

ทฤษฎีบทลิมิตสำหรับผลบวกสุมของตัวแปรสุ่มอิสระที่มีค่าความแปรปรวนจำกัด

นายกฤษณะ เนียมมณี



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2536

ISBN 974-582-817-3

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

019278

๑๑๑๑๐๑๕๕๕

A LIMIT THEOREM FOR RANDOM SUMS OF  
INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH FINITE VARIANCES

Mr. Kritsana Neammanee

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Doctor of Philosophy

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1993

ISBN 974-582-817-3

Thesis Title     **A limit theorem for random sums of independent  
                              random variables with finite variances**

By                 **Mr. Kritsana Neammanee**

Department     **Mathematics**

Thesis Advisor   **Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.**

---



Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in  
Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of  
Philosophy.

*Thavorn Vajrabhaya*  
..... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Commitee

*Subha Sutchritpongsa*  
..... Chairman

(Associate Professor Subha Sutchritpongsa Ph.D.)

*Virool Boonyasombat*  
..... Thesis Advisor

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

*Yati Krisnangkura*  
..... Member

(Dr. Yati Krisnangkura)

*Sompong Dhompongsa*  
..... Member

(Professor Sompong Dhompongsa Ph.D.)

*Chai-Hok Eab*  
..... Member

(Associate Professor Chai-Hok Eab Ph.D.)



กฤษฎะ เนียมมณี : ทฤษฎีบทลิมิตสำหรับผลบวกสุ่มของตัวแปรสุ่มอิสระที่มีค่าความแปรปรวนจำกัด (A LIMIT THEOREM FOR RANDOM SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH FINITE VARIANCES) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร. วิรุฬห์ บุญสมบัติ, 78 หน้า. ISBN 974-582-817-3

กำหนดให้  $(X_{nk})$  เป็นลำดับของลำดับตัวแปรสุ่มที่มีค่าความแปรปรวนจำกัด ให้  $(Z_n)$  เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง  $Z_n, X_{n1}, X_{n2}, \dots$  เป็นอิสระต่อกันสำหรับแต่ละ  $n$  ในการศึกษาที่เราให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะมีลำดับของลำดับ  $(A_{nk})$  ของจำนวนจริงที่ทำให้ฟังก์ชันการแจกแจงของ

$$X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nZ_n} - A_n Z_n$$

ลู่เข้าสู่ฟังก์ชันการแจกแจงที่กำหนดให้ ในกรณีเฉพาะเราจะได้เงื่อนไขสำหรับการลู่เข้าสู่การแจกแจงปกติมาตรฐาน

ภาควิชา ..... คณิตศาสตร์  
สาขาวิชา ..... คณิตศาสตร์  
ปีการศึกษา ..... 2535

ลายมือชื่อนิสิต .....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

# # C225099 : MAJOR MATHEMATICS  
KEY WORD: LIMIT THEOREMS / RANDOM SUMS

KRITSANA NEAMMANEE : A LIMIT THEOREM FOR RANDOM SUMS OF  
INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH FINITE VARIANCES. THESIS ADVISOR :  
ASSO. PROF. VIROOL BOONYASOMBAT, Ph.D. 78 pp. ISBN 974-582-817-3

Let  $(X_{nj})$  be a double sequence of random variables with finite variances. Let  $(Z_n)$  be a sequence of positive integral-valued random variables such that for each  $n$ ,  $Z_n, X_{n1}, X_{n2}, \dots$  are independent. In this study, we give a necessary and sufficient condition for the existence of a double sequence  $(A_{nj})$  of real numbers such that the distribution functions of

$$X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nZ_n} - A_n Z_n$$

to converge weakly to a limit distribution function. As a special case, we establish a necessary and sufficient condition for convergence to the standard normal distribution.

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์  
สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์  
ปีการศึกษา.....2535

ลายมือชื่อนิสิต.....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....



## ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly to Asso. Prof. Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for his some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

This work contains a number of improvement which are suggested by Asso. Prof. Subha Sutchritponga, Dr. Yati Krisnangkura, Prof. Sompong Dhompongsa and Asso. Prof. Chai-Hok Eab. It is pleasure to express my sincere thanks to them for their generous assistance.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my parents and my brothers for their encouragement throughout my graduate study.

Some Frequently Used  
Symbols and Abbreviations.

Page numbers refer to the first occurrence of these symbols or abbreviations.

a.e. $[\mu]$ ,	4	$\bar{\varphi}_{nj}$ ,	25
a.e.,	4	$\bar{\varphi}_{Z_n}$ ,	26
$\xrightarrow{p}$ ,	4	$(\tilde{\alpha})$ ,	27
$\xrightarrow{m}$ ,	4	$(\tilde{\beta})$ ,	27
a.e. $[p]$ ,	5	1,	36
$\xrightarrow{w}$ ,	9	$l_n$ ,	39
$\mathbb{M}$ ,	9	$\hat{\varphi}_{1_n(q)}$ ,	45
L,	9	$K_{Z_n}$ ,	51
$f(t,x)$ ,	11	$\tilde{F}_{nj}$ ,	58
$(\alpha)$ ,	13	$\tilde{\varphi}_{nj}$ ,	58
$(\beta)$ ,	13	$\tilde{\mu}_{nj}$ ,	58
$K_{j_n}$ ,	14	$\tilde{\sigma}_{nj}^2$ ,	58
$\varphi_{z_n}$ ,	19	$\hat{\varphi}_{z_n}$ ,	63
$F_{nj}$ ,	19	$\hat{\varphi}_{1_n(q)}$ ,	63
$\varphi_{nj}$ ,	19	$\tilde{K}_{Z_n}$ ,	65
$\mu_{nj}$ ,	25	$\Phi$ ,	68
$\sigma_{nj}^2$ ,	25		





## CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI .....	iv
ABSTRACT IN ENGLISH .....	v
ACKNOWLEDGEMENT .....	vi
SOME FREQUENCTLY USED SYMBOLS AND ABBREVIATIONS.....	vii
INTRODUCTION .....	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES .....	3
II RANDOM SUMS OF RANDOM VARIABLES AND THEIR ACCOMPANYING DISTRIBUTION FUNCTIONS.....	15
III A GENERALIZATION OF KOLMOGOROV THEOREM.....	36
IV THEOREMS ON CONVERGENCE TO THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION FUNCTION.....	60
REFERENCES.....	76
VITA.....	78