

ผลเฉลยของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ
และเทคนิคการปรับขนาดเอติเมนต์

นายปริญญา บุญมาเลิศ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2546

ISBN 974-17-4273-8

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I21601811

HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW SOLUTIONS BY COMBINED
CHARACTERISTIC-BASED SPLIT METHOD AND ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE

Mr. Parinya Boonmarlert

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2003

ISBN 974-17-4273-8

ปริญญา บัญมาเลิศ : ผลเฉลยของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ . (HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW SOLUTIONS BY COMBINED CHARACTERISTIC-BASED SPLIT METHOD AND ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 156 หน้า. ISBN 974-17-4273-8.

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดที่สถานะอยู่ตัว สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหการไหลประติมากรรมขึ้นจากการประยุกต์ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะเข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวล กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม และกฎการอนุรักษ์พลังงาน แล้วจึงนำมาประติมากรรมเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งได้ตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหการไหลต่างๆ หลายปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงก่อนจะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหการไหลที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

เพื่อให้ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง จึงได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยอาศัยหลักการคือการสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของคำตอบสูง และสร้างเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆ

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหการไหลต่างๆ ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของประยุกต์ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติวิเคราะห์เข้าด้วยกันในการวิเคราะห์ปัญหการไหลความเร็วสูงผ่านรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อนได้

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
ปีการศึกษา 2546

ลายมือชื่อนิสิต ธีรดา บุญมาเลิศ
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Pramoj Decha-ampai
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

4470402621 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEY WORD: FINITE ELEMENT / HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW / CHARACTERISTIC-BASED SPLIT METHOD

PARINYA BOONMARLERT : HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW SOLUTIONS BY COMBINED CHARACTERISTIC-BASED SPLIT METHOD AND ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D. 156 pp. ISBN 974-17-4273-8.

In this thesis, a finite element method for solving steady-state high-speed inviscid compressible flow problems is presented. The finite element equations corresponding to these flow problems were derived from the governing Navier-Stokes partial differential equations that consist of the conservation of mass, momentum, and energy using the characteristic-based split method. These derived finite element equations were used in the development of a computer program. The computer program was verified by several flow problems that have exact solutions before applying to solve more complex flow problems.

The adaptive remeshing technique was combined with the finite element method to improve the solution accuracy and reduce the computational time as well as the computer memory. The adaptive remeshing technique places small elements in the regions with large second gradients, and at same time, the larger elements are generated in the other regions.

The flow solutions obtained from several problems were used to demonstrate the capability of the combined characteristic-based split method and adaptive remeshing technique that can predict detailed high-speed flow behaviors past complex geometries.

Department Mechanical Engineering

Field of study Mechanical Engineering

Academic Year 2003

Student's signature Parinya Boonmarlert

Advisor's signature Pramote Dechaumphai

Co-advisor's signature _____

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งเกี่ยวกับการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.มานิจ ทองประเสริฐ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์และ อาจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณพี่ๆ เพื่อนๆ สมาชิกในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณทุกท่าน นับตั้งแต่ อาจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มตระการ คุณสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ คุณเสกฐาวรธ สุจริตภวัตสกุล คุณพัชรี วีระเอก คุณสมบูรณ์ โอตรวรรณะ คุณอาชว์ ปวีณวัฒน์ คุณสุธี ไตรวิวัฒนา คุณสุธี โอปารฤทธินันท์ คุณคมกฤษณ์ ชัยโย คุณกิตติศักดิ์ คู่วัลญญ คุณอธิพงษ์ มาลาทิพย์ และคุณกอบศักดิ์ พงนานภาศิริ สำหรับคำแนะนำ ความช่วยเหลือและกำลังใจตลอดเวลาทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้คำปรึกษา เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตราบูชาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ท
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 ผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง.....	3
1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	6
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	6
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์.....	6
1.6 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์.....	7
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล.....	8
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล.....	8
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม.....	10
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน.....	12
2.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลในรูปแบบอนุพันธ์.....	16
2.5 เงื่อนไขขอบเขต.....	19
บทที่ 3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์.....	21
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	21
3.2 วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ.....	24
3.2.1 การแบ่งย่อยช่วงเวลา.....	29
3.2.2 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกร้าง.....	31
3.3 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์.....	39

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4	
โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้.....	46
4.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม CBSHIFLOW.....	46
4.2 รายละเอียดของโปรแกรม CBSHIFLOW.....	47
4.3 ลักษณะของเพิ่มข้อมูลนำเข้า.....	47
4.4 ลักษณะของเพิ่มข้อมูลผลลัพธ์.....	50
บทที่ 5	
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	52
5.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ.....	52
5.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°.....	58
5.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย.....	62
5.4 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ.....	65
บทที่ 6	
เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	69
6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	69
6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	73
6.3 การประยุกต์โปรแกรม CBSHIFLOW เข้ากับเทคนิคการปรับขนาด เอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	74
6.4 ลักษณะของเพิ่มข้อมูลนำเข้าโปรแกรม FEMESH.....	75
6.5 ตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ กับปัญหาการไหลความเร็วสูง.....	77
6.5.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ....	77
6.5.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	85
6.5.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย.....	93
6.5.4 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ.....	96

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 7 ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบต่างๆ.....	99
7.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าในช่องแคบ ที่มีพื้นเอียงมุม 20°	99
7.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบ ที่มีพื้นเอียงมุม 10°	104
7.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบ ที่มีเนินสามเหลี่ยม	107
7.4 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีเนินโค้ง.....	110
7.5 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3.0 เท่าผ่านทรงกระบอก.....	113
7.6 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่าผ่านสองทรงกระบอก.....	117
7.7 ปัญหาการกระทบกันของคลื่นช็อกเอียงและคลื่นช็อกโค้ง หน้าทรงกระบอก.....	120
 บทที่ 8 บทสรุป ปัญหาที่พบ และ ข้อเสนอแนะ.....	 123
8.1 บทสรุป.....	123
8.2 ปัญหาที่พบ.....	124
8.3 ข้อเสนอแนะ.....	125
 รายการอ้างอิง.....	 126
 ภาคผนวก.....	 130
ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรม CBSHIFLOW.....	131
 ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	 156

สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 2.1	ฟลักซ์ของมวลผ่านด้านของเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่ตรึงอยู่กับที่ในโดเมนการไหล... 9
รูปที่ 2.2	แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ที่เคลื่อนที่ไปตามการไหล..... 10
รูปที่ 2.3	งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆบนเอลิเมนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลในโดเมน 13
รูปที่ 2.4	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลในโดเมน 14
รูปที่ 2.5	เงื่อนไขขอบเขตของการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้..... 20
รูปที่ 3.1	การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ..... 21
รูปที่ 3.2	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ..... 22
รูปที่ 3.3	ความสัมพันธ์ของตัวแปรสเกลาร์ในช่วงเวลา $t^n \rightarrow t^{n+1}$ 26
รูปที่ 3.4	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวอยู่ในโคออร์ดิเนต x-y..... 39
รูปที่ 3.5	เอลิเมนต์ที่อยู่ที่ยอบของโดเมนการไหล..... 42
รูปที่ 4.1	แผนภูมิการทำงานของโปรแกรม CBSHIFLOW..... 51
รูปที่ 5.1	ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ..... 53
รูปที่ 5.2	ลักษณะของการไหลตกกระทบพื้นราบ..... 53
รูปที่ 5.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ..... 54
รูปที่ 5.4	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ (ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 55 (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน..... 55 (ค) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์..... 56
รูปที่ 5.5	เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง กว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ 56
รูปที่ 5.6	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง กว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ 57
รูปที่ 5.7	การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง กว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ 57
รูปที่ 5.8	ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° 58

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 5.9	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่าน พื้นเอียงทำมุม 20°	59
รูปที่ 5.10	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° (ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	59
	(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	60
	(ค) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	60
รูปที่ 5.11	เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็ว สูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y = 0.7$	61
รูปที่ 5.12	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลความเร็ว สูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y = 0.7$	61
รูปที่ 5.13	การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็ว สูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y = 0.7$	62
รูปที่ 5.14	ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย.....	63
รูปที่ 5.15	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย.....	63
รูปที่ 5.16	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน สำหรับปัญหาการไหลความเร็ว สูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย (ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	64
	(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	64
รูปที่ 5.17	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นตามผนังของปัญหาการไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย.....	64
รูปที่ 5.18	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันตามผนังของปัญหาการไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย.....	65
รูปที่ 5.19	ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ.....	66
รูปที่ 5.20	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อน ของคลื่นช็อคบนพื้นราบ.....	66

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 5.21	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ
(ก)	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 67
(ข)	เส้นชั้นของค่าความดัน..... 67
รูปที่ 5.22	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง $y = 0.25$ 67
รูปที่ 5.23	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันสำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง $y = 0.25$ 68
รูปที่ 6.1	การวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ Y..... 71
รูปที่ 6.2	แผนผังการทำงานของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัล โนมัติ..... 75
รูปที่ 6.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ
(ก)	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์..... 78
(ข)	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 78
(ค)	เส้นชั้นของค่าความดัน..... 78
(ง)	เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์..... 78
รูปที่ 6.4	การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ
(ก)	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์..... 79
(ข)	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 79
(ค)	เส้นชั้นของค่าความดัน..... 79
(ง)	เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์..... 79
รูปที่ 6.5	การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ
(ก)	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์..... 80
(ข)	เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 80
(ค)	เส้นชั้นของค่าความดัน..... 80

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
	(ง) เส้นชั้นของค่ามัถนัมเบอร์..... 80
รูปที่ 6.6	การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัถนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบบนพื้นราบ
	(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์..... 81
	(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 81
	(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน..... 81
	(ง) เส้นชั้นของค่ามัถนัมเบอร์..... 81
รูปที่ 6.7	การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 4 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัถนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบบนพื้นราบ
	(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์..... 82
	(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 82
	(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน..... 82
	(ง) เส้นชั้นของค่ามัถนัมเบอร์..... 82
รูปที่ 6.8	การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 5 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัถนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบบนพื้นราบ
	(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์..... 83
	(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น..... 83
	(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน..... 83
	(ง) เส้นชั้นของค่ามัถนัมเบอร์..... 83
รูปที่ 6.9	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบบนพื้นราบ ที่ตำแหน่ง $x=0.5$ 84
รูปที่ 6.10	การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบบนพื้นราบ ที่ตำแหน่ง $x=0.5$ 84
รูปที่ 6.11	การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัถนัมเบอร์เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบบนพื้นราบ ที่ตำแหน่ง $x=0.5$ 85

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 6.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และม៉ัค นัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	86
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	86
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	86
(ง) เส้นชั้นของค่าม៉ัคนัมเบอร์.....	86
รูปที่ 6.13 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 1 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง กว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	87
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	87
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	87
(ง) เส้นชั้นของค่าม៉ัคนัมเบอร์.....	87
รูปที่ 6.14 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 2 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง กว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	88
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	88
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	88
(ง) เส้นชั้นของค่าม៉ัคนัมเบอร์.....	88
รูปที่ 6.15 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 3 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูง กว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	89
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	89
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	89
(ง) เส้นชั้นของค่าม៉ัคนัมเบอร์.....	89

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 6.16 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 4 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	90
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	90
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	90
(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	90
รูปที่ 6.17 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 5 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	91
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	91
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	91
(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	91
รูปที่ 6.18 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y=0.7$	92
รูปที่ 6.19 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y=0.7$	92
รูปที่ 6.20 การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y=0.7$	93
รูปที่ 6.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	94
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	94
รูปที่ 6.22 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นตามผนังของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์.....	95
รูปที่ 6.23 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันตามผนังของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยายเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์.....	95

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 6.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการตก กระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	97
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	97
รูปที่ 6.25 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง $y=0.25$	98
รูปที่ 6.26 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง $y=0.25$	98
รูปที่ 7.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°	100
รูปที่ 7.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดันสำหรับ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	101
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	101
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	101
รูปที่ 7.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการ ไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	102
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	102
รูปที่ 7.4 การกระจายของความดันตลอดผนังสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°	
(ก) ผนังด้านบน.....	103
(ข) ผนังด้านล่าง.....	103
รูปที่ 7.5 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°	104
รูปที่ 7.6 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการ ไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่า ในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	105
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	105

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 7.7	กระจายของค่าสัมประสิทธิ์ความดันตลอดผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงทำมุม 10°	106
รูปที่ 7.8	ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม.....	107
รูปที่ 7.9	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการ ไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่า ในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม	
	(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	108
	(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	108
รูปที่ 7.10	การกระจายของความหนาแน่นและความดันตลอดผนังสำหรับปัญหาการไหล ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่า ในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม	
	(ก) ผนังด้านบน.....	109
	(ข) ผนังด้านล่าง.....	109
รูปที่ 7.11	ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีเนินโค้ง.....	110
รูปที่ 7.12	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการ ไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่า ในช่องแคบที่มีเนินโค้ง	
	(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	111
	(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	111
รูปที่ 7.13	การกระจายของความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่า ในช่องแคบที่มีเนินโค้ง	
	(ก) ผนังด้านบน.....	112
	(ข) ที่ตำแหน่ง $y = 0.5$	112
รูปที่ 7.14	ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านทรงกระบอก.....	113
รูปที่ 7.15	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน มัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านทรงกระบอก	
	(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	114
	(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	114
	(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	114
	(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	114

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 7.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน มัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านทรงกระบอก	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	115
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	115
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	115
(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	115
รูปที่ 7.17 กระจายของสัมประสิทธิ์ความดันที่กึ่งกลางโดเมนและผิวทรงกระบอกสำหรับ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านทรงกระบอก.....	116
รูปที่ 7.18 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่า ผ่านทรงกระบอกสองท่อน.....	117
รูปที่ 7.19 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น มัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่า ผ่านสองทรงกระบอก	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	118
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	118
(ค) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	118
รูปที่ 7.20 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่า เสียง 6.57 เท่า ผ่านสองทรงกระบอกของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น	
(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	118
(ข) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	118
รูปที่ 7.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น มัคนัมเบอร์สำหรับ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.57 เท่า ผ่านสองทรงกระบอก	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	119
(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	119
(ค) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	119
รูปที่ 7.22 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น มัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่า เสียง 6.57 เท่า ผ่านสองทรงกระบอก	
(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น.....	119
(ข) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์.....	119

สารบัญภาพ(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 7.23 รูปแบบของปัญหาการกระทบกันของคลื่นช็อกเอียงและคลื่นช็อกโค้งหน้าทรง กระบอก.....	120
รูปที่ 7.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความดัน เส้นชั้นของค่าพลังงานภายใน	
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์.....	121
(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	121
(ค) เส้นชั้นของค่าพลังงานภายใน.....	121
รูปที่ 7.25 เส้นชั้นของค่าความดัน เส้นชั้นของค่าพลังงานภายใน ด้านหน้าทรงกระบอก	
(ก) เส้นชั้นของค่าความดัน.....	121
(ข) เส้นชั้นของค่าพลังงานภายใน.....	121
รูปที่ 7.26 กระจายตัวของความดันที่ผิวทรงกระบอก.....	122

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่ของเอลิเมนต์
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
a_x	ความเร่งในแนวแกน x
a_y	ความเร่งในแนวแกน y
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
c	ความเร็วเสียง
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
c_p	ความจุความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
c_v	ความจุความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่
e	พลังงานภายใน
F_x	แรงในแนวแกน x
F_y	แรงในแนวแกน y
h	ขนาดของเอลิเมนต์
k	สัมประสิทธิ์การแพร่
L	ความยาวของขอบเอลิเมนต์
M	ค่ามัคนัมเบอร์
m	มวล
N	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
\hat{n}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบ
n_x	ทิศทางโคซายน์ในแนวแกน x ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบ
n_y	ทิศทางโคซายน์ในแนวแกน y ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบ
p	ความดัน
Q	ปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง
q_x	ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง x
q_y	ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง y
R	ค่าคงที่จำเพาะของก๊าซ
S	ขอบของเอลิเมนต์
T	อุณหภูมิ

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

t	เวลา
U	ตัวแปรอนุรักษ์
u	ความเร็วในแนวแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
x	ระยะในแนวระนาบ
y	ระยะในแนวตั้ง
β	มุมของคลื่นช็อกเอียง
ϵ	พลังงานรวม
ϕ	ตัวไม่ทราบค่า
Φ	ตัวแปรสเกลาร์
γ	ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล
θ	น้ำหนักรวมของเวลา
ρ	ความหนาแน่นของของไหล
σ	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์