

ดังนั้นเมื่อเรามีค่าเมตริกเทนเซอร์ ทำให้สามารถหาค่าเทนเซอร์ริกซีและสเกลาร์ริกซีได้ แล้วนำมาแทนค่าในสมการที่ (3.3) เราจะได้ค่าไอน์สไตน์เทนเซอร์ตามที่ต้องการ

สำหรับการศึกษาแบบจำลองของดวงดาวเกี่ยวข้องกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปในส่วนของการนำสมการสนามของไอน์สไตน์มาสร้างทฤษฎี โดยสร้างแบบจำลองของดวงดาว ซึ่งแบบจำลองขั้นต้นนี้คือ แบบจำลองที่เรียกว่า ทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ซึ่งเป็นการจำลองที่พิจารณาในส่วนของการเป็นทรงกลม และพิจารณาลักษณะทางกายภาพของการเป็นของไหลซึ่งจะเชื่อมโยงกับเทนเซอร์ความเค้นพลังงาน อีกทั้งเมื่อพิจารณาสมบัติของการเป็นของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ ไม่มีความหนืด ไม่นำความร้อน และมีสมบัติไอโซทรอปี ทำให้เทนเซอร์ความเค้นพลังงานมีรูปแบบเมตริกเป็นเมตริกทแยงมุม ซึ่งสะดวกต่อการคำนวณและเมื่อนำมาสัมพันธ์กับสมการสนามของไอน์สไตน์ทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นประโยชน์ในการสร้างทฤษฎีการแปลงสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์

บทที่ 4

ทฤษฎีสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ในการศึกษาทฤษฎีสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ซึ่งถือเป็นทฤษฎีการแปลงที่มีลักษณะคือเป็นการแปลงเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ โดยเมตริกผลลัพธ์ที่ได้ยังคงมีสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ตามแนวคิดทฤษฎีการแปลงทรงกลมของไหลสมบูรณ์ของ BVW (Boonserm, Visser, and Weinfurtner) โดยที่ BVW ได้นำเสนอทฤษฎีบทการแปลงในรูปแบบพิกัดต่าง ๆ เช่น พิกัดชวาร์ซไชลด์ พิกัดไอโซทรอปี พิกัดเชิงขั้วแบบเกาส์ เป็นต้น โดยวิทยานิพนธ์นี้เราจะพิจารณาเฉพาะรูปแบบพิกัดไอโซทรอปี โดยพิจารณาทฤษฎีบทของ BVW จากนั้นนำมาประยุกต์ใช้จริงเพื่อศึกษาเมตริกผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

จากการที่เราได้นำเสนอสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ดังที่ได้กล่าวในบทที่ 3 ในส่วนของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานในรูปแบบของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ที่ทำให้เมตริกของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานมีลักษณะเป็นเมตริกทแยงมุมและค่าของความดันมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\mathrm{T}_{rr} = \mathrm{T}_{\theta\theta} = \mathrm{T}_{\phi\phi} \tag{4.1}$$

และจากสมการสนามของไอน์สไตน์ที่มีรูปแบบคือ

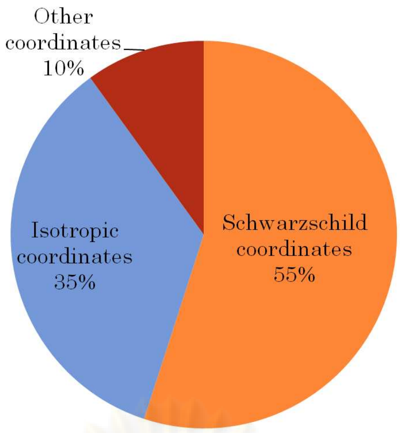
$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{4.2}$$

ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ของค่าไอน์สไตน์เทนเซอร์ดังนี้

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \tag{4.3}$$

ดังนั้น เมื่อเราคำนวณหาค่าไอน์สไตน์เทนเซอร์แต่ละตัวและนำมาจัดรูปแบบให้สอดคล้องกับสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์จะทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่ (4.7) และ (4.9) ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

ในการคำนวณหาค่าไอน์สไตน์เทนเซอร์ซึ่งจะให้รูปแบบต่างกันตามพิกัดที่เราศึกษา เราจะพิจารณารูปแบบของพิกัดของทรงกลมของไหลสมบูรณ์โดยที่ Finch และ Skea ได้กล่าวไว้ว่าพิกัดของทรงกลมของไหลสามารถใช้ได้ในพิกัดชวาร์ซไชลด์ ประมาณ 55% สามารถใช้ได้ในพิกัดไอโซทรอปีประมาณ 35% และใช้ได้ในพิกัดอื่น ๆ อีกประมาณ 10% ซึ่งสำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะศึกษาในส่วนของพิกัดไอโซทรอปี [20]



ภาพที่ 9: สัดส่วนของพิกัดต่าง ๆ ของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ [20]

สำหรับคำว่า "ไอโซทรอปี" หมายถึง คุณสมบัติซึ่งทุกทิศทางมีค่าเท่ากันและเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นนิยามลักษณะของพิกัดไอโซทรอปี คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของพิกัดปริภูมิจะมีค่าเท่ากัน [20, 21, 23, 24, 32]

พิกัดไอโซทรอปี มีลักษณะเมตริกดังนี้

$$ds^2 = -\zeta(r)^2 dt^2 + \frac{1}{\zeta(r)^2 \mathrm{B}(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\} \tag{4.4}$$

โดยที่ $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

จากแนวคิดการพัฒนาทฤษฎีบทการแปลงของ BVW [20] จะได้ว่าเมื่อพิจารณาค่าของเมตริกเทนเซอร์ในรูปแบบของพิกัดไอโซทรอปีทำให้เราคำนวณหาค่า $G_{\hat{r}\hat{r}}$ และ $G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ ในพิกัดนี้ได้ค่าดังนี้

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = (\zeta(r)')^2 \mathrm{B}(r)^2 - (\mathrm{B}(r)')^2 \zeta(r)^2 + 2\mathrm{B}(r)' \mathrm{B}(r)\zeta(r)^2 / r \tag{4.5}$$

และ

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = -(\mathrm{B}(r)')^2 \zeta(r)^2 + \zeta(r)^2 \mathrm{B}(r)\mathrm{B}(r)'' - (\zeta(r)')^2 \mathrm{B}(r)^2 + \mathrm{B}(r)' \mathrm{B}(r)\zeta(r)^2 / r \tag{4.6}$$

เมื่อเราใช้คุณสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ $G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ ทำให้เราได้สมการ

$$\left(\frac{\zeta(r)'}{\zeta(r)}\right)^2 = \frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)} \tag{4.7}$$

กำหนดให้ $\zeta(r)=\exp(\int g(r)dr)$ เราจะได้สมการ

$$g(r)=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)''-\mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}} \tag{4.8}$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\mathrm{B}(r)''-\frac{\mathrm{B}(r)'}{r}-2g(r)^2\,\mathrm{B}(r)=0 \tag{4.9}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง [20]

สำหรับสมการที่ได้ เราจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวกับการแปลงของทรงกลมของไหลสมบูรณ์โดยจะพิจารณาว่าค่าใหม่ที่ได้จะยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์หรือไม่ นั่นคือ ผลเฉลยใหม่ที่ได้จะยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไข $G_{\hat{r}\hat{r}}=G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ หรือไม่นั่นเอง

นอกจากนี้จากแนวคิดการกำหนด $\zeta(r)=\exp(\int g(r)dr)$ เราสามารถเขียน $\zeta(r)$ ให้อยู่ในรูปแบบ

$$\exp\left(\pm\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)''-\mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}\right) \tag{4.10}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนเมตริกได้ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$ds^2=-\exp\left(\pm\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)''-\mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)dt^2+\frac{\exp\left(\mp\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)''-\mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)}{\mathrm{B}(r)^2}\{dr^2+r^2d\Omega^2\} \tag{4.11}$$

เราจะสมมติให้

$$ds^2=-\zeta(r)^2dt^2+\frac{1}{\zeta(r)^2\mathrm{B}(r)^2}\{dr^2+r^2d\Omega^2\}$$

เป็นตัวแทนของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ เขียนแทนด้วย $\{\zeta(r),\mathrm{B}(r)\}$

จากงานวิจัยของ BVW [20] พบว่า ทฤษฎีบทต่อไปนี้มีคุณสมบัติเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงค่าของเมตริก จากเมตริกตั้งต้นเป็นเมตริกใหม่ซึ่งเมตริกใหม่ที่ได้จะยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์อยู่ หรือ อาจเรียกได้ว่า มีคุณสมบัติการแปลงจากทรงกลมของไหลสมบูรณ์โดยที่ผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทยังคงมีสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ จากนั้นพิจารณาผลลัพธ์เมื่อใส่ทฤษฎีบทเดิมซ้ำกันสองครั้งและการนำสองทฤษฎีบทมาประกอบกัน [20]

4.1 ทฤษฎีบทที่ 1 (7^{th} BVW or Buchdahl transformation (T_7)) [20]

กำหนดให้ $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_0(r)\}$ แทนทรงกลมของไหลสมบูรณ์ จะได้ว่า $\{\zeta_0(r)^{-1}, \mathrm{B}_0(r)\}$ จะยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ

$$ds^2 = -\frac{1}{\zeta_0(r)^2}dt^2 + \frac{\zeta_0(r)^2}{\mathrm{B}_0(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\} \tag{4.12}$$

หรือคือการแปลง

$$\mathrm{T}_7 : \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\} \tag{4.13}$$

พิสูจน์

กำหนดให้ $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_0(r)\}$ แทนทรงกลมของไหลสมบูรณ์

เราต้องการแสดงว่า $\{\zeta_0(r)^{-1}, \mathrm{B}_0(r)\}$ ยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์

จากสมการ (4.7) จะได้ว่า

$$\left(\frac{\zeta_0(r)'}{\zeta_0(r)}\right)^2 = \frac{\mathrm{B}_0(r)'' - \mathrm{B}_0(r)'/r}{2\mathrm{B}_0(r)} \tag{4.14}$$

พิจารณาทางด้านซ้ายมือของสมการ ดังนี้

$$\zeta_0(r) \to \zeta_0^{-1}(r) : \left(\frac{\zeta_0(r)'}{\zeta_0(r)}\right)^2 \to \left(\frac{\left(\zeta_0^{-1}(r)\right)'}{\zeta_0^{-1}(r)}\right)^2 = \left(\frac{\zeta_0(r)'}{\zeta_0(r)}\right)^2 \tag{4.15}$$

นั่นคือ $\{\zeta_0(r)^{-1}, \mathrm{B}_0(r)\}$ เป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ■

นอกจากนี้ เราจะได้ว่า $\mathrm{T}_7 \circ \mathrm{T}_7 = \mathrm{I}$ โดยที่ I คือ เอกลักษณ์ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าเมื่อนำประยุกต์ใช้กับเมตริกใดแล้วผลลัพธ์ที่ได้จะยังคงเป็นเมตริกเดิม เนื่องจาก $(\zeta_0^{-1})^{-1} = \zeta_0$ นั่นคือ เมื่อมีการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 ซ้ำ 2 ครั้ง เราจะได้ทรงกลมของไหลสมบูรณ์ที่เป็นตั้งต้น ดังนี้

$$\mathrm{T}_7 : \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{(\zeta_0^{-1})^{-1}, \mathrm{B}_0\} = \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\} \tag{4.16}$$

จากคุณสมบัตินี้ทำให้ เราสามารถแบ่งค่าของ $\zeta(r)$ หลังจากการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 ซ้ำกัน n ครั้ง ออกเป็น 2 กรณี คือ $\zeta(r) = \zeta(r)^{-1}$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคี่ และ $\zeta(r) = \zeta(r)$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคู่

จะพบว่าในทฤษฎีบทแรกเป็นการเปลี่ยนแปลงค่าของ $\zeta(r)$ โดยเปลี่ยนจาก $\zeta(r)$ เป็น $\zeta^{-1}(r)$ แล้วทำให้เมตริกใหม่ที่ได้สอดคล้องสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ แต่สำหรับทฤษฎีบทต่อมาเป็นการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงค่าของ $\mathrm{B}(r)$ โดยสำหรับทฤษฎีบทนี้ เราได้นิยามค่าของ $\mathrm{Z}(r)$ ขึ้นมา โดยเมื่อนำค่า $\mathrm{Z}(r)$ นี้ไปคูณกับ $\mathrm{B}(r)$ จะทำให้เมตริกใหม่ที่ได้สอดคล้องกับสมบัติของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ดังจะกล่าวต่อไปนี้ [20]

4.2 ทฤษฎีบทที่ 2 (8th BVW transformation (T_8)) [20]

กำหนดให้ $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_0(r)\}$ แทนทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นิยาม

$$\mathrm{Z}_0 = \left\{\sigma + \varepsilon \int \frac{rdr}{\mathrm{B}_0(r)^2}\right\} \tag{4.17}$$

สำหรับทุกค่า σ และ ε จะได้ว่า $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_0(r)\mathrm{Z}_0(r)\}$ ยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ

$$ds^2 = -\zeta_0(r)^2 dt^2 + \frac{1}{\zeta_0(r)^2 \mathrm{B}_0(r)^2 \mathrm{Z}_0(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\} \tag{4.18}$$

หรือคือการแปลง

$$\mathrm{T}_8(\sigma, \varepsilon) : \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\mathrm{Z}_0(\mathrm{B}_0)\} \tag{4.19}$$

พิสูจน์

กำหนดให้ $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_0(r)\}$ แทนทรงกลมของไหลสมบูรณ์

สมมติให้ $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_1(r)\}$ โดยที่ $\mathrm{B}_1(r) = \mathrm{B}_0(r)Z_0(r)$ เป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ เราต้องการหาค่าของ $Z_0(r)$ ที่ทำให้ $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_1(r)\}$ มีสมบัติการเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์

จากสมการ (4.7) จะได้ว่า

$$\mathrm{B}_0(r)'' - \frac{\mathrm{B}_0(r)'}{r} - 2g(r)^2 \mathrm{B}_0(r) = 0$$

พิจารณา

$\mathrm{B}_0(r) \to \mathrm{B}_1(r):$

นั่นคือ

$$\mathrm{B}_1(r)'' - \frac{\mathrm{B}_1(r)'}{r} - 2g(r)^2 \mathrm{B}_1(r) = 0 \tag{4.20}$$

เนื่องจาก $\mathrm{B}_1(r) = \mathrm{B}_0(r)Z_0(r)$ จะได้ว่า

$$\left[\mathrm{B}_0(r)Z_0(r)\right]'' - \frac{\left[\mathrm{B}_0(r)Z_0(r)\right]'}{r} - 2g(r)^2\left[\mathrm{B}_0(r)Z_0(r)\right] = 0 \tag{4.21}$$

นั่นคือ

$$\begin{gathered}\left[\mathrm{B}_0(r)'' Z_0(r) + 2\mathrm{B}_0(r)' Z_0(r)' + \mathrm{B}_0(r) Z_0(r)''\right] \\ - \frac{\mathrm{B}_0(r)' Z_0(r)}{r} - \frac{\mathrm{B}_0(r) Z_0(r)'}{r} - 2g(r)^2\left[\mathrm{B}_0(r)Z_0(r)\right] = 0\end{gathered} \tag{4.22}$$

เราสามารถจัดกลุ่มใหม่ได้ ดังนี้

$$\left[\mathrm{B}_0(r)'' - \frac{\mathrm{B}_0(r)'}{r} - 2g(r)^2\,\mathrm{B}_0(r)\right]Z_0(r) + \left[2\mathrm{B}_0(r)' - \frac{\mathrm{B}_0(r)}{r}\right]Z_0(r)' + \mathrm{B}_0(r)Z_0(r)'' = 0 \tag{4.23}$$

เนื่องจาก $\mathrm{B}_0(r)'' - \frac{\mathrm{B}_0(r)'}{r} - 2g(r)^2\,\mathrm{B}_0(r) = 0$ ดังนั้น

$$\left[2\mathrm{B}_0(r)' - \frac{\mathrm{B}_0(r)}{r}\right]Z_0(r)' + \mathrm{B}_0(r)Z_0(r)'' = 0 \tag{4.24}$$

หรือ

$$\frac{Z_0(r)''}{Z_0(r)'} = \frac{-2\mathrm{B}_0(r)'}{\mathrm{B}_0(r)} + \frac{1}{r} \tag{4.25}$$

จากนั้นเขียน $\frac{Z_0(r)''}{Z_0(r)'}$ ให้อยู่ในรูปของ $\frac{d\ln Z_0(r)'}{dr}$ จะได้ว่า

$$\frac{d\ln Z_0(r)'}{dr} = \frac{-2\mathrm{B}_0(r)'}{\mathrm{B}_0(r)} + \frac{1}{r} \tag{4.26}$$

เมื่ออินทิเกรตเทียบ r จะได้

$$\left.\begin{aligned}\ln Z_0(r)' &= -2\int\frac{\mathrm{B}_0(r)'}{\mathrm{B}_0(r)}dr + \int\frac{1}{r}dr\\ &= -2\ln\mathrm{B}_0(r) + \ln r + \ln\varepsilon\\ &= \ln\left(\frac{\varepsilon r}{\mathrm{B}_0(r)^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

เมื่อ ε คือ พารามิเตอร์

นั่นคือ

$$Z_0(r)' = \frac{\varepsilon r}{\mathrm{B}_0(r)^2} \tag{4.28}$$

ทำการอินทิเกรตเทียบ r อีกครั้ง จะได้

$$Z_0(r) = \varepsilon\int\frac{r}{\mathrm{B}_0(r)^2}dr + \sigma \tag{4.29}$$

ดังนั้น $\{\zeta_0(r), \mathrm{B}_0(r)\mathrm{Z}_0(r)\}$ เป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ โดยที่ $\mathrm{Z}_0 = \left\{\sigma + \varepsilon \int \frac{rdr}{\mathrm{B}_0(r)^2}\right\}$ ■

นอกจากนี้ ทฤษฎีบทที่ 2 ยังมีสมบัตินิจพล หมายความว่าเมื่อใส่ทฤษฎีบทที่ 2 ซ้ำจะไม่เกิดผลเฉลยใหม่ นั่นคือ

$$\mathrm{T}_8 \circ \mathrm{T}_8 \triangleq \mathrm{T}_8 \tag{4.30}$$

ต่อไปนี้จะเป็นการพิจารณาการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 ประกอบกัน โดยเริ่มจากใช้ทฤษฎีบทที่ 1 ก่อนและตามด้วยทฤษฎีบทที่ 2 ได้เป็น บทแทรก 3 และเริ่มจากใช้ทฤษฎีบทที่ 2 ก่อนและตามด้วยทฤษฎีบทที่ 1 ได้เป็น บทแทรก 4 [20]

4.3 **บทแทรก** 3 $(\mathrm{T}_8 \circ \mathrm{T}_7)$ [20]

กำหนดให้ $\{\zeta_0, \mathrm{B}_0\}$ แทนทรงกลมของไหลสมบูรณ์ สำหรับทุกค่า σ และ ε จะได้ว่า $\{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\mathrm{Z}_0\}$ ยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ โดย

$$\mathrm{Z}_0 = \left\{\sigma + \varepsilon \int \frac{rdr}{\mathrm{B}_0(r)^2}\right\}$$

นั่นคือ

$$ds^2 = -\frac{1}{\zeta_0(r)^2}dt^2 + \frac{\zeta_0(r)^2}{\mathrm{B}_0(r)^2\mathrm{Z}_0(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\} \tag{4.31}$$

หรือคือการแปลง

$$\mathrm{T}_8 \circ \mathrm{T}_7 : \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\mathrm{Z}_0(\mathrm{B}_0)\} \tag{4.32}$$

4.4 **บทแทรก** 4 $(\mathrm{T}_7 \circ \mathrm{T}_8)$ [20]

กำหนดให้ $\{\zeta_0, \mathrm{B}_0\}$ แทนทรงกลมของไหลสมบูรณ์ สำหรับทุกค่า σ และ ε จะได้ว่า $\{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\mathrm{Z}_0\}$ ยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ โดย

$$\mathrm{Z}_0 = \left\{\sigma + \varepsilon \int \frac{rdr}{\mathrm{B}_0(r)^2}\right\}$$

นั่นคือ

$$ds^2 = -\frac{1}{\zeta_0(r)^2}dt^2 + \frac{\zeta_0(r)^2}{\mathrm{B}_0(r)^2\mathrm{Z}_0(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$$

หรือคือการแปลง

$$\mathrm{T}_7 \circ \mathrm{T}_8 : \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\} \mapsto \{\zeta_0, \mathrm{B}_0\mathrm{Z}_0(\mathrm{B}_0)\} \mapsto \{\zeta_0^{-1}, \mathrm{B}_0\mathrm{Z}_0(\mathrm{B}_0)\} \tag{4.33}$$

สำหรับข้อแตกต่างระหว่าง $T_8 \circ T_7$ และ $T_7 \circ T_8$ คือลำดับของขั้นตอนในการแปลง แต่อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์สุดท้ายจะให้ทรงกลมของไหลสมบูรณ์ตัวเดียวกัน แสดงว่า ทฤษฎีบทที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 2 มีสมบัติสลับที่ นั่นคือ

$$T_7 \circ T_8 \triangleq T_8 \circ T_7 \tag{4.34}$$

หลังจากที่เรามีทฤษฎีบทการแปลงและบทแทรกแล้ว เราได้นำทฤษฎีบทเหล่านี้มาประยุกต์ใช้กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์แล้วพิจารณาผลลัพธ์เพื่อหาความสัมพันธ์ของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ทำให้เราสามารถจัดกลุ่มของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ได้ โดยพิจารณาเลือกเมตริกที่มีรูปแบบของพิกัดไอโซทรอปีจากตารางของ Kayll Lake [32] แล้วใช้ทฤษฎีบทที่ 1, ทฤษฎีบทที่ 2 และบทแทรก 3 (เนื่องจาก บทแทรก 4 ให้ผลลัพธ์เท่ากับ บทแทรก 3) โดยในที่นี้จะเลือกเฉพาะเมตริกที่มีคุณสมบัติทรงกลมของไหลสมบูรณ์ นั่นคือ $G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ แล้วพิจารณาเมตริกใหม่ ได้ตารางดังนี้

ตารางที่ 1: ตัวอย่างการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ชื่อ	**เมตริก**	**ทฤษฎีบทที่ 1**	**พารามิเตอร์**
Minkowski	$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	Minkowski	-
S1	$ds^2 = -r^4 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	Nariai VI	Nariai VI เมื่อ $\alpha = 48$, $A = a = 0$, $D = B = b = 1$
K-O III	$ds^2 = -A(1+ar^2)^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	Kuch5 XIII	K-O III เมื่อ $A = 1$, $a = \frac{1}{2}$ Kuch5 XIII เมื่อ $a = -1$, $C = D = 1$
N-P-V Ia $\sqrt{2} < n \le 2$	$ds^2 = -(ar^{1+\frac{x}{2}} + br^{1-\frac{x}{2}})^2 (Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}})^{-2} dt^2 + (Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}})^{-2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $x = \sqrt{2n^2 - 4}$	N-P-V Ia	N-P-V Ia (n=2) เมื่อ $a = A$, $b = B$

ตารางที่ 1 (ต่อ): ตัวอย่างการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

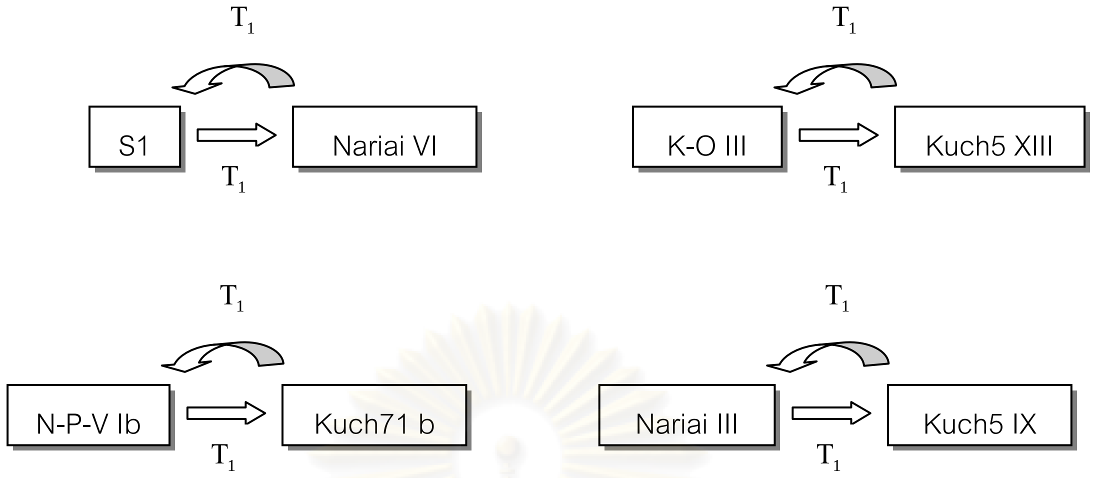
ชื่อ	เมตริก	ทฤษฎีบทที่ 1	พารามิเตอร์
N-P-V Ib $n=\sqrt{2}$	$ds^2=-(a+b\ln r)^2(Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-2}dt^2$ $+(Ar^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}+Br^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-2}\{dr^2+r^2d\Omega^2\}$	Kuch 71b	N-P-V Ib เมื่อ $A=a=1$, $B=b=0$ Kuch 71b เมื่อ $s=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a=b=d=1$, $c=0$
Nariai III	$ds^2=-\left[\frac{Ar^2+B}{q}\right]^q dt^2$ $+\left[\frac{Ar^2+B}{q}\right]^{qk}\{dr^2+r^2d\Omega^2\}$ เมื่อ $k\neq -1, k\neq 0$ และ $q=\frac{2(1+k)}{k^2-2k-1}$	Kuch5 IX	Nariai III เมื่อ $A=-2$, $B=0$ Kuch5 IX เมื่อ $s=\frac{3}{2}$, $A=B=1$, $C=0$
Buch 2	$ds^2=-\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}dt^2$ $+(1+f)^4\{dr^2+r^2d\Omega^2\}$ เมื่อ $f=\frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$	Buch 2	เมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทแล้วจัดรูปโดยมองว่า a คือ $-a$

สำหรับรูปแบบเมตริกของ Nariai VI, Kuch5 XIII, Kuch 71b และ Kuch5 IX สามารถดูได้จากภาคผนวก ก

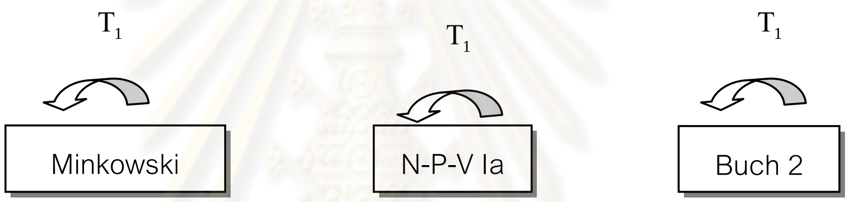
จะสังเกตได้ว่าจากการศึกษาทฤษฎีบทที่ 1 ของ BVW [20] ทำให้เราพบว่าหลังจากที่เราประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 ผลลัพธ์ที่ได้จะมีลักษณะ 2 แบบ คือ ได้ผลลัพธ์เป็นเมตริกตัวเดิมและผลลัพธ์เป็นเมตริกตัวใหม่ทำให้เราสามารถจัดกลุ่มของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ออกเป็นเมตริกสร้างได้ (Seed metric) และ เมตริกสร้างไม่ได้ (Non-seed metric) ดังนิยามต่อไปนี้

เมตริกสร้างได้ (Seed metric) คือ เมตริกที่ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่ 1 แล้วได้เมตริกใหม่ และ เมตริกสร้างไม่ได้ (Non-seed metric) คือ เมตริกที่ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่ 1 แล้วได้เมตริกเดิม

พิจารณาแผนภาพดังนี้



ภาพที่ 10: ตัวอย่าง เมตริกสร้างได้ (Seed metric)



ภาพที่ 11: ตัวอย่าง เมตริกสร้างไม่ได้ (Non-seed metric)

ตารางที่ 2: ตัวอย่างการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 2 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ชื่อ	**เมตริก**	**ทฤษฎีบทที่ 2**	**พารามิเตอร์**
Minkowski	$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	N-P-V Ia	N-P-V Ia เมื่อ $n = 2$, $A = a = \frac{\varepsilon}{2}$, $B = b = \sigma$
S1	$ds^2 = -r^4 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	Nariai VI	S1 เมื่อ $\sigma = 0$, $\varepsilon = 6$ Nariai VI เมื่อ $\alpha = 48$, $A = a = D = 1$, $B = b = 0$

ตารางที่ 2 (ต่อ): ตัวอย่างการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 2 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ชื่อ	**เมตริก**	**ทฤษฎีบทที่ 2**	**พารามิเตอร์**
K-O III	$ds^2 = -A(1+ar^2)^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	K1	K1 คือ เมตริกใหม่
N-P-V Ia $\sqrt{2} < n \le 2$	$ds^2 = -(ar^{1+\frac{x}{2}} + br^{1-\frac{x}{2}})^2 (Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}})^{-2} dt^2$ $+(Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}})^{-2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $x = \sqrt{2n^2 - 4}$	N-P-V Ia	ผลจากคุณสมบัตินิจพล และ ผลลัพธ์เมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 2 กับ Minkowski แล้วได้ N-P-V Ia
N-P-V Ib $n = \sqrt{2}$	$ds^2 = -(a + b\ln r)^2 (Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-2} dt^2$ $+(Ar^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$	N-P-V Ia	N-P-V Ib เมื่อ $a = B = 1$, $A = b = \sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon$ N-P-V Ia เมื่อ $n = \sqrt{2}$, $a = B = 1$, $b = A = 0$
Nariai III	$ds^2 = -\left[\frac{Ar^2 + B}{q}\right]^q dt^2$ $+\left[\frac{Ar^2 + B}{q}\right]^{qk} \{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $k \ne -1, k \ne 0$ และ $q = \frac{2(1+k)}{k^2 - 2k - 1}$	Nariai VI	Nariai III เมื่อ $A = -2$, $B = \sigma = 0$, $\varepsilon = 6$ Nariai VI เมื่อ $\alpha = 48$, $A = a = 0$, $B = b = D = 1$
Buch 2	$ds^2 = -\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2} dt^2$ $+(1+f)^4\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $f = \frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$	K2	K2 คือ เมตริกใหม่

สำหรับรูปแบบเมตริกของ Nariai VI, K1 และ K2 สามารถดูได้จากภาคผนวก ก

ตารางที่ 3: ตัวอย่างการประยุกต์บทแทรก 3 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ชื่อ	เมตริก	บทแทรก 3	พารามิเตอร์
Minkowski	$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	N-P-V Ia	N-P-V Ia เมื่อ $n=2$, $A = a = \frac{\varepsilon}{2}$, $B = b = \sigma$
S1	$ds^2 = -r^4 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	Nariai VI	S1 เมื่อ $\sigma = 0$, $\varepsilon = 6$, Nariai VI เมื่อ $\alpha = B = a = 0$, $A = b = D = 1$
K-O III	$ds^2 = -A(1+ar^2)^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	K3	K3 คือ เมตริกใหม่
N-P-V Ia $\sqrt{2} < n \le 2$	$ds^2 = -(ar^{1+\frac{x}{2}} + br^{1-\frac{x}{2}})^2 (Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}})^{-2} dt^2 + (Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}})^{-2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $x = \sqrt{2n^2 - 4}$	N-P-V Ia	ผลจากการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 แล้วยังคงได้เป็น N-P-V Ia
N-P-V Ib $n = \sqrt{2}$	$ds^2 = -(a + b\ln r)^2 (Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-2} dt^2 + (Ar^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$	Nariai VI	N-P-V Ib เมื่อ $a = B = 1, \varepsilon = \varepsilon$, $b = A = \sigma = 0$, Nariai VI เมื่อ $A = a = 0$, $B = b = D = 1$, $\alpha = 7$, $p = 2\sqrt{2}$, $q = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
Nariai III	$ds^2 = -\left[\frac{Ar^2 + B}{q}\right]^q dt^2 + \left[\frac{Ar^2 + B}{q}\right]^{qk} \{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $k \ne -1, k \ne 0$ และ $q = \frac{2(1+k)}{k^2 - 2k - 1}$	S1	Nariai III เมื่อ $A = -2$, $B = \sigma = 0$, $\varepsilon = 6$

ตารางที่ 3 (ต่อ): ตัวอย่างการประยุกต์บทแทรก 3 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ชื่อ	เมตริก	บทแทรก 3	พารามิเตอร์
Buch 2	$ds^2 = -\dfrac{(1-f)^2}{(1+f)^2}dt^2 + (1+f)^4\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$ เมื่อ $f = \dfrac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$	K2	K2 คือ เมตริกใหม่

สำหรับรูปแบบเมตริกของ Nariai VI, K2 และ K3 สามารถดูได้จากภาคผนวก ก

สำหรับทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปเป็นการพัฒนาจากทฤษฎีบทของ BVW [20] โดยที่รูปแบบเมตริกในทฤษฎีบทของ BVW จะอยู่ในรูปของ $\zeta(r)$ และ $\mathrm{B}(r)$ แต่ทฤษฎีบทใหม่ที่จะนำเสนอต่อไปนี้ เราจะจัดรูปแบบของเมตริกให้อยู่ในรูปของ $\mathrm{B}(r)$ เท่านั้น ดังนี้

4.5 **ทฤษฎีบทใหม่** (Modified Theorem)

4.5.1 **ทฤษฎีบทที่** 5

พิจารณาเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์

$$ds^2 = -\exp\left(\pm\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)dt^2 + \frac{\exp\left(\mp\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)}{\mathrm{B}(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$$

ดังนั้น สำหรับ σ, ε และ $\mathrm{B}(r)$ ใดๆ เราจะได้ว่า

$$ds^2 = -\exp\left(\mp\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)dt^2 + \frac{\exp\left(\pm\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)}{\mathrm{B}(r)^2\left[\sigma + \varepsilon\int\frac{rdr}{\mathrm{B}(r)^2}\right]^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\} \tag{4.35}$$

ยังคงเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์

พิสูจน์

จากเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ คือ

$$ds^2 = -\exp\left(\pm\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)dt^2 + \frac{\exp\left(\mp\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)}{\mathrm{B}(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$$

โดยที่

$$\zeta(r) = \exp\left(\pm\int \sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right) \tag{4.36}$$

ดังนั้น

$$\zeta(r)^2 = \exp\left(\pm\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right) \tag{4.37}$$

และ

$$\frac{1}{\zeta(r)^2} = \exp\left(\mp\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right) \tag{4.38}$$

พิจารณาเมตริกที่เกิดจากการประยุกต์บทแทรก 3 นั่นคือ

$$ds^2 = -\frac{1}{\zeta_0(r)^2}dt^2 + \frac{\zeta_0(r)^2}{\mathrm{B}_0(r)^2\mathrm{Z}_0(r)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$$

โดยที่

$$\mathrm{Z}_0 = \left\{\sigma + \varepsilon\int\frac{rdr}{\mathrm{B}_0(r)^2}\right\}$$

ดังนั้น เราจะได้เมตริกใหม่ ดังนี้

$$ds^2 = -\exp\left(\mp\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)dt^2$$

$$+\frac{\exp\left(\pm\int 2\sqrt{\frac{\mathrm{B}(r)'' - \mathrm{B}(r)'/r}{2\mathrm{B}(r)}}dr\right)}{\mathrm{B}(r)^2\left[\sigma + \varepsilon\int\frac{rdr}{\mathrm{B}(r)^2}\right]^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\}$$

เป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ โดยที่ σ และ ε เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

ตารางที่ 4: ตัวอย่างการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 5 กับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

$\mathrm{B}(r)$	**เมตริก**	**ชื่อ**	**ทฤษฎีบทที่ 5**	**พารามิเตอร์**
1	$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	Minkowski	N-P-V Ia	N-P-V Ia เมื่อ $n = 2$, $A = a = \frac{\varepsilon}{2}$, $B = b = \sigma$
r^2	$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{r^4}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$	N-P-V Ia	N-P-V Ia	N-P-V Ia เมื่อ $n = 2$, $A = 1, B = a = b = 0$ และผลจากการประยุกต์บทแทรกกับ N-P-V Ia
$\frac{1}{r}$	$ds^2 = -r^{\sqrt{6}} dt^2 + r^{2-\sqrt{6}}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$	Kuch 71b	K4	Kuch 71b เมื่อ $c = 0$, $a = b = d = s = 1$ K4 คือ เมตริกใหม่
$\frac{1}{r^2}$	$ds^2 = -r^4 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$	S1	Nariai VI	S1 เมื่อ $\sigma = 0$, $\varepsilon = 6$, Nariai VI เมื่อ $\alpha = 0$, $D = 1$, $A = 1$, $B = 0$, $a = 0$, $b = 1$

สำหรับรูปแบบเมตริกของ Nariai VI และ K4 สามารถดูได้จากภาคผนวก ก

จากรูปแบบของเมตริกที่อยู่ในรูปของ $\mathrm{B}(r)$ เท่านั้น ทำให้เมื่อเราพัฒนาทฤษฎีบทการแปลงของทรงกลมของไหลสมบูรณ์จากแนวคิดของ BVW จะพบว่า จากเดิมที่เราต้องพิจารณาทั้งค่าของ $\zeta(r)$ และ $\mathrm{B}(r)$ แต่ทฤษฎีบทใหม่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะค่าของ $\mathrm{B}(r)$ โดยที่เมตริกใหม่ที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของ $\mathrm{B}(r)$, σ และ ε เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

บทที่ 5

สรุป (Conclusion)

การศึกษาระบบจักรวาลในส่วนของการสำรวจดวงดาว หากเราใช้การปฏิบัติโดยตรงจะมีความเป็นไปได้ยาก เนื่องจากเทคโนโลยีในปัจจุบันยังมีข้อจำกัดอยู่มาก ดังนั้น เราจึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองซึ่งเป็นแบบจำลองดวงดาวเสมือนจริงเพื่อที่จะใช้แบบจำลองนี้เป็นตัวแทนดวงดาวในจักรวาลเพื่อศึกษาลักษณะ คุณสมบัติ และสร้างทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และเนื่องจากการศึกษานี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับจักรวาล ดังนั้นเราจำเป็นต้องศึกษาลักษณะต่าง ๆ ของจักรวาลหรือปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อวัตถุที่ดำรงอยู่ในจักรวาลด้วย ทั้งนี้ อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ได้พิจารณาว่าแสงมีอัตราเร็วที่คงที่ ไม่ว่าผู้สังเกตนั้นจะอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่จะสามารถวัดความเร็วของแสงได้เท่ากันหมด จากข้อมูลนี้เองทำให้ไอน์สไตน์ได้รวมเอาปริภูมิ 3 มิติ รวมเข้ากับเวลา และเรียกปริภูมิ 4 มิตินี้ว่า “ปริภูมิเวลาอวกาศ” นอกจากนี้เขายังได้นำเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษและทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปซึ่งเป็นทฤษฎีเชิงเรขาคณิต อีกทั้งเขาได้นำเสนอสมการในสัมพัทธภาพที่มีชื่อว่า “สมการสนามของไอน์สไตน์” โดยสมการนี้เองเป็นสมการที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาค้นคว้าวิทยานิพนธ์เล่มนี้

5.1 สัมพัทธภาพพิเศษ

สัมพัทธภาพหรือทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์เป็นทฤษฎีที่หักล้างแนวคิดทฤษฎีสัมพัทธภาพของกาลิเลโอในเรื่องของการมีปริภูมิสมบูรณ์และเวลาสมบูรณ์ โดยกล่าวว่าระยะทางและเวลาจะขึ้นอยู่กับผู้สังเกตโดยจะมีความแตกต่างกันหากผู้สังเกตมีสถานะต่างกัน แต่อย่างไรก็ตามผู้สังเกตทุกคนจะวัดอัตราเร็วของแสงได้เท่ากันเสมอ

สำหรับในส่วนของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษเป็นการกล่าวถึงการประยุกต์หลักสัมพัทธภาพเข้ากับกรอบอ้างอิงเฉพาะที่เราเรียกว่า กรอบอ้างอิงเฉื่อย เท่านั้น โดยกรอบอ้างอิงนี้มีสมบัติที่ว่า หากวัตถุอยู่นิ่งจะคงอยู่นิ่งตลอดไป หรือหากวัตถุนั้นเคลื่อนที่ก็จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่คงที่ นั่นคือไม่มีความเร่งมาเกี่ยวข้องนั่นเอง นอกจากนี้เรายังสรุปสมมติฐานของไอน์สไตน์ออกเป็น 2 ข้อด้วยกัน ดังนี้

1. <u>สมมติฐานข้อแรก</u> (หลักสัมพัทธภาพอย่างพิเศษ) กฎทางฟิสิกส์ย่อมเหมือนกันในทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย นั่นคือ ไม่มีกรอบอ้างอิงพิเศษใด ๆ

2. <u>สมมติฐานข้อที่สอง</u> (ความไม่แปรเปลี่ยนของความเร็วแสง) อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศเป็นค่าคงที่สากล ($c = 3\times10^{8} m/s$) ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดแสงนั้น

จากสมบัตินี้เองทำให้เราสนใจการแปลงพิกัดในปริภูมิเวลาอวกาศที่จากเดิมเราศึกษาการแปลงแบบกาลิเลโอที่ถือว่าเวลาเป็นสิ่งสมบูรณ์ คือมีค่าเท่ากัน แต่ในสัมพัทธภาพพิเศษนี้ เราจะศึกษาการแปลงแบบลอเรนซ์ โดยการแปลงนี้ถือว่าเวลามีค่าไม่เท่ากันโดยที่มีส่วนที่เรียกว่า Lorentz factor ที่มีค่าของความเร็วแสงมาเกี่ยวข้องเป็นตัวเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่าง 2 พิกัด ดังนั้นผลจากการแปลงลอเรนซ์ทำให้เรามีปรากฏการณ์สำคัญเกิดขึ้น เช่น สัมพัทธภาพแห่งความพร้อมเพรียง การยืดออกของเวลา การหดของระยะทาง เป็นต้น

5.2 สัมพัทธภาพทั่วไป

หลังจากที่ไอน์สไตน์ได้นำเสนอสัมพัทธภาพพิเศษแล้ว เขาได้พยายามทำการศึกษาโดยทำให้ทฤษฎีสัมพัทธภาพใช้ได้กับทุกกรอบอ้างอิง ดังนั้น เขาจึงได้นำเสนอ “ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป” ซึ่งเป็นทฤษฎีที่สามารถใช้ได้กับกรอบอ้างอิงทั่วไปนั่นคือรวมถึงกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งความเร่งนี้ก็คือแรงโน้มถ่วงนั่นเอง

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปใช้เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และเทนเซอร์ในการอธิบายความโน้มถ่วง แสดงให้เห็นว่าผู้สังเกตทุกคนเหมือนกันไม่ว่าเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่หรือมีความเร่งมาเกี่ยวข้อง กฎของทฤษฎีนี้จะเหมือนกันสำหรับผู้สังเกตทุกคน ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป แรงโน้มถ่วงไม่ได้เป็นแรงอย่างในกฎแรงโน้มถ่วงของนิวตันอีกต่อไป แต่เป็นผลจากการโค้งของปริภูมิเวลาอวกาศ

นอกจากนี้ไอน์สไตน์ได้นำเสนอสมการที่มีความน่าสนใจและมีความสำคัญอย่างยิ่งในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ นั่นคือ สมการไอน์สไตน์ หรือ สมการสนามของไอน์สไตน์ โดยเป็นสมการสนามที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของปริภูมิเวลาอวกาศและมวลหรือสสาร ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการเทนเซอร์

5.3 ทรงกลมของไหลสมบูรณ์

ในส่วนของการสร้างแบบจำลองของดวงดาว เราได้เลือกใช้แบบจำลองที่เรียกว่า “ทรงกลมของไหลสมบูรณ์” ถือเป็นการประมาณขั้นพื้นฐานของแบบจำลองของดวงดาว โดยเราใช้สมบัติของความเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์รวมกับสมการสนามของไอน์สไตน์ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์เกิดขึ้น

สำหรับการศึกษากลศาสตร์ของไหลซึ่งถือเป็นส่วนหนึ่งของกลศาสตร์การเคลื่อนที่ โดยของไหล คือ สสารซึ่งสามารถไหลได้มีรูปร่างไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับภาชนะที่บรรจุ โดยเราสามารถพิจารณาของไหลในรูปแบบของเทนเซอร์ความเค้นพลังงาน นอกจากที่เราศึกษาแบบจำลองที่เป็นของไหลแล้ว เรายังเจาะจงที่จะพิจารณาของไหลที่มีสมบัติที่ว่า ไม่มีความหนืด ไม่นำความร้อน และมีสมบัติไอโซทรอปี จากสมบัติที่กล่าวนี้เอง เราจะเรียกของไหลชนิดนี้ว่า “ของไหลสมบูรณ์” และเนื่องจากเราต้องการสร้างแบบจำลองของดวงดาว เราจึงกำหนดให้แบบจำลองนั้นเป็นทรงกลมซึ่งถือว่าเป็นรูปแบบทางเรขาคณิตที่พบได้ทั่วไปของลักษณะของดวงดาว

จากที่ได้กล่าวไว้ว่าเราจะนำสมบัติของความเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์นี้รวมเข้ากับสมการสนามของไอน์สไตน์โดยมีความเกี่ยวเนื่องกันในส่วนของเทนเซอร์ความเค้นพลังงานที่เป็นส่วนประกอบของสมการสนามของไอน์สไตน์ และจากที่เราใช้ความเป็นของไหลสมบูรณ์ ตัวเทนเซอร์ความเค้นพลังงานจะอยู่ในรูปแบบของเมตริกทแยงมุมทำให้เราสามารถหาความสัมพันธ์ของไอน์สไตน์เทนเซอร์ในแต่ละองค์ประกอบได้ นั่นคือ จะมีค่าเท่ากันนั่นเอง

5.4 ทฤษฎีสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

จากความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของไอน์สไตน์เทนเซอร์แต่ละตัวที่กล่าวได้ว่าจะมีค่าเท่ากัน ถ้าเราพิจารณาในรูปแบบของทรงกลมของไหลสมบูรณ์แล้ว เมื่อเรามาคำนวณหาค่าของไอน์สไตน์เทนเซอร์แต่ละตัวโดยที่พิกัดของทรงกลมของไหลสมบูรณ์นี้มีอยู่หลายพิกัดด้วยกัน แต่สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ เราจะพิจารณาในรูปแบบของพิกัดไอโซทรอปี ซึ่งเป็นพิกัดที่มีลักษณะเด่นคือ ค่าสัมประสิทธิ์ขององค์ประกอบของปริภูมิจะมีค่าเท่ากัน

หลังจากที่เราคำนวณหาค่าไอน์สไตน์เทนเซอร์แต่ละตัวมาแล้ว เรามีคุณสมบัติที่ว่า หากเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์ ค่าไอน์สไตน์เทนเซอร์นี้จะต้องเท่ากัน ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์เกิดขึ้น ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์นี้เราสามารถจัดรูปแบบได้ในรูปของ $\zeta(r)$ หรือ $\mathrm{B}(r)$ ตามความเหมาะสมของการพิจารณาการสร้างทฤษฎีบท และสมการนี้เองถือว่าเป็นหลักสำคัญ เพราะเราสามารถบอกได้ว่าเมตริกที่เราพิจารณาเป็นทรงกลมของไหลสมบูรณ์หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับว่าค่าของ $\zeta(r)$ และ $\mathrm{B}(r)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นี้หรือไม่นั่นเอง ซึ่งแนวคิดนี้เองเป็นแนวคิดที่มาจากงานวิจัยของ BVW ที่ได้ศึกษาทฤษฎีบทสำหรับการแปลงของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดต่าง ๆ ซึ่งรวมถึงพิกัดไอโซทรอปีด้วย

โดย BVW ได้เสนอทฤษฎีบทสำหรับทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปีไว้ 2 ทฤษฎีบทและอีก 2 บทแทรก โดยที่บทแทรกทั้งสองได้ให้ผลลัพธ์ที่เท่ากัน สำหรับในวิทยานิพนธ์เล่มนี้เป็นการศึกษาต่อยอดจากการวิจัยของ BVW โดยเริ่มจากการศึกษารูปแบบของทฤษฎีบทและทำ

ความเข้าใจที่มาของทฤษฎีบท จากนั้นได้นำทฤษฎีบทและบทแทรกเหล่านี้มาประยุกต์ใช้จริงกับเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ที่ได้รับการรวบรวมโดย Kayll Lake โดยที่เราเลือกเมตริกที่มีรูปแบบของพิกัดไอโซทรอปี เมื่อเรานำมาประยุกต์ใช้แล้ว ทำให้เราสามารถหาความสัมพันธ์ของเมตริกแต่ละตัวได้ นอกจากนี้ เมื่อสังเกตผลจากการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 พบว่า เราสามารถแบ่งกลุ่มของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ออกได้เป็น 2 กลุ่ม ดังนี้ เมตริกสร้างได้ (Seed metric) คือ เมตริกที่ประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 แล้วได้เมตริกใหม่ ส่วนอีกกลุ่มคือ เมตริกสร้างไม่ได้ (Non-seed metric) คือ เมตริกที่ประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 แล้วยังคงได้เมตริกตัวเดิม

ในส่วนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์นี้เป็นการสร้างทฤษฎีบทใหม่ยึดหลักตามแนวคิดของ BVW แต่เราได้ทำการดัดแปลงรูปแบบทั่วไปของเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์เดิม จากที่ BVW ได้พิจารณาโดยติดอยู่ในรูปแบบของตัวแปร 2 ตัว คือ $\zeta(r)$ และ $\mathrm{B}(r)$ โดยเราจะเขียน $\zeta(r)$ ให้อยู่ในรูปแบบของ $\mathrm{B}(r)$ ทำให้รูปแบบทั่วไปของเมตริกเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์อยู่ในรูปแบบของตัวแปรตัวเดียว นั่นคือ $\mathrm{B}(r)$ ทำให้เราสามารถสร้างทฤษฎีบทใหม่ที่ให้ค่า $\mathrm{B}(r)$, σ และ ε เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สำหรับการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 2 บทแทรก และทฤษฎีบทใหม่ ทำให้เราค้นพบเมตริกใหม่ 4 เมตริก ซึ่งเป็นเมตริกใหม่โดยเมื่อจัดค่าพารามิเตอร์แล้วไม่ซ้ำกับเมตริกจากตารางของ Kayll Lake นั่นคือ K1, K2, K3 และ K4 ซึ่งสามารถดูรูปแบบของเมตริกได้จากภาคผนวกท้ายเล่ม

รายการอ้างอิง

[1] **กลศาสตร์ของไหล** [ออนไลน์], 2 มกราคม 2554. แหล่งที่มา www.sci.rmuti.ac.th/physics/physics1/Phys1_Chapter_08.pdf.

[2] **การนำความร้อน** [ออนไลน์], 3 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา http://203.172.208.244/web/stu19/site2_2/index3.html.

[3] **การพาความร้อน** [ออนไลน์], 3 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา https://www.myfirstbrain.com/main_view.aspx?ID=29923.

[4] ขวัญ อารยะธนิตกุล, **ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป** [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา www.sc.mahidol.ac.th/scpy/penthai/articles/newsletter/newsletter4.pdf.

[5] ขวัญ อารยะธนิตกุล, **ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป** [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา www.sc.mahidol.ac.th/scpy/penthai/articles/newsletter/newsletter5.pdf.

[6] **ของไหล** [ออนไลน์], 2 มกราคม 2554. แหล่งที่มา www.mwit.ac.th/~kitipong/work/fluid.doc.

[7] เฉลียว มณีเลิศ.**ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษและทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป** Special and General Theories of Relativity. กทม. : หจก.สยามสเตชั่นเนอรี่ซัพพลายส์.

[8] ณฤทธิ์ ปิฏกรัชต์, **ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปและเอกภพวิทยา**, มหาวิทยาลัยสตอกโฮล์ม, ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา www.physto.se/~narit/gravity.pdf.

[9] **ทฤษฎีสัมพัทธภาพ** [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา http://202.28.94.55/web/322103/2551/work1/g63/relativity_lecture_notes.pdf.

[10] **ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ** [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา http://www.rmutphysics.com/charud/scibook/vichaipage/chap8.pdf.

[11] **ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ** [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา http://www.sciencetech.nrru.ac.th/physic/files/Chp%206091211022417.pdf.

[12] **ทรงกลม** [ออนไลน์], 3 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มาhttp://www4.eduzones.com/dena/3818.

[13] **แนะนำเทนเซอร์** [ออนไลน์], 20 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา http://www.kmitl.ac.th/~kcpakkin/intro.html.

[14] ฟิสิกส์ราชมงคล, **ความหนืดของของไหล** [ออนไลน์], 3 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา www.rmutphysics.com/charud/PDF-learning/4/.../lecture20.pdf

[15] ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล, **ทฤษฎีสัมพัทธภาพ** [ออนไลน์], 18 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา www.rmutphysics.com/physics/oldfront/64/relativity.html.

[16] อภิธานศัพท์ฟิสิกส์, **กาลอวกาศ** [ออนไลน์], 20 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา http://www.neutron.rmutphysics.com/physics-glossary/index.php?option=com_content&task=view&id=4713&Itemid=60.

[17] อรรถกฤต ฉัตรภูมิ, **Lecture note: ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษเบื้องต้น** [ออนไลน์], 21 กุมภาพันธ์ 2554. แหล่งที่มา www.vcharkarn.com/varticle/18983.

[18] Bamse,: **components of the stress-energy tensor** [Online].(n.d.). Available from: http://en.wikipedia.org/wiki/File:StressEnergyTensor.svg. [2011,February 3]

[19] Berger, S., Hojman, R. and Santamarina, J.: **General exact solutions of Einstein equations for static perfect fluids with spherical symmetry**, J. Math. Phys. **28** (1987) 2949.

[20] Boonserm, P.: **Some exact solutions in general relativity**, MSc thesis, Victoria University of Wellington, arXiv:gr-qc/0610149.

[21] Boonserm, P., Visser, M. and Weinfurtner, S.: **Solution generating theorems for perfect fluid spheres**, Journal of Physics: Conference Series **68** (2007) 012055, [arXiv:gr-qc/0609088].

[22] Boonserm, P., Visser, M. and Weinfurtner, S.: **Generating perfect fluid spheres in general relativity**, Phys. Rev. D **71** (2005) 124037. [arXiv:gr-qc/0503007].

[23] Boonserm, P., Visser, M. and Weinfurtner, S.: **Solution generating theorems for the TOV equation**, gr-qc/0607001.

[24] Boonserm, P., Visser, M. and Weinfurtner, S.: **Solution generating theorems: Perfect fluid spheres and the TOV equation**, arXiv:gr-qc/0609099 (Marcel Grossmann11).

[25] Bondi, H.: **Spherically symmetrical models In General Relativity**, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **107** (1947) 410.

Massive spheres in general relativity, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **282** (1964) 303-317.

[26] Borowski, E.J., Borwein, J.M.: **Collins Dictionary of Mathematics**, Pages 141, 149. ISBN 0-00-434347-6.

[27] Buchdahl, H. A.: **General Relativistic fluid spheres**, Phys. Rev. **116** (1959)1027-1034; **General Relativistic fluid spheres II: general inequalities for regular spheres**, Ap. J. **146** (1966) 275-281.

[28] Delgaty, M. S. R. and Lake, K.: **Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations**, Comput. Phys.Commun. **115** (1998) 395 [arXiv:gr-qc/9809013].

[29] Einstein, A.: **On the Electrodynamics of Moving Bodies** [Online].(n.d.). Available from: http://bavard.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/specrel.pdf [2011, February 26]

[30] Finch, M. R. and Skea, J. E. F.: **A review of the relativistic static fluid sphere**, 1998, unpublished.http://www.dft.if.uerj.br/usuarios/JimSkea/papers/pfrev.ps.

[31] **Iso** [Online].(n.d.). Available from: http://dict.longdo.com/search/iso. [2011, February 3]

[32] Lake, K.: **All static spherically symmetric perfect fluid solutions of Einstein's Equations**, Phys. Rev. D **67** (2003) 104015 [arXiv:gr-qc/0209104].

[33] Martin, D. and Visser, M.: **Algorithmic construction of static perfect fluid spheres**, Phys. Rev. D **69** (2004)104028 [arXiv:gr-qc/0306109].

[34] Martin, D. and Visser, M.: **Bounds on the interior geometry and pressure profile of static fluid spheres**, Class. Quant. Grav. **20** (2003) 3699 [arXiv:grqc/0306038].

[35] Max, M.: **Image:BernoullisLawDerivationDiagram.png** [Online].(n.d.). Available from: http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:BernoullisLawDerivationDiagram.png. [2011, February 3]

[36] Rahman, S. and Visser, M.: **Spacetime geometry of static fluid spheres**, Class.Quant. Grav. **19** (2002) 935 [arXiv:gr-qc/0103065].

[37] Stephani,H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C. and Herlt, E.: **Exact solutions of Einstein's field equations**, (Cambridge University Press, 2003).

[38] Waner S., **Lecture 12: The Stress Tensor and the Relativistic Stress-Energy Tensor**[Online].(n.d.). Available from: http://people.hofstra.edu/Stefan_Waner/diff_geom/Sec12.html. [2011, February 3]

[39] Weisstein, Eric, W.: **Spheric Section**[Online].(n.d.). Available from: http://mathworld.wolfram.com/SphericSection.html. [2011, February 3]

[40] Wyman, M.: **Radially symmetric distributions of matter**, Phys. Rev. **75** (1949) 1930.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ตัวอย่างเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปีจากตารางของ Kayll Lake

ชื่อ	เมตริก
Minkowski	$ds^2 = -dt^2 + \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
S1	$ds^2 = -r^4 dt^2 + \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
K-O III	$ds^2 = -A\left(1 + ar^2\right)^2 dt^2 + \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
N-P-V Ia $\sqrt{2} < n \leq 2$	$ds^2 = -\left(ar^{1+\frac{x}{2}} + br^{1-\frac{x}{2}}\right)^2 \left(Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}}\right)^{-2} dt^2$ $+\left(Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}}\right)^{-2} \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $x = \sqrt{2n^2 - 4}$
N-P-V Ib $n = \sqrt{2}$	$ds^2 = -\left(a + b\ln r\right)^2 \left(Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{-2} dt^2$ $+\left(Ar^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{-2} \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
N-P-V Ic $0 < n < \sqrt{2}$	$ds^2 = -\left(ar^{\frac{n}{2}} + br^{-\frac{n}{2}}\right)^2 r^4 \left[A\cos\left(\frac{\chi}{2}\ln r\right) + B\sin\left(\frac{\chi}{2}\ln r\right)\right]^2 dt^2$ $+\left(Ar^{1+\frac{n}{2}} + Br^{1-\frac{n}{2}}\right)^{-2} \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $\chi = \sqrt{4 - 2n^2}$
N-P-V IIa $0 \geq k > -2 + \sqrt{2}$	$ds^2 = -\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \frac{1}{4d^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-2n+k} \left[\left(c+d\right) - \left(c-d\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]^2 dt^2$ $+\left(1+\alpha\right)^4 \left(\frac{r}{a}\right)^k \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $c = 2 + 3k + \frac{3}{4}k^2$, $d = n\left(k+2\right)$, $n = \sqrt{1 + 2k + \frac{1}{2}k^2}$, $\alpha = \frac{-k}{k+4} = \frac{m}{2a}$

ชื่อ	**เมตริก**
N-P-V IIb $k=-2+\sqrt{2}$	$ds^2=-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{2}}\left[1+\frac{\ln a-\ln r}{2\sqrt{2}}\right]^2 dt^2$ $+(1+\alpha)^4\left(\frac{r}{a}\right)^{-2+\sqrt{2}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$
N-P-V IIc $-2+\sqrt{2}>k\geq -2$	$ds^2=-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^{2+k}\cos^{-2}\Phi\cos^2\left[n_1\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\Phi\right]^2 dt^2$ $+(1+\alpha)^4\left(\frac{r}{a}\right)^{k}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $n_1=\sqrt{-1-2k-\frac{k^2}{2}}$, $\tan\Phi=\frac{2+3k+\frac{3k^2}{4}}{n_1(k+2)}$, $\alpha=\frac{-k}{k+4}=\frac{m}{2a}$
Nariai III	$ds^2=-\left[\frac{Ar^2+B}{q}\right]^q dt^2+\left[\frac{Ar^2+B}{q}\right]^{qk}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $k\neq -1, k\neq 0$ และ $q=\frac{2(1+k)}{k^2-2k-1}$
Nariai IV	$ds^2=-A\cos^2\left(a-\frac{\sqrt{2}M}{4}r^2\right)\cos^{-2}\left(b+\frac{M}{4}r^2\right)dt^2$ $+A\cos^{-2}\left(b+\frac{M}{4}r^2\right)\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Nariai VI $\alpha>-1$	$ds^2=-D\left(\frac{ar^p+br^{-p}}{Ar^q+Br^{-q}}\right)^2 dt^2+D\left(Ar^{1+q}+Br^{1-q}\right)^{-2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $p=\sqrt{1+\alpha}$ และ $q=\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}$

ชื่อ	เมตริก
Nariai VII $-1>\alpha>-2$	$ds^2=-D\left(\dfrac{a\cos(p\ln r)+b\sin(p\ln r)}{Ar^{q}+Br^{-q}}\right)dt^2$ $+D\left(Ar^{1+q}+Br^{1-q}\right)^{-2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $p=\sqrt{-1-\alpha}$ และ $q=\sqrt{1+\dfrac{\alpha}{2}}$
Nariai VIII $\alpha<-2$	$ds^2=-D\left(\dfrac{a\cos(p\ln r)+b\sin(p\ln r)}{A\cos(q\ln r)+B\sin(q\ln r)}\right)^2dt^2$ $+Dr^{-2}\left(A\cos(q\ln r)+B\sin(q\ln r)\right)^{-2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $p=\sqrt{-1-\alpha}$ และ $q=\sqrt{-\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$
Nariai IX $\alpha=-1$	$ds^2=-D\left(\dfrac{a+b\ln r}{Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}\right)^2dt^2+Dr^{-2}\left(Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{-2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Nariai X $\alpha=-2$	$ds^2=-D\left(\dfrac{a\cos\ln r+b\sin\ln r}{A+B\ln r}\right)^2dt^2+Dr^{-2}\left(A+B\ln r\right)^{-2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Buch2	$ds^2=-\dfrac{(1-f)^2}{(1+f)^2}dt^2+(1+f)^4\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $f=\dfrac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$
Burl I	$ds^2=-A\left(1+r^2\right)^{\frac{4(a+1)}{2a^2+4a+1}}dt^2+\left(1+r^2\right)^{\frac{4a}{2a^2+4a+1}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Burl II	$ds^2=-A\sqrt[3]{\dfrac{\left(a+r^2\right)^2}{\left(a+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+r^2\right)\left(a+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+r^2\right)}}dt^2$ $+B\left(\dfrac{a+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+r^2}{a+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+r^2}\right)^{\sqrt{3}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$

ชื่อ	เมตริก
Kuch71II	$ds^2 = -\left(Ae^{\frac{1+\sqrt{2}}{4}Ar^2} + Be^{\frac{1-\sqrt{2}}{4}Ar^2}\right)^2 dt^2 + Ce^{\frac{1}{2}Ar^2}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
Kuch71b	$ds^2 = -ar^{2\sqrt{2s^2-\frac{1}{2}}}dt^2 + \frac{br^{4s-2-2\sqrt{2s^2-\frac{1}{2}}}}{cr^{8s} + 2\sqrt{cd}\,r^{4s} + d}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
Kuch5 I	$ds^2 = -r^4 e^{Ar\left(1-\sqrt{2}\right)}\{CF\left(\delta;3;A\sqrt{2}r\right) + D[-\frac{1}{2A^2r^2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4Ar}$ $+\frac{1}{2}\left(\delta-1\right)\left(\delta-2\right)F\left(\delta;3;A\sqrt{2}r\right)\times\ln\left(A\sqrt{2}r\right)$ $+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\delta-2\right)\left(\delta-1\right)\delta\left(\delta+1\right)...\left(\delta+k-1\right)}{2\cdot3\cdot4...\left(2+k\right)\cdot k!}\left(A\sqrt{2}r\right)$ $\times\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\delta+\nu} - \frac{1}{3+\nu} - \frac{1}{1+\nu}\right)]\}^2 dt^2 + Be^{Ar}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $\delta = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{2}\right)$
Kuch5 IV	$ds^2 = -r^4 e^{-\sqrt{2}Ar^4}\left[CF\left(\frac{3-\sqrt{2}}{4};\frac{3}{2};\frac{A}{\sqrt{2}}r^4\right) + \frac{D}{r^2}F\left(\frac{1-\sqrt{2}}{4};\frac{1}{2};\frac{A}{\sqrt{2}}r^4\right)\right]^2 dt^2$ $+Be^{Ar^2}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
Kuch5 VIII	$ds^2 = -Ce^{ar^2}dt^2 + De^{-ar^2}\coth^{-2}\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}r^2 + A\right)\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$
Kuch5 IX	$ds^2 = -Ar^{2\sqrt{2s^2-\frac{1}{2}}}dt^2 + \frac{r^{4s-2-2\sqrt{2s^2-\frac{1}{2}}}}{\left(Br^{4s} - C\right)^2}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $s > \frac{1}{2}$
Kuch5 XI	$ds^2 = -CF\left(r\right)dt^2 + D\left(B + \frac{r^{2-2A}}{2\left(A-1\right)}\right)^{-2} F\left(r\right)\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $F\left(r\right) = \exp\left(2\sqrt{\frac{2A}{1-A}}\arctan\sqrt{2B\left(1-A\right)r^{2A-2} - 1}\right)$ และ $A \neq 1$

ชื่อ	เมตริก
Kuch5 XII	$ds^2=-C\left(\frac{\sqrt{2A}F(r)-1}{\sqrt{2A}F(r)+1}\right)^{\sqrt{2}}dt^2+\frac{De^{2Ar^2}}{\left[F(r)\right]^2}\left(\frac{\sqrt{2A}F(r)+1}{\sqrt{2A}F(r)-1}\right)^{\sqrt{2}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $F(r)=\frac{1}{2A}+Be^{Ar^2}$
Kuch5 XIII	$ds^2=-C\left\lvert\left(a^2-\frac{1}{2}\right)r^2+B\right\rvert^{\frac{2a}{2a^2-1}}dt^2+D\left\lvert\left(a^2-\frac{1}{2}\right)r^2+B\right\rvert^{\frac{2-2a}{2a^2-1}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Kuch5 XV	$ds^2=-C\left\lvert\sqrt{2}F(r)+Be^{Ar^2}-A\right\rvert^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{\frac{1}{A}F(r)}dt^2+D\left\lvert\sqrt{2}F(r)+Be^{Ar^2}-A\right\rvert^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{\frac{1}{A}\left[Be^{Ar^2}-F(r)\right]}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $F(r)=\sqrt{\frac{1}{2}B^2e^{2Ar^2}-ABe^{Ar^2}}$
Kuch5 XVI	$ds^2=-C\left\lvert B\sqrt{2}F(r)+B^2r^2+AB\right\rvert^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{\frac{A+Br^2}{2B}F(r)}dt^2+D\left\lvert B\sqrt{2}F(r)+Br^2+AB\right\rvert^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{Ar^2+\frac{1}{2}Br^4-\frac{A+Br^2}{2B}F(r)}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $F(r)=\sqrt{\frac{B^2}{2}r^4+ABr^2+\frac{A^2}{2}-B}$
Kuch73 I	$ds^2=-\frac{ar^2}{\left(1+cr^{\sqrt{2}}\right)^2}dt^2+\frac{br^{\sqrt{2}-2}}{\left(1+cr^{\sqrt{2}}\right)^2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Kuch73 II	$ds^2=-\frac{a}{c-r^2}dt^2+\frac{b}{\left\lvert c-r^2\right\rvert^{\sqrt{3}}(1-y)^2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $y=\frac{d}{\left(c-r^2\right)^{\sqrt{3}}}$

ชื่อ	เมตริก
G-G	$ds^2=-A\left(\frac{2r^2-\left(b^2d+1+c\right)}{2r^2-\left(b^2d+1-c\right)}\right)dt^2$ $+\frac{B}{b^2\left(2+d\right)-\left(b^2d+1\right)r^2+r^4}$ $\left(\frac{2r^2-\left(b^2d+1+c\right)}{2r^2-\left(b^2d+1-c\right)}\right)^{-\left(b^2d+2b-1\right)/c}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Bayin VI	$ds^2=-AC^{-a}e^{-dar^2}dt^2+BC^be^{dbr^2}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $a^2+2ab-b^2=0$
Gold I	$ds^2=-Af^{\frac{1}{b}}dt^2+B\frac{g^2}{c^2\left(1+2ag+2g^2\right)}f^{-\frac{1+a}{b}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $f=\frac{1+\left(a+b\right)g}{1+\left(a-b\right)g},g=\frac{c}{1-dr^2}$ และ $b=\sqrt{a^2-2}$
Gold II	$ds^2=-A\left[\frac{\left(1+c\right)u^2+1-c}{2u}\right]^{\sqrt{2}c/\left(1-c^2\right)}u^{\frac{-\sqrt{2}}{1-c^2}}dt^2$ $+B\left[\frac{2u}{\left(1+c\right)u^2+1-c}\right]^{\left(2+\sqrt{2}c\right)/\left(1-c^2\right)}u^{\frac{\sqrt{2}+2c}{1-c^2}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$
Gold III	$ds^2=-A\left(\frac{g-1}{g+1}\right)dt^2+B\left(1+\frac{1}{g}\right)^2\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$ เมื่อ $g=\cosh\left(a+br^2\right)$
Stewart	$ds^2=-\left(1-\frac{M}{2a}\right)^2\left(1-\frac{Mr^2}{2a^3}\right)^2\left(1+\frac{M}{a}-\frac{Mr^2}{a^3}-\frac{M^2r^2}{4a^4}\right)^{-2}dt^2$ $+\left(1-\frac{M}{2a}\right)^2\left(1-\frac{Mr^2}{2a^3}\right)^{-6}\left(1+\frac{M}{a}-\frac{Mr^2}{a^3}-\frac{M^2r^2}{4a^4}\right)^4\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$

ชื่อ	เมตริก
P-S2	$$ds^2 = -A^2\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)dt^2 + \left(\frac{(1+\delta)^2}{1+\frac{r^2}{a^2}}\right)^2\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}$$ เมื่อ $\delta = k\sqrt{\frac{1+\frac{r^2}{a^2}}{1+n^2\frac{r^2}{a^2}}}$
H-B I	$$ds^2 = -D^2\left(Ar^2+B\right)^{-\frac{a}{1-\alpha}}\left(\frac{\left(Ar^2+B\right)^{\beta}}{4A\beta}+C\right)dt^2$$ $$+\left(Ar^2+B\right)^{\frac{b}{1-\alpha}}\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$$ เมื่อ $\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)-ab+b-a}{b-a}$ และ $\beta = \frac{a+b}{1-\alpha}+1$
H-B II	$$ds^2 = -\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2 dt^2$$ $$+(1+f)B^2\left[\frac{A^2}{2K}\left(-\frac{1}{2f^2}+\frac{f^2}{2}-2\ln f\right)+C\right]\left\{dr^2+r^2d\Omega^2\right\}$$ เมื่อ $f = \frac{A}{\sqrt{1+Kr^2}}$

เมตริกใหม่ที่ค้นพบของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ในพิกัดไอโซทรอปี

ชื่อ	เมตริก
K1	$ds^2 = -A\left(1+ar^2\right)^2 dt^2 + \dfrac{\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}}{\left(\sigma + \varepsilon A\left(\frac{1}{6}a^2 r^6 + \frac{1}{2}ar^4 + \frac{1}{2}r^2\right)\right)^2}$
K2	$ds^2 = -\dfrac{\left(1-\frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}\right)^2}{\left(1+\frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}\right)^2} dt^2 + \dfrac{\left(1+\frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}\right)^4 \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}}{\left(\sigma + \varepsilon\left(-\frac{a^4}{32k\left(1+kr^2\right)} - \frac{1}{4}\frac{a^2 \ln\left(1+kr^2\right)}{k} + \frac{r^2}{2}\right)\right)^2}$
K3	$ds^2 = -\dfrac{1}{A\left(1+ar^2\right)^2} dt^2 + \dfrac{A^2\left(1+ar^2\right)^4 \left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}}{\left(\sigma + \varepsilon A\left(\frac{1}{6}a^2 r^6 + \frac{1}{2}ar^4 + \frac{1}{2}r^2\right)\right)^2}$
K4	$ds^2 = -r^{-\sqrt{6}} dt^2 + \dfrac{r^{2+\sqrt{6}}\left\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\right\}}{\left(\sigma + \varepsilon \frac{r^4}{4}\right)^2}$

ภาคผนวก ข

1. ตรวจสอบเมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ (ตัวอย่าง คือ Buch2)

```
#-------------------------------------------------------------
#Check Perfect Fluid Sphere
#-------------------------------------------------------------
#Example Buch2
#-------------------------------------------------------------
> restart;
>
#-------------------------------------------------------------
#Data
#-------------------------------------------------------------
> a:=1;
k:=1;
sigma:=1;
epsilon:=epsilon;
```

$$a := 1$$

$$k := 1$$

$$\sigma := 1$$

$$\varepsilon := \varepsilon$$

```
> f:=a/(2*sqrt(1+k*r^2));
```

$$f := \frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}$$

```
> gtt:=(1-f)^2/(1+f)^2;
grr:=(1+f)^4;
```

$$gtt := \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}$$

$$grr := \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4$$

```
> #-------------------------------------------------------------
> zeta0(r):=sqrt(gtt);
ZB(r):=grr;
B0(r):=sqrt(1/(zeta0(r)^2*ZB(r)));
```

$$\zeta 0(r) := \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}}$$

$$\mathrm{ZB}(r) := \left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4$$

$$\mathrm{B0}(r) := \sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}}$$

```
> metric := -zeta0(r)^2*dt^2+(1/(zeta0(r)^2*B0(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omega^2};
```

$$metric := -\frac{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2 dt^2}{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2} + \left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4 \{dr^2 + r^2\, d\,\Omega^2\}$$

```
#-------------------------------------------------------------
#Check ODE
#-------------------------------------------------------------
>
> CH:=((diff(zeta0(r), r))/zeta0(r))^2-(diff(B0(r), r, r)-(diff(B0(r), r))/r)/(2*B0(r));
```

$$CH := \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4 \left(\frac{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right) r}{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2 (1+r^2)^{(3/2)}} + \frac{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2 r}{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3 (1+r^2)^{(3}}\right.}{4\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4}$$

$$-\left(-\left(-\frac{r}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2(1+r^2)^{(3/2)}}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{r}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3(1+r^2)^{(3/2)}}\right)^2 \Bigg/ \left(4\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}\right)^{(3/2)}\right) + \Bigg($$

$$\frac{3\,r^2}{2\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2(1+r^2)^3}$$

$$-\frac{2\,r^2}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3(1+r^2)^3}$$

$$+\frac{3\,r^2}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2(1+r^2)^{(5/2)}}$$

$$-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2(1+r^2)^{(3/2)}}$$

$$+\frac{3\,r^2}{2\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^4(1+r^2)^3}$$

$$-\frac{3\,r^2}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3(1+r^2)^{(5/2)}}$$

$$\left.+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3(1+r^2)^{(3/2)}}\right)\Bigg/\Bigg(2$$

$$\left.\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}}\right)-\Bigg($$

$$-\frac{r}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2(1+r^2)^{(3/2)}}$$

$$\left.+\frac{r}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^3(1+r^2)^{(3/2)}}\right)\Bigg/\Bigg(2$$

$$\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}}\,r\Bigg)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(2$$

$$\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+r^2}}\right)^2}}\Bigg)$$

```
> simplify(CH);
```

$$0$$

```
#-------------------------------------------------------------
#END
#-------------------------------------------------------------
#Note:If CH=0,then this metric is perfect fluid sphere.
#-------------------------------------------------------------
```

2. ประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 กับ เมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ (ตัวอย่าง คือ K-O III)

```
#------------------------------------------------------
# Apply Theorem 1 in K-O III
#------------------------------------------------------
> restart;
>
#------------------------------------------------------
#Data
#------------------------------------------------------
> gtt:=A*(1+a*r^2)^2;
grr:=1;
```

$$gtt := A\,(1 + a\,r^2)^2$$

$$grr := 1$$

```
> #------------------------------------------------------
> zeta0(r):=sqrt(gtt);
ZB(r):=grr;
B0(r):=sqrt(1/(zeta0(r)^2*ZB(r)));
```

$$\zeta 0(r) := \sqrt{A\,(1 + a\,r^2)^2}$$

$$\mathrm{ZB}(r) := 1$$

$$\mathrm{B0}(r) := \sqrt{\frac{1}{A\,(1 + a\,r^2)^2}}$$

```
> metric := -
zeta0(r)^2*dt^2+(1/(zeta0(r)^2*B0(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omeg
a^2};
```

$$metric := -A\,(1 + a\,r^2)^2\,dt^2 + \{dr^2 + r^2\,d\,\Omega^2\}$$

```
#------------------------------------------------------
#Theorem 1
#------------------------------------------------------
> zeta1(r):=1/zeta0(r);
B1(r):=B0(r);
```

$$\zeta 1(r) := \frac{1}{\sqrt{A\,(1 + a\,r^2)^2}}$$

$$\mathrm{B1}(r) := \sqrt{\frac{1}{A\,(1 + a\,r^2)^2}}$$

```
#------------------------------------------------------
#Check ODE
#------------------------------------------------------
```

```
> CH1:=((diff(zeta1(r), r))/zeta1(r))^2-(diff(B1(r), r,
r)-(diff(B1(r), r))/r)/(2*B1(r));
```

$$CH1 := \frac{4\,a^2\,r^2}{(1+a\,r^2)^2} - \frac{-\dfrac{4\,a^2\,r^2}{\left(\dfrac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}\right)^{(3/2)} A^2\,(1+a\,r^2)^6} + \dfrac{12\,a^2\,r^2}{\sqrt{\dfrac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}}\,A\,(1+a\,r^2)^4}}{2\,\sqrt{\dfrac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}}}$$

```
> simplify(CH1);
```

$$0$$

```
> metric1 := -
zeta1(r)^2*dt^2+(1/(zeta1(r)^2*B1(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omeg
a^2};
```

$$metric1 := -\frac{dt^2}{A\,(1+a\,r^2)^2} + A^2\,(1+a\,r^2)^4\,\{dr^2 + r^2\,d\,\Omega^2\}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#Theorem 1 (again)
#-----------------------------------------------------------
> zeta2(r):=1/zeta1(r);
B2(r):=B1(r);
```

$$\zeta 2(r) := \sqrt{A\,(1+a\,r^2)^2}$$

$$\mathrm{B2}(r) := \sqrt{\frac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#Check ODE
#-----------------------------------------------------------
> CH2:=((diff(zeta2(r), r))/zeta2(r))^2-(diff(B2(r), r,
r)-(diff(B2(r), r))/r)/(2*B2(r));
```

$$CH2 := \frac{4\,a^2\,r^2}{(1+a\,r^2)^2} - \frac{-\dfrac{4\,a^2\,r^2}{\left(\dfrac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}\right)^{(3/2)} A^2\,(1+a\,r^2)^6} + \dfrac{12\,a^2\,r^2}{\sqrt{\dfrac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}}\,A\,(1+a\,r^2)^4}}{2\,\sqrt{\dfrac{1}{A\,(1+a\,r^2)^2}}}$$

```
> simplify(CH2);
```

$$0$$

```
> metric2 := -zeta2(r)^2*dt^2+(1/(zeta2(r)^2*B2(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omega^2};
```

$$metric2 := -A\,(1 + a\,r^2)^2\,dt^2 + \{dr^2 + r^2\,d\,\Omega^2\}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#End of Apply theorem 1
#-----------------------------------------------------------
```

3. ประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 2 กับ เมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ (ตัวอย่าง คือ S1)

```
#-----------------------------------------------------------
# Apply Theorem 2 in S1
#-----------------------------------------------------------
> restart;
>
#-----------------------------------------------------------
#Data
#-----------------------------------------------------------
> gtt:=r^4;
grr:=1;
```

$$gtt := r^4$$

$$grr := 1$$

```
#-----------------------------------------------------------
> zeta0(r):=sqrt(gtt);
ZB(r):=grr;
B0(r):=sqrt(1/(zeta0(r)^2*ZB(r)));
```

$$\zeta 0(r) := \sqrt{r^4}$$

$$\mathrm{ZB}(r) := 1$$

$$\mathrm{B0}(r) := \sqrt{\frac{1}{r^4}}$$

```
> metric := -
zeta0(r)^2*dt^2+(1/(zeta0(r)^2*B0(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omeg
a^2};
```

$$metric := -r^4\, dt^2 + \{ dr^2 + r^2\, d\, \Omega^2 \}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#Theorem 2
#-----------------------------------------------------------
> Z0(r):=sigma+epsilon*int(r/B0(r)^2, r);
zeta1(r):=zeta0(r);
B1(r):=B0(r)*Z0(r);
```

$$\mathrm{Z0}(r) := \sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}$$

$$\zeta 1(r) := \sqrt{r^4}$$

$$\mathrm{B1}(r) := \sqrt{\frac{1}{r^4}} \left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6} \right)$$

```
#-----------------------------------------------------------
#Check ODE
#-----------------------------------------------------------
```

```
> CH1:=((diff(zeta1(r), r))/zeta1(r))^2-(diff(B1(r), r, r)-(diff(B1(r), r))/r)/(2*B1(r));
```

$$CH1 := \frac{4}{r^2} - \left(-\frac{4\left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}\right)}{\left(\frac{1}{r^4}\right)^{(3/2)} r^{10}} - \frac{4\,\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}} + \frac{10\left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}\right)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}\, r^6} + 5\sqrt{\frac{1}{r^4}}\,\varepsilon\, r^4 - \frac{-\frac{2\left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}\right)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}\, r^5} + \sqrt{\frac{1}{r^4}}\,\varepsilon\, r^5}{r} \right) \Bigg/ \left(2\sqrt{\frac{1}{r^4}}\left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}\right)\right)$$

```
> simplify(CH1);
```

$$0$$

```
> metric1 := -zeta1(r)^2*dt^2+(1/(zeta1(r)^2*B1(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omega^2};
```

$$metric1 := -r^4\, dt^2 + \frac{\{dr^2 + r^2\, d\, \Omega^2\}}{\left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}\right)^2}$$

```
#----------------------------------------------------------
#Theorem 2 (again)
#----------------------------------------------------------
> Z1(r):=sigma1+epsilon1*int(r/B1(r)^2, r);
zeta2(r):=zeta1(r);
B2(r):=B1(r)*Z1(r);
```

$$\mathrm{Z1}(r) := \sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}$$

$$\zeta 2(r) := \sqrt{r^4}$$

$$\mathrm{B2}(r) := \sqrt{\frac{1}{r^4}}\left(\sigma + \frac{\varepsilon\, r^6}{6}\right)\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)$$

```
#----------------------------------------------------------
#Check ODE
#----------------------------------------------------------
> CH2:=((diff(zeta2(r), r))/zeta2(r))^2-(diff(B2(r), r, r)-(diff(B2(r), r))/r)/(2*B2(r));
```

$$
\begin{aligned}
CH2 := \frac{4}{r^2} - \Bigg(& -\frac{4\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)}{\left(\frac{1}{r^4}\right)^{(3/2)} r^{10}} - \frac{4\,\varepsilon\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}} \\
& - \frac{144\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\varepsilon 1}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)^2} + \frac{10\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}\, r^6} \\
& + 5\sqrt{\frac{1}{r^4}}\,\varepsilon\, r^4\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right) + \frac{72\sqrt{\frac{1}{r^4}}\,\varepsilon\, r^{10}\,\varepsilon 1}{(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)^2} \\
& - \frac{432\sqrt{\frac{1}{r^4}}\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\varepsilon 1\, r^{10}\,\varepsilon}{(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)^3} + \frac{180\sqrt{\frac{1}{r^4}}\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\varepsilon 1\, r^4}{(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)^2} - \Bigg(\\
& -\frac{2\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}}\, r^5} + \sqrt{\frac{1}{r^4}}\,\varepsilon\, r^5\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right) \\
& + \frac{36\sqrt{\frac{1}{r^4}}\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\varepsilon 1\, r^5}{(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)^2}\Bigg)\Big/ r\Bigg) \Bigg/ \left(2\sqrt{\frac{1}{r^4}}\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)\right. \\
& \left.\left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

```
> simplify(CH2);
```

$$0$$

```
> metric2 := -zeta2(r)^2*dt^2+(1/(zeta2(r)^2*B2(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omega^2};
```

$$metric2 := -r^4\, dt^2 + \frac{\{dr^2 + r^2\, d\,\Omega^2\}}{\left(\sigma + \frac{\varepsilon r^6}{6}\right)^2 \left(\sigma 1 - \frac{6\,\varepsilon 1}{\varepsilon\,(6\,\sigma + \varepsilon\, r^6)}\right)^2}$$

```
#---------------------------------------------------------
#End of Apply theorem 2
#---------------------------------------------------------
```

4. ประยุกต์บทแทรก กับ เมตริกของทรงกลมของไหลสมบูรณ์ (ตัวอย่าง คือ Minkowski)

```
#---------------------------------------------------------
# Apply Corollary in Minkowski
#---------------------------------------------------------
> restart;
>
#---------------------------------------------------------
#Data
#---------------------------------------------------------
> gtt:=1;
grr:=1;
```

$$gtt := 1$$

$$grr := 1$$

```
#---------------------------------------------------------
> zeta0(r):=sqrt(gtt);
ZB(r):=grr;
B0(r):=sqrt(1/(zeta0(r)^2*ZB(r)));
```

$$\zeta 0(r) := 1$$

$$\mathrm{ZB}(r) := 1$$

$$\mathrm{B0}(r) := 1$$

```
> metric := -
zeta0(r)^2*dt^2+(1/(zeta0(r)^2*B0(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omeg
a^2};
```

$$metric := -dt^2 + \{ dr^2 + r^2\, d\, \Omega^2 \}$$

```
#---------------------------------------------------------
#Theorem 1
#---------------------------------------------------------
> zeta1(r):=1/zeta0(r);
B1(r):=B0(r);
```

$$\zeta 1(r) := 1$$

$$\mathrm{B1}(r) := 1$$

```
#---------------------------------------------------------
#Check ODE
#---------------------------------------------------------
> CH1:=((diff(zeta1(r), r))/zeta1(r))^2-(diff(B1(r), r,
r)-(diff(B1(r), r))/r)/(2*B1(r));
```

$$CH1 := 0$$

```
> simplify(CH1);
```

$$0$$

```
> metric1 := -
zeta1(r)^2*dt^2+(1/(zeta1(r)^2*B1(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omeg
a^2};
```

$$metric1 := -dt^2 + \{ dr^2 + r^2\, d\, \Omega^2 \}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#Theorem 2
#-----------------------------------------------------------
> Z1(r):=sigma1+epsilon1*int(r/B1(r)^2, r);
zeta2(r):=zeta1(r);
B2(r):=B1(r)*Z1(r);
```

$$Z1(r) := \sigma 1 + \frac{\varepsilon 1\, r^2}{2}$$

$$\zeta 2(r) := 1$$

$$B2(r) := \sigma 1 + \frac{\varepsilon 1\, r^2}{2}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#Check ODE
#-----------------------------------------------------------
> CH2:=((diff(zeta2(r), r))/zeta2(r))^2-(diff(B2(r), r,
r)-(diff(B2(r), r))/r)/(2*B2(r));
```

$$CH2 := 0$$

```
> simplify(CH2);
```

$$0$$

```
> metric2 := -
zeta2(r)^2*dt^2+(1/(zeta2(r)^2*B2(r)^2))*{dr^2+r^2*d*Omeg
a^2};
```

$$metric2 := -dt^2 + \frac{\{ dr^2 + r^2\, d\, \Omega^2 \}}{\left(\sigma 1 + \frac{\varepsilon 1\, r^2}{2}\right)^2}$$

```
#-----------------------------------------------------------
#End of Apply Corollary
#-----------------------------------------------------------
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ นางสาว กนกวรรณ ไทยรัตน์ เกิดวันอังคารที่ 7 เมษายน พ.ศ. 2530 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ในปีการศึกษา 2551 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2552

ในระหว่างจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ได้นำเสนอผลงานทางวิชาการ ในการประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ ประจำปี 2554 (ครั้งที่ 16) ในวันที่ 10-11 มีนาคม 2554 ณ โรงแรมโฆษะ จังหวัดขอนแก่น