บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

การไหลแบบอัดตัวได้ (compressible flow) เป็นการไหลที่ความหนาแน่นของของไหลนั้นมีค่าไม่คงที่ โดยทั่วไปแล้วการไหลแบบอัดตัวได้มักเกิดขึ้นกับการไหลที่มีความเร็วสูง (high-speed flow) ลักษณะของปัญหาครอบคลุมตั้งแต่การไหลของของไหลภายนอก (external flow) เช่น การไหลของอากาศผ่านเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง รวมไปถึงปัญหาการไหลของของไหลภายใน (internal flow) เช่น การไหลของก๊าซในเครื่องยนต์กังหันก๊าซที่มีความเร็วสูง [1] เมื่อเกิดการไหลด้วยความเร็วสูงผ่านวัตถุต่างๆ แล้ว จะเกิดปรากฏการณ์การไหลที่มีความซับซ้อนเกิดขึ้น เช่น คลื่นช็อค (shock wave) คลื่นการขยายตัว (expansion wave) คลื่นช็อคสะท้อน (reflecting shock wave) และการกระทบกันของคลื่นช็อค (shock shock interaction) [2,3] ลักษณะเด่นของการไหลประเภทนี้คือ การเปลี่ยนแปลงสภาวะการไหลโดยฉับพลันผ่านคลื่นช็อค การเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันนี้เองก่อให้เกิดความยากลำบากในการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ดังนั้นในอดีตการวิเคราะห์ปัญหาการไหลดังกล่าวจึงต้องอาศัยการทดลองเป็นหลักซึ่งทำให้เสียเวลาและค่าใช้จ่ายเป็นจำนวนมาก จึงเป็นแรงผลักดันให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) เข้ามามีบทบาทเพื่อคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution)

ในอดีตที่ผ่านมาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ก็คือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ประกอบด้วยขั้นตอนที่ไม่ซับซ้อนและง่ายต่อการทำความเข้าใจ แต่อาจก่อให้เกิดความยากลำบากขึ้นได้หากปัญหาที่ทำการวิเคราะห์มีรูปร่างที่ซับซ้อน (complex geometry) เป็นสาเหตุให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ซึ่งสามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ดีกำลังได้รับความนิยมในปัจจุบัน การพัฒนาของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เกิดจากแรงผลักดันเพื่อแก้ปัญหากิจการอวกาศที่มักมีรูปร่างซับซ้อน โดยเฉพาะความต้องการในการออกแบบอากาศยานสมัยใหม่ที่สามารถบินด้วยข้ามทวีปด้วยความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียงหลายสิบเท่า [4] ที่ผ่านมาได้มีผู้เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบต่างๆ หลายวิธี เพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ เช่น วิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (Taylor-Galerkin algorithm) [5] วิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (Upwind cell-centered algorithm) [6] วิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน

(Petrov-Galerkin algorithm) [7] วิธีกำลังสองต่ำสุด (Least squares algorithm) [8] วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) [9]

ในบรรดาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบต่างๆ ที่ได้มีผู้เสนอมานั้น วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) เป็นวิธีการที่ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลในหลายๆ รูปแบบ เช่น การไหลแบบอัดตัวได้ทั้งแบบรวมความหนืดและไร้ความหนืด (viscous and inviscid compressible flow) การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว (viscous incompressible flow) การไหลแบบความหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยรวมอุณหภูมิ (thermal viscous incompressible flow) การไหลของน้ำตื้น (shallow water flow) การไหลในตัวกลางพรุน (porous media flow) [10] สำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบอัดตัวได้ด้วยวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ ตั้งอยู่บนพื้นฐานในการคำนวณหาตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งได้แก่ ค่าความหนาแน่น (density) ค่าความเร็วในทิศทางต่างๆ (velocity components) และค่าพลังงานรวม (total energy) ซึ่งตัวแปรไม่ทราบค่าเหล่านี้ คำนวณมาจากระบบสมการนาเวียร์–สโตกส์ (system of navier-stoke equations) ที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equations)

โดยทั่วไปปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้มักจะประกอบด้วยคลื่นช็อค ซึ่งค่าของตัวแปร เช่น ความหนาแน่น ความดัน ความเร็ว จะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันผ่านคลื่นช็อคนั้น ทำให้จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กมากๆ วางตัวในแนวคลื่นช็อค เพื่อให้สามารถจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ แต่ในทางปฏิบัตินั้น รูปร่างและตำแหน่งของคลื่นช็อคไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้า การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมนจะส่งผลโดยตรงต่อเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้นเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแต่ใช้เวลาและหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ในการคำนวณที่น้อยลง จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณคลื่นช็อคซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอย่างฉับพลันและใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆ ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรค่อนข้างน้อย วิธีการหนึ่งที่จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวได้แก่ เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing technique) [11] โดยวิธีการนี้มีหลักการคือ ใช้การเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ครั้งก่อนหน้าเป็นตัวชี้วัด ในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะใช้ในการคำนวณครั้งต่อไป ทำให้ไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กหมดทั่วทั้งโดเมน เวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้จึงลดลงได้

งานวิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำเสนอ การใช้ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดในสภาวะอยู่ตัว (steady state high-speed inviscid compressible flows) พร้อมทั้งนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing technique) มาประยุกต์ใช้เพื่อช่วยลดเวลาและหน่วยความจำเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ต้องใช้ในการคำนวณ และเพิ่มความถูกต้องของผลลัพธ์ที่คำนวณได้

1.2 ผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง

R. Lohner et al. [5] ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด (high-speed inviscid compressible flow) ในระนาบสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน โดยหลักการพื้นฐานของวิธีการนี้ก็คือ การใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Tayler series expansion) สร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา และใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) แบบกาเลอร์คินสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง ในงานวิจัยได้เลือกใช้วิธีการแบบชัดแจ้ง (explicit method) ในการแก้ระบบสมการ โดยการคำนวณค่าผลลัพธ์จาก t^n ไปยัง t^{n+1} ได้แบ่งออกเป็นสองขั้นตอนย่อยอันประกอบไปด้วย การคำนวณค่าผลลัพธ์ที่เวลา $t^{n+\frac{1}{2}}$ และที่เวลา t^{n+1} และได้ประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อปรับปรุงผลลัพธ์ให้มีความแม่นยำมากขึ้น

ปัญญา จันทร์ไพแสง [6] ทำการศึกษาการแก้ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดแต่มีการอัดตัวได้ด้วยความเร็วสูงในสภาวะอยู่ตัว (steady state high-speed inviscid compressible flows) ในระนาบสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered finite element) และเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นและลดเวลาในการคำนวณจึงได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยใช้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นของของไหลที่ได้จากการคำนวณ เป็นตัวชี้วัดในการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) ให้เหมาะสมตามตำแหน่งของปัญหาเพื่อทำการคำนวณครั้งต่อไป

Frank.P.Brueckner and J.C.Heinrich [7] ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ทั้งแบบรวมความหนืด (viscous) และไร้ความหนืด (inviscid) ในสภาวะอยู่ตัวบนระนาบสองมิติ ซึ่งปัญหาการไหลถูกควบคุมด้วยระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ โดย

ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ได้เขียนในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) ของตัวแปรไร้มิติ (nondimensional) และได้ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกันด้วยวิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin) ในงานวิจัยได้เลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดสี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ และทำการอินทิเกรตเวลาโดยใช้วิธีออยเลอร์และรุงเง-คุตตาอันดับสอง

O. C. Zienkiewicz et al. [12] ได้เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้อย่างครอบคลุม ตั้งแต่การไหลแบบไม่อัดตัวและการไหลแบบอัดตัวได้ ทั้งในสภาวะอยู่ตัว (steady state) และสภาวะไม่อยู่ตัว (transient) ซึ่งถูกควบคุมระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ และสมการของก๊าซในอุดมคติ โดยในงานวิจัยได้ใช้วิธีกึ่งโดยปริยาย (semi implicit algorithm) สำหรับการไหลความเร็วต่ำ และวิธีโดยชัดแจ้ง (explicit time algorithm) สำหรับการไหลความเร็วสูง อีกทั้งยังได้เสนอวิธีการแยก (split) สมการนาเวียร์-สโตกส์ออกเป็นสองส่วน จากนั้นอาศัยวิธีของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา และใช้วิธีบับโนฟ-กาเลอร์คินเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง เป็นผลให้การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ สามารถแก้ปัญหาการสั่นของผลลัพธ์ในบางบริเวณที่การไหลมีความสามารถในการอัดตัว (compressibility) มีค่าต่ำได้

O. C. Zienkiewicz and J. Wu [13] ได้นำเสนอระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบชัดแจ้ง (explicit) และกึ่งชัดแจ้ง (semi explicit) ซึ่งสามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้หลากหลาย ทั้งการไหลแบบไม่อัดตัวและการไหลแบบอัดตัวได้ที่อยู่ในสภาวะอยู่ตัวและไม่อยู่ตัว สำหรับของไหลที่ถูกสมมติให้เป็นก๊าซในอุดมคติ (ideal gas) โดยปัญหาการไหลถูกควบคุมด้วยระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์และสมการสถานะของก๊าซอุดมคติ (ideal gas equation of state) ในงานวิจัยยังได้เสนอวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน (Characteristic-Galerkin) เพื่อจัดการพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการพา (convective terms) ทำให้สามารถใช้วิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทางได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด และได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่นำเสนอสามารถแก้ปัญหาการสั่นของผลลัพธ์ในบริเวณใกล้ๆ กับจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์ (stagnation point) ได้โดยไม่ต้องทำการเพิ่มความหนืดเทียม (artificial viscosity)

P. Dechaumphai and W. Limtrakarn [14] อธิบายวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดในสภาวะอยู่ตัว (steady state high-speed inviscid compressible flows) ในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินเซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered finite element) ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

(adaptive remeshing technique) เพื่อปรับปรุงความถูกต้องของผลลัพธ์ให้เพิ่มมากขึ้น โดยอาศัยข้อมูลของการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของค่าความหนาแน่น ร่วมกับข้อมูลของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีอยู่ มาใช้ในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่ โดยสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความหนาแน่นของของไหลสูง และสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดใหญ่ ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความหนาแน่นของของไหลต่ำ

สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช [15] ทำการศึกษาวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้แบบไร้ความหนืดทั้งในสภาวะอยู่ตัวและไม่อยู่ตัวในระนาบสองมิติด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากการประยุกต์วิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์– สโตกส์ ในงานวิจัยยังได้พัฒนาวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ โดยกระบวนการทั้งหมดได้รวมอยู่ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงกราฟิกชื่อ FEMESH ซึ่งช่วยให้การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการปรับขนาดเอลิเมนต์ทำได้สะดวกยิ่งขึ้น

Wiroj Limtrakarn and Pramote Dechaumphai [16] ได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ และเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อการวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ทั้งแบบไร้ความหนืดและรวมความหนืดในสภาวะอยู่ตัว ในงานวิจัยได้แสดงให้เห็นถึงความถูกต้องแม่นยำของผลเฉลยที่เพิ่มขึ้นหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

วิโรจน์ ลิ้มตระการ [17] ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน เข้ากับสมการนาเวียร์-สโตกส์ ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้แบบไร้ความหนืด โดยระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คินที่ใช้ได้ประยุกต์วิธีแบบชัดแจ้งและทำการคำนวณหาผลลัพธ์ออกเป็นสองช่วงเพื่อเพิ่มเสถียรภาพในการคำนวณ

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.3.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ในระบบพิกัดฉากในสองมิติสำหรับ การไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด

1.3.2 ศึกษาวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์

1.3.3 ปรับปรุงผลลัพธ์ที่คำนวณได้โดยการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.4.1 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ด้วยวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm)

1.4.2 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดในสภาวะอยู่ตัว

1.4.3 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อปรับปรุงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

1.4.4 นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดโดยทั่วๆ ไป

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1.5.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์

1.5.2 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด

1.5.3 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง

1.5.4 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติโดยใช้ปัญหาอย่างง่ายเพื่อตรวจสอบความถูกต้องเที่ยงตรงของผลเฉลยที่เพิ่มขึ้น

1.5.5 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปใช้แก้ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

1.5.6 สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์

1.5.7 สอบวิทยานิพนธ์

1.6 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

1.6.1 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดผ่านรูปร่างที่ซับซ้อน

1.6.2 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเมื่อใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถลดเวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้ลงได้

1.6.3 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในอนาคตต่อไป