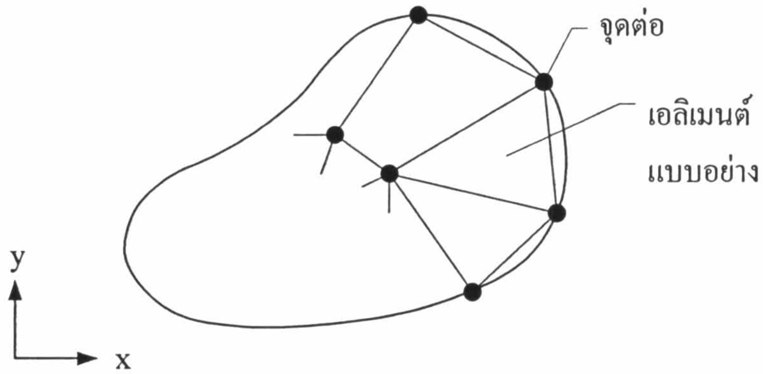
บทที่ 3
การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื้อหาในบทนี้เป็นการกล่าวถึงการนำระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในบทที่ 2 มาประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกัน โดยช่วงแรกจะกล่าวถึงขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ต่อจากนั้นเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์(finite element equations) จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่ควบคุมปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด โดยใช้วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) หรือที่นิยมเรียกกันโดยใช้ชื่อย่อว่าวิธีซีบีเอส (CBS algorithm) จากนั้นจะทำการเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function) ซึ่งจะนำไปสู่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ (finite element metrices) ที่สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนหลักๆ 6 ขั้นตอน [1] คือ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 จากนั้นก็ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป



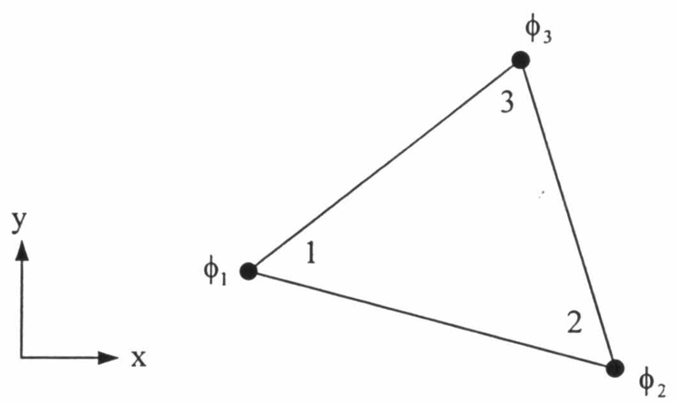
รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ

$$D(\phi')=0 \tag{3.1}$$

โดย D คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator)

ϕ' คือ ตัวแปรตามแม่นตรง

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ (element interpolation function) ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่ทราบค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1 , ϕ_2 และ ϕ_3 โดยที่ตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้เป็นคุณสมบัติต่างๆของของไหล ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ ดังแสดงในสมการ (3.2)



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

$$\phi=\phi(x,y)=\lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

$$=\underset{(1\times 3)}{\lfloor N \rfloor} \quad \underset{(3\times 1)}{\{\phi\}}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวคเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method weighted residual) โดยใช้หลักการที่ว่า หากทำการแทนผลเฉลยโดยประมาณดังที่แสดงในสมการ (3.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น ซึ่งในที่นี้คือสมการ (3.1) จะได้ว่า $D(\phi)$ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับ R ดังแสดงในสมการ (3.3)

$$R = D(\phi) = D(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i) \tag{3.3}$$

โดยที่ R คือ เศษตกค้าง (Residual)

m คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์

จากวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) เป็นวิธีการลดความผิดพลาดให้น้อยที่สุด ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighted function) W จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ ซึ่งคือ

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m \tag{3.4}$$

โดยปกติจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) แต่หากเลือก $W_i \neq N_i$ จะเรียกว่าวิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by part) ซึ่งจะทำการแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.4) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega \tag{3.5}$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma^{(e)}}$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> เขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ นั่นคือ

$$\underset{(m \times m)}{[K]} \quad \underset{(m \times 1)}{\{\phi\}} \quad = \quad \underset{(m \times 1)}{\{F\}} \tag{3.6}$$

โดยที่ $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix)

$\{\phi\}$ คือ เวคเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์

$\{F\}$ คือ โหลดเวคเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.6) แล้วลำดับขั้นตอนต่อไปก็จะทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขต แล้วจึงแก้สมการระบบรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่างๆ

3.2 วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) หรือวิธีซีบีเอส (CBS algorithm) โดยภาพรวมแล้วประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ ทำการแบ่งย่อยช่วงเวลา (time discretization) ด้วยวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน (Characteristic-Galerkin algorithm) และ ทำการแบ่งย่อยระยะทาง (spatial discretization) ด้วย ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) [10]

ขั้นตอนการแบ่งย่อยช่วงเวลาด้วยวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน เริ่มต้นจากการพิจารณาสมการพาและการแพร่ (convection-diffusion equation) ของตัวแปรสกาลาร์ (scalar variable) ใน 1 มิติ ดังแสดงในสมการ (3.7)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} + Q = 0 \tag{3.7}$$

โดยที่ Φ คือ ตัวแปรสกาลาร์ซึ่งเป็นปริมาณที่ถูกส่งถ่ายโดยการพาและการแพร่

F คือ ฟลักซ์ของการพา (convected flux)

G คือ ฟลักซ์ของการแพร่ (diffusion flux)

Q คือ พจน์ของแหล่งกำเนิด (source term)

โดยฟลักซ์ของการพา ฟลักซ์ของการแพร่ และพจน์ของแหล่งกำเนิด สามารถเขียนอยู่ในรูปความสัมพันธ์กับตัวแปรสกาลาร์และตัวแปรอิสระได้ดังต่อไปนี้

$$\Phi = \Phi(x,t) \tag{3.8}$$

$$F = u\Phi \tag{3.9}$$

$$G = -k\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{3.10}$$

$$Q = Q(x) \tag{3.11}$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.9) ถึง (3.11) ลงในสมการ (3.7) ทำให้สามารถเขียนสมการดังกล่าวในอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q = 0 \tag{3.12}$$

หรือ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Phi\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q = 0 \tag{3.13}$$

ในสมการ (3.13) หากทำการเปลี่ยนแกนอ้างอิงจากแกน x ซึ่งอยู่กับที่บนโดเมน ไปเป็นแกน x' ซึ่งแกนอ้างอิงใหม่นี้เป็นแกนที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับอนุภาคของของไหลตามเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหล (path lines) ซึ่งเรียกแกนอ้างอิงใหม่นี้ว่า แกนคุณลักษณะ [19] ซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่าง แกน x และ แกน x' ดังแสดงในสมการ (3.14)

$$dx' = dx - udt \tag{3.14}$$

จะพบว่าพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการพา (convective term) จะหมดไป จึงทำให้สมการของการพาและการแพร่ของตัวแปรสกาลาร์บนแกน x' เป็นดังสมการ (3.15)

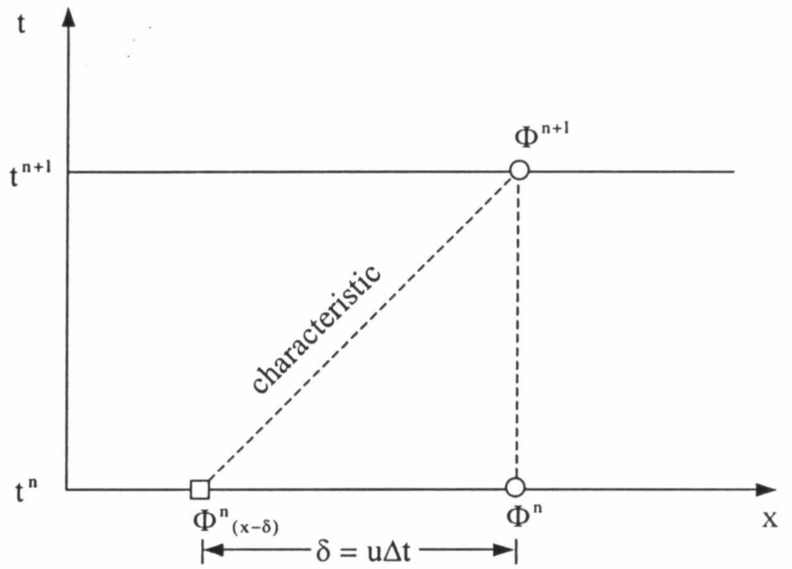
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Phi\frac{\partial u}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right)+Q=0 \tag{3.15}$$

ทำการประยุกต์วิธีของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) [1] เพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลากับสมการ (3.15) บนแกน x' โดยพิจารณาจากรูป 3.3 ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\Phi^{n+1} - \Phi^{n}\Big|_{x-\delta}\right) = \theta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \Phi\frac{\partial u}{\partial x} - Q\right]^{n+1}$$

$$+ (1-\theta)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \Phi\frac{\partial u}{\partial x} - Q\right]^{n}\Bigg|_{x-\delta} \tag{3.16}$$

โดยพจน์ที่มีตัวห้อย $(x-\delta)$ แสดงถึงพจน์ที่อยู่บนแกนคุณลักษณะ ซึ่งในทางปฏิบัติการแก้ปัญหาการไหลบนแกนอ้างอิงที่เคลื่อนที่ไปกับอนุภาคของไหลนั้นมีความซับซ้อนในการเปลี่ยนแกนอ้างอิงและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของการไหล ดังนั้นจึงทำการประมาณค่าของตัวแปรกลับสู่แกนอ้างอิงเดิมโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) สำหรับ θ จะเลือกใช้เท่ากับ 0.5 ซึ่งเรียกว่าวิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson scheme) เพื่อให้เกิดเป็นการประมาณอันดับสอง (second order approximation) [19] เป็นผลให้สามารถประมาณพจน์ต่างๆ ในสมการ (3.16) ที่อยู่บนแกนคุณลักษณะได้ดังนี้



รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ของตัวแปรสกาลาร์ในช่วงเวลา $t^n \rightarrow t^{n+1}$

$$\Phi^{n}\Big|_{x-\delta} = \Phi^{n} - \delta\frac{\partial \Phi}{\partial x}^{n} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{n}\Bigg|_{x-\delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{n} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{n}\right] + O(\Delta t^2) \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{2}\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n\Bigg|_{x-\delta} = \frac{1}{2}\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n - \frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n + O\left(\Delta t^2\right) \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{2}Q^n\Big|_{x-\delta} = \frac{1}{2}Q^n - \frac{\delta}{2}\frac{\partial Q^n}{\partial x} + O\left(\Delta t^2\right) \tag{3.20}$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.17)-(3.20) ลงในสมการ (3.16) และทำการจัดรูปใหม่จะได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\left(\Phi^{n+1} - \Phi^n + \delta\frac{\partial\Phi^n}{\partial x} - \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} - Q^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^n\right] + \frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n \\ &\quad + \frac{\delta}{2}\frac{\partial Q^n}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.21}$$

โดยที่

$$\frac{\partial}{\partial}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^n\right] \tag{3.22}$$

$$\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1} + \left(\Phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n\right] \tag{3.23}$$

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[Q^{n+1} + Q^n\right] \tag{3.24}$$

δ คือ ระยะทางที่อนุภาคของไหลเคลื่อนที่ในทิศทาง x ในช่วงเวลา Δt ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคของไหลคูณกับช่วงเวลา ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้นี้

$$\delta = \bar{u}\Delta t \tag{3.25}$$

$$\bar{u} = \frac{u^{n+1} + u^n\big|_{x-\delta}}{2} \tag{3.26}$$

$$u^n\big|_{x-\delta} = u^n - \frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial u^n}{\partial x} + O\left(\Delta t^2\right) \tag{3.27}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\left(u^{n+1} + u^{n} - \frac{\Delta t}{2} u^{n} \frac{\partial u^{n}}{\partial x} \right) \tag{3.28}$$

$$\bar{u} = u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} u^{n} \frac{\partial u^{n}}{\partial x} \tag{3.29}$$

ดังนั้น

$$\delta = \Delta t\, u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^{2}}{2} u^{n} \frac{\partial u^{n}}{\partial x} \tag{3.30}$$

เมื่อนำสมการ (3.30) แทนลงในสมการ (3.21) แล้วทำการจัดพจน์ต่าง ๆ ใหม่โดยละทิ้งพจน์ที่มีอันดับสูง (Δt^{3}) ทิ้งไป และหากใช้การเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time step) ด้วยแล้วต้องทำการประมาณค่าต่าง ๆ ที่เวลา $n+\frac{1}{2}$ ด้วยเวลา n จะทำให้สมการใหม่เขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^{n} &= \Delta t\left[-\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - Q \right]^{n} \\ &\quad + \frac{\Delta t^{2}}{2} u \frac{\partial}{\partial x}\left[+\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q \right]^{n}\end{aligned} \tag{3.31}$$

สมการ (3.31) เป็นสมการแบบอย่างของปัญหาการพาและการแพร่ของปริมาณสกาลาร์ใด ๆ ใน 1 มิติ ซึ่งได้ทำการสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับช่วงเวลาด้วยวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คินจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการพาและการแพร่ ซึ่งสามารถขยายไปสู่ปัญหาใน 2 มิติได้โดยตรง ดังแสดงในสมการ (3.32)

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^{n} &= \Delta t\left[-\frac{\partial(u_{j}\Phi)}{\partial x_{j}} + \frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i}}\right) - Q \right]^{n} \\ &\quad + \frac{\Delta t^{2}}{2} u_{k} \frac{\partial}{\partial x_{k}}\left[+\frac{\partial(u_{j}\Phi)}{\partial x_{j}} - \frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i}}\right) + Q \right]^{n}\end{aligned} \tag{3.32}$$

โดยที่ ตัวห้อย $i, j, k = 1, 2$

3.2.1 การแบ่งย่อยช่วงเวลา

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ อันประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน มีลักษณะคล้ายกับสมการของการพาและการแพร่จึงสามารถนำสมการ (3.32) มาประยุกต์ได้โดยตรงเพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา โดยเริ่มจากเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับการไหลแบบอัดตัวได้แบบไร้ความหนืดในรูปแบบเทนเซอร์ ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \tag{3.33}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3.34}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} = -\frac{\partial \left[u_j(\rho \varepsilon + p)\right]}{\partial x_j} \tag{3.35}$$

โดยที่ตัวห้อย $i\,,\,j = 1\,,\,2$ และ U_i คือ ฟลักซ์ของมวล ซึ่งเป็นไปตามสมการ (3.36)

$$U_i = \rho u_i \tag{3.36}$$

ทำการประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมเข้ากับสมการ (3.32) โดยการแทนที่ Φ ด้วย U_i และพิจารณาพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความดันให้เป็นพจน์ของแหล่งกำเนิด และเนื่องจากการสมมติฐานว่าการไหลไม่มีความหนืด ดังนั้นจึงไม่มีพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการแพร่ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมที่ได้สร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา เป็นดังต่อไปนี้

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i}\right]^n \tag{3.37}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลดังแสดงในสมการ (3.33) เมื่อสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\Delta\rho = \left(\rho^{n+1} - \rho^n\right) = -\Delta t\left[\theta_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n+1} + (1-\theta_1)\frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n}\right] \tag{3.38}$$

หรือ

$$\Delta\rho = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i}\right] \tag{3.39}$$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงานสามารถประยุกต์เข้ากับสมการ (3.32) ได้โดยตรงซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\Delta(\rho\varepsilon) = (\rho\varepsilon)^{n+1} - (\rho\varepsilon)^n = \Delta t\left[-\frac{\partial(u_i(\rho\varepsilon + p))}{\partial x_i}\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(u_i(\rho\varepsilon + p))}{\partial x_i}\right]^n \tag{3.40}$$

ขั้นตอนต่อไปจะทำการแยก (split) พจน์ที่เกี่ยวข้องกับเกรเดียนท์ของความดันในสมการ (3.37) ออกแล้วกำหนดตัวแปรขึ้นมาใหม่ซึ่งเรียกว่า สมการโมเมนตัมชั้นกลาง (intermediate momentum equations) [17] โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$\Delta U_i^* = U_i^* - U_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j}\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i}\right]^n \tag{3.41}$$

ดังนั้น

$$\Delta U_i = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n} \tag{3.42}$$

หากนำสมการ (3.42) แทนลงในสมการ (3.39) จะก่อให้เกิดสมการอีกรูปแบบหนึ่งดังนี้

$$\Delta\rho = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t\theta_1 \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i}\right] \tag{3.43}$$

ค่า θ_1 ในสมการ (3.43) ในเอกสารอ้างอิง [20] เสนอให้ใช้ค่าดังกล่าวอยู่ในช่วงระหว่าง 0.5-1.0

ดังนั้นตัวแปรอนุรักษ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ในสมการ (2.36) สามารถทำการคำนวณหาค่าได้อย่างสมบูรณ์หลังจากประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) เพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าการคำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัว ด้วยวิธีซีบีเอสมี 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณสมการโมเมนตัมชั้นกลางของทั้งแนวแกน x และ y ในสมการ (3.41) ซึ่งจะได้ ΔU_i^*

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณสมการเชิงอนุรักษ์มวล ในสมการ (3.43) ซึ่งจะได้ $\Delta\rho$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณสมการโมเมนตัมของทั้งแนวแกน x และ y ในสมการ (3.42) ซึ่งจะได้ ΔU_i

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในสมการ (3.40) ซึ่งจะได้ $\Delta(\rho\varepsilon)$ จากนั้นจึงประยุกต์สมการสถานะของก๊าซในอุดมคติคำนวณหาค่าความดันที่ช่วงเวลาถัดไปได้

3.2.2 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

โดยทั่วการแบ่งโดเมนของการไหลออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ อาจประกอบไปด้วยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมหรือแบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งเอลิเมนต์เหล่านี้ต่อกันด้วยจุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะทำการคำนวณตัวไม่ทราบค่า สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในระนาบสองมิติ ซึ่งประกอบด้วย 4 สมการย่อย ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์จึงประกอบไปด้วย ρ, U_x, U_y และ $\rho\varepsilon$ โดยตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้จะเปลี่ยนแปลงไปตามโคออร์ดิเนต x และ y ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในบนเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\rho(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor \{\rho\} \tag{3.44}$$

$$U_i(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor \{U_i\} \tag{3.45}$$

$$uU_i(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor \{uU_i\} \tag{3.46}$$

$$vU_i(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor \{vU_i\} \tag{3.47}$$

$$\rho\varepsilon(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor \{\rho\varepsilon\} \tag{3.48}$$

$$p(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor \{p\} \tag{3.49}$$

โดยที่ $\lfloor N_\alpha(x,y) \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ตัวห้อย i คือ x และ y เป็นตัวบ่งชี้ว่าเป็นปริมาณฟลักซ์ในทิศทางใด

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้วิคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ทำได้โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบบับโนฟ-กาเลอร์คิน เข้ากับสมการ (3.40)-(3.43) โดยมีรายละเอียดในแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.36) พิจารณาในทิศทาง x โดยผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงในสมการ (3.50)

$$\begin{aligned}\int_A N_\alpha \Delta U_x^{\bullet} dA = -\Delta t\left[\int_A N_\alpha\left(\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial(vU_x)}{\partial y}\right)dA\right]^n \\ +\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[\int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)dA\right]^n \\ +\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[\int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)dA\right]^n\end{aligned} \qquad (3.50)$$

โดยที่ A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณาอยู่

ตัวยก n คือ ค่าต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณที่เวลา t^n

เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น จำเป็นต้องใช้ได้กับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันได้ จึงทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss theorem) [1] ซึ่งคือ

$$\int_A u(\nabla\cdot\bar{V})dA = \int_S u(\bar{V}\cdot\hat{n})dS - \int_A(\nabla u\cdot\bar{V})dA \qquad (3.51)$$

เข้ากับทุกพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.50) โดยในที่นี้ขอยกตัวอย่างสำหรับพจน์ที่หนึ่งทางด้านขวามือโดยให้

$$\left.\begin{aligned} u &= N_\alpha \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \\ \bar{V} &= uU_x\hat{i}+vU_y\hat{j}\end{aligned}\right\}\quad (\nabla\cdot\bar{V}) = \frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial y}$$

และให้ $\hat{n} = n_x\hat{i}+n_y\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งฉากกับขอบ (unit normal vector) ของเอลิเมนต์ใดๆ ที่กำลังพิจารณาอยู่ดังนั้น

$$\int_A N_\alpha\left(\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial x}\right)dA = \int_S N_\alpha(uU_x n_x + vU_y n_y)dS$$
$$-\int_A\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x}uU_x+\frac{\partial N_\alpha}{\partial y}vU_x\right)dA \tag{3.52}$$

สำหรับพจน์ที่สองและสามทางขวามือของสมการ (3.50) สามารถทำการอินทิเกรตได้ในทำนองเดียวกัน โดยผลลัพธ์สุดท้ายหลังจากทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์และทำการจัดพจน์ใหม่ของสมการ (3.50) จะเป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\int_A N_\alpha \Delta U_x^{\bullet} dA \;=\; & \Delta t\left[\int_A\left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial x}uU_x+\frac{\partial N_\alpha}{\partial y}vU_x\right]dA-\int_S N_\alpha\left[uU_x n_x + vU_x n_y\right]dS\right]^n \\
& -\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[\int_A\frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\left[\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right]dA\right]^n \\
& +\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[\int_S N_\alpha\left[\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right]n_x dS\right]^n \\
& -\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[\int_A\frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\left[\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right]dA\right]^n \\
& +\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[\int_S N_\alpha\left[\frac{\partial(uU_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vU_x)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right]n_y dS\right]^n
\end{aligned} \tag{3.53}$$

เมื่อแทนสมการ (3.45)-(3.47) และ (3.49) ลงในสมการ (3.53) จะก่อให้เกิดเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
[M]\{\Delta U_x^{\bullet}\} = & \Delta t\left[[C_x]\{uU_x\}+[C_y]\{vU_x\}-[S_x]\{uU_x\}-[S_y]\{vU_x\}\right]^n \\
& -\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[[K_{xx}]\{uU_x+p\}+[K_{xy}]\{vU_x\}\right]^n \\
& +\frac{\Delta t^2}{2}u^n n_x\left[[T_x]\{uU_x+p\}+[T_y]\{vU_x\}\right]^n \\
& -\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[[K_{yx}]\{uU_x+p\}+[K_{yy}]\{vU_x\}\right]^n \\
& +\frac{\Delta t^2}{2}v^n n_y\left[[T_x]\{uU_x+p\}+[T_y]\{vU_x\}\right]^n
\end{aligned} \tag{3.54}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.36) โดยพิจารณาในทิศทาง y จะได้

$$
\begin{aligned}
[M]\{\Delta U_y^{*}\} = {} & \Delta t\Big[[C_x]\{uU_y\} + [C_y]\{vU_y\} - [S_x]\{uU_y\} - [S_y]\{vU_y\}\Big]^n \\
& - \frac{\Delta t^2}{2} u^n\Big[[K_{xx}]\{uU_y\} + [K_{xy}]\{vU_y + p\}\Big]^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} u^n{}_{,x}\Big[[T_x]\{uU_y\} + [T_y]\{vU_y + p\}\Big]^n \\
& - \frac{\Delta t^2}{2} v^n\Big[[K_{yx}]\{uU_y\} + [K_{yy}]\{vU_y + p\}\Big]^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} v^n{}_{,y}\Big[[T_x]\{uU_y\} + [T_y]\{vU_y + p\}\Big]^n \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

ขั้นตอนที่ 2 ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.43) ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\int_A N_\alpha \Delta\rho \, dA = {} & -\Delta t\left[\int_A N_\alpha \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\right)^n dA + \theta_1 \int_A N_\alpha \left(\frac{\partial \Delta U_x^{*}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta U_y^{*}}{\partial y}\right) dA\right] \\
& + \Delta t^2 \theta_1 \int_A N_\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^n dA \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

หลังจากนั้นจึงทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์เข้ากับทุกพจน์ในสมการ (3.56) โดยมีวิธีการทำเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 1 ซึ่งจะทำให้ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นดังสมการ (3.57)

$$
\begin{aligned}
\int_A N_\alpha \Delta\rho \, dA = {} & \Delta t\left[\int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} U_x + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} U_y\right) dA - \int_S N_\alpha \left(U_x n_x + U_y n_y\right) dS\right]^n \\
& + \Delta t \theta_1 \left[\int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \Delta U_x^{*} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \Delta U_y^{*}\right) dA - \int_S N_\alpha \left(\Delta U_x^{*} n_x + \Delta U_y^{*} n_y\right) dS\right]^n \\
& - \Delta t^2 \theta_1 \left[\int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \int_S N_\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y\right) dS\right]^n \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

เมื่อแทนสมการ (3.44), (3.45) และ(3.49) ลงในสมการ (3.57) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลดังแสดงต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
[M]\{\Delta\rho\} = {} & \Delta t\left[[C_x]\{U_x\}+[C_y]\{U_y\}+\theta_1[C_x]\{\Delta U_x^{*}\}+\theta_1[C_y]\{\Delta U_y^{*}\}\right]^n \\
& -\Delta t\left[[S_x]\{U_x\}+[S_y]\{U_y\}+\theta_1[S_x]\{\Delta U_x^{*}\}+\theta_1[S_y]\{\Delta U_y^{*}\}\right]^n \\
& -\Delta t^2\theta_1\left[[K_{xx}]\{p\}+[K_{yy}]\{p\}-[H_x]\{p\}-[H_y]\{p\}\right]^n
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

ขั้นตอนที่ 3 ในขั้นตอนนี้จะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เข้ากับสมการ (3.42) โดยเริ่มจากพิจารณาในทิศทาง x ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงในสมการ (3.59)

$$
\int_A N_\alpha \Delta U_x dA = \int_A N_\alpha \Delta U_x^{*} dA - \Delta t \int_A N_\alpha \frac{\partial p}{\partial x}^n dA \tag{3.59}
$$

ทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์เข้ากับพจน์ที่สองทางด้านขวามือของสมการ (3.59) ซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$
\int_A N_\alpha \Delta U_x dA = \int_A N_\alpha \Delta U_x^{*} dA + \Delta t\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} p dA - \int_S N_\alpha p n_x dS\right]^n \tag{3.60}
$$

เมื่อแทน (3.45) และ (3.49) ลงในสมการ (3.60) จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ที่อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

$$
[M]\{\Delta U_x\} = [M]\{\Delta U_x^{*}\} + \Delta t\left[[C_x]\{p\} - [S_x]\{p\}\right]^n \tag{3.61}
$$

ในทำนองเดียวกันหากพิจารณา สมการ (3.42) ในทิศทาง y ก็จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y ที่อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์เป็นดังต่อไปนี้

$$
[M]\{\Delta U_y\} = [M]\{\Delta U_y^{*}\} + \Delta t\left[[C_y]\{p\} - [S_y]\{p\}\right]^n \tag{3.62}
$$

ดังนั้นเมื่อทำการคำนวณสมการ (3.61) และ (3.62) จะทำให้ได้ผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมที่เวลา t^{n+1} หรือค่า U_x^{n+1}, U_y^{n+1} แต่ผลลัพธ์ดังกล่าวยังอยู่ในรูปแบบของตัวแปรอนุรักษ์ ดังนั้นในการหาค่าความเร็วในแต่ละแนวแกนที่จุดต่อต่างๆ บนโดเมน ทำได้ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

I21601811

$$u^{n+1} = \frac{U_x^{n+1}}{\rho^{n+1}} = \frac{(\rho u)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \tag{3.63}$$

และ

$$u^{n+1} = \frac{U_y^{n+1}}{\rho^{n+1}} = \frac{(\rho u)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \tag{3.64}$$

ขั้นตอนที่ 4 ในขั้นตอนนี้จะเป็นการคำนวณหาตัวแปรอนุรักษ์จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน โดยมีขั้นตอนที่คล้ายกับขั้นตอนอื่นๆ ที่กล่าวมา โดยเริ่มจากการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.40) แล้วทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์ โดยมีรายละเอียดดังนี้

$$\begin{aligned}
\int_A N_\alpha \Delta(\rho\varepsilon)dA = &-\Delta t\left[\int_A N_\alpha\left[\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right]dA\right]^n \\
&+\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[\int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right)dA\right]^n \\
&+\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[\int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right)dA\right]^n
\end{aligned} \tag{3.65}$$

หลังจากประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์เข้ากับสมการ (3.65) จะได้

$$\begin{aligned}
\int_A N_\alpha \Delta(\rho\varepsilon)dA = &\;\Delta t\left[\int_A\left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial x}u(\rho\varepsilon+p)+\frac{\partial N_\alpha}{\partial y}v(\rho\varepsilon+p)\right]dA\right]^n \\
&-\Delta t\left[\int_S N_\alpha\left[u(\rho\varepsilon+p)n_x+v(\rho\varepsilon+p)n_y\right]dS\right]^n \\
&-\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\left(\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right)dA\right]^n \\
&+\frac{\Delta t^2}{2}u^n\left[\int_S N_\alpha\left(\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right)n_x dS\right]^n \\
&-\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\left(\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right)dA\right]^n \\
&+\frac{\Delta t^2}{2}v^n\left[\int_S N_\alpha\left(\frac{\partial[u(\rho\varepsilon+p)]}{\partial x}+\frac{\partial[v(\rho\varepsilon+p)]}{\partial y}\right)n_y dS\right]^n
\end{aligned} \tag{3.66}$$

เมื่อแทนสมการ (3.48) และ (3.49) ลงในสมการ (3.66) จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานในรูปแบบของเมตริกซ์ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
[M]\{\Delta\rho\varepsilon\} = {} & \Delta t\left[\,[C_x]\{u(\rho\varepsilon+p)\} + [C_y]\{v(\rho\varepsilon+p)\}\right]^n \\
& - \Delta t\left[[S_x]\{u(\rho\varepsilon+p)\} - [S_y]\{v(\rho\varepsilon+p)\}\right]^n \\
& - \frac{\Delta t^2}{2} u^n\left[\,[K_{xx}]\{u(\rho\varepsilon+p)\} + [K_{xy}]\{v(\rho\varepsilon+p)\}\right]^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} u^n n_x\left[\,[T_x]\{u(\rho\varepsilon+p)\} + [T_y]\{v(\rho\varepsilon+p)\}\right]^n \\
& - \frac{\Delta t^2}{2} v^n\left[\,[K_{yx}]\{u(\rho\varepsilon+p)\} + [K_{yy}]\{v(\rho\varepsilon+p)\}\right]^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} v^n n_y\left[\,[T_x]\{u(\rho\varepsilon+p)\} + [T_y]\{v(\rho\varepsilon+p)\}\right]^n
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

ดังนั้นในการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด ด้วยวิธีซีบีเอสมีขั้นตอนการคำนวณหาค่าตัวแปรอนุรักษ์ที่จุดต่อต่างๆ จากเวลา t^n ไปยัง t^{n+1} 4 ขั้นตอนตามลำดับดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหาค่า ΔU_x^* และ ΔU_y^* จากสมการ (3.54) และ (3.55)

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\Delta\rho$ จากสมการ (3.58)

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณหาค่า ΔU_x และ ΔU_y จากสมการ (3.61) และ (3.62)

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณหาค่า $\Delta\rho\varepsilon$ จากสมการ (3.67) หลังจากนั้นจึงใช้สมการสถานะของก๊าซในอุดมคติ ดังในสมการ (2.45) คำนวณหาค่าความดันที่เวลา t^{n+1} เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณในช่วงเวลาถัดไป

รายละเอียดของเมตริกซ์ต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณในแต่ละขั้นตอน ได้เขียนอยู่ในรูปแบบการของอินทิเกรตบนเอลิเมนต์และการอินทิเกรตที่ขอบดังต่อไปนี้

$$[M] = \int_A \{N\}\lfloor N\rfloor dA \tag{3.68}$$

$$[C_x] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\lfloor N\rfloor dA \tag{3.69}$$

$$[C_y] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\lfloor N\rfloor dA \tag{3.70}$$

$$[S_x] = \int_S \{N\}\lfloor N \rfloor n_x dS \tag{3.71}$$

$$[S_y] = \int_S \{N\}\lfloor N \rfloor n_y dS \tag{3.72}$$

$$[K_{xx}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \tag{3.73}$$

$$[K_{xy}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dA \tag{3.74}$$

$$[K_{yx}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \tag{3.75}$$

$$[K_{yy}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dA \tag{3.76}$$

$$[T_x] = \int_S \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dS \tag{3.77}$$

$$[T_y] = \int_S \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dS \tag{3.78}$$

$$[H_x] = \int_S \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor n_x dS \tag{3.79}$$

$$[H_y] = \int_S \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor n_y dS \tag{3.80}$$

บริเวณใกล้แนวคลื่นช็อคจะเกิดการสั่น (oscillation) ของผลลัพธ์ ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ที่ไม่ดีในบริเวณนั่น เพื่อลดการสั่นของผลลัพธ์ในเอกสารอ้างอิง [22] ได้เสนอวิธีเพิ่มความหนืดเทียม (artificial viscosity) เข้ากับวิธีซีบีเอสดังนี้

$$\left\{\frac{U_s^{n+1} - U^{n+1}}{\Delta t}\right\} = [M]^{-1} C_e h^3 \frac{|V| + c}{\bar{p}} \left|\nabla^2 p\right|_e \{[K_{xx}] + [K_{yy}]\}\{U\}^n \tag{3.81}$$

โดยที่ U_s^{n+1} คือ ตัวแปรอนุรักษ์ที่มีการแก้การสั่นด้วยการเพิ่มความหนืดเทียม

U^{n+1} คือ ตัวแปรอนุรักษ์ที่คำนวณได้ในช่วงเวลาที่ t^{n+1}

U^n คือ ตัวแปรอนุรักษ์ที่เวลา t^n

h คือ ขนาดของเอลิเมนต์

C_e คือ ค่าคงที่ของปริมาณความหนืดเทียม มีค่าอยู่ระหว่าง 0.0-2.0

$|V|$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์

c คือ ความเร็วเสียง

$\overline{p}$ คือ ความดันเฉลี่ยบนเอลิเมนต์

การคำนวณหาตัวแปรอนุรักษ์ของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ด้วยวิธีซีบีเอสนั้นเป็นการดำเนินก้าวไปกับเวลา (time marching) โดยเป็นการแก้ระบบสมการแบบชัดแจ้ง (explicit) ดังนั้นในระหว่างการคำนวณผลลัพธ์อาจเกิดการลู่ออก (diverged) ได้หากเลือกใช้ช่วงเวลา (time step) Δt ที่สูงเกินไป จึงจำเป็นต้องมีขีดจำกัดของช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยประเมินจากช่วงเวลาวิกฤติ (critical time step) [20] ดังต่อไปนี้

$$\Delta t = \sigma \Delta t_{crit} = \frac{\sigma h}{c + |V|} \tag{3.82}$$

โดยที่ σ คือ ค่าตัวเลขเคอแรนท (Courant number) มีค่าอยู่ระหว่าง 0.0 ถึง 1.0

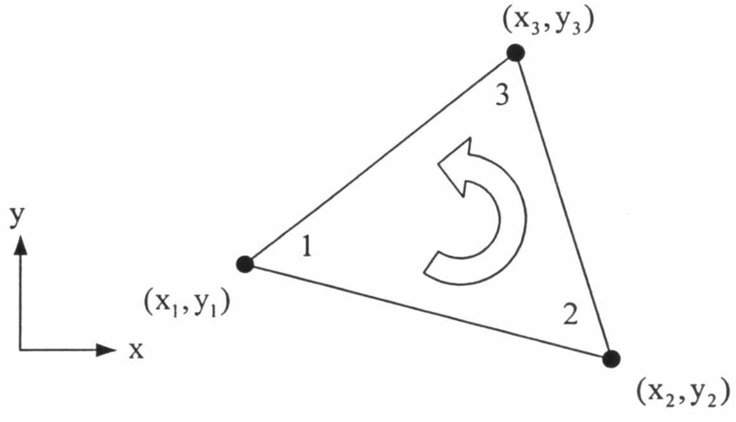
h คือ ขนาดของเอลิเมนต์

$|V|$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์

c คือ ความเร็วเสียง

3.3 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบปิดได้ ซึ่งจะทำให้สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ต่อเนื่อง โดยเริ่มจากการพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ (flat plane) รูปที่ 3.4 แสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อใดๆ ที่วางตัวอยู่ในโคออร์ดิเนต x-y



รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมบนที่วางตัวอยู่ในโคออร์ดิเนต x-y

ฟังก์ชันการประมาณภายในบนเอลิเมนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของโคออร์ดิเนตได้ดังต่อไปนี้

$$N_\alpha(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2A}\left(a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y\right) \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.83}$$

เมื่อ A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งคำนวณได้จากโคออร์ดิเนตของจุดต่อทั้งสามได้ดังนี้

$$A \quad = \quad \frac{1}{2}\left[x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right] \tag{3.84}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ ในสมการ (3.83) คำนวณได้จาก

$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{array} \tag{3.85}$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในจากสมการ (3.83) คือ

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} = \frac{b_\alpha}{2A} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} = \frac{c_\alpha}{2A} \tag{3.86}$$

พิจารณาเมตริกซ์มวล $[M]$

$$[M] \quad = \quad \int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA$$

$$[M] \quad = \quad \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

เมตริกซ์มวล $[M]$ เป็นเมตริกซ์มวลแบบแนบนัย (consistent mass matrix) ดังนั้นจะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยแต่ละสมการย่อยๆ มีความสัมพันธ์กัน ทำให้ต้องแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงดัดแปลงเมตริกซ์มวล $[M]$ ให้อยู่ในรูปแบบรวมตัวที่จุดต่อ (lumped mass matrix) [1] ดังต่อไปนี้

$$[M] = \frac{A}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $[C_x]$ และ $[C_y]$

$$[C_x] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\lfloor N \rfloor dA \quad \text{และ} \quad [C_y] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\lfloor N \rfloor dA$$

$$[C_x] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

$$[C_y] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $[K_{xx}]$, $[K_{yy}]$, $[K_{xy}]$, $[K_{yx}]$

$$[K_{xx}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA$$

$$[K_{xx}] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

$$[K_{yy}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dA$$

$$[K_{yy}] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

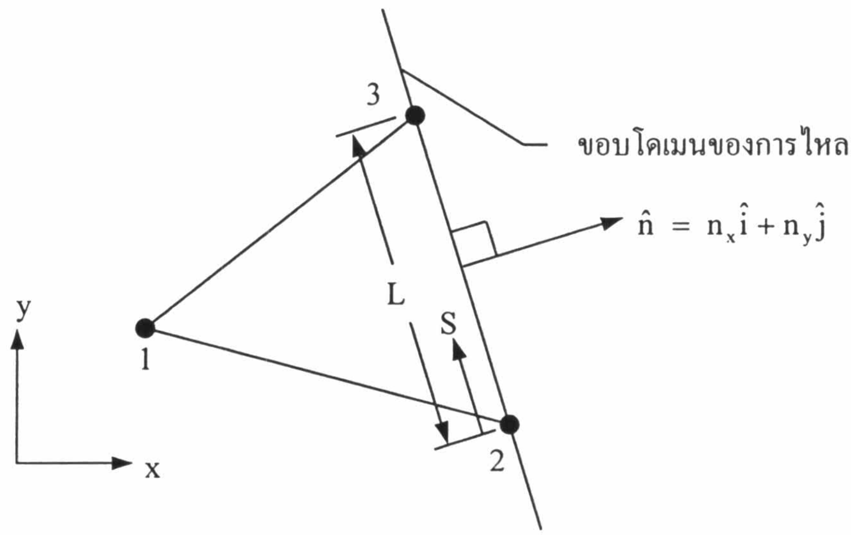
$$[K_{xy}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dA$$

$$[K_{xy}] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3c_1 & b_3c_2 & b_3c_3 \end{bmatrix} \qquad (3.93)$$

$$[K_{yx}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA$$

$$[K_{yx}] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} c_1b_1 & c_1b_2 & c_1b_3 \\ c_2b_1 & c_2b_2 & c_2b_3 \\ c_3b_1 & c_3b_2 & c_3b_3 \end{bmatrix} \qquad (3.94)$$

สำหรับเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่เป็นการอินทิเกรตที่ขอบ ให้พิจารณาเอลิเมนต์ที่อยู่ขอบของการไหลดัง แสดงรายละเอียดในรูปที่ 3.5 โดยขั้นตอนเป็นดังนี้



รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบของโดเมนการไหล

พิจารณา $[S_x]$ และ $[S_y]$

$$[S_x] = \int_S \{N\}\lfloor N \rfloor n_x dS$$

$$[S_x] = \int_0^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{S}{L} \\ 1-\frac{S}{L} \end{Bmatrix} \left\lfloor 0 \quad \frac{S}{L} \quad 1-\frac{S}{L} \right\rfloor n_x dS$$

$$[S_x] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} n_x \tag{3.95}$$

$$[S_y] = \int_S \{N\}\lfloor N \rfloor n_y \, dS$$

$$[S_y] = \int_0^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} \left\lfloor 0 \quad \frac{s}{L} \quad 1-\frac{s}{L} \right\rfloor n_y \, dS$$

$$[S_y] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} n_y \tag{3.96}$$

พิจารณา $[T_x]$, $[T_y]$, $[H_x]$, $[H_y]$

$$[T_x] = \int_S \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dS$$

$$[T_x] = \frac{1}{2A}\int_0^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor dS$$

$$[T_x] = \frac{L}{4A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

$$[T_y] = \int_S \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dS$$

$$[T_y] = \frac{1}{2A}\int_0^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} \lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3 \rfloor dS$$

$$[T_y] = \frac{L}{4A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

$$[H_x] = \int_S \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor n_x dS$$

$$[H_x] = \frac{1}{2A}\int_0^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor n_x\, dS$$

$$[H_x] = \frac{L}{4A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} n_x \tag{3.99}$$

$$[H_y] = \int_S \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor n_y dS$$

$$[H_y] = \frac{1}{2A}\int_0^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} \lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3 \rfloor n_y dS$$

$$[H_y] = \frac{L}{4A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} n_y \tag{3.100}$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อการวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด ดังในสมการ (3.54), (3.55), (3.58), (3.61), (3.62) และ(3.66) และเอลิเมนต์เมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบปิดที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว ได้แสดงในสมการ (3.88)-(3.100) จะถูกนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน และตรวจสอบความถูกต้องดังแสดงในบทที่ 5