บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในงานวิจัย

การศึกษาวิธีการพยากรณ์เมื่อมีข้อมูลผิดปกติในอนุกรมเวลานี้ ได้แก่ เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลเมื่อประมาณค่าด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด และเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลเมื่อประมาณค่าด้วยวิธีการของฮูเบอร์ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีพยากรณ์แต่ละวิธี โดยมีรายละเอียดต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

วิธีพยากรณ์ที่ใช้ในการศึกษา

1. เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล

เนื่องจากเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้มี 2 แบบ คือ การทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวและซ้ำสองครั้ง ดังนั้นจะกล่าวถึงรายละเอียดของแต่ละแบบดังนี้

1.1 การทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว

เทคนิคนี้เหมาะสมกับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบระดับค่าเฉลี่ยไม่คงที่ตลอดช่วงเวลา T ที่พิจารณา (locally constant mean model)

$$Y_t = a + \varepsilon_t \qquad , t = 1,2,\ldots,T$$

โดยที่ a คือ ระดับค่าเฉลี่ยของข้อมูล ซึ่งมีค่าแปรเปลี่ยน ช้า ๆ ตามเวลา

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

การพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว จะมีการกำหนดน้ำหนัก (weights) ให้กับข้อมูลหรือค่าสังเกตในอดีตไม่เท่ากัน โดยจะให้น้ำหนักกับค่าสังเกตปัจจุบันมากกว่าค่าสังเกตที่ผ่านมา และวิธีการที่ใช้กำหนดน้ำหนัก คือ จากน้ำหนักทั้งหมด 1 จะกระจายให้กับค่าสังเกตในลักษณะที่ลดลงแบบเรขาคณิตหรือแบบเอกซโพเนนเชียล โดยเริ่มจากค่าสังเกตปัจจุบันจะมีมากที่สุดและลดลงเรื่อย ๆ สำหรับค่าสังเกตในอดีต

การหาค่าพยากรณ์สำหรับค่าสังเกตในอนาคตที่เวลา $T+\tau$ จะทำได้โดยจะประมาณค่า a โดยวิธีค่าต่ำสุดของผลรวมของกำลังสองของความคลาดเคลื่อนแบบลดลง (minimize discounted square error) คือ

หาค่าต่ำสุดของ $e(a)$ = หาค่าต่ำสุดของ $\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t}(Y_t - a)^2 \quad ; 0 < \beta < 1$

โดยที่ β^{T-t} คือ น้ำหนักที่กำหนดให้กับความคลาดเคลื่อนกำลังสอง ณ เวลาที่ t โดยจะมีค่าลดลงแบบเรขาคณิต เมื่อ t มากขึ้น

การประมาณค่า a เมื่อสิ้นเวลา T จะคำนวณได้จากสมการ

$$\left.\frac{\partial e(a)}{\partial a}\right|_{\hat{a}(T)} = -2 \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t}(Y_t - \hat{a}(T)) = 0$$

$$\hat{a}(T) \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} Y_t$$

$$\hat{a}(T) = \frac{(1-\beta)}{(1-\beta^T)} \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} Y_t$$

หรือ $$\hat{a}(T) = \frac{(1-\beta)Y_T + \beta(1-\beta^{T-1})\hat{a}(T-1)}{(1-\beta^T)} \qquad \text{...(2.1)}$$

เมื่อ T มีขนาดใหญ่จะได้ว่า $\beta^T \approx 0$ ดังนั้นสมการ (2.1) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{a}(T) = (1-\beta)Y_T + \beta\hat{a}(T-1)$$

ให้ $\alpha = 1-\beta$ และ $S_T = \hat{a}(T)$ จะได้ว่า

$$S_T = \alpha Y_T + (1-\alpha) S_{T-1} \qquad ...(2.2)$$

S_T คือ ค่าประมาณของระดับค่าเฉลี่ย a ณ เวลา T

α คือ ค่าคงที่ปรับให้เรียบ (Smoothing constant) , $0 < \alpha < 1$

สำหรับการพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวนี้ จะใช้สมการ (2.2) โดยค่า S_T จะเป็นค่าพยากรณ์ของข้อมูลในอนาคตทุกค่าดังนี้

$$\hat{Y}_T(\tau) = S_T = \alpha Y_T + (1-\alpha) S_{T-1} \quad ; \tau = 1,2,... \qquad ...(2.3)$$

$\hat{Y}_T(\tau)$ คือค่าพยากรณ์ล่วงหน้า τ คาบเวลาจากเวลา $t = T$

จากสมการที่ (2.3) จะพบว่าการคำนวณหาค่า S_T ที่ $T = 1$ จะต้องทราบค่า S_0 หรือค่าเริ่มต้นของการทำให้เรียบ (initial smooth value) เพราะว่า $S_1 = \alpha Y_1 + (1-\alpha) S_0$ ดังนั้นจะต้องทำการกำหนดค่าเริ่มต้น S_0 ก่อนจึงจะทำการพยากรณ์ต่อไปได้ การกำหนดค่าเริ่มต้น S_0 สามารถทำได้หลายวิธีเช่น ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่มีอยู่ $Y_1, Y_2, ..., Y_T$ (Brown, 1963, and Montgomory and Johnson, 1976, Quoted in Abraham and Ledolter, 1983) ซึ่งการกำหนดค่าเริ่มต้นด้วยวิธีนี้จะใช้ได้ดีถ้าระดับค่าเฉลี่ย (mean level) ของข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ หรือใช้ข้อมูลตัวแรกเป็นตัวเริ่มต้น (Markridakis and Whellwright, 1978) ถ้าระดับค่าเฉลี่ยของข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว สำหรับในการศึกษาครั้งนี้จะใช้การกำหนดค่าเริ่มต้นด้วยการใช้ค่าเฉลี่ย นอกจากจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นในการทำให้เรียบแล้ว ยังต้องกำหนดค่าคงที่ปรับให้เรียบ α ซึ่งอาจพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงระดับค่าเฉลี่ยของข้อมูลว่ามีการเปลี่ยนแปลงช้าหรือเร็วอย่างไร ถ้าระดับของข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ค่า α จะมีค่าเล็กเข้าใกล้ศูนย์ แต่ถ้าระดับค่าเฉลี่ยของข้อมูลเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว α ควรมีค่าใหญ่เข้าใกล้ 1 ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปจะเลือกค่า α ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0.01 ถึง 0.3 (Bowerman and O'Connell,1979) หรืออาจจะเลือก α จากการสร้างค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา โดยใช้ค่า α ต่าง ๆ กัน แล้วเลือกค่า α ที่ให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุดไปใช้ในการพยากรณ์ต่อไปสำหรับการวิจัยครั้งนี้จะเลือกใช้ α ที่ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด โดย

จะเริ่มค่า α จาก 0.01 ถึง 0.99 ด้วยค่าเพิ่ม 0.01

1.2 การทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง

เป็นเทคนิคที่เหมาะสมกับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มเชิงเส้นไม่คงที่ตลอดช่วงเวลา T ที่พิจารณา (locally constant linear trend model)

$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t \qquad , t = 1,2,\ldots,T$$

โดยที่ a คือ ระดับเฉลี่ยของข้อมูล ซึ่งค่าแปรเปลี่ยนช้า ๆ ตามเวลา

b คือ ความชันหรือองค์ประกอบเ ชิงเส้น ซึ่งค่าแปรเปลี่ยนช้าๆ ตามเวลา

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง จะคำนวณหาค่าของการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล 2 อันดับคือ ค่าของการทำให้เรียบอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง ($S_t^{(1)}$ และ $S_t^{(2)}$) โดยที่ $S_t^{(1)} = S_t$ ซึ่งถูกกำหนดจาก

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}$$

และ $S_t^{(2)}$ ถูกกำหนดเป็น

$$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} - (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)} \quad , \; t = 1,2,\ldots,T \qquad \ldots(2.4)$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a และ b อยู่ในรูปแบบอนุกรมเวลา สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันของค่าของการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลทั้งสองอันดับดังนี้

$$a_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \qquad \ldots(2.5)$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \qquad \ldots(2.6)$$

สมการพยากรณ์สำหรับค่าพยากรณ์ล่วงหน้า τ คาบเวลาจากข้อมูล T ค่าโดยใช้เทคนิคการ

ทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งนี้คำนวณได้จากสูตร

$$\hat{Y}_T(\tau) = \hat{a}_T + \hat{b}_T\tau \qquad ...(2.7)$$

$$= \left(2 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right) S_T^{(1)} - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right) S_T^{(2)}$$

การหาค่าพยากรณ์จากสมการข้างต้น จะต้องทราบ(1) ค่า α และ (2) ค่าของการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลที่เวลาปัจจุบัน (t=T) ; $S_T^{(1)}$ และ $S_T^{(2)}$ ซึ่งค่าดังกล่าวได้จากเวลาที่ t=1 ไปจนกระทั่ง t=T จึงจะได้ค่า $S_T^{(1)}$ และ $S_T^{(2)}$ เนื่องจากที่เวลา t=1 จะต้องกำหนดค่าเริ่มต้น $S_0^{(1)}$ และ $S_0^{(2)}$ จึงจะเริ่มทำการคำนวณได้ซึ่งทำได้หลายวิธี กรณีที่ง่ายที่สุดคือใช้ข้อมูลแรกประมาณค่า $S_0^{(1)}$ และ $S_0^{(2)}$ หรืออาจจะพิจารณาจากตัวแบบของการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ซึ่งประกอบด้วยสองสมการต่อไปนี้

$$S_0^{(1)} = a_0 - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} b_0 \qquad ...(2.8)$$

$$S_0^{(2)} = a_0 - 2\frac{(1-\alpha)}{\alpha} b_0 \qquad ...(2.9)$$

จากสมการ 2.8 และ 2.9 การประมาณค่าเริ่มต้น $S_0^{(1)}$ และ $S_0^{(2)}$ ได้จะต้องทราบค่า a_0 และ b_0 เนื่องจากตัวแบบในการพยากรณ์โดยการใช้การทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งเป็นตัวแบบในเชิงเส้นในลักษณะปรับรูปตามเวลา ดังนั้นอาจจะกำหนดค่า a_0 และ b_0 ได้โดยนำข้อมูลทั้งหมดมาหาค่ากำลังสองน้อยที่สุด เมื่อเทียบกับตัวแบบเชิงเส้น จะได้ว่า

$$b_0 = \frac{T\sum_{t=1}^{T} tY_t - \sum_{t=1}^{T} Y_t \sum_{t=1}^{T} t}{T\left[\sum_{t=1}^{T} t^2\right] - \left[\sum_{t=1}^{T} t\right]^2}$$

$$a_0 = \left[\frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{T}\right] - b_0\left[\frac{\sum_{t=1}^{T} t}{T}\right]$$

เมื่อ t คือ เวลาข้อมูล

Y_t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลาที่ t ; t = 1,...,T

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ $S_0^{(1)}$ และ $S_0^{(2)}$ จะคำนวณโดยใช้สมการที่ 2.8 และ 2.9 ตามลำดับ และหาค่าเริ่มต้น a_0 และ b_0 จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งนี้ นอกจากจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นแล้วจะต้องกำหนดค่าคงที่ปรับให้เรียบ α ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะใช้ค่า α ที่ได้จากการสร้างความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา ณ เวลาต่าง ๆ แล้วเลือกค่า α ที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด โดยเริ่มค่า α จาก 0.01 ถึง 0.99 ด้วยค่าเพิ่ม 0.01

2. <u>เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลเมื่อประมาณค่าโดยใช้วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด</u>

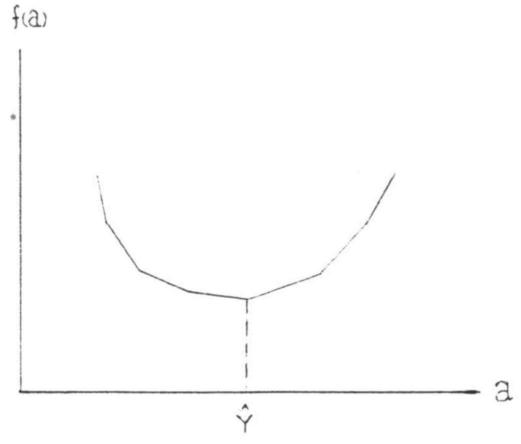
2.1 การทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวเมื่อประมาณค่าด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด

การหาค่าพยากรณ์หรือประมาณค่า a ที่เหมาะสมด้วยวิธีการทำให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนแบบลดลงมีค่าต่ำสุด (minimize discounted absolute error) จะพิจารณาดังต่อไปนี้ จาก

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} |Y_t - a| \qquad \text{...(2.10)}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ a ,f(a), โดยที่ β คือค่าน้ำหนักที่กำหนดให้กับค่าสัมบูรณ์ความคลาดเคลื่อน และให้ $Y_{i_1(t)} \leq Y_{i_2(t)} \leq \dots \leq Y_{i_T(t)}$ เป็นค่าของอนุกรมเวลา $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ ที่ถูกเรียงลำดับ

โดย $i_1(t)$, $i_2(t)$,..., $i_r(t)$ เป็นค่าของคาบเวลาของข้อมูลที่ถูกเรียงลำดับแล้ว จะพบว่า f(a) เป็นฟังก์ชันนูน ดังภาพ



รูปที่ 2.1 แสดงค่า a ที่เหมาะสมที่ให้ค่าผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนแบบลดลงมีค่าต่ำสุด ,f(a)

โดยความชันของเส้นตรงที่มาประกอบกันในแต่ละจุดที่ $a = Y_{i_k(t)}$ นั้นจะเปลี่ยนแปลงเท่ากับ $2\beta^{T-i_k(t)}$ และเมื่อพิจารณาความชันของเส้นตรงทางด้านซ้ายสุด ($a \leq Y_{i_1(t)}$) และทางด้านขวาสุด ($a \geq Y_{i_T(t)}$) จะได้ว่ามีความชันเท่ากับ $-\sum_{t=1}^{T}\beta^{T-t}$ และ $+\sum_{t=1}^{T}\beta^{T-t}$ หรือ $-\frac{(1-\beta^T)}{(1-\beta)}$ และ $+\frac{(1-\beta^T)}{(1-\beta)}$ ตามลำดับ ดังนั้นค่าพยากรณ์ที่เหมาะสม a(t) ที่ให้ค่า f(a) ต่ำสุดคือค่าของ $Y_{i_r(t)}$ ที่คาบเวลา $i_r(t)$ ซึ่งเป็นตำแหน่งคาบเวลาที่จะทำให้ความชันเปลี่ยนเครื่องหมายจากลบไปเป็นบวกหรือสอดคล้องกับอสมการ 2.11

$$-\frac{(1-\beta^T)}{(1-\beta)} + 2\sum_{k=1}^{r-1}\beta^{T-i_k(t)} < 0$$

$$-\frac{(1-\beta^T)}{(1-\beta)} + 2\sum_{k=1}^{r}\beta^{T-i_k(t)} \geq 0 \qquad \ldots(2.11)$$

ดังนั้น ค่าพยากรณ์สำหรับข้อมูลที่มีลักษณะคงที่นี้คือ ค่าพยากรณ์ $\hat{Y}_t = \hat{Y}_{t+\tau}(t) = Y_{i_r(t)}$; $\tau > 0$

ในกรณีค่าทางซ้ายมือของอสมการที่ 2 ใน 2.12 มีค่าเท่ากับ 0 จะได้ว่าค่าพยากรณ์ที่เหมาะสมคือ $Y_t = Y_{t+\tau}(t) \in (Y_r(t), Y_{i_{r+1}}(t))$

การพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียวเมื่อประมาณค่าด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดนี้ จะต้องกำหนดค่าคงที่ β ซึ่งใช้ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้ค่า β ที่ได้จากการสร้างความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา ณ เวลาต่าง ๆ แล้วทำการเลือกค่า β ที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดจากเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลครั้งเดียว โดยเริ่มค่า β จาก 0.01 ถึง 0.99 ด้วยค่าเพิ่ม 0.01

2.2 การทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งเมื่อประมาณค่าด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด

จากผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนแบบลดลง

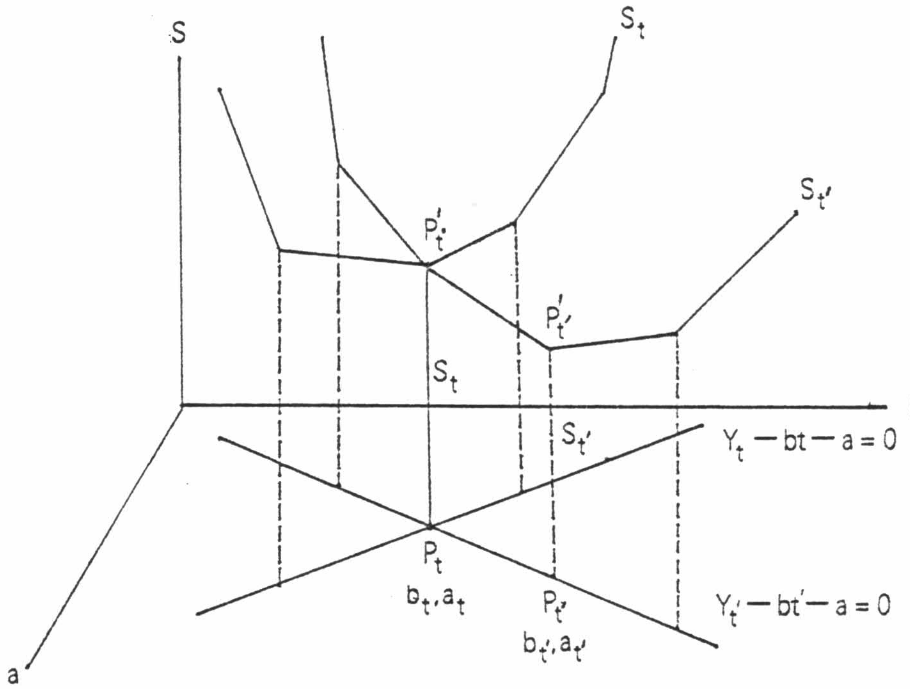
$$S = \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} \left| Y_t - a - bt \right| \qquad \ldots(2.12)$$

เมื่อ β คือค่าน้ำหนักที่กำหนดให้กับค่าสัมบูรณ์ความคลาดเคลื่อน และการประมาณค่า a และ b โดยวิธีการทำให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนแบบลดลงมีค่าต่ำสุดนี้จะอาศัยกระบวนการทำซ้ำ (iterative procedure) เพื่อหาจุด (t, Y_t) และ $(t', Y_{t'})$ ที่เหมาะสมซึ่งเป็นคู่อันดับในอนุกรมเวลาที่จะให้ค่าประมาณของ a และ b ที่ทำให้ค่าของ S มีค่าต่ำสุด ดังรูปที่ 2.2

คารส์ท (Karst, 1958) ได้เสนอกระบวนการทำซ้ำเพื่อหาคู่อันดับ 2 คู่ที่เหมาะสม ซึ่งจะให้ค่าประมาณ a และ b ที่จะนำไปใช้ในการพยากรณ์สามารถสรุปวิธีการได้ดังนี้

1. หาเส้นตรงที่มีสมการ $Y = a^{(1)} + b^{(1)}t$ โดยกำหนดให้ผ่านจุด $(j^{(1)}, Y_{j^{(1)}})$ ในครั้งแรก เมื่อแทนลงใน $\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} \left| Y_t - a - bt \right|$ จะได้ว่า

$$\sum_{t \neq j}^{T} \beta^{T-t} \left| Y_t - Y_{j^{(1)}} - b^{(1)}(t - j^{(1)}) \right| = \sum_{t \neq j}^{T} \beta^{T-t} \left| t - j^{(1)} \right| \left| \frac{Y_t - Y_{j^{(1)}}}{(t - j^{(1)})} - b^{(1)} \right|$$



รูปที่ 2.2 แสดง (S_p, b_p, a_p) ที่เหมาะสมที่ได้จากคู่อันดับ (t, Y_t) และ $(t', Y_{t'})$

ให้ $Z_t^* = \dfrac{(Y_t - Y_{j^{(1)}})}{(t - j^{(1)})}$ เมื่อ $t = 1,2,\ldots,(j^{(1)}-1),(j^{(1)}+1),\ldots T$ และ $Z^*_{t_1} \le Z^*_{t_2} \le \ldots \le Z^*_{t_T}$ เป็นค่าที่เรียงลำดับของ $Z_1^*,\ldots,Z^*_{j^{(1)}-1}, Z^*_{j^{(1)}+1},\ldots,Z_T^*$ โดยที่ $t_1,\ldots,t_T$ เป็นค่าของเวลาที่ถูกเรียงลำดับตามค่าของ Z_t^* ดังนั้นจะได้ $b^{(1)} = Z^*_{t_r}$ เมื่อมี t_r ที่เป็นไปตามเงื่อนไข 2.13

$$-\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t}\left|t-j^{(1)}\right| + 2\sum_{k\neq j}^{r-1} \beta^{T-t_k}\left|t_k-j^{(1)}\right| < 0$$
$$-\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t}\left|t-j^{(1)}\right| + 2\sum_{k\neq j}^{r} \beta^{T-t_k}\left|t_k-j^{(1)}\right| \geq 0 \qquad \ldots(2.13)$$

ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรงในรอบแรก โดยที่ $a^{(1)} = Y_{j^{(1)}} - b^{(1)}j^{(1)}$ และเส้นตรงจะผ่านจุดอย่างน้อย 1 จุดใน $(1, Y_1), \ldots, (j^{(1)} - 1, Y_{j^{(1)}-1}), (j^{(1)} + 1, Y_{j^{(1)}+1}), \ldots, (T, Y_T)$ ให้จุดที่ผ่านคือ $(j^{(2)}, Y_{j^{(2)}})$

2. หาเส้นตรง $Y = a^{(2)} + b^{(2)}t$ โดยผ่านจุด $(j^{(2)}, Y_{j^{(2)}})$ ด้วยวิธีการเดียวกันกับข้อ 1 ดังนั้นเส้นตรงนี้จะผ่านจุดอย่างน้อย 1 จุดในคู่อันดับ $(1, Y_1), \ldots, (j^{(1)} - 1, Y_{j^{(2)}-1})$, $(j^{(1)} + 1, Y_{j^{(1)}+1}), \ldots, (T, Y_T)$ ให้จุดที่ผ่านใหม่คือ $(j^{(3)}, Y_{j^{(3)}})$

3. กระทำซ้ำจนกระทั่งได้เส้นตรงที่ดีที่สุดเมื่อเส้นตรงนั้นผ่านจุด $(j^{(k-1)}, Y_{j^{(k-1)}})$ และ $(j^{(k)}, Y_{j^{(k)}})$ ดังนั้นเส้นตรง $Y = a^{(k)} + b^{(k)}t$ จะเป็นสมการที่ใช้ในการพยากรณ์เมื่อกำหนด t

การพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้งเมื่อประมาณค่าด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดนี้ จะต้องกำหนดค่าคงที่ β ซึ่งใช้ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้ค่า β ที่ได้จากการสร้างความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา ณ เวลาต่าง ๆ แล้วทำการเลือกค่า β ที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดจากเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง โดยเริ่มค่า β จาก 0.01 ถึง 0.99 ด้วยค่าเพิ่ม 0.01

3. <u>เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียลเมื่อใช้วิธีการของฮูเบอร์</u>

พี.เจ. ฮูเบอร์ (P.J.Huber, 1964) ได้ศึกษาถึงตัวประมาณที่แกร่ง ซึ่งเรียกว่าตัวประมาณชนิด M (M-estimator) ซึ่งอยู่ในรูปของค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันของค่าผิดพลาด ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ} \quad \sum_{t=1}^{T} \rho\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma}\right) = \text{หาค่าต่ำสุดของ} \quad \sum_{t=1}^{T} \rho\left(\frac{Y_t - Z(t)'a}{\sigma}\right)$$

และจะประมาณค่าพารามิเตอร์ของค่าน้อยที่สุดของ $\sum_{t=1}^{T}\rho(\frac{\varepsilon_t}{\sigma})$ เมื่อ ε_t เป็นค่าผิดพลาดของคาบเวลาที่ t และ σ เป็นตัวประมาณที่เหมาะสมของการกระจายของตัวอย่างของ ε_t

จากรูปแบบของข้อมูลอนุกรมเวลา

$$Y_t = a + \varepsilon_t \qquad ; t = 1,2,\ldots,T$$

โดยที่ a คือ ระดับค่าเฉลี่ยของข้อมูล ซึ่งมีค่าแปรเปลี่ยนช้า ๆ ตามเวลา

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

และรูปแบบข้อมูลอนุกรมเวลา

$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t \qquad ; t = 1,2,\ldots,T$$

โดยที่ a คือ ระดับค่าเฉลี่ยของข้อมูล ซึ่งค่าแปรเปลี่ยนช้า ๆ ตามเวลา

b คือ ความชันหรือองค์ประกอบเชิงเส้น

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้คือ

$$Y_t = z(t)'a + \varepsilon_t \qquad ; t = 1,2,\ldots,T$$

โดยที่ Y_t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลาที่เวลา t ; t = 1,...,T

z(t) คือ เวกเตอร์ $(z_0(t),\ldots,z_m(t))'$ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ในตัวแบบ โดยจะเป็นเวกเตอร์ (1)' เมื่อเป็นตัวแบบของข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวลักษณะระดับค่าเฉลี่ย และ (1,t)' เมื่อเป็นตัวแบบข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวแนวโน้มเส้นตรง เมื่อ t = 1,...,T

a คือ เวกเตอร์ของ $(a_0,\ldots,a_m)'$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของตัวแบบโดยจะเป็น (a)' สำหรับตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวระดับค่าเฉลี่ยและ (a,b)' สำหรับตัวแบบเชิงเส้นเมื่อ t = 1,...,T

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่เวลา t

จากรูปแบบข้างต้นสามารถหาตัวประมาณชนิด M จาก

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ} \sum_{t=1}^{T} \rho\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma}\right) = \text{หาค่าต่ำสุดของ} \sum_{t=1}^{T} \rho\left(\frac{Y_t - Z(t)'a}{\sigma}\right) \quad \text{...(2.14)}$$

จาก ρ เป็นฟังก์ชันความผิดพลาดที่เหมาะสมที่ถูกเลือกขึ้นมา และ σ คือค่าประมาณสเกลของความคลาดเคลื่อนของ ε_t

ในการหาค่าต่ำสุดตาม 2.14 กระทำได้โดยหาอนุพันธ์ของ ρ เทียบกับ a แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 โดยให้ $\Psi = \rho'$

ดังนั้นเมื่อนำมาประยุกต์ใช้ในเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล จะได้ว่าตัวประมาณ $\underset{\sim}{a}$ ณ เวลา t ที่เหมาะสมจะหาได้จาก

$$\text{การหาค่าต่ำสุดของ} \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} \rho\left(\frac{Y_t - Z(t)'a(t)}{\sigma}\right) \quad \text{...(2.15)}$$

โดยหาอนุพันธ์เทียบกับ a แล้วให้เท่ากับ 0 จะได้ว่า

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} \sigma \frac{\psi(Y_t - Z(t)'a(t) / \sigma)}{Y_t - Z(t)'a(t)} z(t)\ (Y_t - Z(t)'a(t)) = 0$$

โดยที่ $\psi = \rho$

$$\underset{\sim}{\hat{a}(t)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} w_t(t-1) z(t) Y_t}{\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} w_t(t-1) z(t) z(t)'}$$

และเขียนอยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนบังเกิดได้ดังนี้

$$\hat{\underset{\sim}{a}}(t) = \hat{\underset{\sim}{a}}(t-1) + \frac{M(t-1)z(t)}{\beta/w_t(t-1) + z(t)'M(t-1)z(t)} \cdot r_t(t-1) \quad ; t = 1,\ldots,T \qquad \ldots(2.16)$$

ซึ่ง

$$M(t) = \frac{1}{\beta}\left(M(t-1) - \frac{M(t-1)z(t)z(t)'M(t-1)'}{\beta/w_t(t-1) + z(t)'M(t-1)z(t)}\right)$$

$$w_t(t-1) = \hat{\sigma}(t-1)\,\psi(r_t(t-1)/\hat{\sigma}(t-1))/r_t(t-1)$$

$$r_t(t-1) = Y_t - z(t)'\hat{\underset{\sim}{a}}(t-1)$$

$$\hat{\sigma}(t) = (1-\beta)\,|r_t(t-1)| + \beta\,\hat{\sigma}(t-1)$$

$\Psi(x) = \rho'(x)$ เป็นเกณฑ์ความแกร่ง โดยใช้ในการศึกษานี้จะเลือกใช้เกณฑ์ความแกร่งของฮูเบอร์ โดยมีรูปแบบฟังก์ชันความผิดพลาดคือ

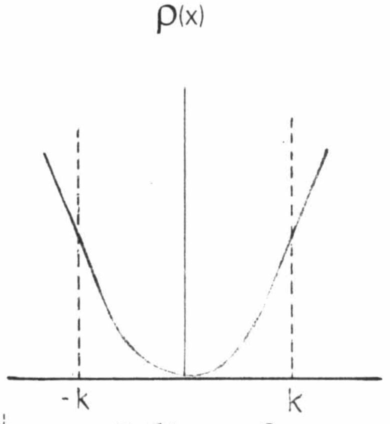
$$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2 & |x| < k \\ k|x| - k^2/2 & |x| > k \end{cases}$$

และรูปแบบเกณฑ์ความแกร่งคือ

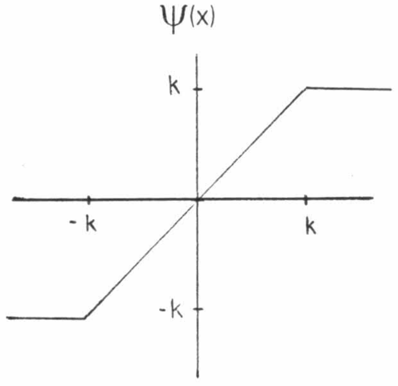
$$\Psi(x) = \begin{cases} k & x < -k \\ x & -k \le x \le k \\ k & k < x \end{cases}$$

ในที่นี้กำหนดค่า k ซึ่งเป็นขอบเขตของความผิดพลาดเท่ากับ 1.645 (Tomas Cipra, 1992)

สำหรับค่าเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด และค่าคงที่ β ซึ่งใช้ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้ค่า β ที่ได้จากการสร้างความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา ณ เวลาต่าง ๆ แล้วทำการเลือกค่า β ที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำสุดซึ่งได้จากเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซโพเนนเชียล โดยเริ่มค่า β จาก 0.01 ถึง 0.99 ด้วยค่าเพิ่ม 0.01



รูปที่ 1 แสดงฟังก์ชันความผิดพลาด ρ(x)



รูปที่ 2 แสดงฟังก์ชันของ ψ(x)

เกณฑ์ในการเปรียบเทียบความสามารถของวิธีพยากรณ์

การเปรียบเทียบจะพิจารณาจากรากที่สองของค่าเฉลี่ย ความคลาดเคลื่อนกำลังสองระหว่างค่าพยากรณ์กับค่าจริง (Root Mean Square Error: RMSE) เฉลี่ย 12 คาบเวลา สำหรับค่า RMSE ที่เกิดจากการพยากรณ์ ณ คาบเวลา t ($RMSE_t$) คำนวณได้จาก

$$RMSE_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{500} \frac{(Y_{ti} - \hat{Y}_{ti})^2}{500}} \quad ; \; t = T+1, \ldots, T+12$$

โดยที่ Y_{ti} คือ ค่าสังเกต ณ เวลา t ในการทำซ้ำรอบที่ i

$\hat{Y}_{ti}$ คือ ค่าพยากรณ์ ณ เวลา t ในการทำซ้ำรอบที่ i

i คือ จำนวนรอบของการทำซ้ำ ; i = 1,2,....500

t คือ คาบเวลาของการพยากรณ์