บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล เป็นสมการที่อธิบายความเป็นจริงของการไหลที่ว่าต้องเกิดการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) การอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) อันประกอบไปด้วยสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อยดังนี้

1. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม
3. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งระบบนี้ถูกเรียกว่า ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับงานวิทยานิพนธ์ที่นำเสนอนี้จะศึกษาเฉพาะการไหลในสองมิติ จึงขอนำเสนอที่มาของแต่ละสมการที่กล่าวข้างต้น เฉพาะในระบบพิกัดฉาก (cartesian coordinate system) ในสองมิติเท่านั้น โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

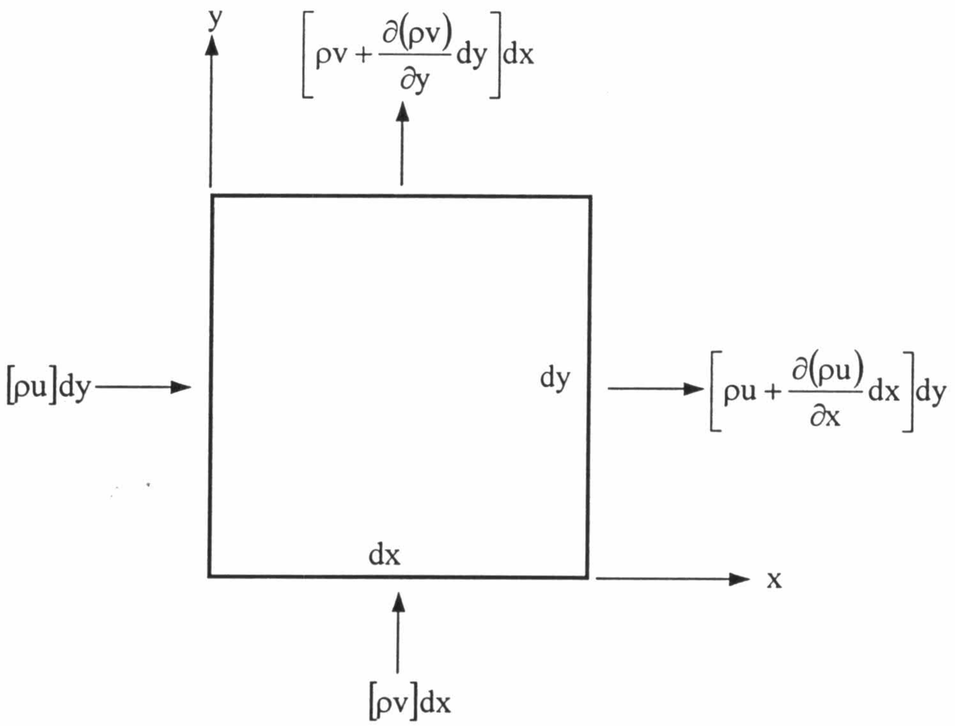
พิจารณาการไหลผ่านเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ที่มีความกว้าง dx และ dy ที่มีความหนาหนึ่งหน่วยวางตัวอยู่กับที่ในโดเมนการไหลดังรูปที่ 2.1 การไหลของมวลในแนวแกน x ไหลเข้าทางขอบด้านซ้ายและไหลออกทางขอบด้านขวา ส่วนการไหลของมวลในแนวแกน y ไหลเข้าทางขอบด้านล่างและไหลออกทางขอบด้านบน ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน x และ y ดังแสดงในสมการ (2.1) และ (2.2) ตามลำดับ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy - (\rho u)dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdy \tag{2.1}$$

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx - (\rho v)dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdy \tag{2.2}$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกจากเอลิเมนต์ได้จากการรวมสมการ (2.1) และ (2.2) ซึ่งแสดงในสมการ (2.3)

$$\text{net mass outflow} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dxdy \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.1 ฟลักซ์ของมวลผ่านด้านของเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่ตรึงอยู่กับที่ในโดเมนการไหล

สำหรับมวลของของไหลในเอลิเมนต์เล็กๆ นั้นมีค่าเท่ากับ $\rho dxdy$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลงเป็นไปตามสมการ (2.4)

$$\text{time rate of mass decrease} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdy \tag{2.4}$$

ตามหลักการคงที่ของมวลจะได้ว่า “ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ออกจากเอลิเมนต์ที่พิจารณาจะมีค่าเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในเอลิเมนต์นั้น” [18] จากนิยามดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ดังแสดงในสมการ (2.5)

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dxdy = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdy \tag{2.5}$$

เมื่อนำ dxdy หารสมการ (2.5) และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังสมการ (2.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]=0 \tag{2.6}$$

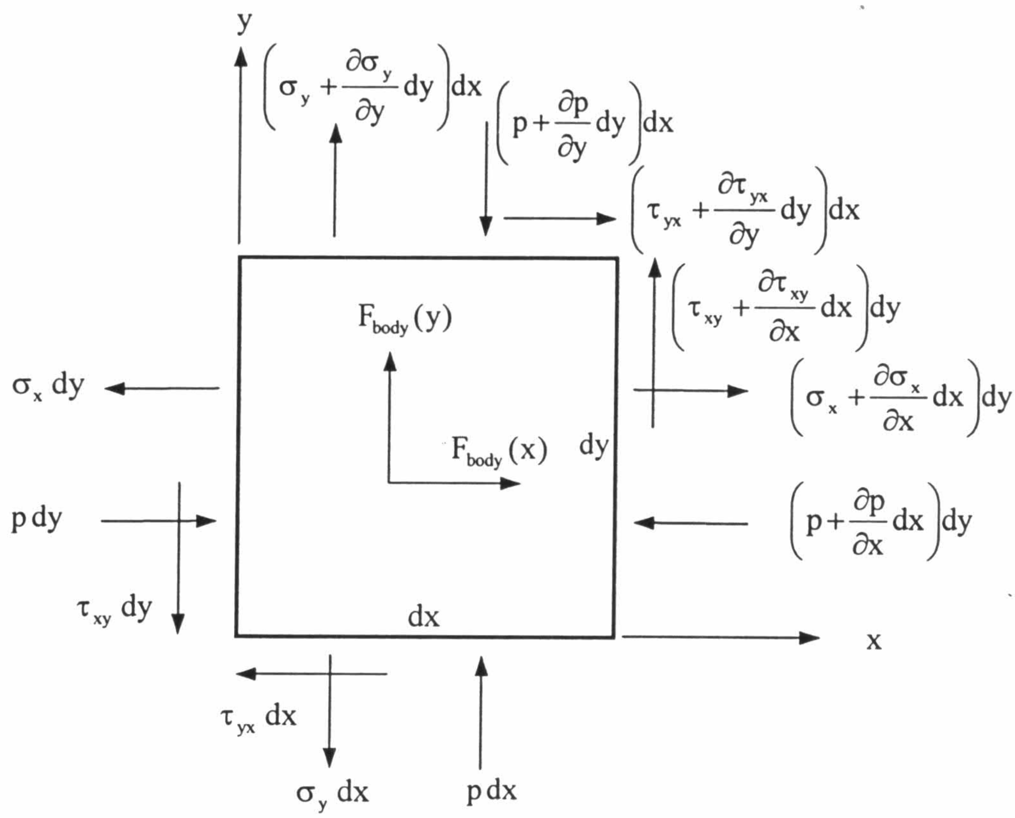
หรือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot\left(\rho\bar{V}\right)=0 \tag{2.7}$$

สมการ (2.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลซึ่งเขียนอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

พิจารณาเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ที่มีขนาด dx และ dy ที่มีความหนาหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามการไหลในโดเมนดังแสดงในรูปที่ 2.2 จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือกฎข้อที่สองของนิวตันมีนิยามว่า “แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น ” [18] ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังสมการ (2.8)



รูปที่ 2.2 แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ที่เคลื่อนที่ไปตามการไหล

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.8}$$

กฎข้อที่สองของนิวตันในสมการ (2.8) เป็นความสัมพันธ์แบบเวคเตอร์ (vector) ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปของความสัมพันธ์แบบสกาลาร์ (scalar) ในแนวแกนต่างๆ ได้หากพิจารณาในแนวแกน x จะได้ดังสมการ (2.9)

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.9}$$

โดยที่ F_x คือ แรงในแนวแกน x

a_x คือ ความเร่งในแนวแกน x

หากพิจารณาพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.9) โดยละเอียดจะพบว่าแรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ดังรูปที่ 2.2 ประกอบด้วยสองส่วนด้วยกัน คือ แรงเนื่องจากน้ำหนัก (body force) และ แรงกระทำที่ผิว (surface force) โดยมีรายละเอียดดังแสดงในสมการ (2.10) และ (2.11)

$$\begin{aligned} \text{surface force}_x = &\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right) - \sigma_x\right]dy \\ &+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \tau_{yx}\right]dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

และ

$$\text{body force}_x = \rho f_x dxdy \tag{2.11}$$

ดังนั้นแรงรวมทั้งหมดในแนวแกน x จะแสดงในสมการ (2.12)

$$\sum F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right]dxdy + \rho f_x dxdy \tag{2.12}$$

สำหรับพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (2.9) มวลของของไหลในเอลิเมนต์คือ

$$m = \rho dxdy \tag{2.13}$$

ส่วนความเร่งในแนวแกน x คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วในแนวแกน x ดังนั้น

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{2.14}$$

เมื่อนำสมการ (2.12) , (2.13) และ (2.14) แทนลงในสมการ (2.9) หารด้วย dxdy จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ดังแสดงในสมการ (2.15)

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.15}$$

ในทำนองเดียวกันสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \tag{2.16}$$

โดยพจน์ทางด้านซ้ายของสมการ (2.15) และ (2.16) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) ได้ดังแสดงในสมการ (2.17) และ (2.18) ตามลำดับ

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) \tag{2.17}$$

และ

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho v\vec{V}\right) \tag{2.18}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) ในทิศทาง x และ y สามารถแสดงได้ดังสมการ (2.19) และ (2.20)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho v\vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \tag{2.20}$$

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

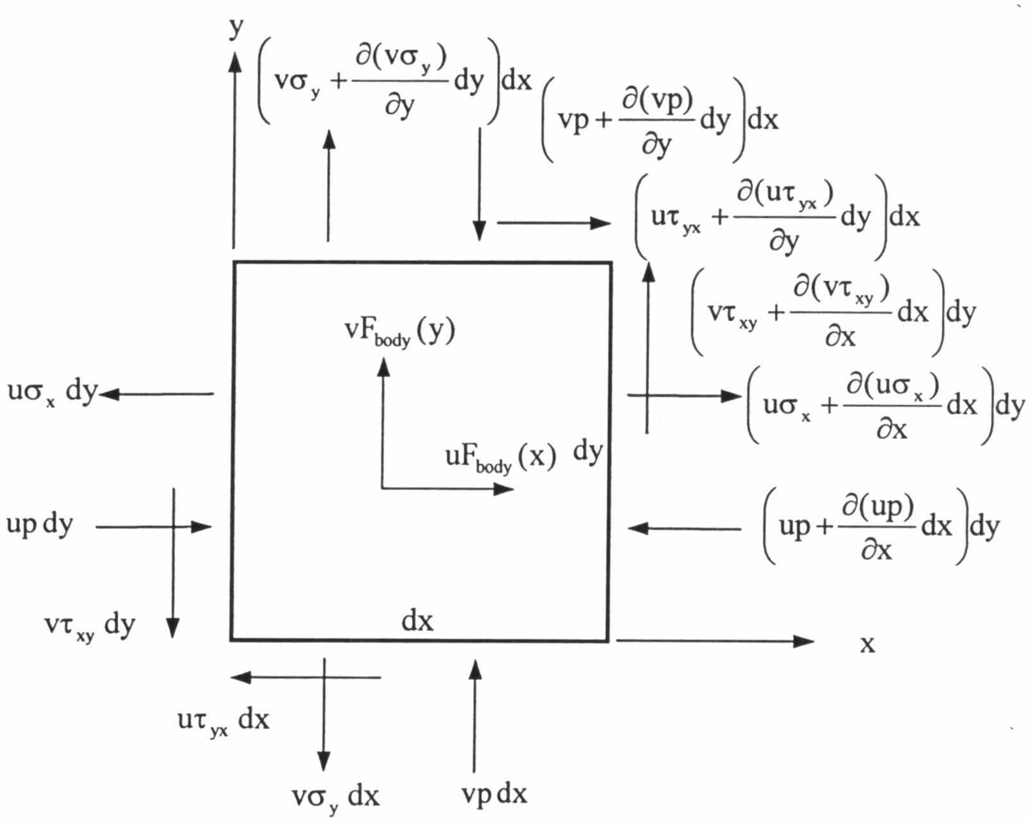
จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ มีใจความว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลจะมีค่าเท่ากับผลรวมของปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ของไหลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนของไหลนั้น” ซึ่งเขียนในรูปสมการได้ดังต่อไปนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลง ของพลังงาน ในก้อนของไหล	=	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนของไหล	+	อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนของไหล	
หรือ A		B	+	C	(2.21)

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวข้างต้น อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกันดังแสดงในรูปที่ 2.3 คือ อัตราของงานอันเกิดจากแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหลซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{V}$ ดังแสดงในสมการ (2.22) และ อัตราของงานอันเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวของก้อนของไหลในทิศทาง x และ y ดังแสดงในสมการ (2.23)

$$\text{work done by body force} = \rho\bar{f}\cdot\bar{V}dxdy \tag{2.22}$$

$$\text{work done by surface force} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial(up)}{\partial x} - \dfrac{\partial(vp)}{\partial y} + \dfrac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} \\ + \dfrac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \dfrac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \dfrac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \end{bmatrix} dxdy \tag{2.23}$$



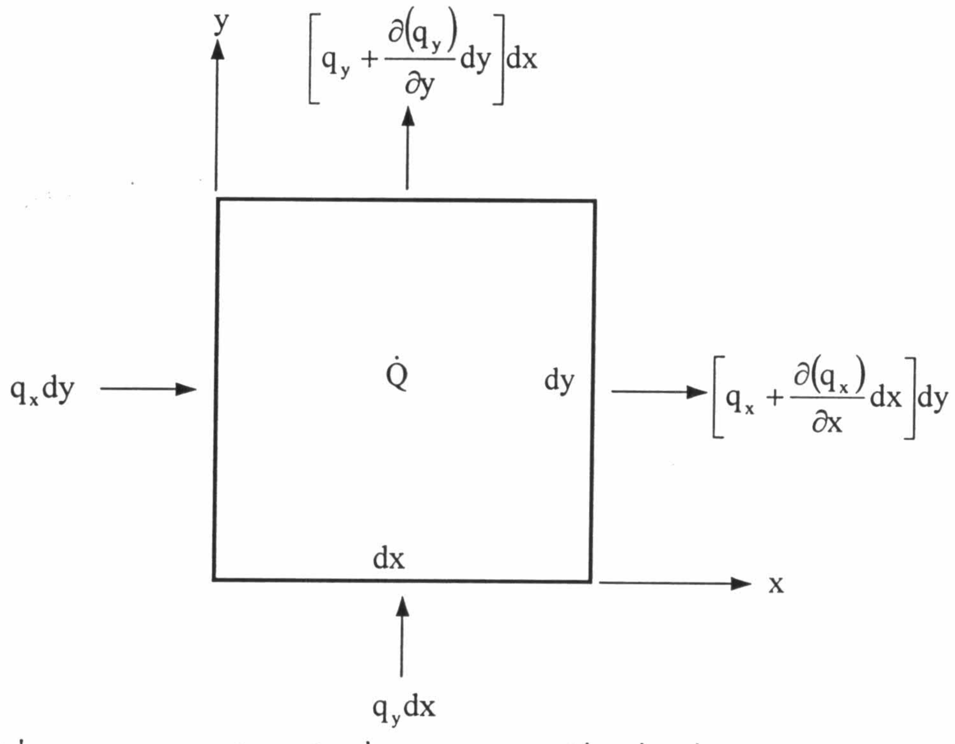
รูปที่ 2.3 งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนเอลิเมนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลในโดเมน

ดังนั้น อัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนของไหล คือ

$$C = \left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dxdy$$
$$+ \rho\vec{f} \cdot \vec{V} dxdy \tag{2.24}$$

สำหรับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนของไหลจะประกอบด้วยสองส่วน ดังแสดงในรูปที่ 2.4 คือ อัตราความร้อนสะสมภายในก้อนของไหล (volumetic heating) ดังแสดงในสมการ (2.25)

$$\text{volumetric heating} = \rho\dot{Q}dxdy \tag{2.25}$$



รูปที่ 2.4 ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลในโดเมน

และปริมาณฟลักซ์อันเนื่องจากการถ่ายเทความร้อนในทิศทาง x และ y แสดงดังต่อไปนี้

$$\text{heating by thermal conduction} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dxdy \tag{2.26}$$

ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ความร้อนสุทธิที่ให้กับก้อนของไหล เป็นผลรวมของสมการ (2.25) และ (2.26) ซึ่งมีค่าดังที่ปรากฏในสมการ (2.27)

$$B = \left[\rho\dot{Q} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right] dxdy \tag{2.27}$$

ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y เป็นไปตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) กล่าวคือ

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.28}$$

$$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.29}$$

โดยที่ k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหล

ดังนั้นพจน์ B ในสมการ (2.27) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ได้เป็นดังสมการ (2.30)

$$B = \left[\rho\dot{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dxdy \tag{2.30}$$

สำหรับพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลอันเกิดจากสองแหล่ง คือ พลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของโมเลกุลภายในของไหล และพลังงานจลน์ (kinetic energy) หาก e แทนพลังงานภายในและ $\frac{V^2}{2}$ แทนพลังงานจลน์แล้วพลังงานรวม(total energy) คือ $e + \frac{V^2}{2}$ ซึ่งเป็นพลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยมวล และเนื่องจากมวลของก้อนของไหลนี้คือ $\rho dxdy$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลสามารถแสดงได้ดังสมการ (2.31)

$$A = \rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2} \right) dxdy \tag{2.31}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงานจะได้จากการนำสมการ (2.24) , (2.30) และ (2.31) แทนลงในความสัมพันธ์ในสมการ (2.21) และหารตลอดด้วย dxdy ดังแสดงผลลัพธ์ในสมการ (2.32)

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\dot{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V} \tag{2.32}$$

พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.32) ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ย่อยได้ดังสมการ (2.33)

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] \tag{2.33}$$

เมื่อนำสมการ (2.33) แทนลงในสมการ (2.32) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงานซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์โดยแสดงในสมการ (2.34)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right]=\rho\dot{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} \tag{2.34}$$
$$+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V}$$

2.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลในรูปแบบอนุรักษ์

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลทั้งระบบซึ่งประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล (2.7) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x (2.19) และแนวแกน y (2.20) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน (2.34) ได้ถูกเรียกรวมกันว่า ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งต่างอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายในรูปแบบเทนเซอร์ (tensor notation) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial t}+\frac{\partial\{F_i\}}{\partial x_i}+\frac{\partial\{G_i\}}{\partial x_i}+\{Q\}=0 \qquad i=1,2 \tag{2.35}$$

โดย $\{U\}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variable) ซึ่งมีรายละเอียดดังสมการ (2.36)

$$\{U\}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho\varepsilon\end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

สำหรับ $\{F_i\}$ คือ เวคเตอร์ฟลักซ์แบบไม่หนืด ซึ่งหากเป็นระบบแกนพิกัดฉาก $\{F_i\}$ ในแนวแกน x และ y จะมีรายละเอียดดังแสดงในสมการ (2.37) และ (2.38)

$$\{F_x\}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho u\varepsilon+up\end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\{F_y\}=\begin{Bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho v\varepsilon+vp\end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

โดย ε คือ พลังงานรวม (total energy) ซึ่งมีเท่ากับ $e+\dfrac{V^2}{2}$

ส่วน $\{G_i\}$ คือ เวคเตอร์ฟลักซ์แบบหนืด ซึ่งระบบพิกัดฉาก $\{G_i\}$ ในแนวแกน x และ y มีรายละเอียดดังสมการ (2.39) และ (2.40)

$$\{G_x\}=\begin{Bmatrix}0\\ -\sigma_x\\ -\tau_{xy}\\ -k\dfrac{\partial T}{\partial x}-u\sigma_x-v\tau_{xy}\end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

$$\{G_y\}=\begin{Bmatrix}0\\ -\tau_{yx}\\ -\sigma_y\\ -k\dfrac{\partial T}{\partial y}-u\tau_{yx}-v\sigma_y\end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

และ $\{Q\}$ คือ เวคเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในแนวแกน x และ y และความร้อนสะสมดังแสดงในสมการ (2.41)

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_x \\ -\rho f_y \\ -\rho(\bar{f} \cdot \bar{V}) - \rho\dot{Q} \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

เมื่อพิจารณาระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่แสดงถึงที่มาข้างต้นแล้วนั้น จะพบว่าประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า (unknowns) ถึง 6 ตัว คือ ρ, u, v, p, e, T จึงจำเป็นต้องหาสมการเพิ่มอีก 2 สมการ คือ

1. สมการสถานะ (equation of state) โดยตั้งสมมติฐานว่าของไหลเป็น ก๊าซอุดมคติ (ideal gas) ซึ่งเป็นสมการที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน ความหนาแน่น และอุณหภูมิ ดังต่อไปนี้

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{2.42}$$

โดย R คือ ค่าคงที่จำเพาะของก๊าซ

2. สมการของพลังงานภายใน โดยใช้ความสัมพันธ์ทางเทอร์โมไดนามิกส์ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$e = c_v T \tag{2.43}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{2.44}$$

โดย γ คือ ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล

c_p และ c_v คือ ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาตรคงที่ตามลำดับ

จากการตั้งสมมติฐานว่าของไหลเป็นก๊าซในอุดมคติทำให้สามารถแสดงความระหว่างความดันและค่าพลังงานรวมดังนี้

$$p = (\gamma - 1)\rho\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right) \tag{2.45}$$

ดังนั้นทำให้จำนวนสมการทั้งหมดเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่า จึงสามารถทำการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ได้

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ พิจารณาว่าการไหลเป็นการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด ดังนั้นจึงไม่นำพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความหนืดและไม่นำพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการนำความร้อนและความร้อนสะสมมาพิจารณา ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์จึงลดรูปเป็นดังสมการ (2.46) และเรียกใหม่ว่า สมการออยเลอร์ (Euler equations) [18]

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial t} + \frac{\partial\{F_x\}}{\partial x} + \frac{\partial\{F_y\}}{\partial y} = 0 \qquad (2.46)$$

โดย $\{U\}$, $\{F_x\}$ และ $\{F_y\}$ เป็นไปตามสมการ (2.36) , (2.37) และ (2.38) ตามลำดับ

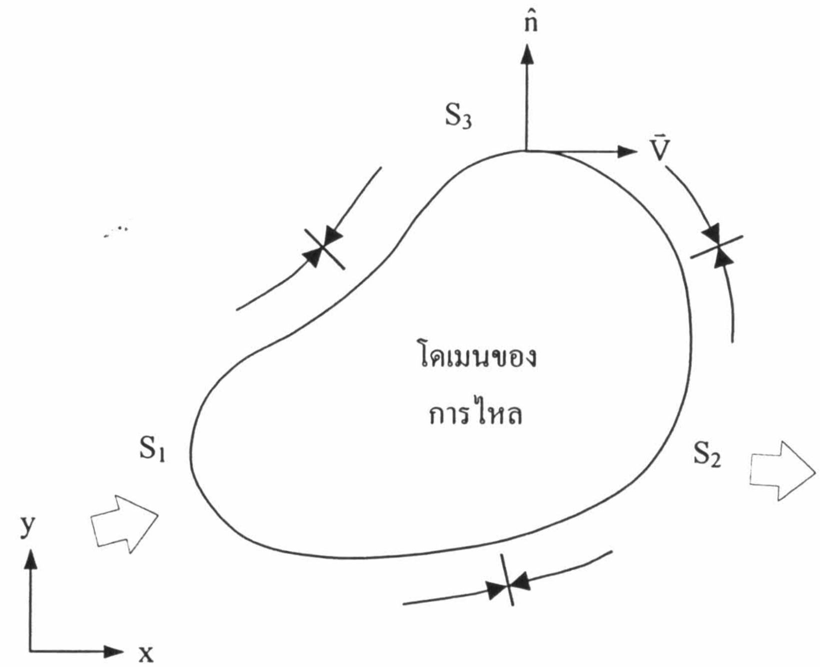
2.5 เงื่อนไขขอบเขต

ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.46) จำเป็นต้องประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) และเงื่อนขอบเขต (boundary condition) ที่เหมาะสมกับการไหล โดยเงื่อนไขขอบเขตสำหรับการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้แบบไร้ความหนืด ประกอบด้วยเงื่อนไขใน 3 ส่วน ดังต่อไปนี้ (1) เงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic inflow) (2) เงื่อนไขขอบเขตของการไหลออกด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic outflow) และ (3) เงื่อนไขขอบเขตของการไหลในทิศทางขนานกับผนัง (solid wall) ดังในรูปที่ 2.5

ส่วนที่ 1 เงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic inflow) ตลอดขอบ S_1 จะกำหนดให้ค่าตัวแปรปฐมภูมิมีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้น (initial values) ดังนี้

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_o \\ u &= u_o \\ v &= v_o \\ \varepsilon &= \varepsilon_o \end{aligned}$$

ส่วนที่ 2 เงื่อนไขขอบเขตการไหลออกด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic outflow) ตลอดขอบ S_2 จะไม่มีการกำหนดคุณสมบัติใดๆ



รูปที่ 2.5 เงื่อนไขขอบเขตของการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

ส่วนที่ 3 เงื่อนไขขอบเขตการไหลในทิศทางขนานกับผนัง (solid wall) ตลอดขอบ S_3 ภายใต้สมมติฐานของการไหลไร้ความหนืด ดังนั้นจะกำหนดความเร็วให้อยู่ในทิศทางที่สัมผัส (tangent) กับผนังตลอดแนว ส่วนความเร็วในแนวตั้งฉากกับผนังตลอดแนว $\bar{V} \cdot \hat{n}$ จะต้องมีค่าเป็นศูนย์เสมอ