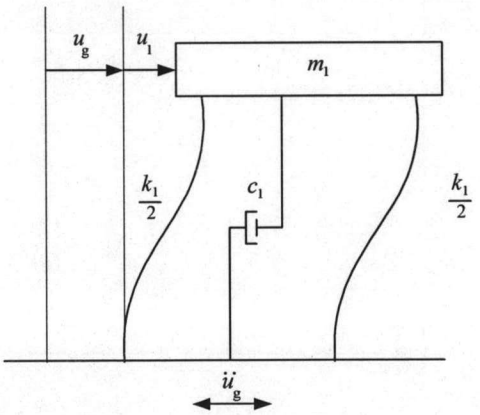
บทที่ 3
การวิเคราะห์โครงสร้างที่มีการติดตั้งระบบควบคุมการสั่นไหว

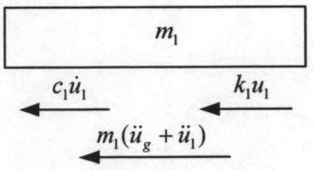
ระบบควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างที่ใช้งานในปัจจุบันมีหลายประเภท ในการศึกษานี้ทำการศึกษาระบบควบคุมการสั่นไหวแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีการติดตั้งระบบควบคุมการสั่นไหว เริ่มจากระบบควบคุมการสั่นไหวอย่างง่ายซึ่งได้แก่ระบบควบคุมการสั่นไหวแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ จนถึงระบบมวลหน่วงแบบแอกทีฟและระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟตามลำดับ และเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจจะกล่าวถึงโครงสร้างหลักที่มีดีกรีของความอิสระเท่ากับ 1

3.1 โครงสร้างที่ไม่มีการติดตั้งระบบควบคุมการสั่นไหว

โครงสร้างที่มีดีกรีของความอิสระเท่ากับ 1 ภายใต้แรงแผ่นดินไหว สามารถแสดงแบบจำลองอย่างง่ายดังรูปที่ 3.1 และสามารถแสดงรูปอิสระดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.1 โครงสร้างที่มีดีกรีของความอิสระเท่ากับ 1 ภายใต้แรงแผ่นดินไหว



รูปที่ 3.2 รูปอิสระของโครงสร้างที่มีดีกรีของความอิสระเท่ากับ 1

สมการการเคลื่อนที่ของทั้งโครงสร้างหลักสามารถหาได้จากรูปที่ 3.2 ซึ่งจะได้

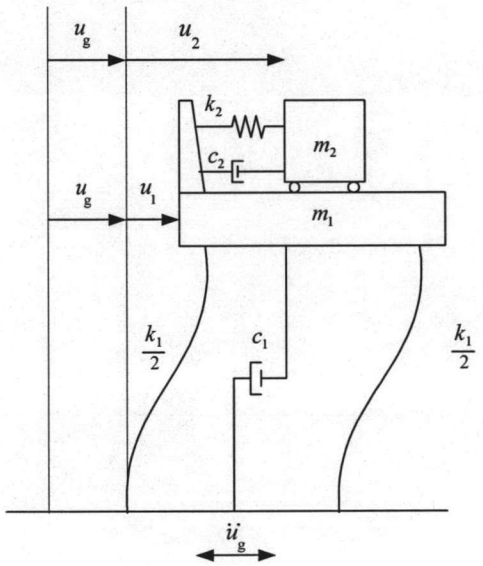
$$m_1(\ddot{u}_g + \ddot{u}_1) + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 = 0 \tag{3.1}$$

หรือสมการในรูปของเมตริกซ์

$$[m_1][\ddot{u}_1] + [c_1][\dot{u}_1] + [k_1][u_1] = [-m_1]\ddot{u}_g \tag{3.2}$$

3.2 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ (PTMD)

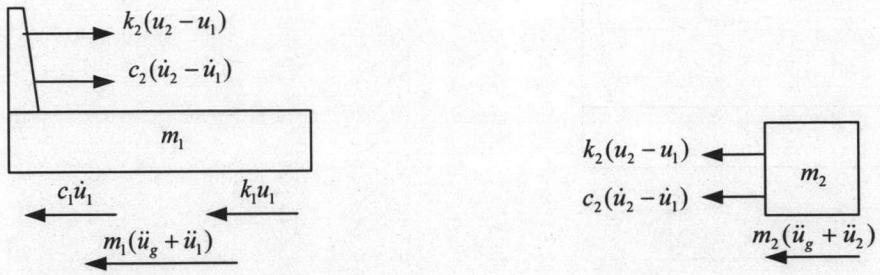
การควบคุมการสั่นไหวแบบแพสสีฟเป็นวิธีการที่มีการศึกษาและเป็นที่ยอมรับอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน โดยวิธีการดังกล่าวจะใช้ระบบมวลย่อยหรือที่เรียกว่า มวลหน่วง (Damper) เป็นตัวช่วยในการสลายพลังงานของโครงสร้าง โดยทั่วไปจะนำระบบมวลหน่วงไปติดตั้งที่ชั้นบนสุดของอาคาร แบบจำลองอย่างง่ายแสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ภาพแสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ

เมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นไหว พลังงานบางส่วนของโครงสร้างหลักจะถูกถ่ายทอดสู่ระบบมวลหน่วงซึ่งจะทำให้มวลหน่วงสั่น ซึ่งเป็นการทำให้พลังงานการสั่นของโครงสร้างหลักลดลง ระบบมวลหน่วงจึงถือว่าได้ช่วยลดพลังงานการสั่นของโครงสร้างหลักทำให้โครงสร้างหลักมีการสั่นน้อยลง

ขั้นตอนการวิเคราะห์ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ นี้สามารถทำได้โดยวิเคราะห์จากสมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบดังต่อไปนี้



(ก) แรงที่กระทำต่อโครงสร้างหลัก (ข) แรงที่กระทำต่อมวลหน่วง

รูปที่ 3.4 รูปอิสระของมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ

สมการการเคลื่อนที่ของทั้งโครงสร้างหลักและมวลหน่วงสามารถหาได้จากรูปที่ 3.4 รูปอิสระของโครงสร้างหลักและมวลหน่วง ซึ่งจะได้

$$m_1(\ddot{u}_g+\ddot{u}_1)+c_1\dot{u}_1+k_1u_1-c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1)-k_2(u_2-u_1)=0 \tag{3.3}$$

$$m_2(\ddot{u}_g+\ddot{u}_1)+c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1)+k_2(u_2-u_1)=0 \tag{3.4}$$

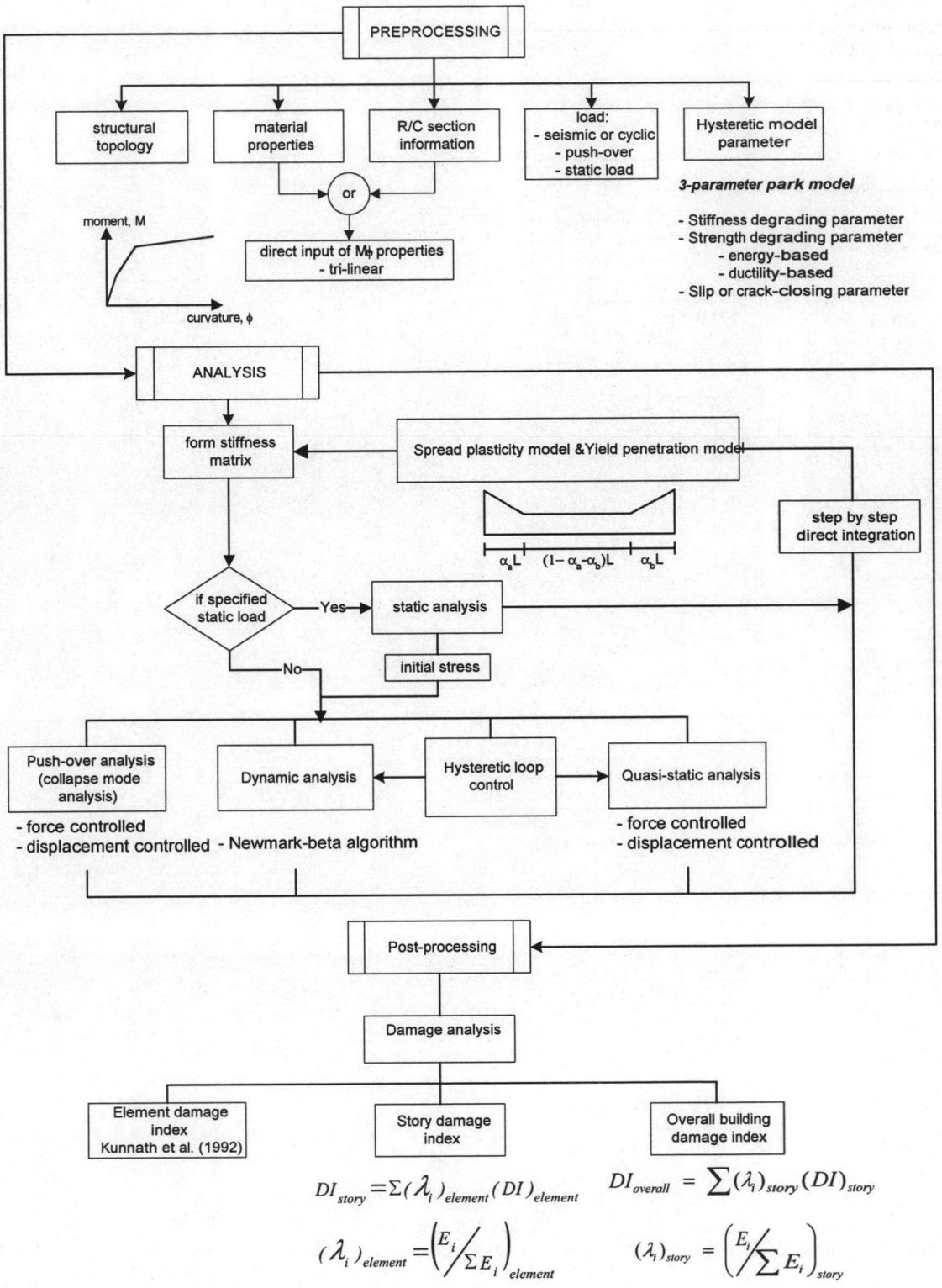
หรือสมการในรูปของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -m_1 \\ -m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g \tag{3.5}$$

ลำดับขั้นตอนของการวิเคราะห์โครงสร้างแบบพลศาสตร์ของโปรแกรม IDARC แสดงในรูปที่ 3.5 และลำดับขั้นที่ทำการปรับปรุงโปรแกรมแสดงดังในรูปที่ 3.6

การปรับปรุงโปรแกรม IDARC v5 เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างที่มีการติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟที่ชั้นบนสุดของอาคาร ทำโดยการเพิ่มดีกรีของความอิสระอีก 1 ดีกรี คือดีกรีของความอิสระที่มวลหน่วง ดังนั้นสมการที่เพิ่มขึ้นจากโครงสร้างที่ไม่มีการติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟสมการที่ 3.2 คือ

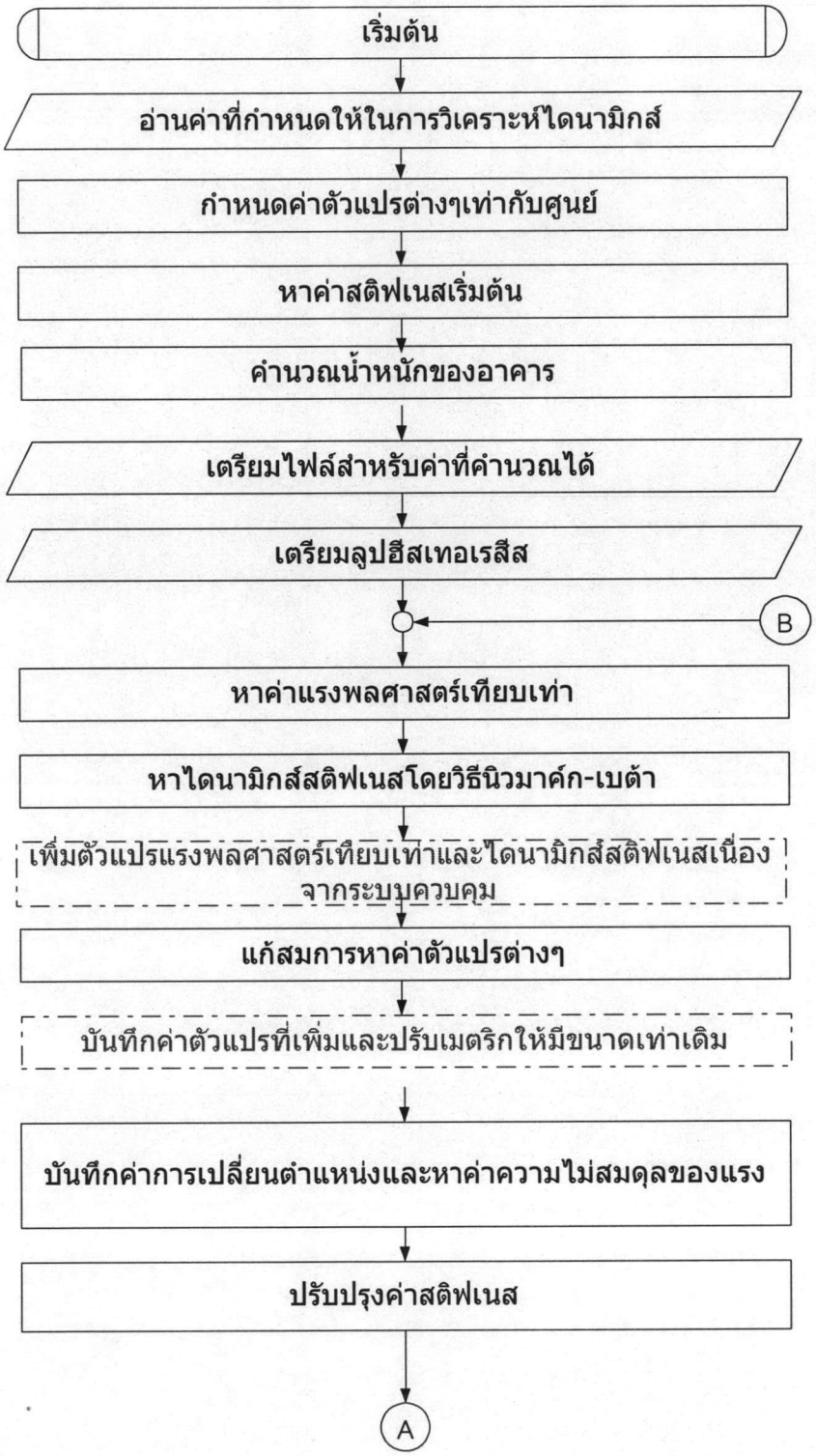
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g \tag{3.6}$$



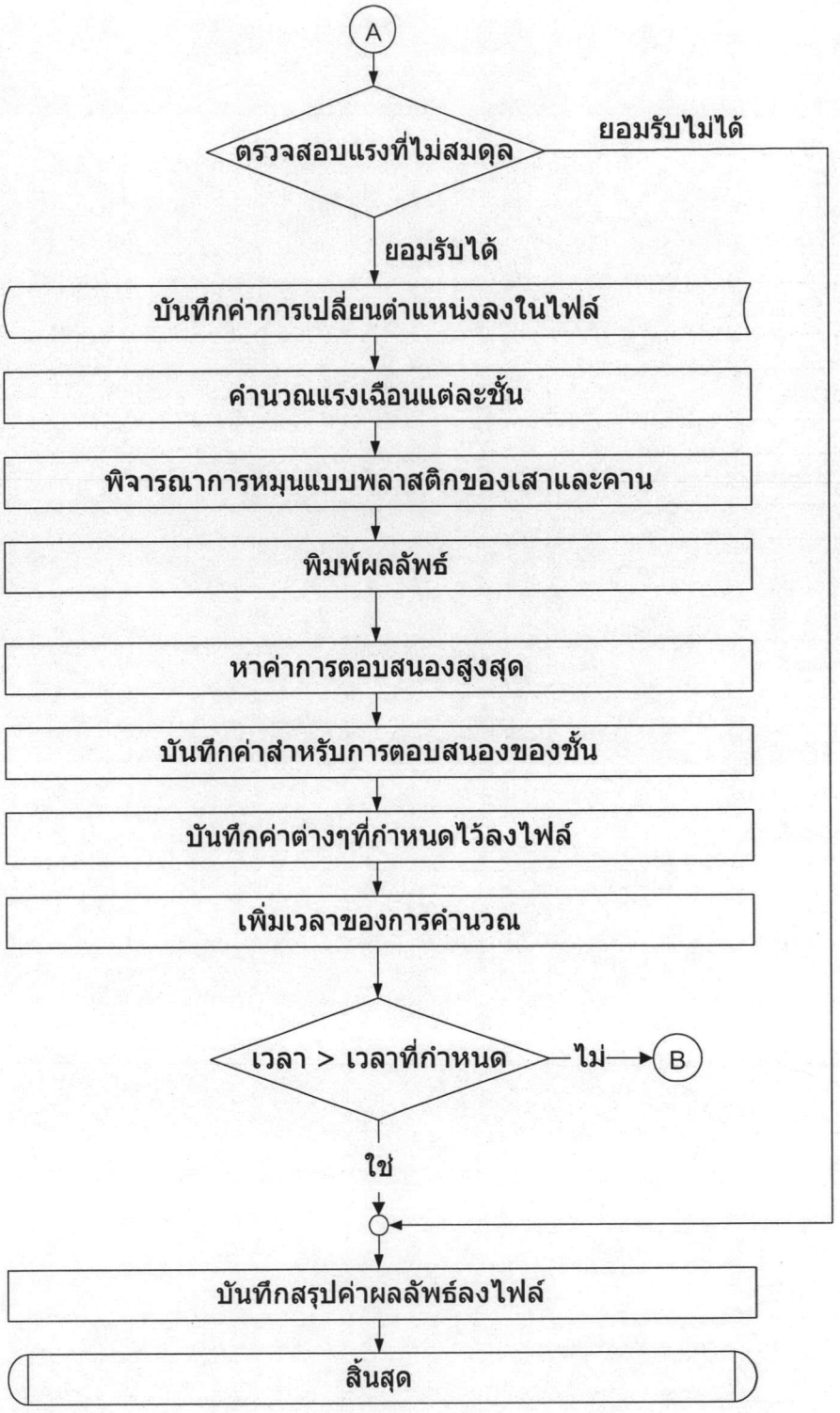
$$DI_{story} = \Sigma(\lambda_i)_{element}(DI)_{element} \qquad DI_{overall} = \sum(\lambda_i)_{story}(DI)_{story}$$

$$(\lambda_i)_{element} = \left(E_i \Big/ \Sigma E_i\right)_{element} \qquad (\lambda_i)_{story} = \left(E_i \Big/ \sum E_i\right)_{story}$$

รูปที่ 3.5 ลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์ของโปรแกรม IDARC



รูปที่ 3.6 ลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ของโปรแกรม IDARC



สัญลักษณ์

แสดงส่วนที่ปรับปรุงเพื่อการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีการติดตั้งระบบควบคุมการสั่นไหว

รูปที่ 3.6(ต่อ) ลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ของโปรแกรม IDARC

การแก้ปัญหาพลศาสตร์ของโครงสร้างในโปรแกรม IDARC2D ใช้วิธีนิวมาค์ก-เบต้า (Newmark–Beta) ซึ่งสมมติให้การเปลี่ยนแปลงความเร่งเป็นแบบเส้นตรงจะได้

$$\Delta\dot{u}_{t+\Delta t} = (1-\frac{\gamma}{\beta})\Delta t\ddot{u}_t - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_{t+\Delta t} \tag{3.7}$$

$$\Delta\ddot{u}_{t+\Delta t} = -\frac{1}{2\beta}\ddot{u}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_t + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_{t+\Delta t} \tag{3.8}$$

แทนสมการ 3.7 และ 3.8 ลงในสมการ 3.6 จากนั้นจัดรูปแบบให้อยู่ในรูปสมการที่ใช้ในโปรแกรม IDARC สมการที่ 3.9

$$[\boldsymbol{K_D}]\{\boldsymbol{\Delta u}\}_{t+\Delta t} = \{\boldsymbol{\Delta F_D}\} \tag{3.9}$$

จะได้ค่าไดนามิกส์สติฟเนสและค่าแรงพลศาสตร์เทียบเท่าที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ คือ

$$[\boldsymbol{K_D}] = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2 + k_2 & -\frac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2 - k_2 \\ -\frac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2 - k_2 & \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m_2 + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2 + k_2 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\{\boldsymbol{\Delta F_D}\} = \begin{Bmatrix} F' \\ -m_2\left(\Delta\ddot{u}_g + \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_{t,2} + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_{t,2}\right) + F' \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

โดยที่

$$F' = (\frac{\gamma}{2\beta} - 1)\Delta t\, c_2(\ddot{u}_{t,1} - \ddot{u}_{t,2}) + \frac{\gamma}{\beta}c_2(\dot{u}_{t,1} - \dot{u}_{t,2})$$

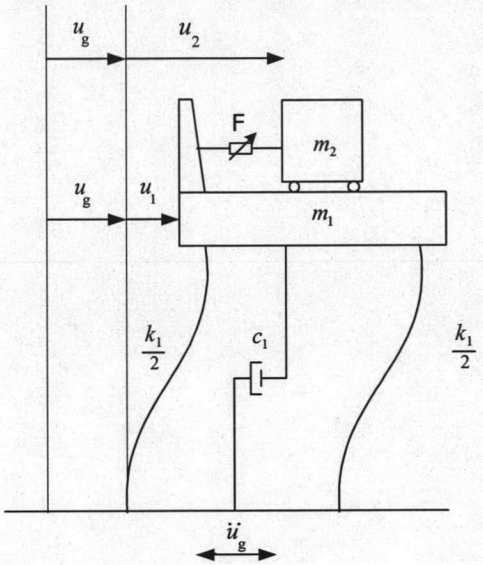
$$\{\boldsymbol{\Delta u}\}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix}_{t+\Delta t}$$

$u_{t,1}$ คือ ระยะการเคลื่อนที่ของดีกรีความอิสระที่ 1 เทียบกับฐาน เมื่อเวลา t

$u_{t,2}$ คือ ระยะการเคลื่อนที่ของดีกรีความอิสระที่ 2 เทียบกับฐาน เมื่อเวลา t

3.3 ระบบมวลหน่วงแบบแอกทีฟ (AMD)

การควบคุมการสั่นไหวระบบมวลหน่วงแบบแอกทีฟเป็นวิธีการควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างหลัก โดยการให้แรงภายนอกกระทำแก่โครงสร้าง โดยทั่วไปจะนำระบบดังกล่าวไปติดตั้งที่ชั้นบนสุดของอาคาร แบบจำลองอย่างง่ายแสดงดังรูปที่ 3.7

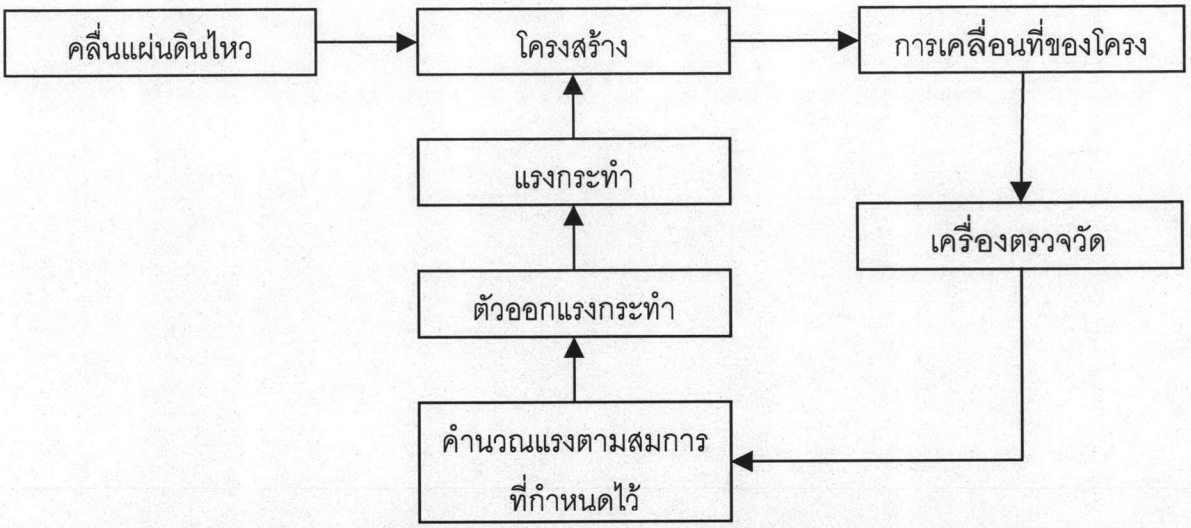


รูปที่ 3.7 แบบจำลองของระบบมวลหน่วงแบบแอกทีฟ

เมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นไหว ตัวออกแรงกระทำ (Actuator) จะออกแรงกระทำแก่โครงสร้างโดยที่แรงที่กระทำนี้มีผลต่อการสั่นของโครงสร้างโดยตรง ทั้งนี้การให้แรงดังกล่าวสามารถทำให้โครงสร้างมีค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนไปได้ทั้งด้านความถี่และความหน่วง การให้แรงที่เหมาะสมจะทำให้โครงสร้างมีการสั่นที่น้อยลงได้ โดยค่าแรงที่เหมาะสมนี้จะคำนวณจากสภาพการสั่นไหวของโครงสร้างในขณะนั้นๆด้วย แผนผังขั้นตอนการทำงานดังแสดงในรูปที่ 3.8

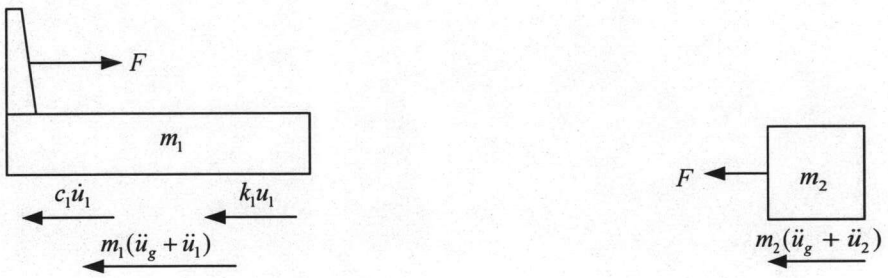
อุปกรณ์และขั้นตอนที่เป็นพื้นฐานของวิธีการแบบมวลหน่วงแบบแอกทีฟ นี้ได้แก่

1. เครื่องตรวจวัด (Sensor) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดการสั่นไหว (Response) ของโครงสร้าง
2. เครื่องมือที่รับสัญญาณการสั่นไหวมาจากเครื่องตรวจวัด (Sensor) แล้วคำนวณค่าของแรงที่เหมาะสมตามสมการที่กำหนดไว้
3. ตัวออกแรงกระทำ (Actuator) เป็นตัวที่ใช้สร้างแรงให้กระทำต่อโครงสร้างตามแรงที่คำนวณได้



รูปที่ 3.8 แผนผังขั้นตอนการทำงานในระบบมวลปรับค่าแบบแอกทีฟ

ขั้นตอนการวิเคราะห์ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ นี้สามารถทำได้โดยวิเคราะห์จากสมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบดังต่อไปนี้



(ก) แรงที่กระทำต่อโครงสร้างหลัก (ข) แรงที่กระทำต่อมวลหน่วง

รูปที่ 3.9 รูปอิสระของมวลหน่วงแบบแอกทีฟ

สมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลักและมวลหน่วงสามารถหาได้จากรูปที่ 3.9 รูปอิสระของโครงสร้างหลักและมวลหน่วง ซึ่งจะได้สมการในรูปของเมตริกซ์คือ

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -m_1 \\ -m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}F \qquad (3.10)$$

หรือ $$\boldsymbol{M\ddot{U}+C\dot{U}+KU=P} \qquad (3.11)$$

โดยที่ $$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

การปรับปรุงโปรแกรม IDARC เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างที่มีการติดตั้งมวลหน่วงแบบแอกทีฟที่ชั้นบนสุดของอาคาร ทำโดยการเพิ่มดีกรีของความอิสระอีก 1 ดีกรี คือดีกรีของความอิสระที่มวลหน่วง ดังนั้นสมการที่เพิ่มขึ้นจากโครงสร้างที่ไม่มีการติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟสมการ 3.2 คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}F \qquad (3.12)$$

จัดสมการเช่นเดียวกับมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ จะได้

$$[\boldsymbol{K}_D]=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}m_2 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

$$\{\boldsymbol{\Delta F}_D\}=\begin{Bmatrix} F \\ -m_2\left(\Delta\ddot{u}_g+\dfrac{1}{2\beta}\ddot{u}_{t,2}+\dfrac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_{t,2}\right)-F \end{Bmatrix} \qquad (3.14)$$

การหาค่าแรงที่กระทำโดยตัวออกแรง

อัลกอริทึมควบคุมที่ใช้ในมีหลายวิธีการ โดยแตกต่างกันไปตามเกณฑ์ที่พิจารณา วิธีการหลักที่ใช้กันอยู่ทั่วไปได้แก่ Linear optimal control, Pole assignment, Sliding mode control, Robust control เป็นต้น วิธีการที่แตกต่างกันเหล่านี้มีข้อดีและรายละเอียดแตกต่างกันไป แต่ในการศึกษานี้จะใช้วิธี Linear optimal control ซึ่งมีรายละเอียดในการคำนวณดังต่อไปนี้

พิจารณาโครงสร้างในช่วงอีลาสติกจะได้สมการการเคลื่อนที่ดังสมการที่ 3.11

$$\boldsymbol{M\ddot{U}+C\dot{U}+KU=P}$$

จากสมการที่ 3.11 สามารถจัดสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\ddot{U}+M^{-1}C\dot{U}+M^{-1}KU=M^{-1}P} \qquad (3.15)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{U}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{-M^{-1}K} & \boldsymbol{-M^{-1}C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \dot{\boldsymbol{U}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{M^{-1}P}\right] \qquad (3.16)$$

แทนค่า $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}$ และ $\boldsymbol{K}$ จากสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลัก 3.10 ลงในสมการที่ 3.16 จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 & -2\xi_1\omega_1 & 0 \\ \omega_1^2 & 0 & 2\xi_1\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{u}_g + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} F / m_1 \qquad (3.17)$$

โดยที่

ξ_1 คือ สัมประสิทธิ์ความหน่วงของโครงสร้างหลัก

ω_1 คือ ความถี่เชิงมุมของโครงสร้างหลัก

หรือ $$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{F} \qquad (3.18)$$

โดยที่ $$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

วิธี Linear optimal control การวิเคราะห์โครงสร้างจะเลือก เมตริกซ์คุณสมบัติ (performance index, J) เป็นพลังงานที่ที่ถ่ายเทเข้าสู่โครงสร้างเนื่องจากการเกิดการสั่นไหว และพลังงานที่ต้องให้เพื่อควบคุมการสั่นไหวที่เกิดขึ้นนับตั้งแต่เวลาที่เริ่มพิจารณา นั่นคือจะพยายามให้มีพลังงานการสั่นไหวของโครงสร้างน้อยที่สุดพร้อมๆกับใช้ที่พลังงานน้อยที่สุดในการควบคุมการสั่นไหว ดังนั้นค่าเมตริกซ์คุณสมบัติสามารถเขียนได้เป็น

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\boldsymbol{X}^T(t) \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}^T(t) \cdot R \cdot \boldsymbol{F}(t)] \; dt \qquad (3.19)$$

โดยที่

$\boldsymbol{Q}$ เป็นเมตริกซ์สำหรับการตอบสนองของโครงสร้าง

R เป็นเมตริกซ์สำหรับพลังงานที่ใช้ในควบคุมการสั่นไหว

t_0, t_f เป็นเวลาเริ่มต้นและเวลาสิ้นสุดการควบคุมการสั่นไหว

จากหลักการของวิธี Linear optimal control สามารถหาค่าของแรงควบคุม, $\boldsymbol{F(t)}$, ได้จากผลคูณของค่าการตอบสนองของโครงสร้าง (Responses, $\boldsymbol{X}$) กับ เมตริกซ์ที่ได้รับ (Gain matrix, $\boldsymbol{G}$) ดังสมการที่ 3.20 ดังนี้

$$F(t) = G \cdot U(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} \cdot B_u^{\ T} \cdot P \cdot U(t) \tag{3.20}$$

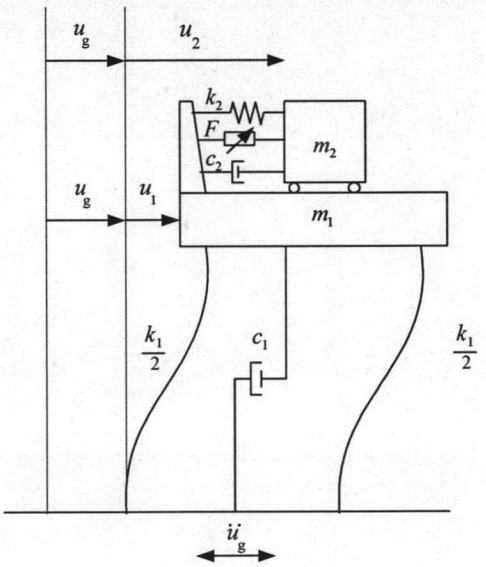
โดยที่เมตริกซ์ P เป็นเมตริกซ์คำตอบที่ได้จาก Riccati Equation ดังนี้

$$PA - \frac{1}{2} PB_u R^{-1} B_u^{\ T} P + A^T P + 2Q = 0 \tag{3.21}$$

แทนค่า A และ B จากสมการ 3.18 ลงในสมการ 3.20 - 3.21 จะได้แรงที่ใช้ในการควบคุม

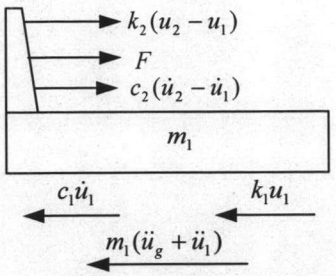
3.4 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ (ATMD)

การควบคุมการสั่นไหวระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟเป็นวิธีการควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างหลัก โดยการให้แรงภายนอกกระทำแก่โครงสร้าง โดยทั่วไปจะนำระบบดังกล่าวไปติดตั้งที่ชั้นบนสุดของอาคาร แบบจำลองอย่างง่ายแสดงดังรูปที่ 6

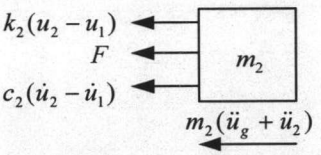


รูปที่ 3.10 ภาพแสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ

ขั้นตอนการวิเคราะห์ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ นี้สามารถทำได้โดยวิเคราะห์จากสมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบดังต่อไปนี้



(ก) แรงที่กระทำต่อโครงสร้างหลัก



(ข) แรงที่กระทำต่อมวลหน่วง

รูปที่ 3.11 รูปอิสระของมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ

สมการการเคลื่อนที่ของทั้งโครงสร้างหลักและมวลหน่วงสามารถหาได้จากรูปอิสระของโครงสร้างหลักและมวลหน่วง ซึ่งจะได้สมการในรูปของเมตริกซ์คือ

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -m_1 \\ -m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}F \tag{3.22}$$

หรือ
$$\boldsymbol{M\ddot{U}}+\boldsymbol{C\dot{U}}+\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{P} \tag{3.23}$$

โดยที่
$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

การปรับปรุงโปรแกรม IDARC เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างที่มีการติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟที่ชั้นบนสุดของอาคาร ทำโดยการเพิ่มดีกรีของความอิสระอีก 1 ดีกรี คือดีกรีของความอิสระที่มวลหน่วง ดังนั้นสมการที่เพิ่มขึ้นจากโครงสร้างที่ไม่มีการติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟสมการที่ 3.2 คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 \end{bmatrix}\ddot{u}_g+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}F \tag{3.24}$$

จัดสมการเช่นเดียวกับมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ จะได้

$$[\boldsymbol{K_D}]=\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2+k_2 & -\dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2-k_2 \\ -\dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2-k_2 & \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}m_2+\dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}c_2+k_2 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\{\Delta \boldsymbol{F}_D\} = \begin{Bmatrix} F' + F \\ -m_2 \Delta \ddot{u}_g + \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_t^{\,2} + \frac{1}{\beta \Delta t}\dot{u}_t^{\,2} + F' - F \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

การหาค่าแรงที่กระทำโดยตัวออกแรง

แทนค่า M , C และ K จากสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลัก 3.22 ลงในสมการที่ 3.16 จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & \mu\omega_2^2 & -2\xi_1\omega_1 & 2\mu\xi_2\omega_2 \\ \omega_1^2 & -(1+\mu)\omega_2^2 & 2\xi_1\omega_1 & -2(1+\mu)\xi_2\omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{u}_g + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -(1+\mu)/\mu \end{bmatrix} F / m_1 \tag{3.27}$$

โดยที่ $$\mu = \frac{m_2}{m_1}$$

ξ_1 คือ สัมประสิทธิ์ความหน่วงของโครงสร้างหลัก

ξ_2 คือ สัมประสิทธิ์ความหน่วงของมวลหน่วง

ω_1 คือ ความถี่เชิงมุมของโครงสร้างหลัก

ω_2 คือ ความถี่เชิงมุมของมวลหน่วง

หรือ $$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\ddot{u}_g + \boldsymbol{B}_u F \tag{3.28}$$

โดยที่ $$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

แทนค่า A และ B จากสมการ 3.28 ลงในสมการ 3.20 - 3.21 จะได้แรงที่ใช้ในการควบคุม